



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

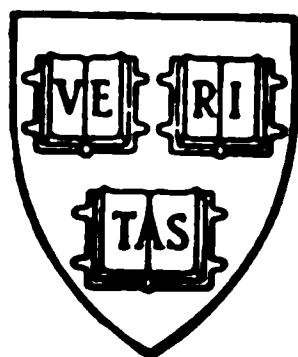
- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



Phya 209.07 3



HARVARD  
COLLEGE  
LIBRARY









0

**LEHRBUCH**

**DER**

**EXPERIMENTALPHYSIK**

**VON**

**ADOLPH WÜLLNER.**

---

**SECHSTE AUFLAGE.**

---

**ERSTER BAND.**

**ALLGEMEINE PHYSIK UND AKUSTIK.**



**LEIPZIG,**

**DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.**

**1907.**

# ALLGEMEINE PHYSIK

UND

## AKUSTIK.

SECHSTE AUFLAGE

BEARBEITET VON

**A. WÜLLNER** UND **A. HAGENBACH.**

MIT 333 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN ABBILDUNGEN UND FIGUREN.

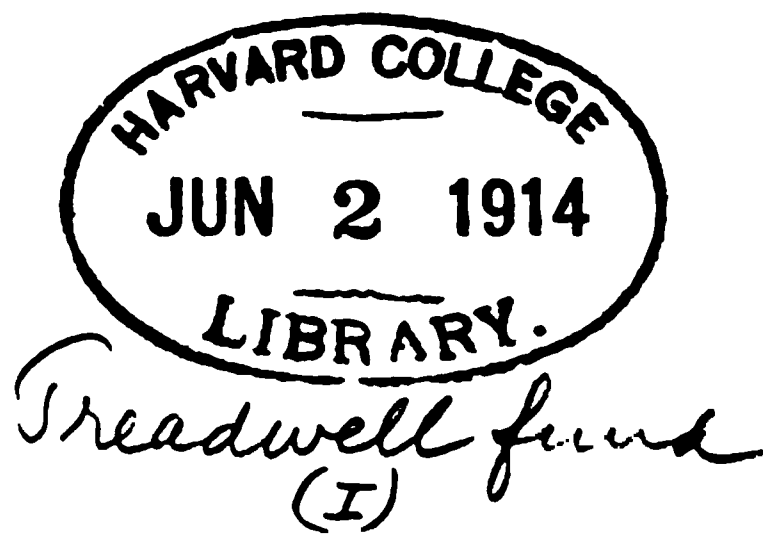


LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1907.



mp 209.07.3



Verfasser und Verleger behalten sich das Recht der Übersetzung  
in alle modernen Sprachen vor.

## Vorwort.

---

Bei dem sechsten Erscheinen der Experimentalphysik bedarf es eines Vorwortes wohl kaum mehr; die Haltung ist genau die frühere, sie sucht den neuern Arbeiten gerecht zu werden, welche bis zum Jahre 1906 berücksichtigt sind. Nur auf eine, wie wir glauben, nicht unwesentliche Verbesserung nach der historischen Seite möge hingewiesen werden: bei den Zitaten der einzelnen Arbeiten haben wir die Jahreszahl ihres Erscheinens hinzugefügt, so daß hierdurch eine Übersicht der historischen Entwicklung der Physik gegeben ist.

Die Form der Zitate ist die in den Annalen der Physik angewandte, z. B. Ann. de chim. et de phys. Bd. VII. 4. Série. S. 24. 406 ist jetzt: Ann. de chim. et de phys. 7. (4.) p. 24. 406. 1866.

Aachen, den 6. Juli 1907.

A. Wüllner.

**Inhaltsverzeichnis**  
zum ersten Bande der Experimentalphysik.

---

**Allgemeine Physik und Akustik.**

Einleitung.	Seite
Aufgabe der Physik . . . . .	1
Methode der Physik . . . . .	2
Ableitung der physikalischen Gesetze aus Messungen . . . . .	9
Die in der Physik gebräuchlichen Maße . . . . .	11
Einige Meßinstrumente . . . . .	13
Der Komparator . . . . .	13
Die Teilmaschine . . . . .	15
Der Nonius . . . . .	21
Das Sphärometer . . . . .	22
Das Kathetometer . . . . .	24
Der Theodolith . . . . .	29
Einige Sätze aus der Differential- und Integralrechnung . . . . .	31
Differentiation . . . . .	31
Differentiale der wichtigsten Funktionen . . . . .	33
Differentiation zusammengesetzter Funktionen . . . . .	36
Differentiation von Funktionen mit mehreren Veränderlichen . . . . .	37
Zweiter Differentialquotient . . . . .	39
Integration . . . . .	41

---

**Erster Teil.**

Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.

**Erster Abschnitt.**

Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

**Erstes Kapitel.**

Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

§ 1. Bewegung: Definition der gleichförmigen und ungleichförmigen Bewegung; Geschwindigkeit, Beschleunigung . . . . .	47
§ 2. Kräfte; Hilfsmaß derselben . . . . .	50
§ 3. Dasein und Richtung der Schwere . . . . .	52



	Seite
§ 1 Atwoods Fallmaschine. . . . .	52
§ 2 Bewegung unter Wirkung einer konstanten Kraft; gleichmäßig beschleunigte Bewegung. . . . .	55
§ 3 Fundamentalgesetz der Kraftwirkung. . . . .	59
§ 4 Das Kräfteparallelogramm. . . . .	61
Bewegung auf der schiefen Ebene. . . . .	63
§ 5 Bedingungen des Gleichgewichtes eines Punktes, auf den beliebig viele beliebig gerichtete Kräfte wirken. . . . .	64
§ 6 Allgemeine Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung; Wurfbewegung. . . . .	66
§ 7 Maß der Kraft und Masse. . . . .	71
Absolutes Maßsystem. . . . .	73
Dimensionen der abgeleiteten Maße. . . . .	76
§ 8 Bewegungsgröße: Antrieb der Kraft; lebendige Kraft und Arbeit; Prinzip von der Erhaltung der Arbeit. . . . .	79
§ 9 Bewegung infolge inkonstanter Kräfte und Maß derselben. . . . .	82

## Zweites Kapitel.

### Von der drehenden Bewegung.

§ 10 Entstehung der drehenden Bewegung. . . . .	84
§ 11 Die statischen Momente. . . . .	85
Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. . . . .	89
§ 12 Zusammensetzung verschieden gerichteter Drehungen. . . . .	90
§ 13 Mittelpunkt paralleler Kräfte; Mittelkraft. . . . .	94
§ 14 Gleichgewicht eines Systems, an welchem beliebige Kräfte angreifen. . . . .	98
§ 15 Schwerpunkt. . . . .	101
§ 16 Von den Trägheitsmomenten. . . . .	104
Trägheitsmoment eines Zylinders in bezug auf die Achse desselben. . . . .	106
Trägheitsmoment einer Kugel in bezug auf einen Durchmesser. . . . .	108
§ 17 Allgemeiner Satz über die Trägheitsmomente. . . . .	109
§ 18 Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft. . . . .	110
§ 19 Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines Körpers, Gleichungen von Lagrange, erste Form. . . . .	114
Beispiel zur Anwendung der Gleichungen von Lagrange. . . . .	117
Zweite Form der Gleichungen von Lagrange. . . . .	120
§ 20 Die Wage, Theorie und Beschreibung derselben. . . . .	123
§ 21 Prüfung der Wage; Methode der Wägungen. . . . .	129
§ 22 Spezifisches Gewicht und Dichtigkeit. . . . .	132
§ 23 Das Pendel. . . . .	133
§ 24 Ableitung der Schwingungsdauer des Pendels. . . . .	135
§ 25 Mathematisches und physisches Pendel. . . . .	139
§ 26 Experimentelle Prüfung der Pendelgesetze. . . . .	140
Korrektion wegen der Amplitude. . . . .	143
§ 27 Bestimmung von $g$ ; Methode von Borda. . . . .	143
§ 28 Bestimmung von $g$ mittels des Reversionspendels. . . . .	152
§ 29 Anwendung des Pendels bei Uhren. . . . .	153
§ 30 Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze. . . . .	156
Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente. . . . .	158
§ 31 Erhaltung der Rotationsebene. . . . .	159
§ 32 Foucaults Pendelversuche. . . . .	162

Drittes Kapitel.  
Von der allgemeinen Gravitation

	Seite
§ 37. Allgemeine Anziehung; Keplers Gesetze . . . . .	165
§ 38. Die Anziehung ist gegen die Sonne gerichtet . . . . .	166
§ 39. Entwicklung des Anziehungsgesetzes . . . . .	167
Allgemeine Anziehung; die Bezeichnung Anziehung bedeutet nur, daß zwei im Raume befindliche Massen einen Antrieb gegeneinander zeigen	169
§ 40. Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung . . . . .	171
Anziehung zweier Körper . . . . .	172
Anziehung einer Kugel auf äußere Massen . . . . .	173
Abnahme der Schwere mit der Höhe, speziell über einer Hochebene	177
Jollys Nachweis der Abnahme der Schwere mit der Höhe über einer Hochebene . . . . .	178
§ 41. Verschiedenheit von $g$ in verschiedenen Breiten . . . . .	180
§ 42. Bestimmung der Dichtigkeit der Erde mit der Drehwage; Versuche von Cavendish . . . . .	182
Versuche von Reich, Baily, Cornu und Baille, Boys und C. Braun	186
Bestimmung der Dichtigkeit der Erde mit der gewöhnlichen Wage von Jolly, Poynting, Richarz und Krigar Menzel . . . . .	186
Versuch von Wilsing mit dem Pendel. . . . .	188
§ 43. Methode der Lotablenkung durch Berge von Maskelyne . . . . .	188
§ 44. Methode von Airy . . . . .	190
Anziehung einer homogenen Kugelschale auf in ihr befindliche Massen	191
Attraktionskonstante und deren Dimension . . . . .	193
§ 45. Ebbe und Flut . . . . .	193
Literatur des ersten Abschnittes . . . . .	196

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper  
in ihren einzelnen Teilen.

Erstes Kapitel.  
Von den festen Körpern.

§ 46. Beschaffenheit der Materie . . . . .	199
Glasfadenwage von Salvioni . . . . .	200
Helmholtz Wirbelringe . . . . .	211
Tabelle der Atomgewichte der einfachen Körper . . . . .	212
§ 47. Die Aggregatzustände . . . . .	213
§ 48. Elastizität . . . . .	216
§ 49. Elastizität beim Zuge . . . . .	218
Definition des Elastizitätskoeffizienten . . . . .	221
Versuche von Thompson, G. Meyer und Bach . . . . .	224
§ 50. Volumänderung bei dem Zuge . . . . .	229
Querkontraktionskoeffizient . . . . .	230
Koeffizient der Volumelastizität und der Starrheit . . . . .	233
§ 51. Kubischer Kompressionskoeffizient . . . . .	241
Direkte Messung desselben von Amagat . . . . .	242
Volumänderung von Hohlräumen; Gleichungen von Lamé . . . . .	246
Messungen von Cantone und Amagat . . . . .	249

	Seite
§ 52 Torsionselastizität; Methode von Wertheim . . . . .	251
Methode von Coulomb . . . . .	255
§ 53 Beziehung zwischen dem Torsions- und Elastizitätskoeffizienten. . .	259
Torsionskoeffizient und Starrheit . . . . .	260
§ 54 Biegeelastizität . . . . .	262
Methoden zur Messung des Biegunspfeiles; Spiegelablesung von Gauß . . . . .	267
§ 55 Abhängigkeit des Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur . . .	271
§ 56 Elastische Nachwirkung . . . . .	277
§ 57 Elastizitätsgrenze . . . . .	289
Plastizität; Dehnbarkeit . . . . .	291
§ 58 Festigkeit; Zugfestigkeit . . . . .	293
Biegezugfestigkeit . . . . .	295
Torsionsfestigkeit . . . . .	296
Rückwirkende Festigkeit . . . . .	298
Härte . . . . .	300
Härte; Theorie von Hertz; Versuche von Auerbach . . . . .	301
§ 59 Stoß der Körper . . . . .	303
§ 60 Adhäsion . . . . .	309
§ 61 Von der Reibung . . . . .	311
§ 62 Innere Reibung bei festen Körpern . . . . .	312
Theorie von Boltzmann . . . . .	318

## Zweites Kapitel.

### Von den tropfbar flüssigen Körpern.

§ 63 Konstitution der Flüssigkeiten . . . . .	325
§ 64 Kompressibilität der Flüssigkeiten . . . . .	329
Ältere Versuche . . . . .	331
Versuche von Regnault und Grassi . . . . .	335
Versuche von Pagliani, Vincentini, Tait, Amagat, Röntgen, Gillet . . . . .	339
Abhängigkeit der Kompression vom Drucke . . . . .	342
§ 65 Hydrostatischer Druck . . . . .	347
§ 66 Kommunizierende Röhren . . . . .	353
Hydraulische Presse; Manometer von Gally-Cazalat . . . . .	355
§ 67 Gleichgewicht einer Flüssigkeit, auf welche beliebige Kräfte wirken	357
§ 68 Archimedisches Prinzip . . . . .	360
§ 69 Schwimmende Körper . . . . .	363
§ 70 Bestimmung des spezifischen Gewichtes fester Körper . . . . .	364
§ 71 Bestimmung des spezifischen Gewichtes flüssiger Körper . . . . .	368
Volumeter, Aräometer, Alkoholometer . . . . . 371 bis	374
§ 72 Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern . . . . .	376
§ 73 Normaldruck und Oberflächenspannung in der Oberfläche der Flüssig- keiten . . . . .	377
Oberflächendruck . . . . .	381
§ 74 Experimenteller Nachweis der Oberflächenspannung; Versuche von Piatou, Dupré, van der Mensbrugghe und Sordhaus . . . . .	383
§ 75 Einfluß der Wände . . . . .	384
Randwinkel . . . . .	391
§ 76 Niveauänderungen in kapillaren Röhren . . . . .	393



	Seite
§ 77. Steighöhen in verschiedenen Räumen, Röhren, zwischen Platten . .	397
Steighöhen an vertikaler ebener Wand . . . . .	402
§ 78. Bildung von Tropfen auf horizontaler Ebene . . . . .	403
Bildung und Form von Luftblasen in Flüssigkeiten unter Ebenen . .	408
Methode von A. König . . . . .	409
Methode von Cantor . . . . .	411
§ 79. Kapillaritätskonstanten . . . . .	414
§ 80. Zahlenwerte; Einfluß der Temperatur . . . . .	431
§ 81. Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten.	
Plateaus Versuche . . . . .	440
Berechnung der Oberflächenspannung nach F. E. Neumann . . . .	444
§ 82. Ausbreitung von Flüssigkeiten auf festen Körpern und Flüssigkeiten	449
§ 83. Bewegungen infolge von Kapillarwirkung . . . . .	454
§ 84. Größe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte . . . . .	457
Messung von Plateau, Reinold und Rücker, Drude . . . . .	457
Methode von Quincke . . . . .	459
Methode von Sohnke, Lord Rayleigh, Röntgen . . . . .	461
§ 85. Lösung und Diffusion, Theorie von Fick . . . . .	466
Versuche von Beilstein . . . . .	471
Versuche von F. Weber, Schuhmeister, von Wroblewski . . .	474
Versuche von Scheffer, Wiedeburg, Voigtländer . . . . .	475
§ 86. Endosmose . . . . .	478
Osmotischer Druck, Versuche von Traube und Pfeffer . . . . .	482
§ 87. Ausfluß der Flüssigkeiten; Toricellis Theorem . . . . .	489
Hydraulischer Druck . . . . .	494
§ 88. Ausflußmenge . . . . .	495
Contractio venae . . . . .	496
§ 89. Reibung der Flüssigkeiten . . . . .	499
Ausfluß aus kapillaren Röhren; Poiseuillesches Gesetz . . . . .	506
Methode von Coulomb . . . . .	508
Methode von Helmholtz . . . . .	511
Methode von Brodmann . . . . .	512
§ 90. Konstitution des ausfließenden Strahles . . . . .	515

### Drittes Kapitel.

#### Von den gasförmigen Körpern.

§ 91. Allgemeine Beschaffenheit der Gase . . . . .	522
§ 92. Eigenschaften der Gase, welche sie mit den Flüssigkeiten gemeinsam	
haben . . . . .	523
Vorhandensein des Luftdruckes . . . . .	524
Archimedisches Prinzip bei Gasen . . . . .	525
§ 93. Das Barometer . . . . .	528
§ 94. Verschiedene Formen des Barometer . . . . .	529
§ 95. Korrektion wegen der Kapillarität . . . . .	532
§ 96. Heberbarometer . . . . .	533
§ 97. Aneroidbarometer . . . . .	538
§ 98. Schwankung und Größe des Luftdruckes . . . . .	539
§ 99. Boyle-Mariottesches Gesetz; ältere Versuche . . . . .	542
Versuche von Despretz, Dulong und Arago, Pouillet . . . .	546
Versuche von Regnault . . . . .	549

	Seite
§ 100. Abweichung der Gase vom Mariotteschen Gesetze bei sehr kleinem und bei hohem Drucke . . . . .	556
Versuche bei kleinem Druck von Mendelejeff und van der Ven . . . . .	558
" " " " " Fuchs und Bohr . . . . .	559
" " " " " Thiesen . . . . .	560
" " " " " Lord Rayleigh . . . . .	561
" " hohem " " Natterer . . . . .	563
" " " " " Cailletet und Amagat . . . . .	564
§ 101 Kinetische Theorie der Gase . . . . .	568
§ 102 Mittlere Wegelänge der Moleküle . . . . .	570
§ 103. Ableitung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes . . . . .	581
Zustandsgleichung von van der Waals . . . . .	583
§ 104 Bestimmung der Geschwindigkeit $u$ der Moleküle . . . . .	588
§ 105 Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe; Barometrische Höhenmessung . . . . .	589
§ 106 Anwendung des Mariotteschen Gesetzes auf Manometer . . . . .	594
§ 107 Volumenometer . . . . .	599
§ 108. Die Luftpumpe . . . . .	604
Ventilpumpe . . . . .	606
Manometer. Grad der Verdünnung . . . . .	608
Hahnluftpumpe . . . . .	611
Ölluftpumpe . . . . .	613
§ 109. Fall der Körper im luftleeren Raum . . . . .	614
§ 110 Quecksilberluftpumpen; von Geißler . . . . .	615
" " " Töpler . . . . .	617
Luftpumpe von Sprengel . . . . .	620
Quecksilberluftpumpe von Gaede . . . . .	622
Erreichbare Verdünnung . . . . .	623
§ 111 Die Kompressionspumpe . . . . .	624
Apparat von Natterer . . . . .	625
§ 112 Flüssigmachen der Gase . . . . .	627
§ 113 Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Körpern . . . . .	628
§ 114 Mosersche Bilder . . . . .	632
§ 115 Molekularwirkungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten . . . . .	634
Absorptionskoeffizient . . . . .	635
§ 116 Ausströmen der Gase . . . . .	641
Hydraulischer Druck . . . . .	643
§ 117 Reibung der Gase; Ableitung der Reibung aus der kinetischen Gastheorie . . . . .	649
§ 118 Bestimmung der Reibungskoeffizienten der Gase; Ausflußmethode . . . . .	655
Methode von Maxwell . . . . .	658
Bekanntes Drehungsmoment . . . . .	659
Änderung der Reibungskoeffizienten bei hohem Druck . . . . .	663
Abhängigkeit von der Temperatur . . . . .	664
Korrektion von Sutherland . . . . .	667
§ 119 Diffusion der Gase . . . . .	669
§ 120 Ableitung der Diffusion aus der kinetischen Gastheorie nach Stefan . . . . .	678
Diffusionskoeffizient . . . . .	685
Abhängigkeit von der Temperatur . . . . .	687
§ 121 Absolute Werte der mittleren Wegelängen . . . . .	688
Größe und Zahl der Moleküle . . . . .	690
§ 122 Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen und Flüssigkeiten . . . . .	694
§ 123 Stoß und Widerstand der Luft . . . . .	700

	Seite
§ 124. Kinetische Theorie der Flüssigkeiten; endosmotischer Druck; Diffusion . . . . .	702
Theorie der Diffusion der Flüssigkeiten nach Arrhenius, Nernst, Riecke . . . . .	708

**Dritter Abschnitt.**  
**Von der Wellenbewegung.**

**Erstes Kapitel.**

**Theoretische Prinzipien der Wellenbewegung.**

§ 125. Schwingende Bewegung eines Punktes. . . . .	715
§ 126. Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes. . . . .	716
Schwingung ohne Dämpfung . . . . .	717
Schwingung mit Dämpfung; aperiodische Dämpfung . . . . .	720
§ 127. Schwingung der Punktreihen; Entstehung der Wellen . . . . .	722
§ 128. Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe .	726
§ 129. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung . . . . .	734
§ 130. Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen; Interferenz . . . .	734
§ 131. Interferenz von Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung fort- pflanzen; Bildung stehender Wellen. . . . .	739
§ 132. Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen, deren Schwingungen nicht gleich gerichtet sind; elliptische Schwingungen. . . . .	742
§ 133. Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge. .	750
Parallele Schwingungen . . . . .	751
Gegeneinander geneigte Schwingungen . . . . .	757
§ 134. Schwingungen eines Systems von Punkten . . . . .	758
§ 135. Huyghensches Prinzip . . . . .	761
§ 136. Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Punktsystemen; Re- flexion der Wellen . . . . .	766
§ 137. Brechung der Wellen . . . . .	772

**Zweites Kapitel.**

**Von der Wellenbewegung fester Körper.**

§ 138. Schwingende Bewegung einzelner Teile fester Körper infolge der Elastizität . . . . .	776
§ 139. Longitudinale Schwingungen der Stäbe . . . . .	778
§ 140. Longitudinale Schwingungen begrenzter Stäbe . . . . .	780
§ 141. Transversale Schwingungen der Saiten. . . . .	786
§ 142. Stehende Schwingungen von fadenförmigen, durch Spannung elasti- schen Körpern . . . . .	791
§ 143. Einfluß der Steifigkeit der Saiten . . . . .	797
§ 144. Transversalschwingungen von Stäben . . . . .	799
§ 145. Transversale Schwingungen von Platten, Chladnis Klangfiguren. .	806
Staubfiguren. . . . .	812
§ 146. Drehende Schwingung von Stäben. . . . .	814
§ 147. Zusammengesetzte Schwingungen . . . . .	818
Kombinierte, transversale und longitudinale . . . . .	820
Kombinierte transversale . . . . .	822
Lissajoussche Figuren . . . . .	826

	Seite
<b>§ 140. Zusammengesetzte Schwingungen gespannter Saiten . . . . .</b>	<b>826</b>
<b>Vibrationsmikroskop . . . . .</b>	<b>838</b>
<b>Schwingung gestrichener Saiten . . . . .</b>	<b>834</b>

## Drittes Kapitel.

## Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

§ 149	Longitudinale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen . . . . .	837
	Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Flüssigkeiten . . . . .	839
	" " Gasen . . . . .	841
§ 150	Stehende Wellen in Flüssigkeitszylindern . . . . .	843
§ 151	Transversale Wellen in Flüssigkeiten . . . . .	845
	Versuche der Gebrüder Weber . . . . .	846
§ 152.	Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen . . . . .	848
§ 153	Die Ursachen der Flüssigkeitswellen. . . . .	851
§ 154.	Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen. . . . .	854
§ 155	Durchkreuzung und Reflexion der Wellen . . . . .	858

## Vierter Abschnitt.

## Vom Schalle.

## Erstes Kapitel.

## Über die Erregung des Schalles.

136	Von der Ursache des Schalles . . . . .	862
137	Qualität des Schalles. . . . .	864
138	Bestimmung und Vergleichung der Schwingungszahlen . . . . .	866
139	Von dem Verhältniß der Töne und den Intervallen . . . . .	871
140	Von den mehrfachen Akkorden . . . . .	873
141	Die Tonleiter . . . . .	875
142	Die musikalische Temperatur . . . . .	883
143	Absolute Schwingungszahl der Töne . . . . .	887
144	Analyse des Klanges . . . . .	893
	Klangfarbe und Phase . . . . .	902
145	Klänge durch Schwingungen fester Körper . . . . .	905
	Longitudinaltöne und Klänge schwingender Saiten . . . . .	906
	Klänge der Saiteninstrumente . . . . .	909
	Klänge von Stäben; Stimmgabeln . . . . .	910
	Schwingungen von Platten; drehende Schwingungen . . . . .	911
146	Töne durch Schwingungen luftförmiger Körper . . . . .	913
	Töne gedeckter Pfeifen; Beobachtungen von Kundt und Raps . . . . .	914
	Abweichung der Pfeifentöne von der Theorie . . . . .	920
	Berichtigung an gedeckten Orgelpfeifen . . . . .	922
	Töne offener Pfeifen . . . . .	925
	Teilweise gedeckter Pfeifen . . . . .	927
	Kubische Pfeifen . . . . .	928
147	Töne durch Schwingungen von Flüssigkeitsäulen . . . . .	931
	Worthelms Versuche . . . . .	932
148	Von den Zungenpfeifen; harte Zungen . . . . .	934
	Versuche von Weber . . . . .	936
	Theorie von Weber . . . . .	938

	Seite
§ 169. Weiche Zungen; chemische Harmonika; empfindliche Flammen . .	941
§ 170. Die Blasinstrumente . . . . .	946
§ 171. Die menschliche Stimme . . . . .	949
§ 172. Die menschliche Sprache; Vokaltheorie von Helmholtz . . . . .	953
Vokaltheorie von Grassmann . . . . .	960
Die Bildung der Konsonanten . . . . .	962

## Zweites Kapitel.

### Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

§ 173. Ausbreitung des Schalles in der Luft . . . . .	963
Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft . . . . .	964
§ 174. Indirekte Messung der Schallgeschwindigkeit. . . . .	976
Schallgeschwindigkeit in Röhren . . . . .	976
Methode von Kundt. . . . .	978
Theorie von Helmholtz und Kirchhoff . . . . .	980
Prüfung der Theorie durch Schneebeli, Seebeck, Kayser u. a. . . . .	980
§ 175. Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern . . . . .	987
Versuche von Stefan und Warburg. . . . .	989
Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Stäben und ausgedehnten festen Körpern . . . . .	990
§ 176. Geschwindigkeit des Schalles in flüssigen Körpern . . . . .	991
§ 177. Reflexion des Schalles, Echo, Sprachrohr. . . . .	995
§ 178. Übergang des Schalles in andere Mittel, Brechung desselben . . . .	998
Resonanz . . . . .	1001
Phonograph . . . . .	1004
Untersuchung der Vokale durch den Phonograph . . . . .	1006
§ 179. Das menschliche Ohr . . . . .	1008
Mechanismus des Hörens . . . . .	1010
Empfindlichkeit des Ohres . . . . .	1012
§ 180. Einfluß der Bewegung des tönenden Körpers oder des Ohres auf die Höhe des wahrgenommenen Tones; Dopplersches Prinzip . . . .	1014
§ 181. Interferenz des Schalles . . . . .	1017
§ 182. Interferenz von Wellen ungleicher Länge; Stöße . . . . .	1022
Bestimmung der Schwingungszahlen von Scheibler . . . . .	1025
§ 183. Kombinationstöne . . . . .	1028
§ 184. Ursachen der Konsonanz und Dissonanz . . . . .	1038

# Einleitung.

---

## Aufgabe der Physik.

Die uns umgebende Körperwelt, welche wir in dem Begriffe der Natur zusammenfassen, kann nach einer doppelten Richtung der Gegenstand unseres Studiums werden. Wir können einerseits die Körper, welche wir vorfinden, im einzelnen kennen zu lernen, zu beschreiben und zu klassifizieren suchen. Diese Aufgabe haben sich die beschreibenden Naturwissenschaften gestellt. An diesen Naturkörpern nehmen wir dann aber eine ganze Reihe von Veränderungen wahr, die an denselben teils ohne, teils mit unserer Einwirkung erfolgen, welche wir mit dem Namen Naturerscheinungen bezeichnen. Das Studium dieser Naturerscheinungen, der Bedingungen, unter denen sie auftreten, der Gesetze, nach denen sie verlaufen, und der Folgen, welche sie für die Naturkörper haben, an denen sie stattfinden, ist die Aufgabe des zweiten Zweiges der Naturwissenschaften, der Physik und der Chemie.

Die als Naturerscheinungen bezeichneten Veränderungen der Körper können sich entweder auf deren Form, diesen Begriff in seiner allgemeinsten Bedeutung genommen, oder auf deren Inhalt beziehen. Was der letztere eigentlich ist, wissen wir nicht, da wir den Inhalt der Körper nicht direkt wahrzunehmen imstande sind. Wir nehmen die Körper nur wahr durch den Eindruck, den sie auf unsere Sinne machen, indem wir sie sehen oder auch bei der Berührung fühlen, das heißt, indem wir durch unsern Gesichtssinn oder Gefühlssinn erkennen, daß ein gewisser Teil des uns umgebenden Raumes andere Eigenschaften hat, als der übrige Raum. In jenem, was sich im Innern dieses von der Umgebung sich unterscheidenden Raumes befindet und bewirkt, daß er sich von der Umgebung unterscheidet, bezeichnet man ganz allgemein als Materie. Die Materie ist also die Trägerin der Eigenschaften, welche die Körper besitzen, sie ist die Ursache der Eindrücke, welche dieselben auf unsere Sinne machen.

Die Naturerscheinungen können wir also genauer als Vorgänge der Materie, welche an und in der Materie stattfinden, welche die Eigenschaften der Materie ändern. Das Studium dieser Vorgänge, welches wir als die Aufgabe der Physik und Chemie bezeichnet haben, setzt demnach voraus, daß wir zunächst die Eigenschaften der Materie selbst kennen lernen, denn nur wenn uns diese bekannt sind, können wir die Änderungen derselben verstehen.

Physik und Chemie haben also das Gemeinsame, daß sie die Eigenschaften der Materie und die Vorgänge untersuchen, welche dieselbe verändern; die beiden Schwesterwissenschaften unterscheiden sich durch die Eigenschaften der Materie, welche jede derselben vorwiegend ins Auge faßt.

Gewisse Eigenschaften sind allen Körpern gemeinsam, sie kommen denselben nur in größerem oder geringerem Maße zu, wie z. B. die oben schon erwähnte Sichtbarkeit oder Fühlbarkeit. Andere Eigenschaften kommen dagegen gewissen Körpern zu, anderen nicht, es sind diejenigen, welche einen Körper charakterisieren, d. h. ihn von andern unterscheiden. Da wir die Materie nur an ihren Eigenschaften erkennen, müssen wir aus dem letztern Umstande schließen, daß es verschiedene Materien gibt. Unter den Naturerscheinungen können wir nun zunächst solche unterscheiden, welche diese einer bestimmten Materie eigentümlichen Eigenschaften dauernd ändern, die Materie also in eine andere verwandeln, indem sie ihr andere Eigenschaften erteilen. Es sind das vorzugsweise solche Erscheinungen, bei denen sich zwei oder mehrere Materien zu einer neuen vereinigen, oder aus einer Materie andere abgeschieden werden. Das Studium dieser Erscheinungen und ihrer Folgen für die einzelnen Materien ist die Aufgabe der Chemie; dieselbe hat demnach zunächst auch jene Eigenschaften aufzusuchen, durch welche sich die einzelnen Materien voneinander unterscheiden.

Es hat sich dabei herausgestellt, daß es eine gewisse Anzahl von Materien gibt, deren Eigenschaften sich durch Abscheiden von Materie nicht ändern lassen; man nennt diese deshalb einfache Materien oder Elemente. Man hat weiter erkannt, daß aus diesen einfachen Materien sich sämtliche in der Natur vorhandenen Materien herstellen, indem zwei oder mehrere Materien zu einer neuen zusammentreten, daß somit die eine bestimmte Materie als solche charakterisierenden Eigenschaften durch die innere Zusammensetzung derselben bedingt werden. Wir können demnach als die Aufgabe der Chemie auch bezeichnen das Studium jener Eigenschaften der Materie, welche von deren innerer Zusammensetzung abhängen und jener Erscheinungen, welche die innere Zusammensetzung derselben ändern.

Die Physik läßt alle diese Erscheinungen außer Acht; sie hat daher auch nicht die Eigenschaften kennen zu lehren, welche die einzelnen Materien voneinander unterscheiden, sondern jene, welche allen den verschiedenen Materien gemeinsam sind, ihnen in größerem oder geringerem Maße zukommen, je nach dem Zustande, in welchem wir die Materien vorfinden, dem festen, flüssigen oder luftförmigen und unabhängig davon, welche von der Chemie erkannten Materien den Körper gerade bilden. Die Erscheinungen, welche die Physik dann zu untersuchen hat, sind solche, welche die innere Zusammensetzung der Körper ungeändert lassen, welche also an den Körpern im allgemeinen nicht dauernde, sondern vorübergehende Veränderungen bewirken. Die Erscheinungen dieser Art können wir, wie sich später zeigen wird, in fünf große Gruppen ordnen, die Bewegungserscheinungen, die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektrizität; wir kennen in der Natur bis jetzt keine Erscheinung welche sich nicht in eine dieser Gruppen einordnen ließe. Die Betrachtung dieser fünf Erscheinungsgruppen ist daher die Aufgabe der Physik.

### Methode der Physik.

Aus der im vorigen dargelegten Aufgabe der Naturwissenschaften Untersuchung der Naturerscheinungen nach ihrem Verlaufe, ihren Folgen ihren Ursachen, ergibt sich, daß die Grundlage und der Ausgangspunkt



dieser Wissenschaft die Erfahrung sein muß von dem, was in der Natur vorgeht. Zu dieser Erfahrung gelangen wir aber lediglich durch die Beobachtung und zwar durch eine systematische, vorsichtige, genaue und ins einzelne gehende Beobachtung der Naturerscheinungen selbst.

Dieser Grundsatz der naturwissenschaftlichen Methode erscheint uns jetzt so selbstverständlich, so unmittelbar aus der Aufgabe dieser Wissenschaft, etwas außer uns Existierendes zu erforschen, sich zu ergeben, daß seine Richtigkeit keines besondern Beweises mehr bedarf. Es war indes nicht immer so: Jahrhunderte lang glaubte man auf rein spekulativem Wege die Naturgesetze, den Mechanismus der ganzen Natur auffinden zu können. Die Folge dieses Irrtums war der absolute Stillstand in der Erkenntnis der Natur: selbst die einfachsten Erscheinungen, deren Gesetze jetzt jeder kennt, wurden mißverstanden, weil man es verschmähte die Natur selbst zu befragen. Bis an das Ende des Mittelalters, bis zu den Zeiten Galileis, glaubte man, daß Körper von verschiedenem Gewichte mit verschiedener Geschwindigkeit zu Boden fallen, daß der schwerere in demselben Verhältnis schneller falle als der leichtere, in welchem er schwerer ist als dieser. Man glaubte es aufgrund eines von Aristoteles in seiner Schrift über den Himmel aufgestellten Satzes, daß derjenige Körper der schwerere sei, welcher bei gleichem Rauminhalt rascher abwärts gehe. Dieser letztere Satz ist nicht unrichtig; denn in der Tat wird die Fallgeschwindigkeit etwas durch den Luftwiderstand modifiziert, und die Geschwindigkeit des leichtern Körpers wird bei gleichem Rauminhalt etwas stärker vermindert als die des schwerern. Völlig unrichtig war aber die obige aus diesem Satze gefolgerte Ansicht über den Fall der Körper, und die einfachste Beobachtung zweier verschiedener fallender Körper hätte ihre Unrichtigkeit offenbart; man hätte gesehen, daß sich bei Körpern selbst des verhältnismäßig geringsten Gewichtes nur äußerst geringe Unterschiede in der Fallgeschwindigkeit zeigen, man hätte gefunden, daß im luftleeren Raume diese Unterschiede schwinden.

Damit die Beobachtung die Grundlage der Naturwissenschaften sein darf, muß sie, wie schon erwähnt, eine genaue und vollständige, die Erscheinungen in ihre Einzelheiten verfolgende sein. Genau, das heißt, wir müssen die Erscheinung so wahrzunehmen suchen, wie sie in der Tat vorliegt, und uns vor jeder Täuschung hüten. Die erste dazu erforderliche Bedingung ist, daß wir an die Erscheinung ohne irgend eine vorgefaßte Meinung herantreten, da sonst die Phantasie des Beobachters leicht eine verzerrende Rolle spielt; schon mancher Beobachter hat das zu sehen geglaubt, was er aufgrund einer Auffassung, welche er aus vorherigen Spekulationen sich gebildet hatte, zu sehen gewünscht hat. Jede Anstellung der Beobachtung ist eine Frage, welche wir an die Natur richten, das Resultat der Beobachtung ist die Antwort; welche Antwort wir erhalten, ist uns gleichgültig sein, möge sie unsern Ideen entsprechen oder nicht, wir können wir mit der nötigen Unbefangenheit beobachten.

Die Vollständigkeit der Beobachtung verlangt, daß sie uns Aufschluß über den ganzen Verlauf der Erscheinung und über alle Umstände, unter denselben bedingen: jede Beobachtung einer Erscheinung setzt sich zusammen aus einer Summe von Einzelbeobachtungen, deren jede ein Moment des im zeitlichen Verlauf nacheinander oder eine Seite



des nebeneinander Vorgehenden liefert. Diese Einzelbeobachtungen müssen wir systematisch so durchführen, daß wir aus ihnen den ganzen Verlauf der Erscheinungen erhalten. Bei einer einmaligen Beobachtung des gestirnten Himmels scheinen uns alle Gestirne in einer und derselben gegenseitigen Lage zu bleiben; eine zu verschiedenen Zeiten wiederholte Beobachtung zeigt uns, daß die Planeten ihre Lage gegenüber andern Sternen im Laufe der Zeit in einer scheinbar sehr unregelmäßigen Weise ändern, daß sie bald nach der einen bald nach der andern Seite sich verschieben. Wenn wir bei regelmäßig und systematisch wiederholten Beobachtungen die Lage der einzelnen Planeten scharf bestimmen, so gelangen wir zu der Erkenntnis, daß sie und mit ihnen unsere Erde sich in nahezu kreisförmigen Bahnen um die Sonne bewegen.

Die Beobachtung der Naturerscheinungen allein genügt indes nur in seltenen Fällen zu einer so genauen Kenntnis, daß wir den Verlauf derselben vollständig übersehen können, denn der Verlauf derselben ist meist nicht so einfach, daß wir durch Beobachtung allein alle Einzelheiten erkennen können. Fällt ein Stein aus einiger Höhe zu Boden, so erkennen wir bei genauer Beobachtung wohl, daß der Stein immer rascher fällt, wir sind aber nicht imstande die durchfallenen Strecken mit den Zeiten zu vergleichen, in denen sie durchfallen sind und so zu bestimmen, wie die Geschwindigkeit des fallenden Steines wächst.

Neben der Beobachtung müssen wir deshalb den Versuch zu Hilfe nehmen, das Experiment, durch welches wir die Naturerscheinungen unter solchen Umständen hervorrufen, daß wir sie in ihren Einzelheiten verfolgen, daß wir sie also beobachten können. Um die Gesetze des Falles erkennen zu können, müssen wir demnach Körper unter solchen Verhältnissen fallen lassen, daß die Bewegung eine langsamere wird, und daß wir imstande sind die durchfallenen Räume mit der Zeitdauer des Falles zu vergleichen. Die Kunst des Experimentierens liefert uns die Methoden und Apparate, welche erforderlich sind, um den Naturerscheinungen diesen Verlauf zu geben und um die Größen, um welche es sich bei denselben handelt, mit aller Schärfe messen zu können.

Der Versuch lehrt uns aber nicht nur den genauern Verlauf der Erscheinungen kennen, die wir in der Natur auch ohne unser Zutun beobachten, er führt uns selbst zur Kenntnis ganz neuer Naturerscheinungen, die ohne unsere Mitwirkung gar nicht eintreten würden; er lehrt uns die Körper in solchen Verhältnissen zusammenzubringen, daß die in ihnen schlummernden Kräfte geweckt werden. Der weitaus größte Teil unserer Kenntnis der Naturerscheinungen ist nur durch Versuche erhalten worden, welche in systematischer Weise diese Erscheinungen, meist von unscheinbaren sehr oft nur zufällig beobachteten Wirkungen der Naturkräfte ausgehend, hervorriefen. Man hat zufällig schon im Altertum die Beobachtung gemacht, daß geriebener Bernstein die Eigenschaft erhält, leichte ihm nahe gebrachte Körper, wie Strohhalme anzuziehen; indem man auch andere Körper diesem Versuche unterwarf, fand man, daß diese als Elektrizität bezeichnete Kraft viel mächtigere Wirkungen hervorbringen könne, man erkannte, daß eine der gewaltigsten Naturerscheinungen, der Blitz, eine starke elektrische Entladung sei. Zufällig fand man, daß zwei Metalle, wenn sie in passender Weise miteinander zur Berührung gebracht werden,

getrennt werden, dieselbe Fähigkeit besitzen wie der geriebene Bernstein, die systematische Verfolgung dieses Versuches lieferte uns das große Gesetz der galvanischen Ströme, welche nicht nur unsere Kenntnis der Naturkräfte gewaltig erweitert, sondern auch durch ihre Verwendung zur Telegraphie das ganze Kulturleben umgewandelt haben.

Die Beobachtungen und Versuche lehren uns das Tatsächliche der Naturerscheinungen kennen, sie liefern uns so das Material, aus welchem der kombinierende Scharfsinn des menschlichen Verstandes die Gesetze abstrahiert, welche das Bedingende und das Bedingte in den Naturerscheinungen miteinander verknüpfen, welche uns also angeben, in welcher Weise der Verlauf einer Erscheinung von den Umständen abhängt, unter denen sie stattfindet. Ein Beispiel wird uns am besten zeigen, wie wir zu einem physikalischen Gesetze gelangen.

Wenn ein Lichtstrahl in seiner Bahn auf eine glatte Fläche trifft, so wird er von derselben immer zurückgeworfen, und man erkennt leicht, daß die Richtung, nach welcher der Strahl zurückgeworfen wird, verschieden ist, je nach der Richtung, in welcher der Strahl auf die Fläche auftrifft. Die Richtung des einfallenden Strahles ist hier somit das Bedingende, die Richtung des zurückgeworfenen das Bedingte. Das Gesetz der Zurückwerfung des Lichtes muß uns also allgemein sagen, in welcher Weise die Richtung des zurückgeworfenen Strahles von der Richtung des einfallenden abhängig ist. Man findet dasselbe, indem man in einer Reihe von Versuchen die Richtung des einfallenden Strahles willkürlich ändert, jedesmal den Winkel des zurückgeworfenen messend bestimmt, und dann die zueinander gehörigen Richtungen miteinander vergleicht. Rechnet man die Richtung der beiden Strahlen von der in dem Punkte, in welchem der einfallende Strahl die Fläche trifft, zu derselben senkrecht genommenen Linie, dem sogenannten Einfallslot, so findet man, daß der reflektierte Strahl stets in der Ebene liegt, welche durch das Einfallslot und den einfallenden Strahl bestimmt ist, und daß in dieser die Winkel, welche der einfallende und der zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslot bilden, immer gleich sind. Wir schließen aus dieser stets im Versuche bestätigten Beziehung zwischen den Winkeln des einfallenden Strahles,

Einfallswinkel, und dem des zurückgeworfenen Strahles, dem Zurückwerfungswinkel, als das die beiden verknüpfende Gesetz: „Der Zurückwerfungswinkel ist dem Einfallswinkel gleich.“

Man sieht, dieses Gesetz, und so ist es mit allen physikalischen Gesetzen, ist eine mathematische Beziehung zwischen den bedingenden und bedingten physikalischen Größen einer Naturerscheinung; man kann dasselbe physikalische Gesetz durch eine Gleichung ausdrücken.

Die physikalischen Gesetze sind hiernach zunächst der gemeinsame Kern einer Reihe einzelner Tatsachen, deren Gemeinsames sie in einem allgemeinen Satze zusammenfassen. Ihre Bedeutung ist aber eine noch weit weitergehende: sie drücken nicht nur die Tatsachen aus, aus denen sie abgeleitet wurden, sondern sie enthalten auch alle Erscheinungen, welche aus jenen Tatsachen folgen. Man habe z. B. einen Spiegel von beliebiger, aber irgendwie geometrisch bestimmbarer Gestalt, und es fallen Lichtstrahlen etwa von einer in bestimmter Entfernung aufgestellten Lichtlampe. Das eben ausgesprochene Gesetz gestattet uns dann, die

Erscheinungen der Zurückwerfung in jedem Falle zu bestimmen, ohne daß wir den Versuch zu Hilfe nehmen, denn wir können aufgrund jenes Gesetzes für jeden einfallenden Strahl die Richtung des zurückgeworfenen mit Hilfe einfacher geometrischer Konstruktion oder auch nach den Rechenmethoden der analytischen Geometrie angeben. Wie hier, so können wir in allen Fällen aus jedem Gesetze mit Hilfe der Mathematik eine Reihe von Folgesätzen ableiten; man hat die Gesetze nur mathematisch zu formulieren, und dann, indem man dieselben als Ausgangspunkt nimmt, durch mathematische Entwicklungen aus denselben die Folgerungen zu ziehen.

Aus dieser Bemerkung erhellt die äußerst wichtige Rolle, welche die Mathematik in der Physik spielt; sie ist für dieselbe von der gleichen Bedeutung wie Beobachtung und Versuche, denn sie dient dazu, diese zu berechnen und zusammenzufassen, die erhaltenen Gesetze scharf auszudrücken und die in ihnen enthaltenen Folgerungen abzuleiten.

Wenn hiernach aus einem physikalischen Gesetze sich eine Reihe von weiteren Erscheinungen auf mathematischem Wege ableiten läßt, so bedarf es selbstverständlich, um diese und ihre Gesetze kennen zu lernen, nicht mehr der Beobachtung und der Versuche; wir erhalten vielmehr diese Gesetze lediglich durch mathematische Deduktion. Die Versuche dienen dann zur Bestätigung unserer Folgerungen, sie bilden die Kontrolle, daß wir uns in unsern Deduktionen nicht geirrt haben. Dieser Weg der Deduktion ist neben dem der Erfahrung der wichtigste, auf dem die Physik fortschreitet, er lehrt uns ebenso gut neue Erscheinungen kennen, wie der Versuch; ja wir werden Erscheinungen finden, die man voraussichtlich niemals aufgefunden hätte, wenn uns der Weg der Deduktion nicht vorher die Umstände angegeben hätte, unter welchen dieselben beobachtet werden können.

Hat uns die Erfahrung die fundamentalen Gesetze einer Erscheinungsgruppe kennen gelehrt, so können wir aus diesen alle zu dieser Gruppe gehörigen Erscheinungen ableiten. Da wir bei dieser Ableitung den inneren Zusammenhang aller zu einer Gruppe gehörigen Erscheinungen unmittelbar erkennen, so können wir es als ein Ziel der Physik bezeichnen, die fundamentalen Gesetze aufzusuchen und aus diesen das ganze Gebiet der zusammengehörigen Erscheinungen zu deduzieren. Wir werden sehen, daß auf einigen Gebieten dieses Ziel schon erreicht ist, so vor allem in demjenigen der Bewegungserscheinungen.

Fassen wir die Resultate der bisherigen Betrachtungen zusammen, so können wir in der Entwicklung der physikalischen Wissenschaften drei Epochen unterscheiden; die erste ist die der Empirie, durch Beobachtung und Versuche werden Tatsachen gesammelt und aus diesen durch die kombinierende Tätigkeit des Verstandes die Gesetze der einzelnen Erscheinungen aufgestellt; an diese schließt sich, sobald hinreichendes Material vorhanden ist, die philosophische Tätigkeit der Abstraktion, des Aufsuchens der Hauptgesetze für eine Reihe aus gleicher Ursache hervortretender Erscheinungen und auf diese folgt eine Zeit, in welcher man durch Deduktion aus jenen Gesetzen neue Folgerungen und Tatsachen ableitet, eine Zeit, in welcher Beobachtung und Versuch nur dazu dienen, die theoretisch abgeleiteten Folgerungen zu kontrollieren und nachträglich zu bestätigen. Im allgemeinen

ist das auch der geschichtliche Gang in der Entwicklung der Physik, man findet fast stets diese drei Epochen auch zeitlich verschieden.

Die der Naturwissenschaft gestellte Aufgabe ist indes hiermit noch nicht vollständig gelöst, denn eine vollständige Kenntniss der Natur muß uns auch angeben, warum die Naturerscheinungen gerade den beobachteten Verlauf haben und nicht einen andern. Da nun aber der Verlauf einer Erscheinung wesentlich von der Ursache bedingt wird, welche diese Erscheinung bewirkt, so fällt die Frage nach dem Grunde, aus welchem die Erscheinungen gerade den ihnen eigentümlichen Verlauf haben, zusammen mit der Frage nach der Ursache der Erscheinungen. Die Ursache einer Veränderung in der Natur bezeichnet man allgemein als eine Kraft, wir können daher das Aufsuchen der Ursachen auch bezeichnen als das der Naturkräfte.

Gerade diese letzte Aufgabe der Naturwissenschaften ist aber die schwierigste; denn die Naturkräfte selbst können wir niemals direkt beobachten, wir nehmen sie nur wahr in ihren Wirkungen. Um also irgend etwas über die Naturkräfte auszusagen, müssen wir aus den Wirkungen auf die Ursachen zurückschließen. Diese Art des Schlusses ist aber immer mit einer so großen Unsicherheit behaftet, daß wir über die wirksamen Naturkräfte niemals eine ähnliche Gewißheit erhalten können wie über die Gesetze, denen die Naturerscheinungen folgen. Denn eine und dieselbe Erscheinung kann aus sehr verschiedenen Ursachen hervorgehen, und von diesen möglichen Ursachen müssen wir bei jener Art des Schließens eine auswählen; nichts bürgt uns aber dafür, daß wir bei dieser Wahl aus den möglichen Ursachen die richtige treffen. Wenn wir wissen, daß das Wasser unter dem Drucke der Atmosphäre steht, so ist eine notwendige Folgerung, daß es in einer Pumpe aufsteigen muß, in welcher wir über dem Wasser einen luftleeren Raum hergestellt haben; weiß man aber nicht, daß das Wasser dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt ist, und sieht man dasselbe in einer luftleer gemachten Pumpe aufsteigen, so kann man eine Reihe von Ursachen annehmen, welche das Aufsteigen bewirken. Will man zwischen diesen wählen, so hat man alle Möglichkeiten dafür, daß man eine unrichtige wählt, gegen die einzige, daß man die richtige wählt. Die Geschichte lehrt uns, wie auch die Ältern Physiker in der Tat täuschten, als sie annahmen, die Natur habe eine Abscheu vor dem leeren Raume. Die Mechanik des Himmels bewies uns, daß zwischen den Gestirnen eine Kraft tätig ist, welche in dem Maße größer ist, als die Masse der Gestirne größer ist, und welche in dem Maße abnimmt, als das Quadrat der Entfernung der Gestirne zunimmt. Man nimmt an, daß diese Kraft in einer Anziehung der Materien ihren Grund habe. Auch diese Annahme wählt aus einer ganzen Reihe von möglichen Gründen einen aus, und wir haben strenge genommen ebenso wenig ein Recht diesen Grund für den wahren zu halten, wie aus dem Aufsteigen des Wassers in der Pumpe den horror vacui zu folgern.

Über die Naturkräfte selbst können wir demnach nur Annahmen, sogenannte Hypothesen bilden, welche für uns einen geringern oder größern Grad von Wahrscheinlichkeit haben, je nach der Vorsicht, mit welcher man beim Aufstellen der Hypothesen verfuhr, und je nach der Menge von Naturerscheinungen, welche wir bei ihrer Wahl berücksichtigten, und welche dann als notwendige Folgen aus dieser Hypothese ergeben. Solange man nur wenige Erscheinungen aus einem Gebiete in betracht zieht, findet

man stets, daß mehrere Hypothesen dieselben gleich gut erklären, das heißt als notwendige Folgen aus der angenommenen Ursache hervorgehen lassen; je weiter aber unsere Kenntnis der Erscheinungen in einem Gebiete sich ausdehnt, um so geringer wird die Anzahl der möglichen Hypothesen, bis schließlich nur eine Hypothese übrig bleibt, aus welcher man sämtliche experimentell gefundenen Tatsachen mathematisch entwickeln kann, und welche selbst zur Auffindung neuer Tatsachen führt. Diese Hypothese hat dann für uns den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit.

Eine solche Hypothese ist die jetzt der Behandlung der Optik zugrunde gelegte Undulationstheorie. Seitdem man angenommen hat, das Licht sei eine zitternde Bewegung des Äthers, wurden alle experimentell aufgefundenen Gesetze der Lichterscheinungen Folgerungen dieses einen Grundsatzes, und mit ihr hat die Optik fast jene Stufe der Vollkommenheit erreicht, auf welcher die Beobachtung nur mehr ein Mittel ist, die Folgerungen der Theorie zu bestätigen, anstatt das einzige Mittel zu sein, um die Gesetze der Erscheinungen aufzufinden. Das ist eben das charakteristische einer guten Hypothese.

Zunächst erhält man eine solche Hypothese für die verschiedenen Gruppen der unter sich gleichartigen Erscheinungen, wie diejenige des Lichtes oder der Wärme, und man muß dieselbe für gut erklären, wenn sie das Gesamtgebiet der Erscheinungen, für welche sie ersonnen wurde, als notwendige Folgen erkennen läßt. Mit dem Fortschritte der Naturerkenntnis hat sich nun aber ergeben, daß die einzelnen Gruppen von unter sich gleichartigen Erscheinungen, welche scheinbar sich ganz fremd sind, wie die Bewegungserscheinungen, Licht- oder Wärmeerscheinungen, untereinander in dem innigsten Zusammenhange stehen. Bei der Abwägung der Hypothesen über die einer bestimmten Erscheinungsgruppe zugrunde liegenden Naturkräfte darf man deshalb nicht nur diese Erscheinungsgruppe allein ins Auge fassen, sondern muß auch die übrigen mit in Erwägung ziehen, und sich die Frage stellen, ob es zur Erklärung der bestimmten Gruppe der Annahme einer besondern Naturkraft bedarf. Gerade durch diese Erwägung hat die neuere Physik die Zahl der von den ältern Forschern angenommenen Naturkräfte wesentlich beschränkt; wir werden sehen, wie sie immer mehr dahin strebt, die verschiedenartigsten Erscheinungen auf ein und dieselbe Grundursache, auf Bewegung, zurückzuführen und an die Stelle der früher angenommenen so mannigfachen Kräfte nur eine zu setzen, die Kraft welche der Materie Bewegung erteilen kann, welche in einer Anziehung und Abstoßung der einzelnen Teile der Materie besteht.

Aber selbst, wenn es gelungen ist alle Erscheinungen auf diese eine der Materie eigentümliche und deshalb unveränderliche Kraft zurückzuführen, darf man immer nicht vergessen, daß es eine Hypothese ist, an welcher wir die Erklärung der Naturerscheinungen stützen, die allerdings den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit hat, der wir aber eine Gewißheit erst dann beilegen dürfen, wenn wir beweisen können, daß die so angenommene Ursache der Naturerscheinungen die einzig mögliche ist. Das erst wäre dieselbe, nach dem Ausspruche von Helmholtz<sup>1)</sup>, als die notwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen, es würde derselbe

---

1) *Helmholtz*, Über die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. p. 7.



alsdann objektive Wahrheit zuzuschreiben sein. Dahin zu gelangen, das können wir als das letzte Ziel der Naturwissenschaften bezeichnen; ob es erreicht werden kann, das läßt sich jetzt noch nicht übersehen.

## Ableitung der physikalischen Gesetze aus Messungen.

Wir haben im vorigen bereits mehrfach gezeigt, daß die Grundlage alles physikalischen Wissens genaue Beobachtungen und Messungen sind; ehe wir zur Besprechung der physikalischen Naturerscheinungen selbst übergehen, müssen wir uns daher noch die Frage vorlegen, wie wir aus den Messungen die Gesetze der Erscheinungen ableiten, und wie wir bei den Messungen zu verfahren haben. Wir wollen dieses an dem Beispiele der Zurückwerfung des Lichtes zeigen, welches wir vorhin bereits angeführt haben. Wir wissen also, daß jedesmal, wenn ein Lichtstrahl auf eine polierte Fläche fällt, derselbe zurückgeworfen wird, ferner, daß die Richtung, nach welcher der zurückgeworfene Strahl fortgepflanzt wird, sich ändert, wenn die Richtung des einfallenden sich ändert. Um das Gesetz zu erhalten, welches die Abhängigkeit der Richtung des zurückgeworfenen von der des einfallenden Strahles darstellt, setzen wir einen Spiegel in den Mittelpunkt eines geteilten Kreises, sodaß die Ebene des Spiegels senkrecht ist zur Ebene des Kreises. An dem Kreise sind zwei bewegliche Radien, deren Enden mit einer Spitze auf die Teilung des Kreises zeigen. Die Radien tragen durchsichtige Röhren, deren Achsen den Radien parallel sind; vor der einen Röhre steht eine möglichst kleine Flamme, welche nur durch die Röhre Licht auf den Spiegel senden kann. Ist der Spiegel so aufgestellt, daß die Spiegelnormale, das Einfallslot, den Nullpunkt der Teilung trifft, so gibt uns der Abstand des die Flamme tragenden Radius vom Nullpunkte der Teilung den Einfallswinkel des Lichtstrahles. Wir verschieben dann den zweiten beweglichen Radius so lange, bis wir durch die Röhre blickend den zurückgeworfenen Strahl sehen. Da die Richtung dieses zweiten Radius jene des zurückgeworfenen Lichtstrahles ist, so gibt uns der Abstand seiner Spitze von dem Nullpunkte der Teilung den Zurückwerfungswinkel. Man setzt die beiden beobachteten Winkel nebeneinander. Man wiederholt den Versuch, indem man nach und nach verschiedene Einfallswinkel wählt, dabei von dem kleinsten, der senkrechten Incidenz, bis zum größten, der streifenden Incidenz, fortschreitet, und erstellt sich eine Tabelle, auf welcher neben jedem gewählten Einfallswinkel der beobachtete Zurückwerfungswinkel verzeichnet ist. Eine Verzeichnung der zusammengehörigen Winkel zeigt uns dann, unter Voraussetzung absoluter Genauigkeit, daß die zueinander gehörigen Winkel immer gleich sind. Indem man so eine ganz konstante Beziehung zwischen den beiden Winkeln in den beobachteten Fällen erkennt, schließt man, daß sie in allen so sein wird, und erhält auf diese Weise ein experimentell gewonnenes Gesetz.

Der Beweis eines physikalischen Gesetzes ist somit der Nachweis einer konstanten Beziehung zwischen Zahlen, welche durch direkte Messung erhalten oder aus direkt gemessenen Größen berechnet werden; wir erkennen diese Beziehung in einer größern oder geringern Anzahl von Fällen und schließen daraus, daß sie in allen bestehe.

Damit aber die zwischen den verglichenen Größen bestehende Beziehung in aller Schärfe hervortrete, ist es nötig, daß die Messungen vollkommen genau sind. Das ist niemals zu erreichen, einmal wegen Ungenauigkeit der Instrumente, dann aber auch wegen der Unvollkommenheit unserer Sinne. In dem eben besprochenen Beispiele ist der Maßstab, welchem gemessen wird, ein geteilter Kreis; eine solche Teilung kann sich nie ganz genau herstellen, der eine Grad ist niemals dem anderen vollkommen gleich, und die Teilstriche haben niemals vollkommen gleiche Breite. An dem Kreise lassen sich ferner niemals die beweglichen Räder mit voller Genauigkeit einstellen, und schließlich läßt sich die Stellung der Radien nicht mit vollkommener Sicherheit ablesen. Deshalb sind die besten Messungen mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet, welche je nach der Güte der Instrumente und der Geschicklichkeit des Beobachters größer oder kleiner sein können. Sind die Instrumente schlecht, besitzt der Beobachter nicht die notwendige Geschicklichkeit, oder wenn er nicht die gehörige Sorgfalt an, so können die Beobachtungsfehler eine solche Größe erreichen, daß die Messungen das Gesetz gar nicht erkennen lassen; man würde dann gar keine oder auch sehr viele algebraische Beziehungen finden, welche die beobachteten Werte mit der gleichen Genauigkeit wiedergeben, und keine dieser Beziehungen würde nach den Messungen den Vorzug verdienen.

Haben aber die Instrumente die nötige Feinheit, und hat der Beobachter die erforderliche Sorgfalt angewandt, so findet man immer eine Beziehung, welche die beobachteten Werte am genauesten wiedergibt, und indem man erwägt, daß vollkommene Genauigkeit nicht erreicht werden kann, betrachtet man diese Beziehung als den Ausdruck des physikalischen Gesetzes betreffend.

Hierbei sind aber noch folgende Punkte zu beachten. Da man bei einer hinreichend großen Zahl von Messungen ebenso oft Wahrscheinlichkeit hat, daß die beobachteten Werte zu klein als daß sie zu groß sind, so müssen im allgemeinen ebenso viele Werte kleiner als größer als diejenigen, welche das aus den Messungen abzuleitende Gesetz vorschreiben. Findet man dagegen, daß die gefundenen Werte, wenn auch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, stets größer oder stets kleiner sind, so kann man dennoch schließen, daß das Gesetz nicht genau besteht. Wir sehen, daß die Erkenntnis der nicht ganz strengen Gültigkeit des physikalischen Gesetzes lange Zeit dadurch verzögert wurde, daß Arago und Biot diese Vorsicht bei den aus ihren Versuchen gezogenen Schlüssen verabsäumten.

Die Abweichungen der beobachteten Werte von den vom Gesetze verlangten müssen ferner ganz unregelmäßig sein, dieselben dürfen keine bestimmte Gesetzmäßigkeit zeigen. Würde man finden, daß für kleine Werte der gegebenen Größe der beobachtete Wert der von dem Gesetz verlangten sehr nahe, für große dagegen immer weiter davon entfernt ist, so würde man auch dann nicht schließen dürfen, daß das aus den Messungen abgeleitete Gesetz der Wirklichkeit vollständig entspricht; wir dürfen es auch dann, wie in dem vorigen Beispiele, nur für ein annähernd richtiges halten.

Wie groß in den einzelnen Fällen die Beobachtungsfehler sein können, wie nahe die beobachteten Werte den wirklich stattfindenden sein können, das läßt sich nicht allgemein feststellen; es hängt das

gleichen Umständen von der Schwierigkeit der Messungen ab. Man hat in jedem Falle die Grenze der erreichbaren Genauigkeit zu bestimmen, in welcher Weise, das werden wir später bei den einzelnen Untersuchungen kennen lernen. Das aber ist immer festzuhalten, daß, wenn Beobachtungen ein Gesetz bestätigen sollen, die Differenzen des beobachteten und gesetzmäßigen Wertes nur ein kleiner Bruchteil des erstern sein dürfen.

## Die in der Physik gebräuchlichen Maße.

Die Maße, welche in der Physik angewandt werden, sind dem neu-französischen Maßsystem entnommen, welches den großen Vorzug hat, daß es alle Maßbestimmungen auf ein und dieselbe Einheit, die des Längenmaßes zurückführt. Die Einheit des französischen Längenmaßes ist das Meter. Dasselbe ist von der Länge eines Erdmeridians abgeleitet, und zwar wurde der zehnmillionte Teil des durch genaue Messungen bestimmten Quadranten eines Erdmeridian dazu gewählt. Später hat sich zwar ergeben, daß in die dem Meter zugrunde liegenden Messungen sich ein kleiner Fehler eingeschlichen hat, da aber die Maßeinheit einmal festgestellt und verbreitet war, so hat man es unterlassen, dieselbe darnach zu ändern. Das Meter ist sonach um ein sehr Geringes von dem zehnmillionten Teile eines Erdmeridianquadranten verschieden. Das Originalmeter, nach welchem alle übrigen Maßstäbe abgeglichen werden, ist in den Archiven des internationalen Bureau für Maße und Gewichte zu Paris (Sèvres) niedergelegt.

Man teilt das Meter nach dem Dezimalsystem

$$1 \text{ Meter} = 10^{\text{de}} \text{ Dezimeter} = 100^{\text{cm}} \text{ Zentimeter} = 1000^{\text{mm}} \text{ Millimeter.}$$

Im deutschen Reiche ist seit dem 1. Januar 1872 dasselbe Maßsystem eingeführt worden. Als deutsche Bezeichnung ist für das Meter der Name Stab, für das Zentimeter Neuzoll und für das Millimeter der Name Strich gewählt, welche Bezeichnungen indessen gegenüber den ältern oben angeführten wenig in Gebrauch sind.

Früher legte man in Frankreich und Deutschland und noch jetzt in vielen Ländern die willkürlich gewählte Einheit des Fußes (ungefähr von der Länge des menschlichen Fußes) zugrunde.

Eine Vergleichung der wichtigsten Fußmaße, wie sie bisher gebraucht wurden, mit dem Metermaße gibt folgende Zusammenstellung:

Meter	Pariser Fuß	Preußen Rhod. Fuß	England Fuß	Ostreich Wiener F.	Bayern Fuß	Baden Fuß	Sachsen Fuß	Schweden Fuß
1 =	3,07444	3,186199	3,280899	3,163446	3,426310	3,333333	3,531197	3,368126

Dem hier angegebenen preußischen ist das dänische, dem englischen das russische und dem badischen das schweizerische Fußmaß an Größe gleich.

Der Fuß wird entweder duodezimal, in 12" Zoll, der Zoll in 12''' Linien oder dezimal, in 10'', der Zoll in 10''' Linien eingeteilt.

Das Flächenmaß wird in dem metrischen System durch Quadrierung des Meters erhalten und ebenso das Körpermaß durch Kubation des Meters

$$1^{\text{qm}} \text{ Quadratmeter} = 100^{\text{adm}} = 10000^{\text{dm}} = 1000000^{\text{cm}} = 100000000^{\text{mm}}$$

$$1^{\text{km}} \text{ Kubikmeter} = 1000^{\text{adm}} = 1000000^{\text{dm}} = 1000000000^{\text{cm}} = 1000000000000^{\text{mm}}$$



Es ist leicht darnach das Verhältniß der Quadrat- und Kubikfuße, Zolle usw. zum metrischen Flächen- und Körpermaße zu erhalten, z. B.

$$1^{\text{qm}} = 9,476817 \square' \text{ Paris} = 10,15187 \square' \text{ preuß. etc.}$$

$$1^{\text{km}} = 29',17385 \text{ kub. Paris} = 32',32587 \text{ kub. preuß. etc.}$$

Als Einheit des Hohlmaßes nimmt das metrische System den Rauminhalt eines Kubikdezimeters und nennt dieses Maß ein Liter (französisch Litre).

Dasselbe Hohlmaß ist jetzt auch als Einheit im deutschen Reiche akzeptiert.

Früher wurde bei uns, und noch jetzt in den Ländern, welche das metrische System nicht akzeptiert haben, das Hohlmaß aus dem Fußmaß verschieden gebildet. In Preußen war das Quart = 64" kub., in Baiern das Maß = 84",304 kub., in England ist die Gallone = 277",2738 kub., das österreichische Maß ist = 0',0448 kub. usf.

$$1 \text{ Liter} = 0,8733386 \text{ preuß. Quart} = 0,9254301 \text{ baier. Maß.}$$

$$= 0,2200967 \text{ engl. Gallone} = 0,7066483 \text{ östr. Maß.}$$

Auch die Einheit des Gewichtes ist im metrischen Systeme aus jenem des Längenmaßes abgeleitet. Man geht vom Zentimeter aus und nennt das Gewicht von einem Kubikzentimeter Wasser bei der Temperatur 4° C. Gramm.

Im gewöhnlichen Leben wird das Gewicht von einem Liter Wasser als Einheit genommen; dasselbe enthält 1000<sup>cm</sup> kub. und wiegt daher 1000 Gramm. Dieses Gewicht wird Kilogramm genannt. Ein bei der Aufstellung des metrischen Systemes mit der größten Sorgfalt hergestelltes Kilogramm wird in den Pariser Archiven aufbewahrt. Da man mit viel größerer Genauigkeit zwei Gewichte miteinander vergleichen kann, als das Gewicht eines bestimmten Volumens Wasser bestimmen, so werden alle Normalgewichte nach dem Pariser Kilogramm abgeglichen.

Die Unterabteilungen des Grammes sind nach dem Dezimalsystem gebildet.

$$1 \text{ Gramm} = 10 \text{ Dezigramme} = 100 \text{ Zentigramme} = 1000 \text{ Milligramme.}$$

Besondere Zeichen werden für diese Unterabteilungen nicht benutzt, man schreibt sie als Dezimalstellen des Grammes.

Im deutschen Reiche ist seit Einführung des metrischen Systems auch dieses Gewichtssystem eingeführt, nur wurde anfänglich als Einheit die Hälfte des Kilogramms, das Pfund, genommen, jetzt wird fast ausschließlich nach Kilogramm und Gramm gerechnet. Die in andern Ländern gewählten Gewichtseinheiten, die meist den Namen Pfund führen, sind vom halben Kilogramme nicht sehr verschieden. Eine Vergleichung der wichtigsten Pfunde mit dem Kilogramm bietet folgende Zusammenstellung

$$1 \text{ Kilogramm} = 2,204597 \text{ Pfd. englisch Avoirdupois}$$

$$1,785675 \text{ „ österreichisch}$$

$$2,441883 \text{ „ russisch}$$

$$2,002768 \text{ „ dänisch und norwegisch}$$

$$2,351063 \text{ „ schwedisch Schalgewicht}$$

Das Pfund wird meist in 16 Unzen, wie in England, oder in 32 L eingeteilt.

In den Niederlanden, Spanien und Italien ist das metrische System eingeführt, zum Teil nur mit andern Benennungen.

Um eine Richtung im Raume mit einer andern zu vergleichen, hat man ein Maß für Winkel oder Richtungsverschiedenheiten eingeführt; man teilt zu dem Ende überall den Kreisumfang in 360 gleiche Teile, deren einer ein Grad genannt wird. Der Grad wird in 60' Minuten, die Minute in 60" Sekunden geteilt.

Die Erscheinungen, welche wir in der Physik zu untersuchen haben, treten nicht nur räumlich, sondern auch zeitlich verschieden auf. Wir haben daher in vielen Fällen auch die Zeit zu messen. Das Zeitmaß ist auf die Länge des Tages gegründet, es ist

1 Tag mittlerer Zeit = 24 Stunden

1<sup>h</sup> Stunde = 60' Minuten

1' Minute = 60" Sekunden.

Bei den physikalischen Zeitangaben wird meist die Sekunde als Zeiteinheit gewählt.

## Einige Meßinstrumente.

### Der Komparator.

Der Angabe der in der Physik gebräuchlichen Maße lassen wir eine kurze Beschreibung der ohne besondere Theorie in ihrem Prinzip verständlichen Meßinstrumente, der Längenmeßinstrumente und der Winkelmeßinstrumente folgen.

Die Grundlage für alle Längenmessungen ist das Meter, und zwar wird, wie vorhin erwähnt wurde, als das Normalmeter das in den Pariser Archiven befindliche aus Platin-Iridium gefertigte Meter angenommen. Die sämtlichen in Gebrauch befindlichen Meter sind entweder direkt mit dem Pariser Normalmeter verglichen, oder nach solchen dargestellt, welche mit dem Pariser Metern verglichen waren.

Zur Vergleichung der Längenmaße wendet man Komparatoren an, welche verschieden eingerichtet sind, je nachdem man Endmaße, das heißt Maße vergleichen will, welche zwischen den Endpunkten des Maßstabes eine bestimmte Länge haben sollen, oder Strichmaße, das heißt solche, welche zwischen zweien auf dem Maßstabe gezogenen Strichen eine bestimmte Länge haben. Wir begnügen uns damit, einen für die Vergleichung von Endmaßen konstruierten Fühlhebelkomparator zu beschreiben<sup>1)</sup>.

Eine breite Platte von gehobeltem Gußeisen dient dem Apparat (Fig. 1) als Basis.

Diese Platte besitzt an dem einen Ende ein mit Schrauben befestigtes eisernes Aufsatzstück *C*; an diesem befindet sich eine vorspringende stumpfe Spitze, gegen welche das Meter fest angelegt wird. Gegen das andere Ende des Apparats hin ist ein stählerner Stift *DE* angebracht, der seiner Länge nach gleiten kann; man kann ihn von *D* nach *E* hin verschieben, eine Spiralfeder drückt ihn immer nach *D* hin zurück. Der Meßapparat des Instrumentes wird von einem um eine Axe *G* beweglichen Winkelhebel *ZGE*, dem Fühlhebel, gebildet. Der Winkelhebel hat einen

<sup>1)</sup> Andere Komparatoren siehe man im ersten Bande von *Karstens Enzyklopädie der Physik* 1869 p. 502 ff. und *Wild, Bericht über die Reform der vaterländischen Maße*. Zürich 1868.

sehr kurzen Arm  $GE$ , der durch eine Feder  $F$  immer an das Ende  $E$  des Stiftes  $DE$  angedrückt ist, und einen 100mal längeren Arm  $ZG$ , dessen Ende auf einem geteilten Kreisbogen sich bewegt. Bei  $Z$  befindet sich eine Lupe, durch welche man scharf beobachten kann, an welchem Teilstrich das Ende  $Z$  ansteht.

Fig. 1



Um ein Meter zu prüfen, verfährt man folgendermaßen. Zunächst legt man den Etalon, mit welchem man den Maßstab vergleichen will, gegen die Scheide bei  $C$  und richtet ihn gerade durch Anschieben an die beiden festen Aufsatzstücke  $M$  und  $N$ . Der bewegliche Stift  $DE$  wird dann durch die ihn umgebende Spiralfeder gegen das Ende  $A$  des Etalons gedrückt; der Hebelarm  $GE$  wird durch die Feder  $F$  an das vordere Ende  $E$  des Stiftes  $DE$  angedrückt, und der Zeiger  $GZ$  stellt sich auf irgend einen Teilstrich der Teilung ein. Man beobachtet und bemerkt sich denselben.

Darauf ersetzt man den Etalon durch den Maßstab, der geprüft werden soll. Wenn der Zeiger genau auf demselben Teilstrich einsteht, so ist der Maßstab richtig, zeigt er auf eine andere Stelle der Teilung, so ist der Maßstab unrichtig und muß, je nachdem der Zeiger sich mehr oder weniger entfernt von  $Z$  einstellt, verkürzt oder verlängert werden.

Um die Empfindlichkeit des Apparates zu beurteilen, genügt es zu beachten, daß der Unterschied der beiden verglichenen Maßstäbe in der Bewegung des Hebelendes  $Z$  hundertmal größer erscheint, weil der Arm  $ZG$  des Winkelhebels hundertmal größer ist als der Arm  $GE$ . Da man eine Verschiebung von  $0^{\text{mm}},1$  auf der Teilung mit Hilfe der Lupe noch recht gut wahrnehmen kann, so kann man einen Unterschied der Maßstäbe von  $0^{\text{mm}},001$  noch gut bestimmen.

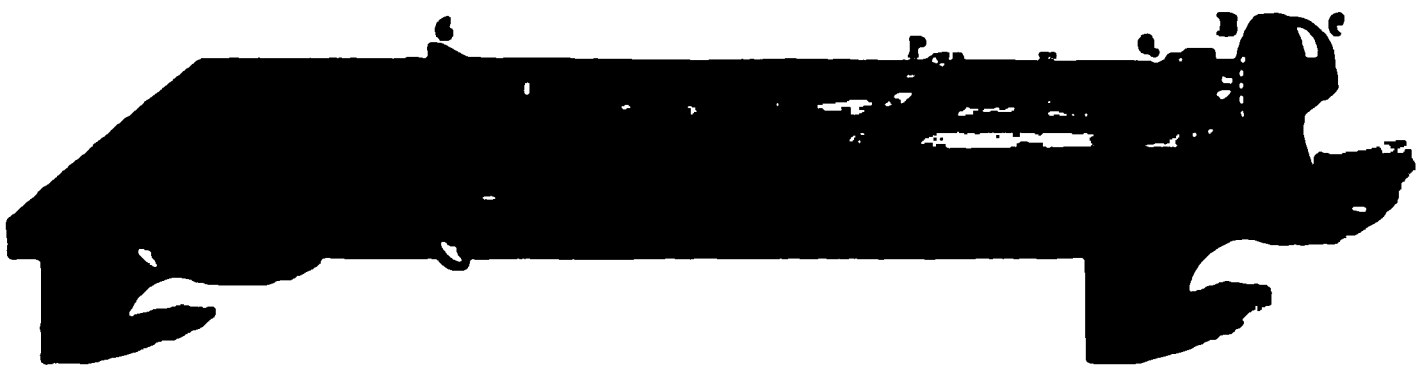
Die Vergleichung eines Maßstabes mit dem Etalon ist aber dennoch meist nicht so einfach, da nur selten der verglichene Maßstab von Platin verfertigt ist. Die Wärme dehnt nämlich alle Körper aus, und der als Etalon benutzte Platinmaßstab hat nur bei der Temperatur des schmelzenden Eises genau die Länge des als Einheit angenommenen Meters. Man muß daher alle Vergleichen bei dieser Temperatur ausführen oder, wenn man sie bei einer andern Temperatur ausgeführt hat, Rücksicht nehmen auf die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, welche für die verschiedenen Maßstäbe eine andere ist, wenn sie nicht aus dem gleichen Material gefertigt sind. Dadurch wird das Verfahren etwas komplizierter; wir werden später sehen, wie man diese notwendigen Korrekturen anbringen kann.

Mit Hilfe des Komparators kann man sich also jeder Zeit ein genaues Meter verschaffen. Ist das geschehen, so müssen wir dasselbe in seine Unterabteilung, Dezimeter, Zentimeter und Millimeter teilen. Die Operation geschieht mittels der Teilmaschine.

## Die Teilmaschine.

Der wichtigste Teil dieses Apparates ist eine Mikrometerschraube. Diese ist auf einem möglichst homogenen Zylinder von hartem Stahl eingeschnitten und hat eine Länge von 50—80 Zentimeter. Bei der Herstellung derselben sucht man es dahin zu bringen, daß ein Schraubengang genau einem Millimeter entspricht, das heißt also einmal zu erreichen, daß die Höhe aller Schraubengänge unter sich gleich und jeder gleich einem Millimeter ist. Es muß also die Anzahl der Schraubengänge genau der Anzahl Millimeter entsprechen, welche der Zylinder lang ist. Absolute Genauigkeit kann natürlich nicht erreicht werden, die Ungenauigkeiten dürfen aber nur sehr klein sein und müssen durch Messung bestimmt werden. Bei der Beschreibung des Instrumentes und seiner Anwendung nehmen wir an, daß die Schraube möglichst genau gearbeitet sei.

Fig. 2.



An seinen beiden Enden ist der mit der Schraube versehene Zylinder an zwei Zapfenlager *P* und *B* (Fig. 2) eingeschlossen, in denen er sich mit matter Reibung drehen kann, ohne die geringste fortschreitende Bewegung anzunehmen: eine Kurbel *A*, welche man mit der Hand dreht, bringt diese Bewegung hervor.

Die Schraube geht in einer Mutter *Q*, welche sie umfaßt, und welche zugleich mit derselben drehen kann. Die Mutter bewegt sich daher vorwärts oder rückwärts, wenn man die Schraube in dem einen oder andern Sinne dreht. Die Mutter teilt ihre Bewegung einer stählernen Platte *F* mit, welche an ihr befestigt ist. An der Platte *F* ist ein Grabstichel *H* befestigt, der also genau die Bewegung der Platte und somit der Schraubenmutter *Q* annimmt.

Durch eine ganze Umdrehung der Kurbel schreitet der Grabstichel um die Höhe eines Schraubenganges, also um  $1^{\text{mm}}$  fort, durch eine zehntel-, hundertstel, tausendstel Umdrehung bewegt sich auch der Stichel um  $0^{\text{mm}},1$ ,  $0^{\text{mm}},01$ ,  $0^{\text{mm}},001$  weiter. Es genügt daher den Bruchteil der Umdrehung der Schraube zu kennen, um zu wissen, wie weit der Stichel vorgeschoben ist.

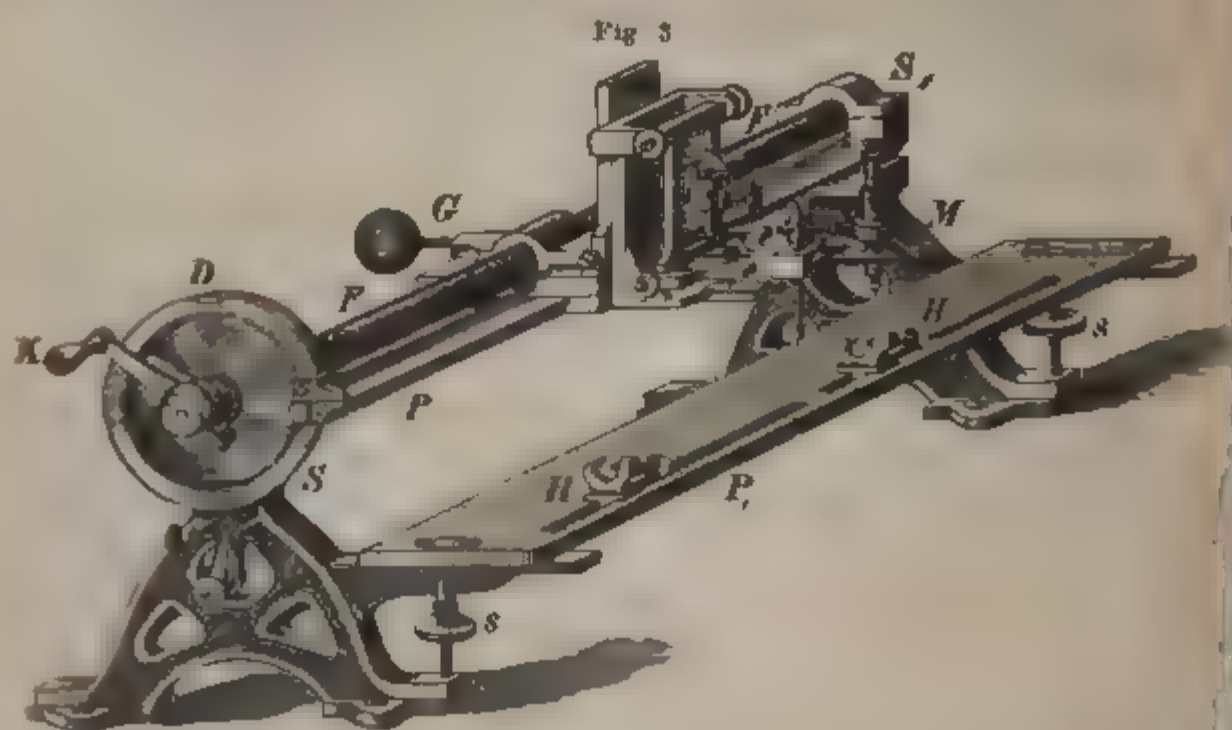
Zu dem Zwecke ist an dem mit der Kurbel versehenen Ende der Schraube auf den Zylinder eine kreisförmige Scheibe *D* aufgesetzt, welche mit der Schraube dreht, und deren Rand in 100 Teile geteilt ist; ein beweglicher an dem Tisch des Apparates angebrachter Zeiger *C* gibt an, um welchen Bruchteil einer Drehung die Schraube gedreht, um welchen Bruchteil eines Millimeter somit der Stichel vorgeschoben ist.

Will man z. B. eine Glasröhre teilen, so legt man dieselbe, wie die Fig. zeigt, auf zwei Lager, in denen sie durch zwei Fäden *L* und *K* festgehalten wird, so daß sie sich drehen, aber nicht ihrer Länge nach ver-



schieben kann. Man nimmt als Stichel einen Schreibdiamanten, oder besser noch, man überzieht vorher die Röhre mit einer dünnen gleichmäßigen Schicht von Wachs oder Paraffin, und nimmt einen Stahlstichel und führt denselben durch passendes Drehen der Schraube an das Ende der Röhre. Dort macht man den ersten Strich, indem man den Stichel mit der einen Hand sanft niederdrückt, und mit der andern Hand die Röhre in ihren Lagern herumdreht, sodaß die Spitze des Stichels die Wachsschicht von dem Glase entfernt. Man dreht dann die Kurbel um  $n$  Teile des Kreises, bewirkt dadurch ein Fortschreiten des Stichels um  $n \cdot 0,01^{\text{mm}}$  und zieht den zweiten Strich; so führt man fort, bis die Teilung auf die gewünschte Länge vollendet ist. Schließlich ätzt man die Teilung auf dem Glase durch Flußsäure.

Die Teilmaschine in dieser einfachen Form ist zur Anwendung nicht gerade bequem, indem sie zu jeder Operation die größte Aufmerksamkeit fordert. Man hat deshalb die Teilmaschine in ihrem mechanischen Teil vielfach verbessert, besonders um den richtigen Abstand der Teilstriche sicher zu erhalten, und die Teilstriche besser ziehen zu können. Fig. 3 zeigt die Teilmaschine in der Form, wie sie von Bianchi in Paris (Rue de Rennes) geliefert wird.



Die Mikrometerschraube  $F$ , bei meinem Apparat 56 Zentimeter hat ihr Lager in dem eisernen Gestell  $SS_1$ . An demselben Gestelle zwei abgehobelte Eisenplatten  $P$  und  $P_1$  befestigt, deren obere sorgfältig eben gearbeitete Flächen der Achse der Schraube parallel sind. Die obere Platte trägt einen Schlitten, an welchem der Stichel, resp. denselben tragende später zu beschreibende Reißerwerk befestigt ist. An dem Schlitten befindliche Mutter greift in die Mikrometerschraube so daß die Drehung der Schraube den Schlitten fortbewegt. Die Schraube kann nur in einem Sinne, von  $K$  aus gesehen im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers gedreht und deshalb der Schlitten nur von  $S_1$  aus bewegt werden. Um den Schlitten im entgegengesetzten Sinne bewegen zu können, ist die Mutter des Schlittens aus zwei Teilen zusam-

gesetzt, und die obere Hälfte, in einem Gelenke drehbar, kann an dem Griffe  $G$  emporgehoben werden. Nur in diese obere Hälfte der Mutter sind Windungen eingeschnitten, so daß, wenn sie emporgehoben ist, der Schlitten frei auf der Platte verschoben werden kann. Die an dem Ende des Griffes angebrachte schwere Messingkugel bewirkt durch ihr Gewicht ein sicheres Eingreifen der Windungen der Mutter in jene der Schraube, wenn die obere Hälfte der Mutter niedergelassen ist.

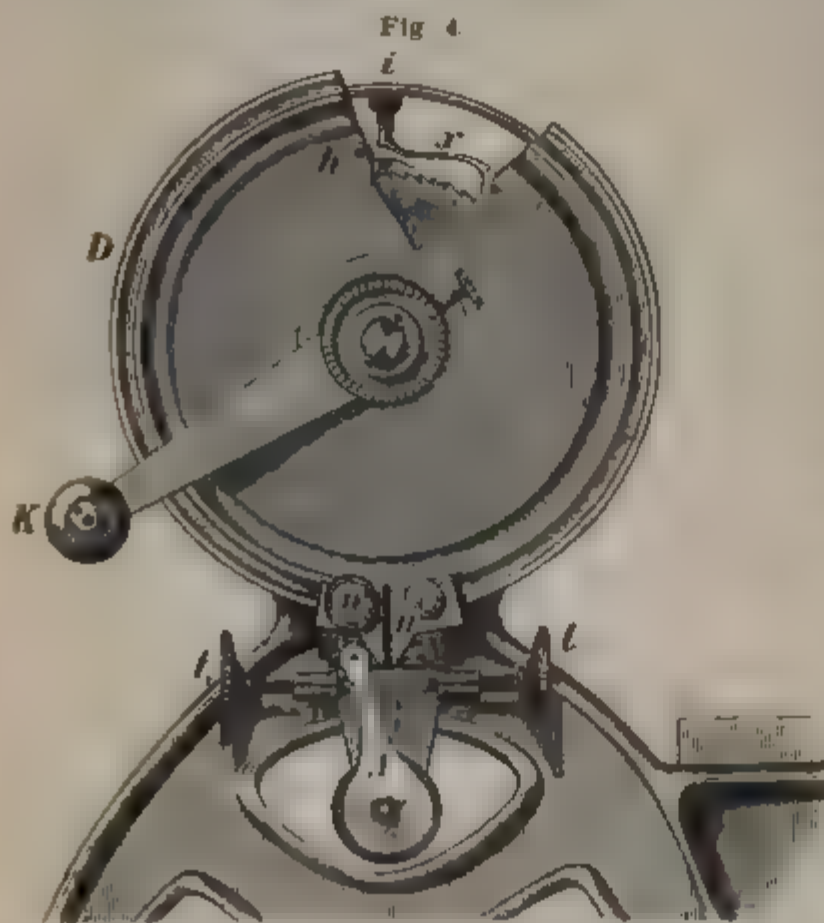
Neben dem Reißerwerk ist an dem Schlitten ein Mikroskop  $M$  angebracht, durch welches man die gezogenen Teilstriche scharf sehen kann, und welches außerdem in nachher zu beschreibender Weise die Teilmaschine befähigt als Längenmeßapparat zu dienen.

Die Platte  $P_1$  dient zur Befestigung der Gegenstände, welche mit einer Teilung versehen werden sollen; zu dem Zwecke trägt sie in einem Schlitz verschiebbare Lager  $H, H_1$ , in welchen die betreffenden Gegenstände, Röhren, Maßstäbe etc. befestigt werden. Um bei zu teilenden Objekten verschiedener Breite die Teilung an der richtigen Stelle anbringen zu können, ist die Platte  $P_1$  etwas verschiebbar, so daß sie der Mikrometerschraube etwas näher gebracht oder etwas von ihr entfernt werden kann. Gleichzeitig dient diese Verschiebbarkeit der Platte dazu die Gegenstände, welche mit einer Teilung versehen werden sollen, der Schraube genau parallel zu legen. Man bringt zu dem Zwecke den Schlitten zunächst an das eine Ende des zu teilenden Objektes und verschiebt die Platte  $P_1$  so, daß der Stichel sich gerade über dem Punkte befindet, wo die Teilung beginnen soll. Dann bringt man den Schlitten an das andere Ende und bewirkt durch einen gelinden Druck auf dieses Ende der Platte, daß auch dort sich der Stichel gerade über dem Punkte befindet, wo die Teilung enden soll. Durch Anziehen der Schrauben  $s$  wird dann die Platte festgesetzt.

An dem mit der Kurbel versehenen Ende der Schraube befindet sich auch an dieser Maschine die auf ihrem Umfange in 100 gleiche Teile geteilte Scheibe  $D$ ; ein an dem Gestelle der Maschine befestigter Index läßt erkennen, um welchen Bruchteil des Umfanges die Schraube gedreht ist.

Bei der einfachen Teilmaschine erfordert es große Aufmerksamkeit, ob man die Schraube von einem zu dem andern zu ziehenden Teilstrich nicht zu wenig oder zu viel dreht, es ist deshalb sehr schwierig, die Teilung genau gleichmäßig zu machen. Diese Schwierigkeit ist bei der vervollständigten Maschine durch einen besonderen Mechanismus gehoben. Zunächst kann man mit der Kurbel  $K$  die Schraube nur in dem einen Sinne drehen; zu dem Zwecke ist die Scheibe  $D$ , welche mit der Kurbel gedreht wird, nicht fest mit der Schraube verbunden, sondern für sich drehbar auf dem Ende der Schraube aufgesetzt. Dreht man die Scheibe nach links herum, so bewegt sie sich ohne die Schraube mitzunehmen, nur bei der Drehung nach rechts herum wird auch die Schraube gedreht. Um das zu erreichen, ist unmittelbar neben der Scheibe und derselben parallel, wie Fig. 4 zeigt, an der ein Stück der Scheibe fortgenommen ist, auf die Schraube ein gezahntes Rad  $z$  gesetzt, und an der Scheibe  $D$  ist ein Haken  $h$  befestigt, welcher bei der Drehung nach links auf den Zähnen des Rades schließt, bei derjenigen nach rechts aber durch die Feder  $f$  auf das Zahnrad aufgedrückt wird, in die Zähne eingreift, und so die Schraube mitnimmt.

An der Scheibe *D* sind, wie Fig. 4 zeigt, zwei Nasen angebracht, *n* und *n'*, von denen die eine *n* unveränderlich befestigt ist, während die andere *n'* an jeder Stelle des Umfangs eingeklemmt werden kann. Diese Nasen stoßen gegen einen Anschlag *A*, der an dem Gestelle der Maschine



drehbar befestigt ist, und dessen Bewegung durch die Spitzen der Schrauben *t* und *t<sub>1</sub>* gehemmt wird. Die Schraube *t* wird so gestellt, daß wenn bei einer Drehung nach links herum der Anschlag *A* durch die Nase *n* gegen die Spitze von *t* gedrückt wird, der Nullpunkt der Teilung auf der Scheibe *D* sich gerade am Index *i* befindet. Man kann dann mit der Kurve *K* die Schraube nur so weit drehen, bis die Nase *n'* den Anschlag *A* gegen das Ende der Schraube *t<sub>1</sub>* drückt. In der Figur 4 angedeutete Stellung der Nase *n'* wäre das nach einer ganzen Umdrehung der Schraube so, wenn man *t<sub>1</sub>* so stellt, daß

der Anschlag *A* gegen das Ende von *t<sub>1</sub>* drückt, wenn sich wieder der Nullpunkt der Teilung an dem Index *i* befindet. Um die Schraube weiter zu drehen, muß man erst die Scheibe wieder nach links drehen, bis die Nase *n* den Anschlag *A* wieder gegen das Ende von *t* drückt. Die in Fig. 4 dargestellte Anordnung wurde somit die geeignete sein, um, ohne besondere Aufmerksamkeit auf die Drehung verwenden zu müssen, einen Gegenstand etwa einen Maßstab mit einer Millimeterteilung zu versehen. Man stellt durch Drehung nach links die Scheibe *D* so, daß der Nullpunkt der Teilung auf der Scheibe am Index *i* sich befindet, wenn die Nase *n* den Anschlag *A* drückt. Man bringt dann den Maßstab in die richtige Lage, so daß der Stichel den ersten Strich dort zieht, wo auf demselben die Teilung beginnen soll. Man zieht den betreffenden Strich; dann dreht man die Scheibe rechts herum, bis die Nase *n'* den Anschlag gegen das Ende von *t<sub>1</sub>* drückt; bei dieser Drehung wird der Schlitten um 1<sup>mm</sup> fortgeschoben, da bei derselben Schraube einmal vollständig gedreht wurde. Man zieht den zweiten Strich und dreht dann die Scheibe zunächst links herum, bis die Nase *n* den Anschlag gegen *t* drückt, und wieder rechts herum, bis die Nase *n'* wieder den Anschlag trifft. Die erste Drehung ließ den Schlitten stehen, brachte aber die Scheibe in die Lage, welche eine Drehung nach rechts und damit eine Drehung der Schraube möglich machte. Man zieht den dritten Strich und so fort, so daß man zwischen je zwei Strichen die Scheibe einmal nach links, einmal nach rechts drehen muß, bis der Anschlag die Bewegung der Scheibe be-

Bei dieser Einrichtung besteht ein Mangel darin, daß die Verschiebung immer nur um ein vielfaches der Zahnbreite des Rades  $x$  geschehen kann, somit durch dieselbe auch die Genauigkeit der einzelnen Abstände der Striche bedingt ist. Neuerdings ist es nun gelungen, durch einen komplizierten Mechanismus, der hier nicht beschrieben werden kann, die Arretierung für den Stift mit beliebiger Genauigkeit und in jedem gewünschten Maßstabe ohne einen endlichen Fehler einzustellen. Max Wolz in Bonn, der solche Maschinen baut, hat dieselben auch noch in anderer Richtung vervollkommen. Der Antrieb durch die Hand ist ersetzt durch einen maschinellen, wozu irgend ein elektrischer Motor benutzt werden kann. Sämtliche Bewegungen der Teilmaschinen werden automatisch ausgeführt und selbst nach Beendigung der Teilung der Motor selbsttätig ausgeschaltet.

Will man den Maßstab mit einer Bianchischen Maschine statt in Millimetern in kleinere Teile teilen, so hat man nur die Nase  $w'$ , welche die Drehung nach rechts hemmt, zu versetzen. Entfernt man z. B. die Nase um ein Viertel Umlauf nach links hin, so würde die Bewegung nach rechts jedesmal gehemmt, wenn die Schraube um drei Viertel Umdrehung gedreht, somit der Stichel um  $0,75^{\text{mm}}$  verschoben wäre. Wir erhielten somit eine Teilung, bei der je zwei Teilstriche um  $0,75^{\text{mm}}$  voneinander entfernt wären.

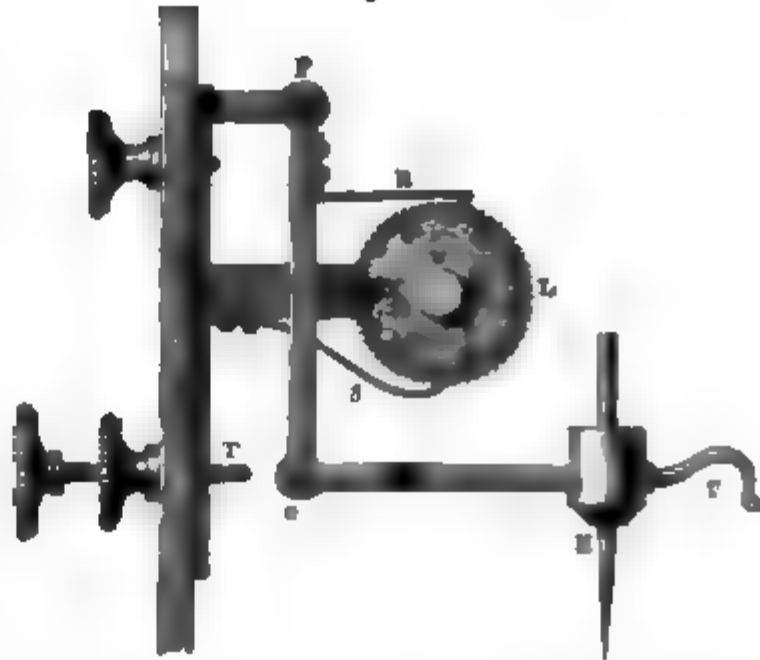
Man zieht auf einem Maßstab, den man teilen will, nicht die Striche gleich lang, sondern den ersten lang, dann vier kürzer und den zehnten mit dem ersten von gleicher Länge. Bei der alten Maschine mußte die

Hand des Teilenden diese Gruppierung der Linien besorgen: das erforderte Geschicklichkeit und stete Aufmerksamkeit, ohne daß man jedoch imstande war, die gewünschte Regelmäßigkeit zu erreichen. Die neue Einrichtung des Stichelstichers jedoch, wie sie Fig. 3 perspektivisch und Fig. 5 vom Str. zeigt, enthält einen besonderen Mechanismus zur Lösung dieser Aufgabe. Man hat in der Hand den kleinen Haken  $U$  (Fig. 5).

Man zieht denselben anfangs gegen sich hin, indem man ihn ein wenig schiebt, dann schiebt man ihn leicht niederdrückend zurück. Dabei dringt der Stift ein wenig in das zu teilende Objekt ein und hinterläßt den Strich. Um dem Striche die gewünschte Länge zu geben, genügt es, den Gang des Stichels passend zu hemmen.

Dazu ist über dem Stichel ein Rad  $L$  (Fig. 5) angebracht, welches um eine feste Achse drehen kann: das Rad besteht aus zwei kreisförmigen Platten, deren eine  $L$  auf ihrem Umfange mit Zähnen versehen ist, die andere  $VX$  aber mit Ausschnitten, welche abwechselnd tiefer und weniger tief sind, getrennt durch Zwischenräume von gleicher Länge, die

Fig. 5.





durch den Umfang der Scheibe gebildet werden. In dem Augenblick, wenn man den Haken  $U$  anzieht, bewegt sich ein vorspringendes Stück bei  $X$  gegen das Rad, dringt in einen tieferen Ausschnitt ein und hemmt, auf den Boden desselben aufstoßend, die Bewegung des Schreibstiftes. Wenn man dann den Stift zurückschiebt, so bewegt er sich so weit, bis er an den Vorsprung  $T$  stößt, welcher ihm nicht weiterzugehen erlaubt.

Während dieser Bewegung greift ein Haken  $R$  in die Zähne des Rades  $L$ , dreht es um einen Zahn voran und verschiebt den Ausschnitt des nebenliegenden Rades  $V$ . Wenn man dann den Stift von neuem anzieht, so trifft er nicht mehr auf einen Ausschnitt, sondern auf den äußeren Umfang des Rades, welcher an Stelle des Ausschnittes getreten ist. Die Bewegung des Stichels geht daher nicht so weit, und der von ihm gemachte Strich wird kürzer. Bei jeder Bewegung geht dieselbe Drehung der Räder vor, und kommt der fünfte Strich, so dringt der Stift  $X$  wieder in einen, aber weniger tiefen Ausschnitt. Dadurch wird der Strich länger als die vier vorhergehenden, aber kürzer als der erste. Kurz der Arbeiter braucht sich nicht um die Länge der Teile zu bekümmern, sie werden genau gezogen, und jedesmal der fünfte und zehnte sind durch ihre größere Länge hervorgehoben.

Wir haben bei der Beschreibung der Teilmaschine vorausgesetzt, daß die Schraube vollkommen genau geschnitten, daß also die Höhe aller Schraubengänge genau  $1^{\text{mm}}$  sei. Wenn auch die Maschinen, besonders die von Bianchi vortrefflich gearbeitet sind, so muß man dieselben doch prüfen. Um zunächst zu untersuchen, ob die mittlere Höhe eines Schraubenganges in der Tat  $1^{\text{mm}}$  ist, ob also die auf der Schraube durch 500 Umdrehungen bewirkte Verschiebung genau  $0,5^{\text{mm}}$  ist, nimmt man einen mit einem Komparator sorgfältig verglichenen Maßstab dieser Länge, und legt denselben wie ein zu teilendes Objekt auf die Platte  $P_1$ . Man stellt dann das an dem Schlitten befindliche Mikroskop genau auf den Nullpunkt der Teilung ein und vollführt 500 Umdrehungen der Schraube; es muß dann das Mikroskop sich am andern Ende des Maßstabes befinden. Ist das nicht der Fall, so entspricht die mittlere Höhe eines Schraubenganges nicht genau  $1^{\text{mm}}$ . Bei Vergleichung der hier beschriebenen Teilmaschine von Bianchi mit einem Normalmaßstab fand ich, daß auf  $540^{\text{mm}}$  im Mittel 540,08 Umdrehungen der Schraube kamen. Die Höhe eines Schraubenganges ist daher im Mittel

$$\frac{540}{540,08} = 0,99985$$

oder der Schraubengang ist um 15 Hunderttausendstel eines Millimeters klein. Es ist das ein Fehler, der in den meisten Fällen zu vernachlässigen ist, ja der, wie wir im zweiten Bande erkennen werden, schon durch kleinen Differenzen der Temperatur bedingt resp. überwogen wird.

Einer weiteren Prüfung bedarf es, um zu erkennen, ob die einzelnen Schraubengänge von gleicher Höhe sind. Man prüft das, indem man eine gegebene Teilung, etwa von 20 bis  $30^{\text{mm}}$ , die man sich mit der Maschine selbst anfertigen kann, an der Maschine verschiebt. Man bringt sie zunächst an das eine Ende der Maschine, stellt das Mikroskop auf das eine Ende der Teilung ein und verschiebt durch Drehung der Schraube den Schlitten, bis das Mikroskop auf dem anderen Ende der Teilung einsteht.

Man bringt dann wieder das erste Ende der Teilung unter das Mikroskop, verfährt wie vorher und so fort. Hat man eine Teilung von  $30^{\text{mm}}$  genommen, so müssen, wenn die Schraubengänge alle gleich sind, stets 30 Umdrehungen der Schraube das Mikroskop von dem einen Ende der Teilung zum andern bringen. In dieser Weise fand ich z. B. bei meiner Teilmaschine, daß die Schraubengänge in der Nähe der Enden nur etwa  $0,9996^{\text{mm}}$  betrugen, daß sie gegen die Mitte hin von beiden Seiten her größer wurden, etwa  $150^{\text{mm}}$  von beiden Enden entfernt den Wert  $1^{\text{mm}}$  erhielten und auf den mittleren  $250^{\text{mm}}$  zwischen 1 und  $1,0003^{\text{mm}}$  schwankten. Es sind das Fehler, die in den allermeisten Fällen ganz zu vernachlässigen sind.

Die Beschreibung der Methoden, nach denen die Höhe der Schraubengänge zu prüfen ist, läßt gleichzeitig erkennen, daß die Teilmaschine auch ein wertvoller Meßapparat ist; man kann die Länge von Platten, Röhren, kurz aller Gegenstände, die man wie die mit einer Teilung zu versiehenden Objekte auf der Platte  $P_1$  der Teilmaschine befestigen kann, mit derselben auf das schärfste messen. Wir werden sehen, wie die Teilmaschine vielfach zu diesem Zwecke verwertet wird.

Die mit der Teilmaschine herzustellenden Maßstäbe teilt man selten in kleinere Abteilungen als Millimeter oder höchstens  $0,5^{\text{mm}}$ , weil bei zu feine gezogenen Teilungen die Ablesung zu große Schwierigkeit bietet. Um Unterabteilungen des Millimeters mit den Maßstäben noch genau bestimmen zu können, bringt man an denselben einen Nonius an.

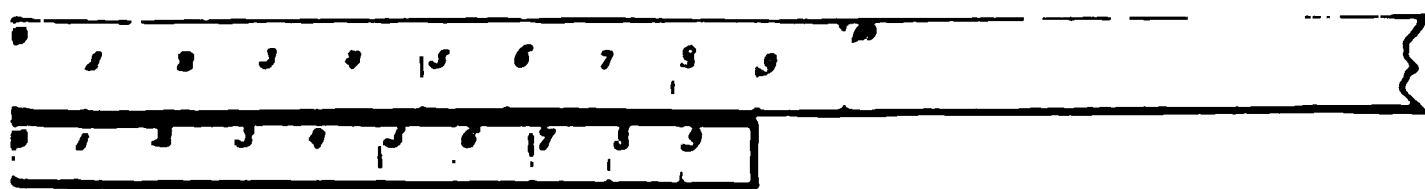
### Der Nonius.

Nehmen wir einen Maßstab von genau  $9^{\text{mm}}$  Länge und teilen ihn mit der Teilmaschine in 10 genau gleiche Teile, legen ihn dann der Länge nach an unser geteiltes Meter, sodaß er längs des geteilten Randes verlaufen werden kann, so ist dieser einfache Apparat ein Nonius. Da die Länge des Maßstabes  $9^{\text{mm}}$  in 10 Teile geteilt ist, so ist der Wert jedes Teilstriches  $0,9^{\text{mm}}$ . Der Wert der Teilung unseres Metermaßes ist dagegen  $1^{\text{mm}}$ . Der Unterschied beider daher

$$1^{\text{mm}} - 0,9^{\text{mm}} = 0,1^{\text{mm}}.$$

Es folgt daraus, daß, wenn die beiden Teilstriche 0 (Fig. 6) zusammenfallen, die beiden Teilstriche 1 um  $0,1^{\text{mm}}$  von einander abstehen,

Fig. 6.

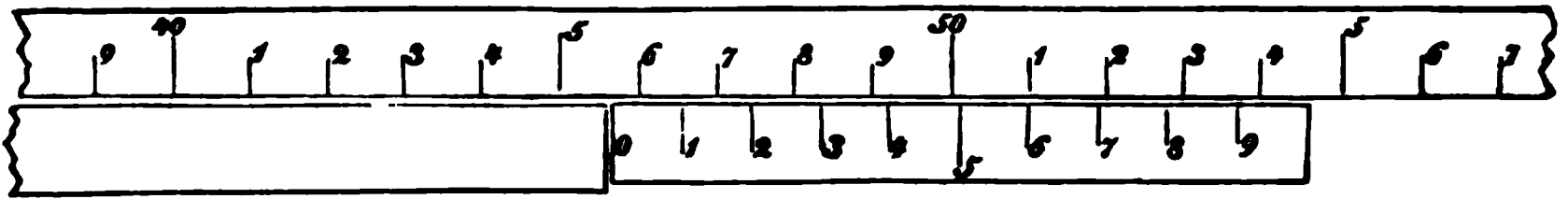


so werden Teilstriche 2 um  $0,2^{\text{mm}}$  u. s. f., bis der Teilstrich 10 des Nonius mit dem Teilstrich 9 des Maßstabes zusammentrifft. Ähnlich wird es sein, wenn statt der Teilstriche 0 zwei andere Teilstriche aufeinander treffen, so werden aus werden dann die beiden nächsten zu jeder Seite um 1, die folgenden um 2 Zehntel eines Millimeters differieren.

Nehmen wir nun an, man wolle die Länge eines Objektes mit unserm Noniusmaß bestimmen, und es zeigte sich, daß es  $4^{\text{cm}}$   $5^{\text{mm}}$  und einen Bruch-

teil eines Millimeters (Fig. 7) lang wäre. Dieser Bruchteil wird mittels des Nonius bestimmt.

Fig. 7.



Zu dem Ende führt man den Nonius, bis er das Ende des zu messenden Objektes berührt, und sucht, welcher Teilstrich des Nonius mit einem des Maßstabes zusammenfällt. In unserer Abbildung ist es der sechste.

Von diesem ausgehend findet man dann, daß die Teilstriche 5, 4, . . . . 0 des Nonius um  $0^{\text{mm}},1$ ,  $0^{\text{mm}},2$ , . . . .  $0^{\text{mm}},6$  hinter denen des Maßstabes zurückbleiben. Der auszuwertende Bruchteil ist demnach  $0^{\text{mm}},6$ , sein Wert ist in Zehnteilen eines Millimeters angegeben durch die Zahl, welche neben dem mit einem des Maßstabes zusammenfallenden Teilstrich steht.

Wir haben bei der Beschreibung des Nonius vorausgesetzt, daß derselbe eine Länge von  $9^{\text{mm}}$  habe und in 10 Teile geteilt sei. Dadurch erhielten wir die Teile des Millimeters in Zehnteln angegeben. Wir können nun ebensogut die Länge desselben zu  $19^{\text{mm}}$ ,  $29^{\text{mm}}$ ,  $39^{\text{mm}}$  nehmen und diese Länge in 20, 30, 40 Teile teilen; wir erhalten dann Zwanzigstel, Dreißigstel, Vierzigstel eines Millimeters. Wenn man jedoch die Teile zu sehr vervielfältigt, so tritt der Übelstand ein, daß zur Rechten und Linker der koinzidierenden Teilstriche eine Anzahl so wenig voneinander abstehender Teilstriche sich findet, daß sie noch zusammenzufallen scheinen und man daher nicht imstande ist anzugeben, welche nun eigentlich die koinzidierenden Teile sind. Indem man die Teilstriche möglichst fein zieht und dieselben durch ein Mikroskop betrachtet, kann man zwar die Genauigkeit ziemlich weit, vielleicht bis auf 0,01 eines Millimeters bringen; es gibt jedoch immer eine Grenze, welche nicht überschritten werden kann.

Der Nonius kann an allen Teilungen, auch an geteilten Kreisen angebracht werden; dort befindet er sich auf den Alhidaden. Wir werden ihn an allen feineren Meßapparaten wiederfinden.

## Das Sphärometer.

Die Mikrometerschraube dient nicht allein dazu Längen zu teilen sondern sie findet auch ganz besonders Anwendung, wenn es sich darum handelt, sehr kleine Abstände zu messen. Es folge hier die Beschreibung eines Apparates, in welchem sie benutzt wird, um sehr kleine Höhenunterschiede, z. B. die Dicke von Platten oder Drähten, mit größter Genauigkeit zu messen, des Sphärometers.

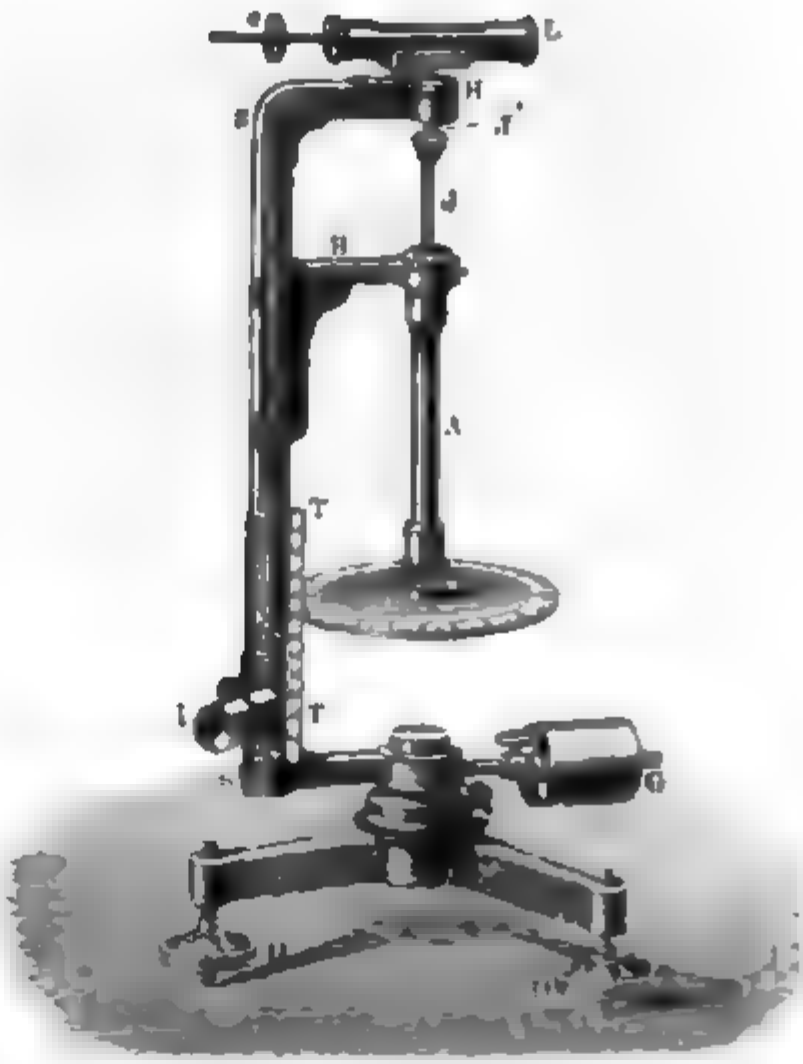
Der Hauptteil dieses Apparates (Fig. 8) besteht in einer möglichst genau gearbeiteten Mikrometerschraube, deren Gänge die Höhe von  $0^{\text{mm}}$  haben. Dieselbe bewegt sich in einer Mutter, welche unten in der Hülse sich befindet. Die Hülse A ist in dem Arm B unveränderlich befestigt und wird mittels desselben von dem Stativ SSG getragen, welches seinerseits auf dem Dreifuß DD aufgesetzt ist. Um durch dieses Stativ den Apparat nicht einseitig zu belasten, ist bei G an der anderen Seite des Punktes,

welchem der Rahmen *SS* auf den Dreifuß gesetzt ist, ein Gegengewicht angebracht. Der Dreifuß ist mit Stellschrauben versehen, um den Apparat vertikal zu stellen. In der Büchse *A* befindet sich ein oben hervorragender Stahlstift *J*, welcher mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Wird die Mikrometerschraube in dem einen Sinne gedreht, so hebt sie den Stift *J* empor, wird sie in dem andern Sinne gedreht, so sinkt der Stift *J* durch sein eigenes Gewicht herab. Auf den Stift *J* kann ein kleiner Stahlstiller aufgeschraubt werden oder eine ziemlich scharfe Schneide, wie sie die Figur an dem Stifte *J'* zeigt. Gerade über dem Stifte *J* ist durch den horizontalen Arm *SH* ein unten mit einer Schneide versehener Stift *J'* geführt, welcher in der Durchbohrung des Armes mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Auf der oberen Spitze dieses Stiftes ruht die um eine bei *a* befestigte Achse drehbare Libelle *L*. Damit die Libelle auf die Spitze des Stiftes *J'* nur einen sehr leisen Druck ausübt und so der Stift *J'* auf den leisesten Druck von unten her emporsteigt, ist auf der andern Seite der Achse *a* das Gegengewicht *c* angebracht.

Durch Heben oder Senken des Stiftes *J*, der mit einer Schneide auf dem Teller oder der Schneide des untern Stiftes *J* ruht, kann man somit die eine Seite der Libelle heben oder senken, also immer verursachen, daß die Libelle genau horizontal steht. Diese horizontale Stellung der Libelle ist das Hilfsmittel, um mit dem Apparate messen zu können.

Diese Messung selbst geschieht an der unten am Rahmen *S* angebrachten Mikrometertheilung *T* und an der Scheibe *Z*, welche auf ihrem Rande eine Teilung trägt, welche den Umfang der Scheibe in 500 gleiche Teile teilt. Diese Scheibe ist unten an die Mikrometerschraube angeschraubt, so daß die Achse der Schraubenspindel gleichzeitig die Achse der Kreisscheibe ist. Wie erwähnt, ist die Höhe eines Schraubenganges der Mikrometerschraube ein halbes Millimeter, es bedarf daher zwei Umdrehungen der Schraube, um die Scheibe an der Teilung  $1^{\text{mm}}$  zu heben. Die Teilung *T* ist an dem Apparate so befestigt, daß jedesmal, wenn die Scheibe einen Teilstrich passiert, der Nullpunkt der Teilung auf der Scheibe an dem Rande der Karte *T* vorübergeht. Die auf die Teilung *T* gerichtete Lupe *l* hat den

Fig. 8.



Zweck, genau zu erkennen, welche Stellung zwischen den Teilstrichen die Scheibe hat.

Aus der Beschreibung des Apparates ergibt sich leicht, wie bei den Messungen verfahren werden muß. Setzen wir voraus, es solle die Dicke einer planparallelen Glasplatte gemessen werden. Man schraubt auf die Spitze des Stiftes  $J$  den kleinen Stahlteiler und schraubt die Mikrometerschraube so hoch empor, daß die Libelle genau horizontal steht. Man liest dann die Stellung der Scheibe  $Z$  an der Teilung  $T$  ab. Befinde sich der Rand der Scheibe zwischen den Teilstrichen 2 und 3, aber näher an 2, und sei der Teilstrich 325 der auf der Scheibe angebrachten Teilung an dem Rande der Platte  $T$ . Da die Höhe der Schraubengänge  $0,5^{\text{mm}}$  ist, so entspricht der Drehung der Schraube um einen Teilstrich ein Heben oder Senken der Mikrometerschraube um  $0,001^{\text{mm}}$ . Die soeben abgelesene Stellung der Scheibe gibt somit an, daß, wenn die Libelle genau horizontal steht, und zwischen der Schneide  $J'$  und dem Teller  $J$  nichts zwischen geschoben ist, daß dann die Scheibe sich  $2,325^{\text{mm}}$  unter dem Nullpunkte der Teilung  $T$  befindet.

Nun wird die Mikrometerschraube und damit der Teller  $J$  gesenkt, soweit, daß man die Glasplatte auf denselben legen kann. Ist das geschehen, so wird die Mikrometerschraube wieder gehoben, bis die Schneide  $J'$  von der Glasplatte berührt wird, und dann die Mikrometerschraube vorsichtig weiter gedreht, bis die Libelle wieder genau horizontal steht. Diese Beobachtung beweist, daß die Schneide  $J'$  wieder dieselbe Höhe hat wie vorhin, die nach oben gewandte Fläche der Glasplatte ist also in der Lage, in der vorhin der Teller  $J$  war, der Teller  $J$  und damit die Scheibe  $Z$  ist also um die Dicke der Glasplatte niedriger wie vorhin. Wir erhalten also die Dicke der Glasplatte, wenn wir von der jetzt beobachteten Stellung der Scheibe die vorher bestimmte Stellung abziehen. Befinde sich die Scheibe jetzt zwischen dem Teilstriche 3 und 4, aber näher bei 4, und sei der Teilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte  $T$ . Da die Scheibe näher bei 4 als bei 3 ist, so folgt, daß sie mehr als  $3,5^{\text{mm}}$  tiefer ist als der Nullpunkt der Teilung, und zwar, da der Teilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte  $T$  ist, um  $0,438^{\text{mm}}$ . Die jetzige Stellung der Scheibe ist also  $3,938$ . Hiervon den vorhin bestimmten Wert  $2,325$  abgezogen gibt  $1,613^{\text{mm}}$  als Dicke der Glasplatte. Zur Erreichung größerer Genauigkeit wird man die Messung einige Male wiederholen. Da man die Libelle nicht ganz genau einzustellen imstande ist, so wird man bei den verschiedenen Messungen einige Teilstriche Differenz finden; man nimmt dann das Mittel aus den gefundenen Zahlen.

Zur Messung von Drähten wendet man an Stelle des Tellers auf dem unteren Stift die Schneide an; man schiebt dann ein kleines Stückchen des zu untersuchenden Drahtes zwischen die Schneiden, indem man in übrigen bei der Messung ganz in der angegebenen Weise verfährt.

### Das Kathetometer.

Bei physikalischen Untersuchungen findet man sich oft in die Notwendigkeit versetzt, kleinere oder größere Höhenunterschiede zu messen, besonders von Flüssigkeitssäulen, ohne daß man an dieselben direkt einen Maßstab anlegen kann.

Zu diesem Zwecke haben zuerst die französischen Physiker Dulong und Petit einen besondern Apparat konstruiert und bei ihren Versuchen über die Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme zu Messungen benutzt. Später wurde dieser Apparat von Pouillet vergrößert und Kathetometer genannt.

Das in Fig. 9 und 10 abgebildete Kathetometer ist nach der ihm von Staudinger gegebenen Form konstruiert, nur die Anbringung des Fernrohrs Fig. 10 weicht von der von Staudinger gewählten Anordnung etwas ab. Das der Beschreibung zugrunde liegende Exemplar ist vom Mechaniker Schubart in Gent verfertigt.

Die wesentlichen Bestandteile des Apparates sind ein vertikaler Maßstab, an dem ein horizontales Fernrohr auf und ab geschoben werden kann. Man stellt zu den Messungen das Fernrohr auf die Kuppen der beiden Flüssigkeitssäulen an, und die beiden Stellungen des Fernrohres am Maßstab geben die Höhendifferenz der beiden Flüssigkeitssäulen.

So vorzüglich der Apparat ist, wenn er richtig geordnet ist, unrichtige Resultate kann er ebenfalls liefern, deshalb wird es gut sein, ihn etwas genauer zu beschreiben.

Auf einem zweieniseernen, an drei Stellen mit Stützen SS versehenen Fuß F (Fig. 9) steht eine vertikale stählerne Achse A-A'; sie ist

schon sichtbar, wo die Messinghülle in der Zeichnung fortgenommen ist. In diese kann sich ein hohler Messingzylinder  $HH'$  frei drehen. Um die Bewegung leicht zu machen, ist derselbe oben bei  $H$  von einer stählernen Schraube durchsetzt, welche oben auf der stählernen Achse aufsteht; durch

Fig. 9.





gelindes Anziehen der Schraube kann man bewirken, daß die Reibung an dem unteren Ende der Hülse, wo sie auf einen den Fuß umgebenden Reif sich stützt, sehr gering ist, indem die Hülse dann fast ganz von der Schraube getragen wird. An der Hülse ist einerseits der Maßstab  $AB$  der Achse genau parallel, an der andern Seite ein dem Maßstab das Gleichgewicht haltender massiver Messingzylinder  $GG'$  befestigt. Der

Fig 10



Maßstab besteht aus einem Prisma von Gußstahl, dessen Seiten in einer Breite von  $8^{mm}$  möglichst glatt gehobelt, dann aber stark ausgehöhlt sind. Der Maßstab ist wie das Gegengewicht oben und unten an der Hülse befestigt.

Die Basis des Prismas, die vordere Seite ist ebenfalls glatt abgehobelt. In der Mitte derselben ist ein Silberstreifen eingesetzt, von  $1^{m,1}$  Länge und  $8^{mm}$  Breite. Derselbe ist  $1^{m}$  lang in Millimeter geteilt.

Auf den glattgehobelten und geschliffenen Seitenflächen des Prismas gleitet ein Schlitten  $de$ , von welchem Fig. 1 eine vergrößerte Abbildung gibt, auf und ab, welcher das Fernrohr mit Zubehör trägt. Der Schlitten besteht aus zwei Teilen, welche in der Zeichnung mit  $d$  und  $e$  bezeichnet sind. Derselbe gleitet mit sanfter Reibung, die durch etwas

Öl noch vermindert wird, an dem Prisma ganz regelmäßig und ohne Schwankung auf und ab.

Der obere Teil des Schlittens  $d$  ruht mit einem kleinen Stahlfortsatz auf dem obern Ende der im untern Teile des Schlittens in einer Mutter gehenden Mikrometerschraube  $m$  und wird durch eine elastische Feder aus Stahl stets fest an dasselbe angeedrückt.

Durch eine Klemmschraube  $q$ , welche ein der Seite angepaßtes Messingstück gegen das Prisma drückt, kann man den Schlitten festhalten. Mit der Mikrometerschraube  $m$  kann dann der obere Teil des Schlittens etwas gehoben oder gesenkt werden, um eine möglichst feine Einstellung des Fernrohrs auf das Beobachtungsobjekt zu erzielen.

Im Schlitten ist ein abgeschrägter Ausschnitt über dem Buchstaben  $A$ , dessen eine Seite mit einem Nonius versehen ist, der gerade an der Teilung des Silberstreifens anliegt. Die Stellung des Schlittens an der Skala liest man durch eine Lupe  $l$  (Fig 9) ab; der Nonius gibt direkt  $0,01$  ab.

Das Fernrohr  $CD$  ruht in den genau zylindrisch ausgedrehten Gehäusen  $r$  und  $r'$  und wird dort mit gelindem Druck durch zwei zur Seite schlagende Schieber festgelegt. Dort, wo das Fernrohr auf den Gehäusen aufliegt, hat dasselbe zwei genau zylindrisch abgedrehte Verdickungen.

diesen Verdickungen ruhen die unten genau ebenso zylindrisch ausgedrehten Füße der Libelle  $N$ , welche durch dieselben Schieber, die das Fernrohr festlegen, durch einen schwachen seitlichen Druck festgehalten werden.

Die beiden das Fernrohr tragenden Gabeln sind durch eine schmale Messingplatte miteinander verbunden, welche von der in dem Schlitten befestigten und dort gerade vor der Teilung befindlichen Achse  $a$  getragen wird und um diese Achse in einer der Ebene der Teilung parallelen Ebene drehbar ist. Diese Drehung, durch welche das Ende  $C$  des Fernrohres etwas gehoben oder gesenkt werden kann, wird durch die kleine Schraubenmutter  $s$  bewirkt. Zu dem Zwecke ist bei  $b$  nahe dem einen Ende der das Fernrohr tragenden Platte  $bc$  an diese eine Mikrometerschraube  $b\ s$  angesetzt, welche durch eine Durchbohrung des an dem Schlitten unveränderlich fest verbundenen Armes  $A$  hindurchgeführt ist. Schraubt man die Mutter  $s$  in dem einen Sinne, so wird dadurch die Mikrometerschraube und damit das Ende  $C$  des Fernrohres herabgezogen; schraubt man die Mutter in dem andern Sinne, so läßt sie die Mikrometerschraube eine Strecke frei, und eine Feder  $f$  hebt die Schraube und damit das Ende  $C$  des Fernrohres, bis die Mutter  $s$  wieder an der untern Fläche des Armes  $A$  anliegt. Der Zweck dieser Vorrichtung wird sofort hervortreten.

Nach der Beschreibung der Einrichtung unseres Meßapparates haben wir noch einiges zu bemerken über die Art, wie er zu regulieren ist.

Das Fernrohr ist ein optischer Apparat, den wir später zu beschreiben haben. Hier müssen wir nur erwähnen, daß es in seinem Innern zwei unter einem rechten Winkel gekreuzte Spinnfäden besitzt, ein sogenanntes Fadenkreuz, welches man stets zugleich mit dem Objekt, auf welches das Fernrohr eingestellt ist, genau sieht. Man kann leicht bewirken, daß der Kreuzungspunkt der Fäden den zu fixierenden Punkt deckt. Es gibt nun in jedem Fernrohr eine festbestimmte Linie, die optische Achse, welche durch den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes und durch den Mittelpunkt des Objectives geht. Wenn der Mittelpunkt des Fadenkreuzes den zu fixierenden Punkt deckt, so kann man sicher sein, daß der fixierte Punkt in der Verlängerung der optischen Achse liegt.

Die Gabel, in welcher das Fernrohr liegt, sowie das Fernrohr selbst sind genau zylindrisch gearbeitet. Dreht man daher das Fernrohr in seinen Lagen um sich selbst,

so kann seine geometrische Achse nicht geändert werden, es darf aber auch die optische Achse dadurch nicht geändert werden, d. h. sie muß genau mit der geometrischen Achse zusammenfallen. Sieht man bei

Fig. 11



der Drehung des Fernrohres nach und nach verschiedene Punkte in den Mittelpunkt des Fadenkreuzes fallen, so ist das nicht der Fall: dann muß man die optische Achse korrigieren, d. h. das Fadenkreuz so lange regulieren, bis bei einer Drehung des Fernrohres um sich selbst stets derselbe Punkt von seinem Kreuzungspunkte bedeckt wird. Will man dann die



Lage der optischen Achse korrigieren, so hat man nur die der geometrischen zu regulieren, da nach dieser Korrektion beide zusammenfallen.

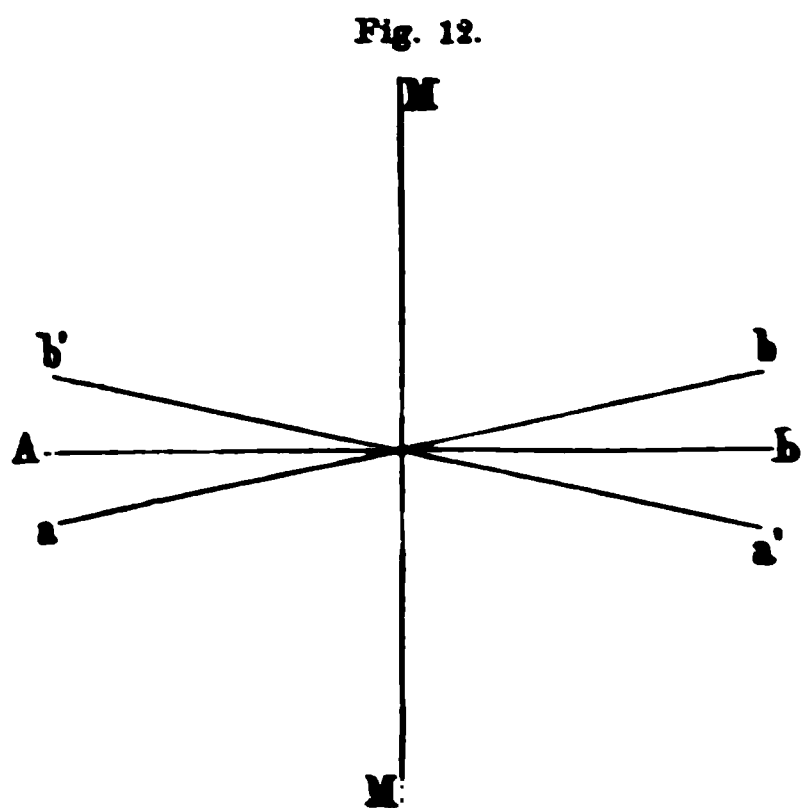
Nachdem also die Fernrohrachse korrigiert ist, hat man vor Gebrauch des Kathetometers

- 1) dafür zu sorgen, daß die Libelle der Achse des Fernrohrs parallel ist;
- 2) die Achse des Fernrohrs genau senkrecht zu dem Maßstab zu stellen;
- 3) die Rotationsachse des Kathetometers und damit den Maßstab  $AB$  vertikal zu stellen.

Um die erste Bedingung zu prüfen, ist die Libelle auf die zylindrisch abgedrehten Verdickungen des Fernrohrs mit den ebenso genau ausgedrehten Füßen einfach aufgesetzt, so daß sie abgenommen und wieder in umgekehrter Lage hingestellt werden kann, so daß das vorher nach  $D$  zeigende Ende jetzt nach  $C$  zeigt, und umgekehrt. Sei nun  $XY$  die Fernrohrachse und stelle  $AB$  (Fig. 11) die Libelle vor, deren Luftblase bei  $m$  stehe. Wird nun die Libelle in der angegebenen Weise umgesetzt, und ist sie der Fernrohrachse in der Tat parallel, so kehrt sich dieselbe bloß um, in ihrer zweiten Lage die erste deckend; sie muß wieder in  $A'B'$  liegen. Die Luftblase muß dann wieder genau so liegen wie früher, sie darf gegen den Beobachter ihre Lage nicht geändert haben. Hatte dagegen die Libelle die Lage  $ab$ , so hat sie nach der Umstellung die Lage  $a'b'$ , und die Luftblase

würde ihre Lage geändert haben. Durch Drehung einer Schraube, welche das eine Ende der Libelle in ihren Lagern hebt und senkt, wird sie in dem letzteren Falle korrigiert, bis eine Umstellung der Lage der Luftblase nicht mehr ändert.

Um die zweite Bedingung zu prüfen, hat man dem Instrument nur eine Drehung um  $180^\circ$  zu erteilen. Ist das Fernrohr  $AB$  (Fig. 12) senkrecht zum Maßstab  $MM$ , so ist es nach der Drehung sich selbst parallel; es muß also die Luftblase in bezug auf den Beobachter dieselbe Lage beibehalten haben. Steht das Fern-



rohr nicht senkrecht, sondern etwa parallel  $ab$ , so hat es nach der Drehung die Lage  $a'b'$ , und die Luftblase der Libelle muß ihre Stellung geändert haben. Ist das der Fall, so wird durch Drehung der Schraubenmutter das eine Ende des Fernrohrs soviel gehoben oder gesenkt, bis die Drehung des Instrumentes um  $180^\circ$  die Stellung der Libellenblase nicht mehr ändert.

Diese Korrektion genügt es nicht ein für allemal vorzunehmen; der auch bei den bestgearbeiteten Apparaten kann der Schlitten nicht immer vollkommen in der gleichen Weise an das Prisma angepreßt werden, und deshalb ist das Fernrohr nicht an allen Stellen sich genau parallel. Man muß deshalb in gleich zu beschreibender Weise den Maßstab vertikal stellen; man muß man, wenn die Lage der Luftblase bei irgend einer Stellung des Schlittens anzeigt, daß das Fernrohr nicht mehr genau horizontal steht, durch Drehung der Mutter  $s$  das Fernrohr in die horizontale Lage zurückführen.

Um die dritte Regulierung, das Vertikalstellen der Rotationsachse des Instrumentes vorzunehmen, stellt man das Fernrohr der Verbindungslinie zweier Stellschrauben des Fußes parallel, und dreht eine oder beide Stellschrauben so lange, bis die Blase der Libelle in der Mitte steht; darauf dreht man den Apparat um  $90^\circ$  und bringt durch Drehung der dritten Schraube die Blase ebenfalls in die Mitte. Hat man auf diese Weise die Fernrohrachse in zwei aufeinander senkrechten Richtungen horizontal gestellt, so ist sie es in allen, und die zur Fernrohrachse senkrechte Rotationsachse und somit auch der Maßstab des Apparates stehen vertikal.

### Der Theodolith.

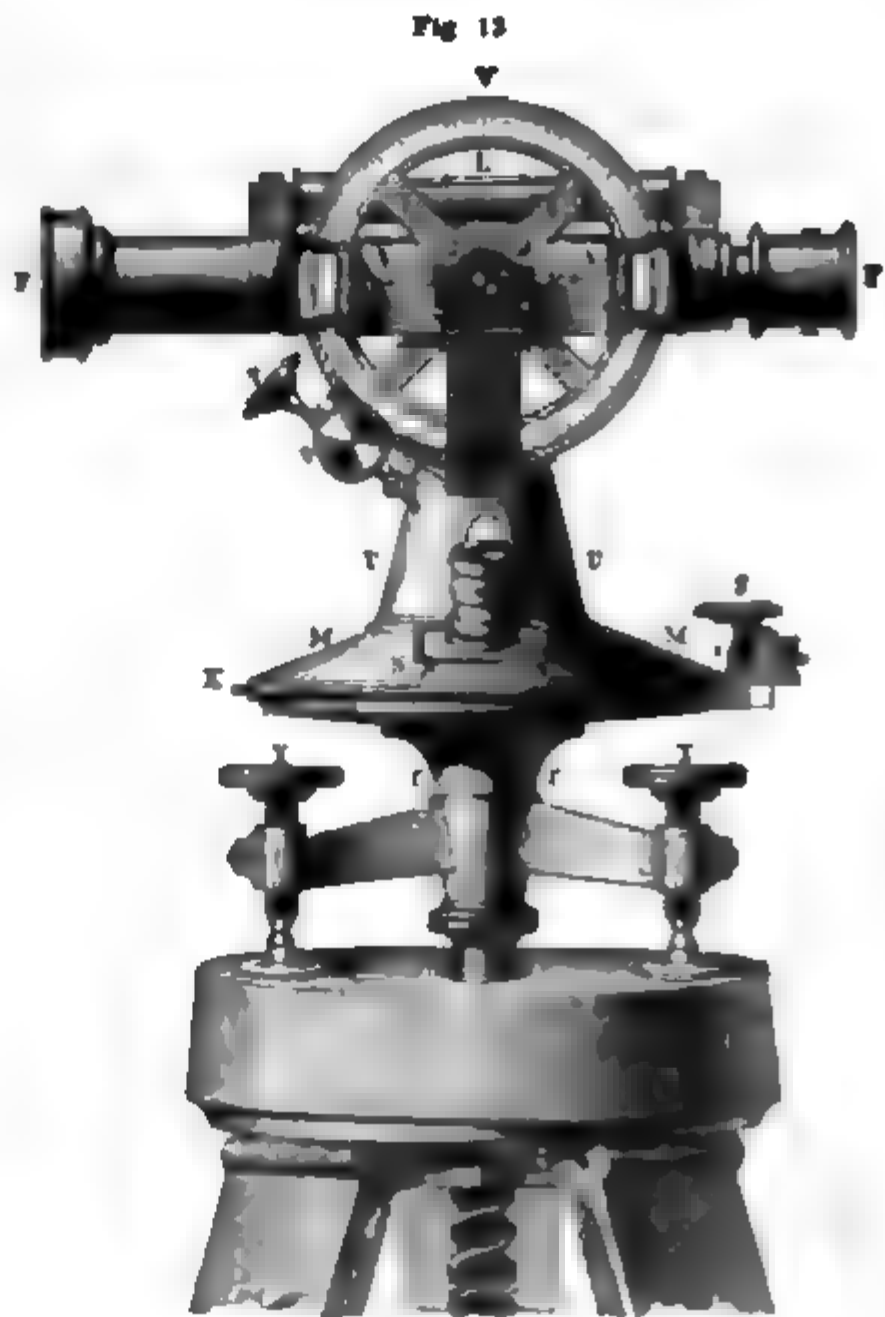
Außer der Abmessung von Längen haben wir, besonders in dem optischen Teile der Physik, häufig genaue Winkelmessungen auszuführen. Dieselben werden mittels des Theodolithen angestellt. Der Theodolith ist ein in geringerer oder größerer Vollkommenheit schon sehr lange bekanntes Winkelmeßinstrument, dessen erster Verfertiger ebenso unbekannt ist als die eigentliche Bedeutung des Namens. Man hat nur seinen Namen aus den Griechischen herleiten wollen, doch ist die Ableitung ebenfalls unbestimmt als gebräuchlich.

Der Theodolith ist ein Winkelmeßinstrument, welches aus zwei getheilten Kreisen, einem horizontalen und einem vertikalen, mit Fernrohr besteht.

Nachfolgender Zeichnung (Fig. 13) und Beschreibung liegt ein Exemplar aus der Werkstätte mathematischer Apparate von Breitschneid in Kassel zu Grunde.

Auf einem massiven, mit Stellschrauben

versehenen Dreifuß C' C' befindet sich ein Kreis von Messing K, der mittels Sprossen in dem Mittelstücke des Dreifußes befestigt ist. Auf dem Kreise ist



ein silberner, mit einer Kreisteilung versehener Streifen eingelegt. Mit diesem Kreise in gleicher Ebene und genau zentriert liegt ein kleiner Kreis, dessen äußerer Umfang den innern Rand des Kreises  $K$  berührt. Derselbe ist um eine durch seinen Mittelpunkt gehende, im Mittelpunkt des Dreifußes eingeschliffene Achse, mit welcher er durch Speichen verbunden ist, drehbar. Der Kreis heißt der Alhidadenkreis. An den beiden Enden eines Durchmessers besitzt der Alhidadenkreis Nonien  $N$ , welche je nach der Teilung des Kreises halbe Minuten oder noch kleinere Bruchteile von einem Grade geben. An demselben Kreise sind über den Nonien kleine Mikroskope befestigt zur genaueren Ablesung. Der Alhidadenkreis kann mittels der Klemmschraube  $S$  festgestellt werden, an der zur feineren Einstellung des Kreises die Mikrometerschraube  $s$  angebracht ist.

An einer Säule  $UU$ , welche auf dem Alhidadenkreis festgeschraubt ist, befindet sich das Fernrohr  $FF'$ . Die optische Achse des Fernrohrs wird von der mit der Achse des Alhidadenkreises zusammenfallenden Drehungsachse der Säule  $U$  geschnitten. Das Fernrohr selbst ist an einer auf seiner optischen Achse senkrechten Achse  $D$  befestigt, welche in zwei Zapfenlagern drehbar eingelegt ist. Die Achse  $D$  ist genau dem Horizontalkreis parallel. Auf dem Fernrohr befindet sich eine Libelle  $L$ . An dem Fernrohr in unveränderlich fester Verbindung und auf der Drehungsachse  $D$  desselben senkrecht ist der Vertikalkreis  $V$  angebracht. Zu beiden Seiten des Kreises, an den Enden eines Durchmessers, befinden sich feste, nicht drehbare Nonien  $A$  und  $B$ . Den Nullpunkten der Nonien entsprechend sind auf der Teilung des Vertikalkreises zwei Nullpunkte, von denen aus die Teilung nach beiden Seiten von  $0—90^\circ$  fortzählt. Die optische Achse des Fernrohrs muß mit dem durch die Nullpunkte angegebenen Durchmesser des Vertikalkreises zusammenfallen. Dreht man Fernrohr samt Kreis, so liest man an den Nonien die Größe der Drehung ab. Der Vertikalkreis kann durch die Klemmschraube  $Q$  festgestellt und mittels der an dieser befestigten Mikrometerschraube  $q$  feiner eingestellt werden.

Der ganze Apparat steht auf einem massiven Stativ, an welchem er mittels einer Schraube und einer Spiralfeder befestigt ist.

Will man mittels des Theodolithen z. B. die Winkeldistanz zweier in einer Horizontalebene befindlicher Punkte nehmen, so hat man das Instrument zunächst in ähnlicher Weise wie das Kathetometer zu regulieren, und zu prüfen, ob die Libelle parallel dem Fernrohr ist, ob die Drehachse des Fernrohrs zur optischen Achse senkrecht und mit dieser in einer zur Achse des Alhidadenkreises senkrechten Ebene liegt, und dann, ob die Drehungsachse des Alhidadenkreises senkrecht zum Horizontalkreis ist. Dann hat man den Horizontalkreis horizontal und damit die Rotationsachse des Vertikalkreises vertikal zu stellen<sup>1)</sup>.

Hat man so das Instrument vorbereitet, so stellt man das Fernrohr zunächst auf den einen Punkt ein und merkt den Stand der Nonien am Horizontalkreise. Darauf verfährt man ebenso mit dem andern Punkte, und die Differenz der Nonienangaben gibt die gesuchte Winkeldistanz. Die beiden Nonien  $N$  geben jedesmal zwei Ablesungen, also auch zwei sich kontrollierende Werte, die zugleich zum Eliminieren etwaiger Teilungsfehler dienen.

1) Eine vorzügliche Zusammenstellung aller Korrekturen am Theodolithen gibt Bauernfeind, „Elemente der Vermessungskunde“ Bd. I.

Außer Längen und Winkel sind es nun vorzüglich noch Gewichte, welche wir in der Physik zu messen haben. Dieses geschieht mit der Wage, deren Beschreibung und Gebrauch wir aber erst an einer andern Stelle vorführen können.

## Einige Sätze aus der Differential- und Integralrechnung.

### Differentiation.

Wir haben bei Besprechung der in der Physik anzuwendenden Methode die Bedeutung der Mathematik hervorgehoben, indem dieselbe nicht nur dazu dient, die physikalischen Gesetze in kurzer Form auszusprechen, sondern auch dazu, aus diesen Gesetzen weitere Folgerungen abzuleiten. Ganz besonders dient zu diesen Entwicklungen die Differential- und Integralrechnung, so daß man bei einer vollständigen Darlegung auch der experimentellen Physik dieses Hilfsmittel nicht ganz entbehren kann. Da wir jetzt bei allen Lesern dieses Buches die Vertrautheit mit diesen Rechenoperationen voraussetzen dürfen, wollen wir an dieser Stelle die Grundbegriffe dieser Methoden kurz darlegen, soweit wir sie später unangänglich nötig haben. Unsere späteren Entwicklungen gewinnen dadurch an Kürze und Übersichtlichkeit, da wir dann nicht genötigt sind, in jedem einzelnen Falle die erforderlichen Ableitungen zu machen, sondern auf diese Stelle verweisen können.

Die physikalischen Gesetze geben uns eine Gleichung zwischen den zur Erscheinung bedingenden veränderlichen Größen, so daß also, wenn der Wert der einen, die wir in der Regel willkürlich ändern können, gegeben ist, die andere nach dieser Gleichung berechnet werden kann. Als Beispiel führten wir das Reflexionsgesetz an, der Zurückwerfungswinkel ist mit dem Einfallswinkel gleich; nennen wir ersteren  $y$ , letzteren  $x$ , so ist das Gesetz dargestellt durch die Gleichung

$$y = x.$$

Die Gleichung gibt somit für jeden Wert, den wir  $x$  willkürlich beilegen, den zugehörigen Wert von  $y$ . Andere Gesetze werden durch andere Beziehungen gegeben, wir werden Beziehungen finden wie  $y = ax^2$ ,  $x \cdot y = a$ ,  $y = \sin ax$  u. a. m., wenn immer  $y$  die Größe bedeutet, welche bestimmt werden soll, und die Größe, von der sie abhängt, gleich  $x$  gesetzt wird, wo außerdem  $a$  irgend eine konstante Größe bedeutet. Allgemein deutet es bekanntlich irgend eine Beziehung zwischen zwei solchen veränderlichen Größen durch das Zeichen

$$y = f(x)$$

an und nennt  $y$  eine Funktion von  $x$ .

In vielen Fällen ist es uns von der größten Bedeutung, die Änderung kennen zu können, welche  $y$  erfährt, wenn sich  $x$  um eine verschwindend kleine Größe ändert, das heißt um eine Größe, die kleiner ist als jeder vorgegebene Wert. Man nennt diese Änderungen die Differentialien von  $y$  und bezeichnet sie mit  $dy$  und  $dx$ , den Quotienten aus diesen beiden Differentialien, oder  $\frac{dy}{dx}$  nennt man den Differentialquotienten von  $y$  nach  $x$ .

Die Berechnung dieser Größen ergibt sich unmittelbar aus dem Begriff der Funktion, daß sie jeden Wert von  $y$  darstellt, wenn der zugehörige Wert von  $x$  gegeben ist. Ist  $y$  der Wert für irgend einen Wert von  $x$ , so können wir den dem Werte  $x + dx$  zugehörigen Wert mit  $y + dy$  bezeichnen, und erhalten dann

$$y + dy = f(x + dx)$$

$$dy = f(x + dx) - f(x); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Es sind nur die durch das Funktionszeichen  $f(x)$  angedeuteten Rechnungen auszuführen. Nehmen wir z. B. die Funktion  $y = ax^2$ , so wird die Rechnung folgende:

$$y + dy = a(x + dx)^2 = ax^2 + 2axdx + adx^2$$

$$dy = 2axdx + adx^2.$$

Da nun der Voraussetzung nach schon  $dx$  einen verschwindend kleinen Wert hat, so ist  $dx \cdot dx$  selbst gegen  $dx$  verschwindend klein, so daß wir es gleich Null setzen dürfen, und damit wird

$$dy = 2axdx; \quad \frac{dy}{dx} = 2ax.$$

Dieses Beispiel läßt zugleich erkennen, daß wenn auch  $dy$  einen verschwindend kleinen Wert hat, doch der Differentialquotient, also der Quotient aus den beiden verschwindend kleinen Größen  $dy$  und  $dx$  einen ganz bestimmten Wert hat, und zwar um so genauer, je näher wir uns  $dx$  Null denken. Denn die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + adx$$

gilt für jeden selbst endlichen Wert von  $dx$ ; lassen wir aber  $dx$  immer näher und näher gleich Null werden, so nähert sich der Quotient immer mehr dem Werte  $2ax$ ; lassen wir also  $dx$  kleiner werden als jede angebbare Größe, so unterscheidet sich auch der Quotient  $\frac{dy}{dx}$  von  $2ax$  um weniger als jede angebbare Größe, das heißt er nimmt diesen Wert an.

Ehe wir dazu übergehen, die wichtigsten der uns später begegnenden Differentialien abzuleiten, wollen wir zunächst einige allgemeine Sätze angeben, welche uns dabei dienen werden.

I. Ist die Funktion von  $x$ , der  $y$  gleich ist, eine Summe mehrerer Glieder, so ist  $dy$  gleich der Summe der Differentiale der einzelnen Glieder und der Differentialquotient der Summe gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Glieder. Es folgt das unmittelbar aus dem Begriffe der Summe, nach welchem die Veränderung einer Summe gleich ist der Summe der Veränderungen der einzelnen Summanden.

Hieraus folgt sofort, daß wenn in dieser Summe ein Glied vorkommt, welches konstant ist, also sich nicht ändert, wenn  $x$  sich ändert, dieses Glied in dem Differential nicht vorkommt, oder wie man sich kurz ausdrückt, das Differential einer konstanten Größe ist gleich Null.

Ist z. B.

$$y = ax^2 + b$$

so ist

$$y + dy = a(x + dx)^2 + b$$

$$dy = a(x + dx)^2 + b - ax^2 - b = 2axdx.$$

II Ist  $y$  gleich dem Produkte zweier Funktionen von  $x$ , so erhalten wir allgemein das Differential in folgender Weise. Seien die beiden Funktionen mit  $u$  und  $v$  bezeichnet, also  $y = u \cdot v$ . Wenn sich dann  $x$  um  $dx$  ändert, wird  $u$  in  $u + du$  und  $v$  in  $v + dv$  verwandelt, es wird also

$$y + dy = (u + du)(v + dv) = uv + u dv + v du + du dv.$$

Da nun auch hier das letzte Glied wieder verschwindend klein ist, so wird

$$dy = u dv + v du; \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Es ist somit jede Funktion mit dem Differential resp. dem Differentialquotienten der andern Funktion zu multiplizieren und diese Produkte sind zu addieren.

III Aus dem soeben abgeleiteten Satze erhalten wir auch unmittelbar das Differential oder den Differentialquotienten eines Quotienten zweier Funktionen. Ist

$$y = \frac{u}{v},$$

so können wir auch setzen

$$y \cdot v = u$$

$$y dv + v dy = du,$$

so wird

$$dy = \frac{du - y dv}{v}$$

übersetzen wir auf der rechten Seite wieder  $y$  durch seinen Wert

$$dy = \frac{du - \frac{u}{v} dv}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Das Differential, resp. der Differentialquotient eines Quotienten ist gleich dem Produkte aus dem Nenner und dem Differential resp. Differentialquotienten des Zählers, minus dem Produkte aus Zähler und dem Differential resp. Differentialquotienten des Nenners, die Differenz dividiert durch das Quadrat des Nenners.

Wir werden diese Sätze, wenn wir später darauf hinweisen, stets mit E I, E II, E III bezeichnen.

### Differentiale der wichtigsten Funktionen.

Wir leiten jetzt die Differentiale der Funktionen, welche uns vorzugsweise bei unseren physikalischen Untersuchungen vorkommen werden, kurz ab.

Um das Differential einer Potenz

$$y = x^n$$

zu erhalten, haben wir nur  $(x + dx)^n$  nach dem binomischen Satze zu entwickeln

$$(x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}dx^2 + \dots$$

Unter Beachtung, daß alle höheren Potenzen von  $dx$  gegen die erste zu vernachlässigen sind, wird

$$1 \dots \dots \dots dy = nx^{n-1}dx; \quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Da der binomische Satz für jeden beliebigen Wert von  $n$ , positiv oder negativ, ganz oder gebrochen gilt, so gilt dieser Differentialausdruck ebenfalls für jeden Wert von  $n$ .

Das Differential des Ausdruckes

$$y = \log x$$

erhalten wir durch Entwicklung von  $\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$  in eine Reihe, denn es ist

$$dy = \log(x + dx) - \log x = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

Ist der Logarithmus ein natürlicher, der auf die Grundzahl  $e = 2,71828$  bezogen ist, so ist

$$\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \frac{dx^2}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{dx^3}{x^3} - \dots + \dots$$

Ist der Logarithmus in einem andern System genommen, so muß die Reihe auf der rechten Seite mit dem in diesem System genommenen  $\log e$  multipliziert werden. Es folgt somit ganz allgemein

$$2 \dots \dots \dots dy = d \log x = \frac{dx}{x} \cdot \log e; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e.$$

Aus dem Differential des Logarithmus erhalten wir sofort das Differential der Exponentialfunktion

$$y = a^x.$$

Es ist

$$\log y = x \cdot \log a$$

$$\log(y + dy) = (x + dx) \log a$$

$$\frac{dy}{y} \cdot \log e = dx \log a,$$

somit

$$3 \dots \dots \dots dy = y \cdot dx \frac{\log a}{\log e} = a^x dx \frac{\log a}{\log e}; \quad \frac{dy}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log e}.$$

Wird  $a = e$  gleich der Basis des natürlichen Logarithmensystems gesetzt, so wird

$$3a \dots \dots \dots dy = e^x dx; \quad \frac{dy}{dx} = e^x.$$



Der Differentialquotient der Exponentialfunktion mit der Basis  $e$  ist somit der Funktion selbst gleich.

Für das Differential der trigonometrischen Funktion

$$y = \sin x$$

erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} dy &= \sin x \cos dx + \cos x \sin dx - \sin x \\ &= \sin x (\cos dx - 1) + \cos x \sin dx. \end{aligned}$$

Für ein verschwindendes  $dx$  ist nun  $\cos dx = 1$  und  $\sin dx$  gleich dem Bogen  $dx$  selbst zu setzen, damit wird

$$dy = d \sin x = \cos x \cdot dx; \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Ganz in derselben Weise wird

$$dy = d \cos x = -\sin x \cdot dx; \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Die Differentiale von  $y = \tan x$  erhalten wir durch Anwendung des Satzes E III. Wir schreiben

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$dy = \frac{\cos x \, d \sin x - \sin x \, d \cos x}{\cos^2 x}$$

$$dy = d \tan x = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ganz in derselben Weise erhält man

$$dy = d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Aus den Differentialen der trigonometrischen Funktionen ergeben sich sofort jene der zyklometrischen Funktionen. Ist nämlich

$$y = \sin x,$$

$$x = \arcsin y.$$

Die Zunahme des Bogens  $x$ , wenn der Sinus um  $dy$  wächst, ergibt sich aus (4)

$$dy = \cos x \, dx$$

$$dx = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Wenn wir also, um das Zeichen  $x$  für die gegebene willkürlich veränderliche Größe beizubehalten

$$y = \arcsin (\sin x),$$

so wird

$$dy = d \arcsin (\sin x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ebenso wird

$$9 \dots dy = d \arccos x = - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10 \dots dy = d \arctan x = \frac{dx}{1+x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$11 \dots dy = d \operatorname{arccot} x = - \frac{dx}{1+x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{1+x^2}.$$

Bei einem Hinweis auf die hier entwickelten Ausdrücke werden dieselben stets mit E 1, E 2 ... bezeichnen.

### Differentiation zusammengesetzter Funktionen.

Es wird uns mehrfach der Fall vorkommen, daß die Funktionen, denen wir bei den physikalischen Untersuchungen gelangen, zusammengesetzte sind, daß also innerhalb des Funktionszeichens  $\log$ ,  $\sin$  etc. selbst noch wieder eine Funktion steht. Sei uns also z. B. der Ausdruck  $y = \log u$ , und sei nun  $u$  wieder eine Funktion von  $x$ , etwa gleich  $\sin x$ . Wir erhalten dann zunächst unter Beachtung, daß jedenfalls  $y$  mit  $du$  wächst, wenn  $u$  um  $du$  zunimmt, nach E 2

$$dy = \log e \frac{du}{u}.$$

Die Zunahme von  $u = \sin x$  oder  $du$ , wenn  $x$  um  $dx$  wächst, dann nach E 4

$$du = \cos x dx;$$

setzen wir diesen Wert von  $du$  in die Gleichung für  $dy$  ein, so wird

$$dy = \log e \frac{\cos x}{\sin x} dx; \quad \frac{dy}{dx} = \log e \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Da nun

$$\log e \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{dy}{du}; \quad \cos x = \frac{du}{dx},$$

so ist der für  $\frac{dy}{dx}$  erhaltene Ausdruck gleich

$$IV \dots \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Wir leiten daraus die allgemeine Regel ab, die wir bei späterer Benutzung stets mit E IV bezeichnen, daß wir bei solchen zusammengesetzten Funktionen zunächst den Differentialquotienten so zu bilden haben, wenn die Funktion  $u$  eine einfache veränderliche Größe wäre, und diesen Quotienten mit dem Differentialquotienten der Funktion  $u$  nach  $x$  multiplizieren müssen. Da nun das Differential eines Ausdrucks gleich dem Differentialquotienten multipliziert mit dem Differential der gegebenen veränderlichen Größe, so wird

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx.$$

Unter Anwendung dieser Regel erhalten wir z. B. sofort

$$\frac{da^{\sqrt{x}}}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Wir setzen wir zunächst

$$y = a^{\sqrt{x}} = a^u,$$

so nach E 3

$$\frac{dy}{du} = \frac{\log a}{\log e} a^u.$$

Da nun  $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ , so ist nach E 1

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^{\sqrt{x}}}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

## Differentiation von Funktionen mit mehreren Veränderlichen.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß wir nur zwei veränderliche Größen haben, eine  $x$ , der wir willkürlich jeden Wert beilegen können, und die zweite  $y$ , welche als Funktion von  $x$  bestimmt wird. Wenn auch notwendig, so kommen uns später doch nicht lediglich solche einfachere Beziehungen zur Behandlung: in manchen Fällen hängt die zu bestimmende Größe von zwei oder drei Größen ab, die wir willkürlich ändern können. So z. B. werden wir später finden, daß der Raum, den eine gegebene Quantität eines Gases ausfüllt, abhängig ist von dem Drucke, unter welchen wir dasselbe bringen, und von der Temperatur, welche wir demselben erteilen. Wir können Druck und Temperatur beliebig wählen: erst wenn diese gegeben sind, ist das Volumen des Gases bestimmt. Sei nun wieder die zu bestimmende Größe gleich  $y$  gesetzt, und dieselbe durch die beiden gleichzeitig zu ändernden Größen  $x$  und  $z$  bestimmt. Der allgemeine Ausdruck dieser Abhängigkeit ist

$$y = f(x, z).$$

Unter dem Begriffe des Differentials ist dann

$$dy = f(x + dx, z + dz) - f(x, z).$$

Die so eintretende Änderung von  $y$  können wir auch als die Summe zweier Änderungen auffassen, wenn sich erstens nur  $x$  um  $dx$  ändert, während  $z$  konstant bleibt, und sich zweitens  $z$  um  $dz$  ändert, wenn  $x$  konstant bleibt, also setzen

$$dy = [f(x + dx, z) - f(x, z)] + [f(x, z + dz) - f(x, z)].$$

Die in der ersten Klammer eingeschlossenen Glieder sind das Differential von  $y$ , wenn es nur eine Funktion von  $x$  wäre, die in der zweiten dasselbe, wenn es nur eine Funktion von  $z$  wäre. Da wir nun das Differential

einer Funktion auch als das Produkt des Differentialquotienten in das Differential der veränderlichen Größe schreiben können, so schreibt man

$$f(x + dx, z) - f(x, z) = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx; \quad f(x, z + dz) - f(x, z) = \frac{\partial y}{\partial z} dz,$$

worin man das Zeichen  $\partial$  anstatt  $d$  wählt, um anzudeuten, daß bei Bildung dieses Differentialquotienten nur die Größe als veränderlich betrachtet wird, deren Differential im Nenner steht. Man nennt die so gebildeten Differentialquotienten die partiellen Differentialquotienten jedesmal nach der Größe, die bei Bildung derselben als veränderlich genommen wird. Für das Differential  $dy$ , das sogenannte totale Differential der Funktion erhalten wir dann

$$\text{V} \quad \dots \quad dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz.$$

Die Regel zur Berechnung dieses Differentials ist somit folgende: Wir berechnen zunächst die Differentiale der Funktion, wie wenn jedesmal nur eine der veränderlichen Größen veränderlich wäre, und addieren dann diese einzelnen Differentiale zusammen.

Ganz dieselbe Regel liefert uns, wie man durch die gleichen Überlegungen erkennt, das Differential einer Funktion von drei Veränderlichen. Sei

$$r = f(x, y, z),$$

so ist

$$\text{VI} \quad \dots \quad dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz.$$

Um nach dieser Regel ein Beispiel durchzuführen, sei

$$y = \sqrt{x^2 + z^2} = (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach E IV setzen wir zunächst  $x^2 + z^2 = u$ , dann wird zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Da nun bei dieser Differentiation in  $u$  nur  $x$  veränderlich,  $z$  als konstant zu betrachten ist, so ist  $\partial u = 2x \partial x$ , somit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x.$$

Ganz ebenso wird

$$\frac{\partial y}{\partial z} = (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} z$$

und darnach

$$dy = \frac{x dx + z dz}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Es wird hiernach nicht nötig sein noch ein spezielles Beispiel für eine Funktion aus drei Veränderlichen zu berechnen, da die einzelnen Rechnungen genau dieselben sind, wie bei den Funktionen mit zwei Veränderlichen.

## Zweiter Differentialquotient.

Schließlich haben wir noch zu erwähnen, daß in vielen Fällen außer dem bisher besprochenen Differential und Differentialquotienten, welche man als erste bezeichnet, noch die zweiten Differentiale und Differentialquotienten von Funktionen bei unseren Untersuchungen vorkommen werden. Das zweite Differential ist in folgender Weise definiert. Das erste Differential einer Funktion von einer Veränderlichen erhielten wir durch die Gleichung

$$y + dy = f(x + dx).$$

Setzen wir  $y + dy = y_1$  und lassen jetzt  $x$  noch einmal um dieselbe Größe  $dx$  wachsen, so wird

$$y_1 + dy_1 = f(x + 2dx).$$

Die beiden Zunahmen  $dy_1$  und  $dy$  sind nun im allgemeinen verschieden, und ihre Differenz

$$dy_1 - dy = d^2y$$

nennt man das zweite Differential der Funktion; dasselbe ergibt sich durch Ausführung der hier angedeuteten Rechnungen

$$d^2y = \{f(x + 2dx) - f(x + dx)\} - \{f(x + dx) - f(x)\}.$$

Als zweiten Differentialquotienten bezeichnet man den Quotienten aus dem zweiten Differential und dem Quadrate von  $dx$ .

Wir bemerken hier gleich, daß die Werte  $dy_1$  und  $dy$  nur um eine Größe verschieden sein können, welche gegen die Veränderungen  $dy_1$  und  $dy$  selbst verschwindend klein sein muß, oder die zweiten Differentiale selbst gegen die ersten verschwindend klein. Daraus folgt dann, daß der zweite Differentialquotient, der Quotient aus dem zweiten Differential und dem gegen  $dx$  selbst verschwindend kleinen  $dx^2$  wieder einen endlichen Wert hat.

Anstatt das zweite Differential und den zweiten Differentialquotienten von der Funktion selbst abzuleiten, können wir auch von dem ersten Differential oder Differentialquotienten ausgehen; das zweite Differential ist die erste des ersten Differentials und der zweite Differentialquotient einer Funktion ist der erste des ersten Differentialquotienten. Setzen wir den ersten Differentialquotienten der Funktion gleich  $f'(x)dx$ , so daß

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad dy = f'(x)dx,$$

$$d^2y = f'(x + dx)dx - f'(x)dx = df'(x)dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df'(x)}{dx}$$

Es ergibt sich das aus folgender Überlegung. Die Gleichung  $y = f(x)$  gibt uns für jeden beliebigen Wert, den wir für  $x$  einsetzen, die Zunahme des Wertes  $y$ , wenn wir in der gegebenen Funktion anstatt des Wertes  $x$  den Wert  $x + dx$  einsetzen. Setzen wir deshalb in die Gleichung  $y = f(x)$  anstatt des Wertes  $x$  den Wert  $x + dx$  ein, so erhalten wir die Zunahme

welche der Wert von  $y$  erhält, wenn wir in der ursprünglichen Funktion von  $x + dx$  aus nochmals um dieselbe Größe  $dx$  fortschreiten, also den Wert, den wir vorhin mit  $dy_1$  bezeichneten. Die Differenz dieses Wertes gegenüber  $dy$  ist es aber, die wir vorhin als das zweite Differential definierten.

Ein einfaches Beispiel läßt uns die Richtigkeit dieser Überlegung unmittelbar erkennen. Es sei  $y = \sin x$ , so ist nach E 4

$$dy = \cos x dx,$$

ferner ist

$$dy_1 = \sin(x + 2dx) - \sin(x + dx) = \sin((x + dx) + dx) - \sin(x + dx).$$

Letzteres ist aber

$$dy_1 = \cos(x + dx) dx.$$

Somit wird

$$d^2y = dy_1 - dy = \cos(x + dx) dx - \cos x dx.$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als das Differential von  $\cos x dx$ , dem ersten Differential von  $\sin x$ . Es wird demnach

$$d^2y = -\sin x dx^2; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

Wir erhalten daher als Regel VII: zur Berechnung eines zweiten Differentials oder Differentialquotienten haben wir nur die ersten Differentiale oder Differentialquotienten einer Funktion gerade so zu behandeln wie die Funktion selbst zur Bildung der ersten Differentiale.

Diese Regel liefert uns auch das zweite Differential einer Funktion von zwei Veränderlichen. Für das erste Differential einer solchen erhielten wir

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz = M dx + N dz,$$

wenn wir die partiellen Differentialquotienten mit  $M$  und  $N$  bezeichnen. Bei der Berechnung des zweiten Differentials ist nur darauf zu achten, daß im allgemeinen sowohl  $M$  als  $N$  Funktionen von  $x$  und  $z$  sind. Dann erhalten wir in Ausführung der Regel VII nach E V und unter Beachtung des Satzes E I

$$d^2y = \left( \frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial z} dz \right) dx + \left( \frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial z} dz \right) dz$$

$$d^2y = \frac{\partial M}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial M}{\partial z} dz dx + \frac{\partial N}{\partial x} dx dz + \frac{\partial N}{\partial z} dz^2.$$

In diesem Ausdrucke ist stets

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

denn  $M$  ist der erste partielle Differentialquotient nach  $x$ ,  $N$  derjenige nach  $z$ . Bilden wir nun von  $M$  den partiellen Differentialquotienten nach  $z$ , so heißt das, wir lassen jetzt das bei der ersten Differentiation als konstant betrachtete  $z$  sich ändern; es ist also der Differentialquotient von  $M$  nach der Funktion, die entsteht, wenn wir erst  $x$  und dann in der so entstandenen Funktion sich  $z$  ändern lassen. Bei der Bildung des Differentialquotienten von  $N$  nach  $x$  haben wir genau dasselbe nur in umgekehrter

Reihenfolge getan. Die Reihenfolge, in welcher wir die willkürlich veränderlichen Größen sich ändern lassen, kann aber auf das schließliche Resultat keinen Einfluß haben. Ein Beispiel läßt die Richtigkeit dieser Folgerung sofort erkennen; setzen wir

$$y = x^n \cdot \sin z,$$

so ist nach EV

$$dy = nx^{n-1} \sin z dx + x^n \cos z dz,$$

$$M = nx^{n-1} \sin z, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = nx^{n-1} \cos z$$

$$N = x^n \cos z, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = nx^{n-1} \cos z = \frac{\partial M}{\partial z}.$$

In dem zur Erläuterung der Regel V gerechneten Beispiel war

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx + \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} dz.$$

Ab hier wird

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = -\frac{x \cdot z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Hieraus ergibt sich, daß wenn uns ein Ausdruck von der Form

$$dy = M dx + N dz$$

gegeben ist, in welchem  $M$  und  $N$  irgend welche Funktionen von  $x$  und  $z$  sind, derselbe nur dann das erste Differential irgend einer Funktion

$$y = f(x, z)$$

ist, wenn die Differentialquotienten  $\frac{\partial M}{\partial z}$  und  $\frac{\partial N}{\partial x}$  einander gleich sind. Ist das nicht der Fall, so ist der Ausdruck nicht das vollständige Differential einer Funktion, das heißt, es gibt keine Funktion von  $x$  und  $z$ , durch die Differentiation jener Ausdruck entstanden ist.

## Integration.

Bei den physikalischen Untersuchungen kommt uns sehr häufig der Fall vor, daß die Beobachtungen uns nicht sofort die Beziehung zwischen den die Erscheinung bedingenden Größen liefern, daß wir vielmehr nur die Differentiale oder Differentialquotienten der gesuchten Beziehungen erhalten. Wir finden so Ausdrücke von der Form

$$dy = ax dx; \quad dy = a \sin x dx,$$

oder andere. Ganz besonders oft kommt das vor, wenn wir aus den durch die Erfahrung uns gegebenen Gesetze durch Deduktion die Gesetze anderer Erscheinungen ableiten wollen. In den meisten Fällen lassen wir für die aus dem bekannten Gesetze weiter abzuleitenden Beziehungen aus diesem Gesetze nur die Differentiale oder Differentialquotienten angeben, und es handelt sich dann für uns darum, aus diesen



Differentialausdrücken die Gleichung zwischen den veränderlichen Größen aufzusuchen. Man bezeichnet dieses Verfahren als Integration und nennt den Ausdruck, welcher durch Differentiation auf den gegebenen Differentialausdruck führt, das Integral des letztern. Man bezeichnet das Integral eines gegebenen Differentialausdruckes durch ein vorgesetztes Summenzeichen  $\int$ , so daß also, wenn der Ausdruck etwa

$$dy = ax dx$$

gegeben ist,

$$y = \int ax dx$$

gesetzt wird; es wird also angedeutet, daß  $y$  das Integral des unter dem betreffenden Summenzeichen stehenden Differentialausdruckes ist.

Dem Integralausdruck können wir eine doppelte Bedeutung beilegen, deren eine uns das Integral als eine Summe erkennen läßt, wodurch zugleich die Bezeichnung des Integrals durch ein Summenzeichen gerechtfertigt ist.

Die erste Bedeutung ist die eben erwähnte, das Integral eines Differentialausdruckes ist jene Funktion, welche durch Differentiation den gegebenen Differentialausdruck liefert. Wir wissen nun z. B., daß das Differential  $dy = ax$  durch Differentiation des Ausdruckes  $y = \frac{1}{2} ax^2$  entsteht, somit erhalten wir

$$\frac{1}{2} ax^2 = \int ax dx.$$

Indes ist dabei zu beachten, daß nach EI bei der Differentiation einer Summe, von der ein oder mehrere Glieder konstante nicht mit  $x$  sich ändernde Größen sind, diese Größen verschwinden; wir können daher nicht wissen, ob die Funktion, durch deren Differentiation unser gegebenes Differential entstanden ist, oder entstanden gedacht werden kann, nicht einen konstanten Summand enthielt. Gehen wir vom Differential zum Integral über, so müssen wir aus diesem Grunde immer zu der Funktion eine Konstante addieren, deren Wert allerdings, solange uns nichts anderes als das Differential gegeben ist, durchaus unbestimmt ist, ja jeder beliebiger sein kann. Wir müssen also als das Integral der Funktion  $dy = ax dx$  schreiben

$$\int ax dx = \frac{1}{2} ax^2 + C,$$

worin  $C$  also eine jede beliebige konstante, das heißt mit  $x$  sich nicht ändernde Größe sein kann.

Den so vervollständigten Integralausdruck des Differentials nennt man dessen unbestimmtes Integral.

Um dann den Wert unserer Funktion für jedes gegebene  $x$  in der That angeben zu können, muß man den Wert derselben für irgend einen Wert von  $x$  auf andere Weise bestimmen können. Wissen wir z. B., daß für den Wert  $x = 0$  die Funktion den Wert  $b$  annimmt, so folgt  $C = b$  und unsere Funktion wird

$$y = \frac{1}{2} ax^2 + b.$$

Durch die so erfolgte Festsetzung des Wertes der Konstanten wird unsere Funktion eine bestimmte, das heißt sie gibt uns jetzt für jeden Wert, den wir der veränderlichen Größe  $x$  beilegen, einen ganz bestimmten Wert von  $y$ .

Das an diesem Beispiel Gezeigte gilt selbstverständlich allgemein; ist

$$d\varphi(x) = f(x)dx,$$

so ist

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C.$$

Die zweite Bedeutung des Integrals ist die einer Summe von Differentialen. Wie wir sahen ist das Differential einer Funktion der Unterschied der beiden Werte derselben, wenn die veränderliche Größe von einem Werte  $x$  um  $dx$  zunimmt. Den Wert, welchen die Funktion für irgend einen Wert  $x_n$  annimmt, können wir dann als die Summe bezeichnen des Wertes, welchen die Funktion für irgend einen kleinern Wert von  $x$ , etwa  $x_0$ , besitzt, und aller der Differentiale, welche wir erhalten, wenn  $x$  jedesmal durch Hinzufügen um  $dx$  allmählich von  $x_0$  bis  $x_n$  zunimmt. Wenn setzen wir der Einfachheit wegen  $x_1 = x_0 + dx$ ,  $x_2 = x_0 + 2dx \dots x_n = x_0 + ndx$  und die den Werten  $x_0, x_1 \dots x_n$  entsprechenden Werte der Funktion  $y_0, y_1 \dots y_n$ , so ist, wenn wir  $y_0 = \frac{1}{2}ax_0^2 + C$  setzen,

$$y_1 = y_0 + dy = y_0 + ax_0 dx$$

$$y_2 = y_1 + dy_1 = y_1 + ax_1 dx = y_0 + ax_0 dx + ax_1 dx$$

$$y_n = y_{n-1} + dy_{n-1} = y_{n-1} + ax_{n-1} dx = y_0 + ax_0 dx + ax_1 dx \dots ax_{n-1} dx.$$

oder es ist

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x_n} ax dx,$$

da also das Integralzeichen ein eigentliches Summenzeichen ist, das d. h. es muß die Summe aller der Differentialausdrücke gebildet werden, wenn wir in den Differentialausdruck nach und nach für  $x$  alle Werte zwischen  $x = x_0$  und  $x = x_n$  einsetzen, wie wir deren oben einige hinzuschreiben haben. Diese so von einem bestimmten untern Werte  $x_0$ , der unteren Grenze des Integrals, bis zu einem bestimmten obern Werte, der oberen Grenze gebildete Summe, nennt man das bestimmte Integral des Differentials zwischen den Grenzen  $x_0$  und  $x_n$ .

Wie die obige Entwicklung zeigt, ist dieses bestimmte Integral nichts anderes als die Differenz der Werte, welche die Funktion, deren Differential unter dem Integralzeichen steht, annimmt, wenn wir in derselben einmal der Veränderlichen den durch die obere Grenze bestimmten Wert, das andere Mal den durch die untere Grenze bestimmten Wert beilegen. Denn aus der letzten Gleichung folgt

$$\int_{x_0}^{x_n} ax dx = y_n - y_0 = \frac{1}{2}ax_n^2 - \frac{1}{2}ax_0^2.$$

dadurch, daß das bestimmte Integral die Differenz zweier Werte der Funktion ist, fällt die in dem unbestimmten Integral vorhandene Konstante weg, da sie im Minuend und Subtrahend dieselbe ist.

Auch das hier Entwickelte gilt ganz allgemein, was wohl keines weiteren Beweises bedarf; ist

$$f(x)dx = d\varphi(x),$$

so ist stets

$$\text{VIII} \quad \dots \dots \dots \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \varphi(x_n) - \varphi(x_0).$$

Wir können darnach den Wert des bestimmten Integrals immer angeben, wenn wir das unbestimmte Integral kennen.

Das Integral eines gegebenen Differentialausdruckes können wir nicht durch eine bestimmte Methode der Rechnung erhalten, wie wir den Differentialausdruck aus der Funktion ableiten. Wirklich integrieren, das heißt eine geschlossene Integralfunktion für dieselben angeben, können wir nur solche Differentialausdrücke, welche vollständige Differentiale einer Funktion sind. Die Integralrechnung lehrt die Methoden, durch welche wir erkennen können, ob ein gegebener Ausdruck ein vollständiger Differentialausdruck ist, oder durch welche wir ihn in einen solchen verwandeln können. Wir gehen auf diese Methoden nicht ein, sondern werden, wo es etwa nötig ist, in den speziellen Fällen die erforderlichen Rechnungen machen. Nur bemerken wir hier, daß wenn wir die vorhin entwickelten Differentialausdrücke vorfinden, wir stets sofort deren Integrale angeben können, da uns die Funktionen bekannt sind, durch deren Differentiation sie entstanden sind. So ist

$$\text{nach E 1} \quad x^n dx = d \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad \text{also} \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\text{nach E 2} \quad \frac{dx}{x} \log e = d \log x, \quad \text{also} \quad \int \frac{dx}{x} \log e = \log x + C.$$

Sind die Logarithmen, mit denen wir rechnen, natürliche, so ist

$$\frac{dx}{x} = d \log x, \quad \text{also} \quad \int \frac{dx}{x} = \log x + C;$$

$$\text{nach E 3} \quad \frac{\log a}{\log e} a^x dx = d a^x, \quad \text{also} \quad \int \frac{\log a}{\log e} a^x dx = a^x + C$$

und so weiter; es wird nicht nötig sein, die einzelnen Integralausdrücke hinzuschreiben.

## Erster Teil.

---

### **Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.**



## Erster Abschnitt.

### Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

#### Erstes Kapitel.

#### Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

##### § 1.

**Bewegung.** Die erste Tatsache, welche uns bei der Betrachtung der Außenwelt auffällt, ist die, daß einige Körper ihren Ort im Raume, wie wir es beurteilen können, stets behaupten, andere ihn verändern. Von den ersteren sagen wir, sie seien in Ruhe, von den letzteren, sie seien in Bewegung. Bei den Bewegungen erkennen wir dann sehr bald einen Unterschied, indem einige Körper in einer bestimmten Zeit einen größeren Weg zurücklegen als andere. Den ersteren legen wir eine größere, den letzteren eine kleinere Geschwindigkeit bei. Als Geschwindigkeit einer Bewegung bezeichnen wir somit die Beziehung zwischen dem durchlaufenen Wege und der Zeit, in welcher er durchlaufen ist.

Einen weiteren Unterschied in der Bewegung nehmen wir wahr, wenn wir in gleichen aufeinander folgenden Zeiten zurückgelegten Wege miteinander vergleichen. Die einen legen in gleichen Zeiten immer die gleiche Zahl Meter zurück. Bilden wir dort das Verhältniß zwischen dem in irgend einer Anzahl  $t$  Sekunden zurückgelegten Wege  $s$  und dieser Zahl  $t$  Sekunden,  $\frac{s}{t}$ , so ist der Wert desselben immer der gleiche. Solche Körper besitzen demnach, da die Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege und der Zeit, in welcher derselbe zurückgelegt ist, immer dieselbe bleibt, eine konstante Geschwindigkeit. Man nennt die Bewegung eine gleichförmige. Für diese Bewegung erhalten wir auch sofort ein Maß der Geschwindigkeit eben in dem konstanten Verhältniß zwischen Weg und Zeit

$$c = \frac{s}{t}.$$

Man sieht weiter, daß dieser Quotient die Strecke ist, welche der Körper in der Zeit einer Sekunde zurücklegt, so daß wir die Geschwindigkeit des Körpers als die in der Zeit einer Sekunde zurückgelegte Wegestrecke bezeichnen können. Der in irgend einer Zeit zurückgelegte Weg  $s$  ist dann

$$s = c \cdot t.$$

Andere Körper bewegen sich ungleichförmig, das heißt, beobachten wir den jedesmal in  $t$  Sekunden aber zu verschiedenen Zeiten zurückgelegten Weg  $s$ , so finden wir, daß der Quotient

$$\frac{s}{t}$$

zu den verschiedenen Zeiten der Bewegung einen verschiedenen Wert hat. Bei einigen Bewegungen wächst dieser Quotient, bei andern nimmt er ab. Erstere Bewegungen nennt man beschleunigte, letztere verzögerte. Man kann deshalb bei solchen Bewegungen von einer bestimmten Geschwindigkeit nur für einen bestimmten Augenblick sprechen. Als Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke bezeichnet man jene, mit welcher der Körper sich nach der vorherigen Definition weiterbewegen würde, wenn seine Bewegung von diesem Augenblicke ab gleichförmig würde. Können wir also bei der Untersuchung einer ungleichförmigen Bewegung bewirken, daß von einem bestimmten Augenblicke ab die Änderung der Geschwindigkeit aufhört, so haben wir nur in dieser dann gleichförmigen Bewegung die in einer Sekunde zurückgelegte Strecke zu messen, um die Geschwindigkeit für den Augenblick zu erhalten, zu welchem die Bewegung gleichförmig wurde.

Auch für die ungleichförmige Bewegung läßt sich für die Geschwindigkeit gemäß der vorhin gegebenen Definition, daß dieselbe der Quotient aus Weg und Zeit sei, ein mathematischer Ausdruck ableiten, wenn wir wissen, wie der Weg mit der Zeit wächst, wenn wir also den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit kennen. Nehmen wir an, der Körper habe in der Zeit  $t$  den Weg  $s$  zurückgelegt, und in der Zeit von  $t_1$  Sekunden, größer sein möge, als die erste, den Weg  $s_1$ . In der Zeit  $t_1 - t$  hat er dann den Weg  $s_1 - s$  zurückgelegt, und der Quotient

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

gibt uns die Strecke, welche der Körper in der Sekunde zurückgelegt hätte, um mit gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit  $t_1 - t$  denselben Weg zurückzulegen, den er in Wirklichkeit zurückgelegt hat. Man nennt diese Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit  $t_1 - t$ . Diese mittlere Geschwindigkeit hat der Körper einmal in der Zeit  $t_1 - t$  besessen, vor dem Augenblicke aber, wo er dieselbe besaß, war die Geschwindigkeit, wenn wir die Bewegung als eine beschleunigte voraussetzen, kleiner, nach derselben war sie größer. Von allen den in der Zeit  $t_1 - t$  vorkommenden Geschwindigkeiten unterscheidet sich nun diese mittlere Geschwindigkeit um so weniger, je kleiner die Zeit und der Weg ist, zu welcher wir dieselbe ableiten. Bilden wir deshalb für die denkbar kleinste Zeit  $t_1 - t = dt$  und den in dieser verschwindend kleinen Zeit zurückgelegten Weg  $ds$  den Quotienten

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so ist die berechnete Geschwindigkeit  $v$ , welche die mittlere für die Zeit  $dt$  ist, von derjenigen, die zur Zeit  $t$  vorhanden ist, nicht mehr verschieden, wenn wir die Zeit  $dt$  eben kleiner als jede angebbare Größe annehmen.



anderen Worten, wenn wir jenen Quotienten als den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit betrachten.

Wir können demnach bei der ungleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit als den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit definieren. Ja diese Definition gilt ganz allgemein auch für die gleichförmige Bewegung, denn nach E 1 ist für die Funktion

$$s = ct,$$

welche die gleichförmige Bewegung definiert,

$$\frac{ds}{dt} = c = \frac{s}{t}.$$

Bei der ungleichförmigen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke; das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zu der Zeit, in welcher diese Änderung eintritt, nennt man die Beschleunigung der Bewegung. Der einfachste Fall der Geschwindigkeitsänderung ist der, daß die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten sich immer um dieselbe GröÙe ändert, daß sie also für die Zeiteinheit immer um dieselbe GröÙe zu- oder abnimmt. Wächst die Geschwindigkeit auf diese Weise in der Zeit  $t$  von  $v_1$  auf  $v_2$ , so ist der Quotient

$$h = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

konstant und gibt uns die Geschwindigkeitszunahme für die Sekunde; in diesem Falle ist also die Beschleunigung gleich der in jeder Sekunde stattfindenden Geschwindigkeitszunahme. Eine solche Bewegung nennt man eine gleichmäßig geänderte; eine gleichmäßig beschleunigte, wenn die Geschwindigkeit in dieser Weise zunimmt, eine gleichmäßig verzögerte, wenn sie abnimmt.

Aus dem Satze, daß die Geschwindigkeit der Differentialquotient des Weges nach der Zeit sei, können wir auch sofort ableiten, welches bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung die Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege und der Zeit ist. Nehmen wir an, der Körper beginne sich von der Ruhe aus sofort mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung, und seine Beschleunigung sei gleich  $h$ ; dann ist die Geschwindigkeit  $v$  zur Zeit  $t$

$$v = ht.$$

Da nun

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so

$$ds = ht dt.$$

Jetzt in der Zeit  $t$  zurückgelegte Weg ist die Summe aller Wege  $ds$ , die wir erhalten, wenn die Zeit von  $t = 0$  an, jedesmal um  $dt$ , allmählich wächst, oder es ist  $s$  das bestimmte Integral

$$s = \int_0^t h t dt.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Differentialausdruck ist uns nach E 1 bekannt, er ist das Differential von  $\frac{1}{2}ht^2$ , somit ist

$$s = \frac{1}{2}ht^2 - \frac{1}{2}ho^2 = \frac{1}{2}ht^2,$$

oder der mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung in der Zeit  $t$  zurückgelegte Weg ist gleich der halben Beschleunigung multipliziert mit dem Quadrate der Zeit.

Ist die Änderung der Geschwindigkeit nicht immer in gleichen Zeiten dieselbe, so ist die Bewegung eine ungleichmäßig geänderte; bei einer solchen kann man von einer bestimmten Beschleunigung nur für einen bestimmten Augenblick sprechen, gerade wie man bei der ungleichförmigen Bewegung allgemein von einer bestimmten Geschwindigkeit nur für einen bestimmten Augenblick sprechen kann. Wir gelangen aber hier zu einer Definition der Beschleunigung durch die ganz gleiche Überlegung, wie sie uns vorher zur Definition der Geschwindigkeit führte. Ist  $dv$  die Geschwindigkeitszunahme in der Zeit  $dt$ , so ist  $\frac{dv}{dt}$  die mittlere Beschleunigung in der Zeit  $dt$ . Diese mittlere Beschleunigung unterscheidet sich um so weniger von der wirklich innerhalb der Zeit  $dt$  in den verschiedenen Augenblicken derselben stattfindenden, je kleiner die Zeit  $dt$  ist, sie wird der wirklich in dem betrachteten Moment stattfindenden gleich, wenn wir  $dt$  als eine verschwindend kleine Zeit betrachten. Es folgt somit, daß die Beschleunigung bei einer ungleichförmigen Bewegung der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit ist; da die Geschwindigkeit der erste Differentialquotient des Weges nach der Zeit ist, folgt gleichzeitig, daß wir die Beschleunigung auch als den zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit definieren können. Die so definierte Beschleunigung ist dann die Geschwindigkeitszunahme, welche in einer Sekunde stattfinden würde, wenn die Geschwindigkeit in jedem der die Sekunde zusammensetzenden kleinen Zeitelemente  $dt$  um die gleiche Größe  $dv$  zunähme.

## § 2.

**Kräfte.** Die Erfahrung zeigt uns, daß die Materie beweglich ist, zeigt uns aber zugleich, daß kein in Ruhe befindlicher Körper seinen Ruhezustand ohne eine äußere Veranlassung, ohne einen äußern Antrieb verläßt. Ist ein Körper aber einmal in Bewegung, so zeigt uns die Erfahrung weiter, daß derselbe die ihm einmal erteilte Bewegung beibehält, bis er wieder durch eine äußere Veranlassung, etwa einen dem früheren entgegengesetzten Antrieb abgeändert oder aufgehalten wird. Auf den ersten Blick scheint der letztere Satz der Wirklichkeit nicht zu entsprechen, denn wir sehen auf der Erde jede Bewegung allmählich zur Ruhe kommen. Betrachten wir indes die Bewegungen genauer, so finden wir bei jeder auf der Erde stattfindenden Bewegung eine Reihe von äußeren Umständen, welche die Bewegung stören, wie der Widerstand der Luft, in welcher sich der Körper bewegen muß, die Reibung auf der Unterlage usf.; je mehr wir Hindernisse der Bewegung beseitigen, um so weniger wird die Bewegung gestört, um so länger hält sie an. Werfen wir einen Körper über eine ebene horizontale Grundlage hin, so hört seine Bewegung um so eher

naher die Grundlage ist, indem der Körper gegen die verschiedenen Festheiten anstößt. Nehmen wir eine möglichst glatte Fläche und rollen über diese eine Kugel fort, so dauert die Bewegung sehr viel länger, als wir schließen dürfen, daß wenn wir alle Widerstände fortnehmen, die Bewegung ohne Aufhören dauern würde. Eine solche ohne Ende fort-dauernde Bewegung materieller Massen sehen wir sogar in den Gestirnen, deren Bewegung seit 2000 Jahren, seitdem man ihre Bahnen beobachtet hat, sich nicht geändert hat. Es ergibt sich somit aus der Erfahrung, daß die Materie den ihr einmal gegebenen Bewegungszustand aus sich selbst niemals ändert: diese Eigenschaft nennt man die Trägheit der Materie.

Ihre äußeren Ursachen, welche den Bewegungszustand der Materie ändern, nennen wir Kräfte.

Um alles zu kennen, wodurch eine Kraft bestimmt wird, müssen wir ihren Angriffspunkt und ihre Größe kennen.

Die Richtung einer Kraft erkennen wir aus der Richtung, nach welcher eine Materie in Bewegung setzt, die Richtung der Kraft fällt zusammen mit der Richtung, nach welcher sie die Materie, auf welche sie wirkt, hintreibt.

Die Größe einer Kraft können wir strenge genommen nur durch die Größe ihrer Wirkung, also durch die von ihr erzeugte Bewegung messen. Um aber dieses Maß anwenden zu können, müssen wir zunächst wissen, von welchen Umständen überhaupt die Bewegung eines Körpers abhängt. Zu dieser Untersuchung selbst ist es aber durchaus wünschenswert, schon ein Maß für die Kraft zu haben. Wir gelangen dazu durch folgende Überlegung. Zwei Kräfte müssen wir als gleich ansehen, wenn sie, an demselben Punkte angreifend, nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirkend, ein aufgehobenes, das heißt keine Bewegung hervorbringen oder eine vor-täufige Bewegung ungeändert lassen. Da man nun stets einer Kraft das Gegengewicht halten kann, indem man an demselben Punkte in einer ihr entgegengesetzten Richtung ein Gewicht wirken läßt, so ist dieses Gewicht der Kraft gleich und ihr Maß. Man kann demnach die Größe einer Kraft durch Gewichte auswerten.

Welcher Art nun auch die Kräfte sind, aus welcher Quelle sie auch kommen, man kann sie in zwei Klassen teilen; die einen wirken stets in derselben Richtung und erfordern stets die gleiche Anzahl von Kilogrammen, um im Gleichgewicht gehalten zu werden, es sind die konstanten Kräfte. Die anderen können sich mit der Zeit nach Größe und Richtung ändern, d. h. es bedarf, um sie im Gleichgewicht zu halten, zu verschiedener Zeit verschieden großer Gewichte, welche man nach verschiedenen Richtungen wirken läßt. Man nennt diese Kräfte veränderliche.

Es ist nun unsere Aufgabe zu untersuchen, wie die in § 1 betrachteten Bewegungen durch solche Kräfte erzeugt werden, wie also infolge der Wirkung einer Kraft sich die Körper bewegen. Wir verfahren zu dem Ende folgendermaßen: wir beobachten einige einfache Fälle der Bewegung und entwickeln deren experimentelle Gesetze; dann suchen wir aus diesen Gesetzen jene durch Abstraktion zu erhalten, welche uns allgemein angeben, wie Kräfte wirken, aus welchem also die experimentell gefundenen Gesetze sich durch Deduktion ableiten lassen. Dadurch erhalten wir die Gesetze der Kräfte, und diese allgemeinen Sätze bieten uns die Grundlage für mathematischen Deduktionen, welche die theoretische Mechanik bilden.

## § 3.

**Dasein und Richtung der Schwere.** Das sich uns am häufigsten zeigende Beispiel einer fortschreitenden Bewegung ist das Niederfallen eines nicht unterstützten Körpers zur Erde; dies eignet sich daher am besten dazu, die Gesetze der Bewegung zu untersuchen. Alle Körper fallen, wenn sie nicht unterstützt sind, zur Erde nieder. Heben wir sie auf, so fühlen wir, daß sie das Bestreben haben zu fallen, indem es einer gewissen Anstrengung bedarf, sie am Fallen zu hindern. Wir nennen deshalb die Körper schwer und jene Kraft, welche sie zur Erde niedertreibt, die Schwere. Verschiedene Körper haben ein verschiedenes Bestreben zu fallen, sie üben auf ihre Unterlage einen verschiedenen Druck aus. Wir legen ihnen daher ein verschiedenes Gewicht bei, indem wir den Druck auf die Unterlage als Gewicht bezeichnen. Welche Einheit wir der Messung der Gewichte zugrunde legen, haben wir in der Einleitung besprochen.

Die Richtung, in welcher die Schwere wirkt, läßt sich leicht durch einen einfachen Versuch bestimmen. Man befestigt einen schweren Körper, etwa eine Metallkugel, an einen Faden, der mit seinem andern Ende an irgend einem festen Punkte befestigt ist, und läßt die Kugel frei herabhängen. Eine Zeitlang schwingt die Kugel hin und her, dann hängt sie ruhig. Da sie nicht fällt, so folgt, daß eine der Schwere gleiche und gerade entgegengesetzte Kraft die Kugel hält; es ist dies die Festigkeit des gespannten Fadens. Die Richtung des Fadens gibt uns somit die Richtung der Schwere; man überzeugt sich ferner dadurch, daß man den Faden durchschneidet; denn die Kugel fällt dann in der Richtung des gespannten Fadens zu Boden.

Die Richtung der Schwere ist also an jedem Orte durch einen solchen mit einem Gewichte versehenen Faden, dem Lote oder Senkel gegeben; man nennt diese Richtung die lotrechte oder vertikale.

Hält man ein solches Lot über einer ruhenden Flüssigkeitsfläche, so findet man, daß es mit allen in der Ebene der Flüssigkeitsfläche durch seinen Fußpunkt gezogenen Linien einen rechten Winkel bildet, daß es also auf der Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht steht. Man kann also die Richtung des Lots ebenso durch die Lage der Flüssigkeitsebene bestimmen; die Ebene der Flüssigkeit nennt man die horizontale.

## § 4.

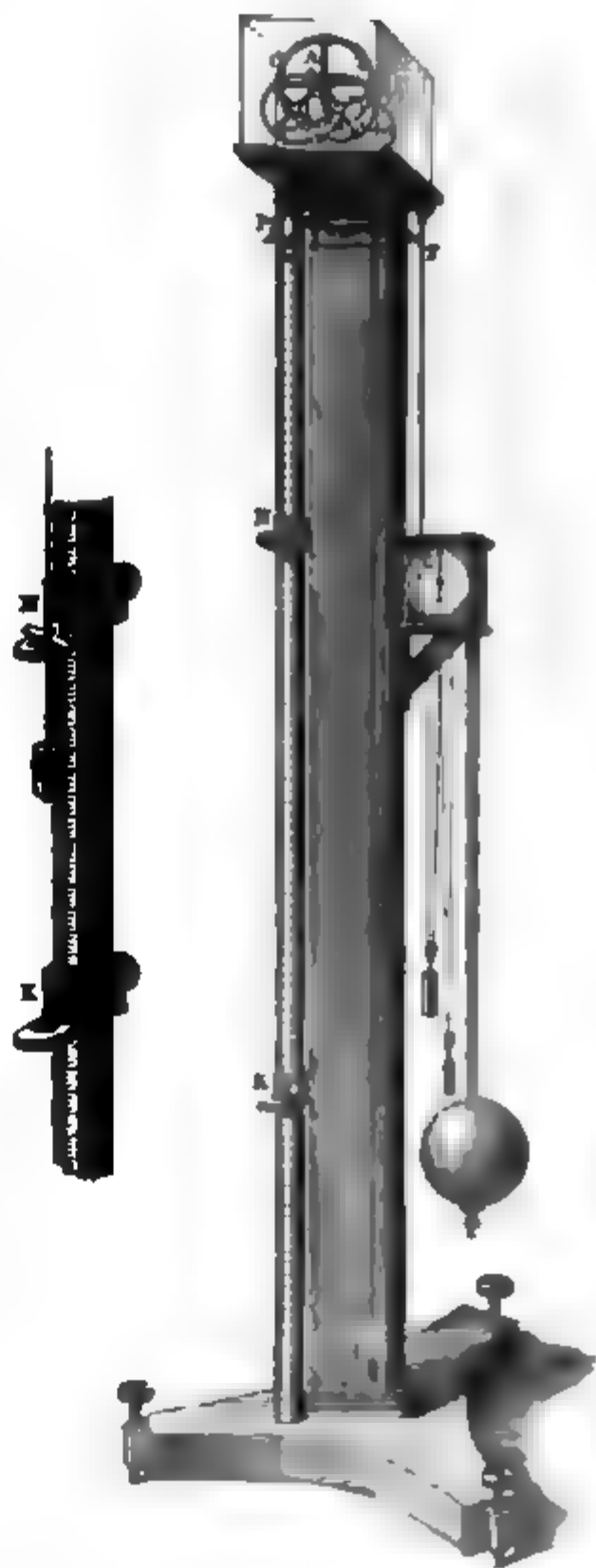
**Atwoods Fallmaschine.** Um die Gesetze der Bewegung mit Hilfe der Schwerkraft zu untersuchen, genügt es nicht, einfach einen fallenden Körper zu beobachten. Denn einmal ist, wie sich jeder leicht überzeugt, die Fallgeschwindigkeit bald so groß, daß sie einer exakten Beobachtung sich entzieht, und andererseits bietet der freie Fall der Körper nur einen speziellen Fall von Bewegung, nämlich die Bewegung eines Körpers, die durch sein eigenes Gewicht bewegt wird. Man hat deshalb Apparate konstruiert, welche beiden Übelständen abhelfen, welche die Bewegung verlangsamen und in vieler Beziehung abändern lassen; einer der bequemsten Apparate dieser Art ist die Atwoodsche Fallmaschine, mit deren Hilfe daher die Gesetze der Bewegung untersucht werden sollen.

Das Prinzip dieser Maschine ist folgendes. Wenn man an einem vollkommen biegsamen Faden zwei ganz gleich schwere Körper befestigt und dann den Faden über eine leicht bewegliche Rolle führt, so halten sich die beiden Gewichte das Gleichgewicht, es tritt keine Bewegung ein, da jeder der beiden Körper durch ein dem seinen gleiches Gewicht der Schwere entgegen gezogen wird. Um dieses System von Körpern, die beiden Gewichte, den Faden und die Rolle in Bewegung zu setzen, bedarf es einer äußeren Kraft, die wir erhalten, indem wir auf den einen Körper ein Übergewicht legen. Die Größe dieses Übergewichtes, sowie die Größe des zu bewegenden Körpers und die Dauer der Wirkung des Übergewichtes, können wir dann beliebig ändern. Die Einrichtung des Apparates ist zu dem Zwecke folgende.

Auf einer massiven hölzernen mit 3 Stellschrauben versehenen Platte (Fig. 14) befindet sich ein Holzpfeiler von ungefähr 2 Meter Höhe. Auf dem Pfeiler ist eine Platte horizontal befestigt, und auf dieser ist ein möglichst gut gearbeitetes, aus 4 Speichen und einem Radkranze bestehendes Rad möglichst beweglich aufgestellt. Um seine Beweglichkeit zu erhöhen, ist die Achse des Rades nicht in feste Lager, sondern auf Friktionsräder gelegt. Dieselben bestehen aus zwei Systemen von Rädern (s. Fig. 15), welche, wie die Zeichnung zeigt, sich kreuzen, und welche das Rad A in Bewegung setzt. Die Reibung des Rades ist dadurch sehr vermindert; so kann dieselbe ganz unschädlich sein, werden wir gleich zeigen.

Der Umfang des Rades hat eine Leiste, und in dieser ist über das Rad ein Seidenfaden gelegt, an dessen beiden Enden zwei gleiche Gewichte  $P$  und  $P'$  befestigt sind. Legt man auf  $P$  ein Übergewicht  $p$ , so sinkt  $P$  hinunter,  $P'$  steigt empor und das ganze System erhält eine gemeinschaftliche Bewegung. Die zu bewegenden Gewichte sind in diesem Falle  $P + p$  und  $P'$  und das Gewicht des Fadens und der Rolle. Sind die Rippen der Rolle hinreichend fein gearbeitet, so darf man annehmen, als das ganze Gewicht derselben im Radkranze vereinigt wäre. Dann

Fig. 14.



erhält aber dieses Gewicht, da die Rolle mitgedreht wird, und die einzelnen Punkte derselben ebenso schnell bewegt werden wie der Faden oder die Gewichte  $P$ , ganz dieselbe Bewegung wie die übrigen Teile des Systems. Bezeichnen wir das Gewicht der Rolle und des Fadens mit  $\Pi$ , so ist das Gewicht der zu bewegenden Körper  $p + P + P^1 + \Pi$ . Die Kraft, welche diese Gewichte in Bewegung setzt, ist das Übergewicht  $p$ . Es muß indessen um diese Kraft genau zu erhalten, von diesem Gewichte ein kleiner Teil  $\pi$  abgezogen werden, um die Reibung der Achse des Rades  $A$  zu überwinden. Wenn diese Reibung auch sehr klein ist, so ist sie doch nicht gleich Null, wie man wahrnimmt, wenn man das System ohne Übergewicht durch einen Anstoß in Bewegung setzt. Da auf das System da keine äußere Kraft wirkt, müßte es, vermöge der Trägheit, in gleichförmiger Bewegung verharren. Man findet aber stets eine, wenn auch kleine Abnahme der Geschwindigkeit infolge der Reibung. Um die Bewegung vollständig gleichförmig zu machen, muß man auf das niedersinkende Gewicht ein kleines Übergewicht  $\pi$  legen, dessen Schwere gerade hinreicht, um die Reibung zu überwinden. Um die Größe dieses Gewichtes  $\pi$  muß man daher bei Berechnung der das System bewegend Kraft das Übergewicht  $p$  vermindern. Bequemer verfährt man indes so, daß man ein für allemal auf das niedersinkende Gewicht das zur Überwindung der Reibung erforderliche Gewicht  $\pi$  hinlegt; das in Bewegung zu setzende Gewicht ist dann  $p + P + P^1 + \Pi + \pi$ , die bewegend Kraft einfach gleich dem Übergewichte  $p$ .

Das Gewicht  $P$  fällt vor einem hölzernen in Zentimeter geteilten Maßstabe. Längs desselben kann man einen kleinen Messingteller  $K$  verschieben und durch Klemmschrauben in irgend einer Höhe befestigen; auf denselben schlägt dann das Gewicht  $P$  auf und gibt durch das infolge des Schlages entstehende Geräusch das Ende seines Laufes an.

Der Apparat ist ferner so eingerichtet, daß man an einer beliebigen Stelle das Übergewicht  $p$  fortnehmen kann, ohne die Bewegung des Systems zu stören. Zu dem Ende ist an dem hölzernen Maßstabe außer dem vorher erwähnten Teller ein Ring  $H$  befestigt, durch den das Gewicht  $P$  ungehindert hindurchgehen kann, der aber das Übergewicht  $p$ , welches in der Nebenfigur bezeichnete Gestalt hat, zurückhält. Dieser Ring ist längs des Maßstabes verschiebbar und kann ebenfalls an beliebiger Stelle desselben befestigt werden. Durch Einschalten des Ringes kann also das Übergewicht an einer beliebigen Stelle fortgenommen werden.

An der Maschine ist überdies noch ein Apparat angebracht, der die Zeit mißt. Dieser ist im Prinzip nichts anders als ein Lot; bei der Länge vom Pendel werden wir nachweisen, daß ein aus seiner Gleichgewichtslage gebrachtes Lot um dieselbe Schwingungen macht. Zu diesen Schwingungen braucht es immer dieselbe Zeit; wir können es daher benutzen, um gleiche Zeitteile zu messen. Hat das Pendel eine bestimmte Länge, so braucht es zu einer Schwingung genau eine Sekunde. Ein solches Sekundenpendel ist an dem Apparate angebracht. Mit dem Pendel ist ein Zeiger in Verbindung, der die einzelnen Sekunden anzeigt, und ein Schlagwerk, welches jede Sekunde durch einen hörbaren Schlag markiert.

Um die Bewegung genau mit dem Schlage einer Sekunde bezu-  
zu können, steht das Gewicht  $P$  vor der Bewegung auf einem kleinen



der durch eine kleine Stütze gehalten wird, welche durch den Winkelhebel  $EFF$  mit dem Pendel in Verbindung gebracht ist. Jedesmal wenn der Zeiger an einer bestimmten Stelle steht, wird diese Stütze gelöst, und das System beginnt seine Bewegung.

Wie man sieht, läßt sich an diesem Apparate ein beliebiges Gewicht durch eine beliebige konstante Kraft, deren Wirkungsdauer sich ebenfalls ändern läßt, in Bewegung setzen; der Apparat ist daher vorzugsweise geeignet, die durch konstante Kräfte erzeugten Bewegungen in allen Einzelheiten zu untersuchen.

### § 5.

**Bewegung unter Wirkung einer konstanten Kraft.** Setzen wir unser System an der Atwoodschen Fallmaschine, nachdem es in der im vorigen Paragraphen beschriebenen Weise vorgerichtet ist, durch ein Übergewicht  $p$  in Bewegung und bringen an irgend einer Stelle z. B. 10 Zentimeter unter dem Ausgangspunkte der Gewichte den Ring  $H$  an. Geht  $P$  durch den Ring hindurch, so bleibt das Übergewicht zurück, und wir finden dann, daß von da ab das System sich mit gleichförmiger Bewegung weiter bewegt. Bei einem bestimmten Übergewicht, dessen Größe von der der übrigen Gewichte abhängt, wird der Raum von 10<sup>cm</sup> gerade in 1 Sekunde durchfallen; suchen wir dann durch passende Stellung des Tellers  $K$ , welcher Weg in 2, 3, 4 Sekunden durchlaufen wird, so finden wir

Zeit . . . . .	1"	2"	3"	4"	5"
Durchlaufener Weg . . . . .	10 <sup>cm</sup>	30 <sup>cm</sup>	50 <sup>cm</sup>	70 <sup>cm</sup>	90 <sup>cm</sup>
Weg in den auf die erste folgenden Sekunden zurückgelegt . . . . .	20 <sup>cm</sup>	40 <sup>cm</sup>	60 <sup>cm</sup>	80 <sup>cm</sup>	

Nach der ersten Sekunde, also nach Fortnahme des Übergewichtes, kommt die Bewegung in der Tat eine gleichförmige, in jeder Sekunde werden 20<sup>cm</sup> durchlaufen; wir erhalten darin einen experimentellen Beweis dafür, daß ein Körper, der sich ohne Hindernisse bewegt, in der Tat die einmal erteilte Bewegung beibehält.

Lassen wir dasselbe Übergewicht anstatt einer 2, 3, 4 Sekunden wirken, der Versuch zeigt, daß wir dazu den Ring  $H$  bei 40<sup>cm</sup>, 90<sup>cm</sup>, 160<sup>cm</sup> (befestigen müssen), so finden wir stets, daß in der auf die Abnahme des Übergewichtes folgenden Zeit die Bewegung eine gleichförmige ist, daß also jedesmal der in dieser Zeit zurückgelegte Weg sich darstellen läßt durch

$$s = c \cdot t,$$

wobei  $t$  die Anzahl der Sekunden nach Fortnahme des Übergewichtes und  $c$  die in jedem Falle in der ersten Sekunde nach jener Fortnahme zurückgelegte Weg ist. Dieser Weg oder die während der Wirkung des Übergewichtes erlangte Geschwindigkeit ist aber verschieden; sie ist um so größer, je länger das Gewicht gewirkt hat. Bestimmen wir die Geschwindigkeiten in den einzelnen Fällen, so finden wir:

nach . . . . .	1"	2"	3"	4"
die Geschwindigkeiten	20 <sup>cm</sup>	40 <sup>cm</sup>	60 <sup>cm</sup>	80 <sup>cm</sup>

Invidieren wir die in den einzelnen Fällen erlangten Geschwindigkeiten



durch die Anzahl Sekunden, in welchen dieselben durch die Wirkung des Übergewichts erzeugt sind, so wird

$$\frac{20}{1} = \frac{40}{2} = \frac{60}{3} = \frac{80}{4} = 20.$$

Die Quotienten haben alle denselben Wert. Wir sehen somit in allen Fällen, und schließen daraus für alle Fälle, daß die durch Wirkung des konstanten Übergewichtes, also auch allgemein durch die Wirkung des konstanten Druckes in verschiedenen Zeiten erreichten Geschwindigkeiten einfach den Zeiten proportional sind, oder daß

$$v = c_1 t,$$

die in der Zeit  $t$  erlangte Geschwindigkeit  $v$  gleich ist dem Produkt der in der ersten Sekunde erlangten Geschwindigkeit und der Zeit  $t$ , somit die in gleichen Zeiten stattfindenden Geschwindigkeitszunahmen sind, so erzeugt eine konstante stetig wirkende Kraft eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Im § 1 haben wir bereits abgeleitet, daß bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung die während derselben zurückgelegten Wege sind der halben Beschleunigung multipliziert mit dem Quadrate der Zeit, während welcher die Bewegung gedauert hat, daß also

$$s = \frac{1}{2} c_1 t^2.$$

Zu dem gleichen Resultate können wir auch durch eine einfache Überlegung gelangen. Da nämlich die Zunahme der Geschwindigkeit in gleichen Zeiten immer dieselbe ist, so legt der mit gleichmäßig beschleunigte Bewegung bewegte Körper in einer gegebenen Zeit denselben Weg zurück als wenn er sich während der ganzen Zeit in gleichförmiger Bewegung derjenigen Geschwindigkeit bewegt hätte, die er genau in der Mitte der Zeit gehabt hat. Denn mit dieser Geschwindigkeit hätte er in der ersten Hälfte der Zeit gerade soviel mehr zurückgelegt, wie er in Wirklichkeit zurückgelegt hat, als er in der zweiten Hälfte weniger zurücklegen würde. Die mittlere Geschwindigkeit ist  $\frac{1}{2} c_1 t$ , somit der zurückgelegte Weg  $\frac{1}{2} c_1 t \cdot t = \frac{1}{2} c_1 t^2$ , wie es die Rechnung ergab.

Wir können leicht die Richtigkeit unserer Rechnung durch den Versuch bestätigen, indem wir an der Fallmaschine den Ring  $H$  fortnehmen und jene Stellen aufsuchen, an denen wir den Teller  $K$  befestigen müssen, damit das Gewicht  $P$  nach 1, 2, 3 . . . Sekunden aufschlägt. Wir markieren diese Stellen

nach	1"	2"	3"	4"
bei	10	40	90	160.

Diese letzteren Zahlen sind aber

$$10 \cdot 1, \quad 10 \cdot 2^2, \quad 10 \cdot 3^2, \quad 10 \cdot 4^2$$

oder allgemein

$$s = 10 t^2.$$

Da wir bei demselben Versuche die Beschleunigung gleich 20 fanden, so ist  $10 = \frac{1}{2} c_1$ .

Die durch eine jede konstante Kraft hervorgebrachte gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist vollständig bestimmt, wenn die Beschleunigung

bekannt ist, denn mit dieser erhalten wir für jede Zeit die Geschwindigkeit: und den in dieser Zeit zurückgelegten Weg. Daß die Beschleunigung von der Größe der bewegendenden Kraft und von der Größe des bewegten Gewichtes abhängig sein muß, ergibt sich unmittelbar aus der Überlegung, daß es gerade die Kraft ist, welche den Bewegungszustand des Beweglichen ändert: in welcher Weise aber die Beschleunigung von diesen beiden Größen abhängt, darüber kann uns nur der Versuch belehren.

Lassen wir zunächst das Gesamtgewicht an unserer Fallmaschine ganz ungeändert, und verändern nur das Übergewicht. Zu dem Zwecke sind an den Enden des Fadens Scheiben angebracht, auf welche man eine Anzahl unter sich ganz gleiche Ringe legt. Legen wir zunächst auf beide Seiten  $n$  Gewichte  $p$ , so daß etwa diese  $n p$  gleich dem vorhin angenommenen Gewichte  $P$  sind, so tritt keine Bewegung ein; legen wir dann auf die eine Seite unser Übergewicht  $p$  und das Friktionsgewicht  $\pi$ , so tritt die vorhin betrachtete beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung  $c_1 = 20^{\text{cm}}$  ein. Nun nehmen wir von der hinteren Seite einen Ring vom Gewichte  $p$  fort und legen ihn auf die vordere Seite; wir haben dann bei ganz ungeändertem Gesamtgewichte des ganzen Systems auf der einen Seite das Übergewicht  $3p$ , denn vorn liegen die Gewichte  $(n + 1)p + p = (n + 2)p$ , auf der hinteren Seite dagegen  $(n - 1)p$ . Verfahren wir ein zweites Mal so, dann erhalten wir das Übergewicht  $5p$ , ein drittes Mal  $7p$  usf., so daß bei stets gleichem Gesamtgewichte sich die Übergewichte verhalten wie  $1 : 3 : 5 : 7$  usf.

Bestimmen wir die Beschleunigungen in diesen Fällen, so finden wir, daß dieselben mit der Größe des Übergewichtes in demselben Verhältnisse stehen, denn wir erhalten sie

bei dem Übergewichte	$p$	gleich	$c_1$
„ „ „	$3p$	„	$3c_1$
„ „ „	$5p$	„	$5c_1$
„ „ „	$7p$	„	$7c_1$

Bezeichnen wir daher die durch ein der Gewichtseinheit gleiches Übergewicht unserem System erteilte Beschleunigung mit  $d$ , so können wir die durch irgend ein Übergewicht  $p$  erzeugte Beschleunigung  $c$  wiedergeben durch

$$c = dp.$$

oder die Beschleunigung ist allgemein der Größe des Übergewichts oder der Größe der bewegendenden Kraft proportional.

Ändern wir bei gegebenem Übergewicht das Gesamtgewicht unseres Systems  $P + P' + H + \pi + p$ , was wir dadurch können, daß wir eine beliebige Anzahl von Ringen auf die am Ende des Fadens angebrachten Scheiben legen, so finden wir, daß mit der Größe dieses Gewichtes die Beschleunigung abnimmt. Legen wir bei dem Übergewichte  $p$  soviel Ringe auf, daß das Gesamtgewicht verdoppelt, verdreifacht wird, so wird die Beschleunigung die Hälfte oder ein Drittel usf. Wir finden allgemein, daß bei konstantem Übergewichte die Beschleunigung in demselben Maße kleiner wird, als die Größe des Gesamtgewichtes zunimmt.

Ändern wir aber gleichzeitig das Gesamtgewicht des Systems und das Übergewicht in demselben Sinne, verdoppeln, verdreifachen wir beide, so haben wir immer dieselbe Beschleunigung, wie wir sie bei einfachem Ge-

samtgewichte und einfachem Übergewichte fanden. Daraus folgt, daß Beschleunigung nicht allein von der Größe der bewegenden Kraft oder von der Größe des zu bewegenden Gewichtes, sondern von dem Verhältnisse beider zueinander abhängt, oder daß die Beschleunigung der Größe dieses Verhältnisses direkt proportional ist. Nennen wir daher die Beschleunigung, welche die der Gewichtseinheit gleiche bewegende Kraft einem die Gewichtseinheit wiegenden Körper erteilt,  $g$ , so wird die Beschleunigung  $c$ , welche die Kraft  $p$  dem Gewichte  $Q$  erteilt,

$$c = g \frac{p}{Q},$$

oder allgemein die einem Körper erteilte Beschleunigung ist der Größe der Kraft direkt, dem Gewichte des Körpers umgekehrt proportional.

Es ist gut, zu beachten, daß in dieser Gleichung das Gewicht  $Q$  einer anderen Weise auftritt als das Übergewicht  $p$ . Wir sahen schon früher, daß die Materie träge ist, daß es immer einer Kraft bedarf, um den Bewegungszustand eines Körpers zu ändern, daß also in der Trägheit der Materie ein Widerstand gegen eine Änderung der Geschwindigkeit vorhanden ist. Wir sehen nun hier, daß es bei verschiedenen Körpern zur gleichen Änderung ihres Bewegungszustandes einer verschiedenen Kraft bedarf, und daß diese Kraft in demselben Verhältnisse zunehmen muß wie der Druck, den der bewegte Körper auf seine Unterlage ausübt, oder daß der Widerstand des Körpers gegen die Bewegungsänderung seinem Gewichte proportional ist; das Gewicht ist also das Maß dieses Widerstandes und in dem Sinne tritt es in dem Nenner obiger Gleichung auf.

Aus dem Ausdrucke für die Beschleunigung irgend eines Körpers vom Gewichte  $Q$  durch irgend eine Kraft  $p$  können wir nun auch sofort die Geschwindigkeit  $v$  erhalten, welche die Kraft diesem Körper in der Zeit  $t$  erteilt, sowie den Weg  $s$ , den der Körper unter Wirkung dieser Kraft zurücklegt. Wir erhalten

$$v = g \frac{p}{Q} t$$

$$s = \frac{1}{2} g \frac{p}{Q} t^2.$$

In diesen Ausdrücken ist alles enthalten, was auf die Bewegung eines Körpers infolge einer konstanten Kraft von Einfluß ist, Größe der Kraft und bewegten Gewichte und Länge der Zeit, während welcher die Kraft wirkt. Die vierte darin vorkommende Größe ist eine Zahl, die wir aus unsern Versuchen bestimmen können. Genaue später zu besprechende Versuche haben gezeigt, daß diese Größe aus Gründen, die dann eben hervortreten werden, an den verschiedenen Orten der Erde einen etwas verschiedenen Wert hat. In Göttingen ist sie nach den Bestimmungen von Gauß<sup>1)</sup> 9,81163, für Paris nach den Bestimmungen von Biot und Arago<sup>2)</sup> 9,80896, wenn die Zeit  $t$  in Sekunden und die Geschwindigkeit in Metern gemessen wird.

1) Gauß, Intensitas vis magneticae terrestris in mensuram absolutam vocata. Göttingen 1833. Poggend. Ann. 28. p. 613. 1833.

2) Biot et Arago, Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques etc. Paris 1821.

Die Bedeutung dieser in der Physik immer mit  $g$  bezeichneten Zahl ist leicht zu erhalten; setzen wir nämlich  $p = Q$ , so wird

$$v = gt; \quad s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Ist aber  $p = Q$ , so heißt das, das Übergewicht ist gleich dem Gesamtgewichte, oder wir lassen den Körper frei fallen. Die Größe  $g$  ist demnach die Beschleunigung oder der in jeder Sekunde eintretende Geschwindigkeitszuwachs beim freien Fall, und die beiden letzten Ausdrücke liefern uns die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach  $t$  Sekunden und den in  $t$  Sekunden durchfallenen Raum.

## § 6.

**Fundamentalgesetz der Kraftwirkung.** Das im § 5 experimentell abgeleitete Gesetz, daß eine konstante Kraft eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung hervorbringt, deren Beschleunigung der Größe der Kraft direkt proportional ist, liefert uns sofort ein Beispiel dafür, daß, wie in der Einleitung hervorgehoben wurde, ein solches Gesetz nicht nur der Ausdruck derjenigen Tatsachen ist, welche es in einem allgemeinen Satze zusammenfaßt, sondern daß es gleichzeitig alle diejenigen Erscheinungen in sich schließt, welche aus demselben folgen. Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung können wir als die experimentelle Grundlage der neuen Mechanik bezeichnen, indem aus demselben sich das Fundamentalgesetz der Wirkung einer Kraft ergibt, das Gesetz nämlich, daß die Wirkung einer Kraft nur durch sie selbst und von nichts anderm bedingt ist.

Das Gesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung zeigt uns nämlich zunächst, daß die Geschwindigkeitszunahme in gleichen Zeiten immer denselben Wert hat, die Geschwindigkeit ist am Ende der ersten Sekunde  $c_1$ , der zweiten  $2c_1$ , der dritten  $3c_1$ , sie wächst in jeder Sekunde um einelei, welche Geschwindigkeit der Körper bei dem Beginne der Sekunde besaß. Wir schließen daraus, daß die Wirkung einer Kraft auf einen beweglichen Körper immer dieselbe ist, einerlei, ob der Körper schon eine Bewegung besitzt oder nicht.

Ganz dasselbe zeigt die Betrachtung der unter Wirkung einer Kraft zurückgelegten Wege. Dieselben sind in den aufeinanderfolgenden Sekunden

$$c_1, \quad 3c_1, \quad 5c_1.$$

Wäre der Körper am Schlusse der ersten Sekunde der Wirkung der Kraft entzogen, so wäre er in gleichförmiger Bewegung mit der Geschwindigkeit  $c_1$  weitergegangen, er hätte also in der zweiten Sekunde den Weg  $c_1$  zurückgelegt. Infolge der dauernden Kraftwirkung hat er den Weg  $3c_1$  zurückgelegt.

Die Differenz  $3c_1 - c_1 = 2c_1$  ist also Folge der Wirkung der Kraft. Dieser Weg ist gleich dem in der ersten Sekunde zurückgelegten. Ebenso ist es in den folgenden Sekunden, oder es ergibt sich allgemein, daß der durch die Wirkung einer Kraft in jeder Sekunde zurückgelegte Weg ganz unabhängig ist von der Geschwindigkeit, welche der Körper bereits besitzt.

Der soeben gezogene Schluß, daß die Wirkung einer Kraft ganz unabhängig ist von der Bewegung, die ein Körper schon besitzt, gilt zunächst nur in dem Falle, daß die Kraft in der Richtung der Bewegung wirkt, welche der Körper schon besitzt. Indes läßt sich der Schluß mit Hilfe bekannter Erfahrungen leicht verallgemeinern. Befinden wir uns in einem mit gleichförmiger Bewegung begabten Raume, etwa in dem Innern eines Schiffes, so nehmen wir die Bewegung nicht direkt wahr. Lassen wir dann auf irgend einen im Innern des Raumes befindlichen Körper eine Kraft wirken, so bewegt sich derselbe innerhalb des Raumes ganz so, wie wenn das Schiff in Ruhe wäre. Die Wirkung der Kraft auf den Körper ist also unabhängig von dessen mit dem Schiffe gemeinsamer Bewegung. Ja es bedarf zum Beweise dieses Satzes nicht einmal besonderer Beobachtungen, unsere Versuche zur Ableitung des Gesetzes der gleichförmigen Bewegung liefern schon den Beweis, da uns die Astronomie lehrt, daß unsere Erde, mit allem, was auf ihr ist, eine sehr komplizierte Bewegung im Raume hat, die wir an der Erde nicht wahrnehmen, weil unsere ganze Umgebung mit uns die gleiche Bewegung hat. Wir können deshalb ganz allgemein den Satz aufstellen:

„Wenn alle Punkte eines Systems eine gemeinschaftliche Bewegung haben, und einer von ihnen wird der Wirkung einer Kraft unterworfen, so ist die Bewegung, welche der Punkt infolge dieser Kraft in Beziehung auf das System annimmt, genau so, als habe die gemeinschaftliche Bewegung des Systemes nicht existiert.“

Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung sagt weiter, daß die Beschleunigungen, welche verschiedene Kräfte an einem Systeme bewirken, der Größe der Kräfte proportional sind. Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf ein System, so ist die Beschleunigung gleich der Summe der Beschleunigungen, welche jede Kraft für sich, wenn sie allein wirksam wäre, hervorbringen würde. Es folgt somit, daß die Wirkung einer Kraft unabhängig davon ist, ob gleichzeitig mit ihr eine andere zur Wirksamkeit kommt, oder daß die Wirkung einer Summe von Kräften gleich ist der Summe der Wirkungen der einzelnen Kräfte.

Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegungen beweist diesen Satz zunächst wiederum nur für gleichgerichtete Kräfte, man kann ihn durch den vorhin angeführten ähnliche Erfahrungen leicht verallgemeinern; indes ist das nicht einmal erforderlich, da wir diesen Satz schon allgemein aus dem vorigen folgern können. Denn die Wirkung einer jeden von einer Summe gleichzeitig wirkender Kräfte ist Bewegung. Da wir nun ganz allgemein fanden, daß die Wirkung einer Kraft durchaus unabhängig von einer bereits vorhandenen oder anderweitig erteilten Bewegung ist, so folgt auch, daß die Wirkung einer Kraft unabhängig von derjenigen einer andern ist.

Dieser Satz, daß die Wirkung einer Kraft von nichts beeinflußt wird ist der Fundamentalsatz der Mechanik, denn er setzt uns in den Stand sofort die von einer Kraft bewirkte Bewegung zu bestimmen, wenn wir die Dauer ihrer Wirkung und die Masse des bewegten Systems kennen. Wir haben mit demselben die experimentelle Grundlage der Mechanik gewonnen, aus welcher diese Wissenschaft deduktiv abgeleitet wird.

## § 7.

**Das Kräfteparallelogramm.** Wir gehen zunächst dazu über, die unter Wirkung mehrerer nach verschiedenen Richtungen tätiger Kräfte stattfindende Bewegung etwas genauer zu betrachten und daraus einige Folgerungen zu ziehen.

Es ist an sich klar, daß ein Körper, der sich infolge zweier nach verschiedener Richtung wirkender Kräfte bewegt, sich weder in der Richtung der einen noch in derjenigen der andern bewegen kann. Nach dem eben entwickelten Fundamentalsatze ist es aber leicht, die Richtung, nach welcher sich der Körper bewegt, zu bestimmen. Die Kräfte wirken jede, wie wenn die andere nicht da wäre; der Ort, welchen das Bewegliche nach der ersten Sekunde erreicht hat, wird daher gerade so erreicht werden, wenn wir die beiden Kräfte nacheinander jede eine Sekunde wirken lassen. Legen wir daher durch den Punkt, welchen der Körper unter Wirkung der einen Kraft erreicht hat, eine gerade Linie und tragen auf dieser parallel der Richtung, in welcher die zweite Kraft für sich den Körper bewegt haben würde, die Länge auf, welche er unter Wirkung dieser Kraft in einer Sekunde zurückgelegt haben würde, so wird der Endpunkt dieser Länge wirklich der Punkt sein, in welchem sich der Körper nach gemeinschaftlichem Wirken der beiden Kräfte befindet, und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ausgangspunkte wird der Richtung und Länge nach der Weg sein, den der Körper wirklich zurückgelegt hat.

Man sieht, dieser Weg fällt der Größe und Richtung nach mit der Diagonale eines Parallelogramms zusammen, welches wir aus den Längen konstruieren können, welche der Körper infolge jeder Kraft für sich in der gleichen Zeit zurücklegt, indem wir diese Längen im Ausgangspunkt in den entsprechenden Richtungen zusammenlegen und das durch diese Längen und den Winkel, den sie miteinander bilden, bestimmte Parallelogramm vervollständigen.

Diesen Weg hat der Körper allerdings durch die Wirkung zweier Kräfte zurückgelegt, welche nach verschiedenen Richtungen wirkten. Aber auf denselben Weg hätten wir auch in derselben Zeit den Körper durch eine einzige in der Richtung der resultierenden Bewegung wirksame Kraft zurücklegen lassen können. Da dann diese Kraft die gleiche Wirkung hat wie die beiden zusammenwirkenden, so kann man die beiden vorhandenen Kräfte auch vollständig durch diese Kraft ersetzen. In dem Sinne nennt man auch die Kraft, welche der Richtung und Größe nach dieselbe Bewegung zur Folge hat als die beiden einzelnen Kräfte durch ihr Zusammenwirken, die aus diesen resultierende Kraft.

Die Kraft, welche also die beiden wirklich vorhandenen der Größe und Richtung nach ersetzt, läßt sich durch eine ganz ähnliche Konstruktion ihrer Größe nach erhalten. Wenden wir nämlich anstatt der in gegebenen Zeiten durchlaufenen Wege zu unserer Konstruktion die durch dieselben Kräfte bewirkten Beschleunigungen an, so sind die Kräfte zu Beschleunigungen proportional und können durch dieselben dargestellt werden. Wir gelangen daher unmittelbar zu dem Satze, daß die aus zwei Kräften in verschiedener Richtung wirkenden Kräfte resultierende Kraft der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des von jenen Kräften



und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmten Parallelogramms gegeben wird.

Dieser für die theoretische Mechanik äußerst wichtige Satz, der nur eine Konsequenz des in dem vorigen Paragraphen Gesagten ist, wird der Satz vom Parallelogramm der Kräfte genannt.

Man sieht, wie man dadurch imstande ist, die Wirkung beliebig vieler nach verschiedenen Richtungen tätiger, an einem Punkte angreifender Kräfte auf jene einer einzigen zurückzuführen, welche alle jene vollständig ersetzt, indem man die Kräfte nur paarweise zusammensetzt.

Um die Größe der aus zwei Kräften  $P$  und  $P_1$ , welche den Winkel  $\alpha$  miteinander bilden, resultierenden Kraft zu erhalten, haben wir nur den bekannten Satz aus der ebenen Geometrie über die Größe der Diagonale eines Parallelogramms anzuwenden, welche den Winkel  $\alpha$  schneidet; die Resultante  $R$  ist danach gegeben durch

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + 2PP_1 \cos \alpha.$$

Umgekehrt erhellt aber auch, daß eine jede Bewegung als die Resultierende aus zwei Seitenbewegungen aufgefaßt, somit auch die jene Bewegung bestimmende Kraft als die Resultierende zweier gedachter Seitenkräfte aufgefaßt werden kann. Da nun jede Linie als Diagonale unendlich vieler Parallelogramme aufgefaßt werden kann, so kann man jede Kraft auf unendlich viele verschiedene Arten in Seitenkräfte zerlegen; jede dieser Seitenkräfte kann dann wieder als Resultierende anderer Seitenkräfte betrachtet werden, so daß also jede Kraft in unendlich viele Seitenkräfte zerlegt werden kann.

Diese letzten Sätze sind in der Mechanik von hoher Bedeutung, da sie uns in den Stand setzen, die Wirkung, welche eine Kraft nach einer von ihrer eigenen verschiedenen Richtung ausüben kann, zu berechnen. Kann z. B. ein Körper sich nur nach einer bestimmten Richtung bewegen, und wirkt auf ihn eine konstante Kraft, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung des Körpers den Winkel  $\alpha$  bildet, so erhalten wir die Größe der die Bewegung des Körpers bewirkenden Seitenkraft, wenn wir die gegebene Kraft so zerlegen, daß die eine der Seitenkräfte in die Richtung der Bewegung fällt, die andere zu ihr senkrecht ist. Letztere trägt zur Bewegung gar nichts bei, die erstere Komponente ist es somit, welche die Bewegung bedingt. Nennen wir die ursprüngliche Kraft  $P$ , die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente  $R$ , so ist

$$R = P \cos \alpha,$$

wie sich unmittelbar daraus ergibt, daß  $P$  die Diagonale eines Rechtecks ist, dessen eine Seite  $R$  mit  $P$  den Winkel  $\alpha$  bildet.

Haben wir eine ganze Reihe von Kräften  $P, P_1, P_2, \dots$  die mit der Bewegungsrichtung die Winkel  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  bilden, so ist die aus allen diesen resultierende, die Bewegung bestimmende Kraft

$$R = P \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots = \Sigma P \cos \alpha,$$

wenn das Zeichen  $\Sigma$  die Summen aller einzelnen Produkte  $P \cos \alpha$  bedeutet.

Experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Sätze werden von sehr vielen gefunden; wir erwähnen hier eines der am häufigsten vorkommenden



la, die Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene. Wir  
sa, daß der Körper ohne jegliche Reibung die schiefe Ebene  
kürze.

sa wir an, die schiefe Ebene bilde mit dem Horizonte den  
und der aufgelegte Körper habe das Gewicht  $p$ . Die Rich-  
schwere ist die der Vertikalen. Wir sehen die Schwerkraft als  
rende zweier Kräfte an, deren eine auf der schiefen Ebene  
teht, während die andere mit ihr parallel ist. Mit der Richtung  
s bildet die erstere den Winkel  $\alpha$ , die zweite den Winkel  
ach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist die erstere  
h  $p \cos \alpha$  und die zweite  $p \sin \alpha$ . Die erstere dieser Kräfte  
Druck gegen die schiefe Ebene bewirken und zu einer Be-  
hts beitragen; die zweite jedoch, welche parallel der schiefen  
wird dem Körper eine Bewegung die schiefe Ebene herab zu  
ben. Ihr Wert ist  $p \sin \alpha$ , also mit dem Neigungswinkel ver-  
Soll der Körper in Ruhe bleiben, so muß also eine Kraft  
lles und die schiefe Ebene hinaufgerichtet angebracht werden.  
h bestätigt es. Denn befestigt man an dem Körper einen  
führt ihn der schiefen Ebene parallel über eine Rolle, so muß  
anderer Seite des Fadens Gewichte  $p \sin \alpha$  anhängen, um den  
der schiefen Ebene festzuhalten.

nan den Körper rollen, so ist die ihn bewegende Kraft nach  
n  $p \sin \alpha$ . Diese erteilt ihm die Beschleunigung

$$G = g \frac{p \sin \alpha}{p} = g \sin \alpha.$$

ungen seiner Bewegung sind demnach

$$v = g \sin \alpha t \quad s = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2.$$

der bewegliche Körper  $A$  im Punkte  $B$  angekommen ist, so  
Raum  $AB$

$$AB = \frac{h}{\sin \alpha}$$

. wenn wir mit  $h$  die Höhe der schiefen Ebene bezeichnen.  
diesen Wert  
leichung für

Fig. 15.

$$g \sin \alpha t^2$$

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

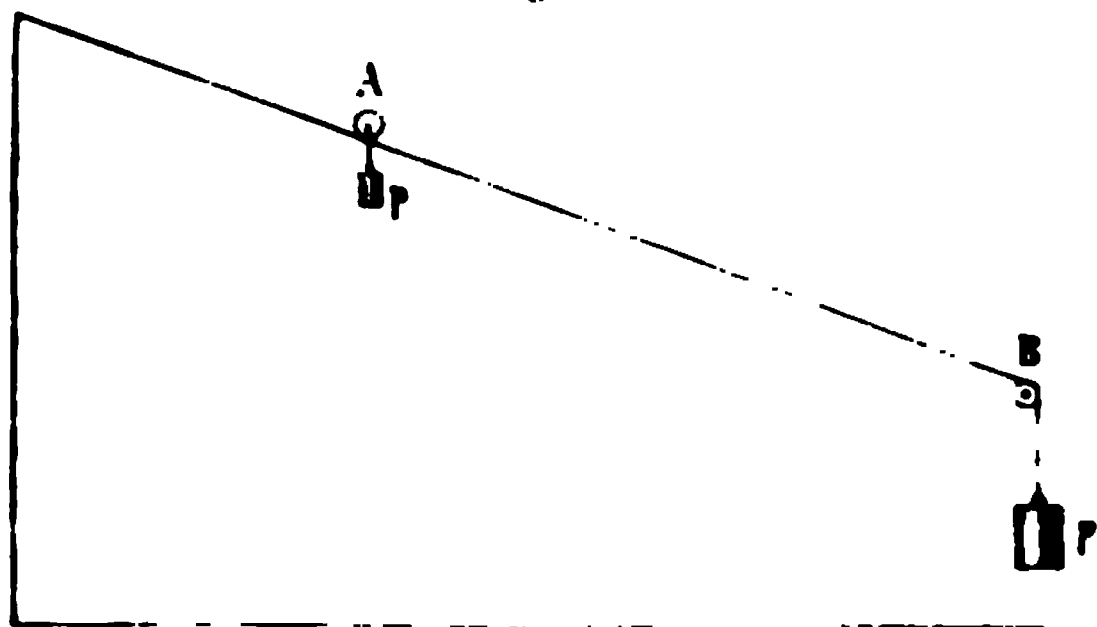
er des Falls

$$h = \frac{1}{2} g \sin^2 \alpha t^2$$

hwindigkeit,

in  $B$  an-

ei gleicher Höhe  $h$  des Ausgangspunktes  $A$  über  $B$  ist somit  
des Falles dem Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene



umgekehrt proportional; die Geschwindigkeit  $v$  dagegen ist von dieser Neigung unabhängig, sie ist einfach gleich jener, welche der Körper erhält, wenn er die Höhe  $h$  frei durchfallen hat. Denn die Geschwindigkeit beim freien Fall ist nach der Zeit  $t$

$$v = gt.$$

Um die Höhe  $h$  zu durchfallen ist die Zeit  $t$  nach der Gleichung

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

somit die Geschwindigkeit  $v$

$$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$

Schon Galilei hat diese Sätze für die Bewegung auf der schiefen Ebene experimentell aufgefunden, und an derselben die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung erkannt.

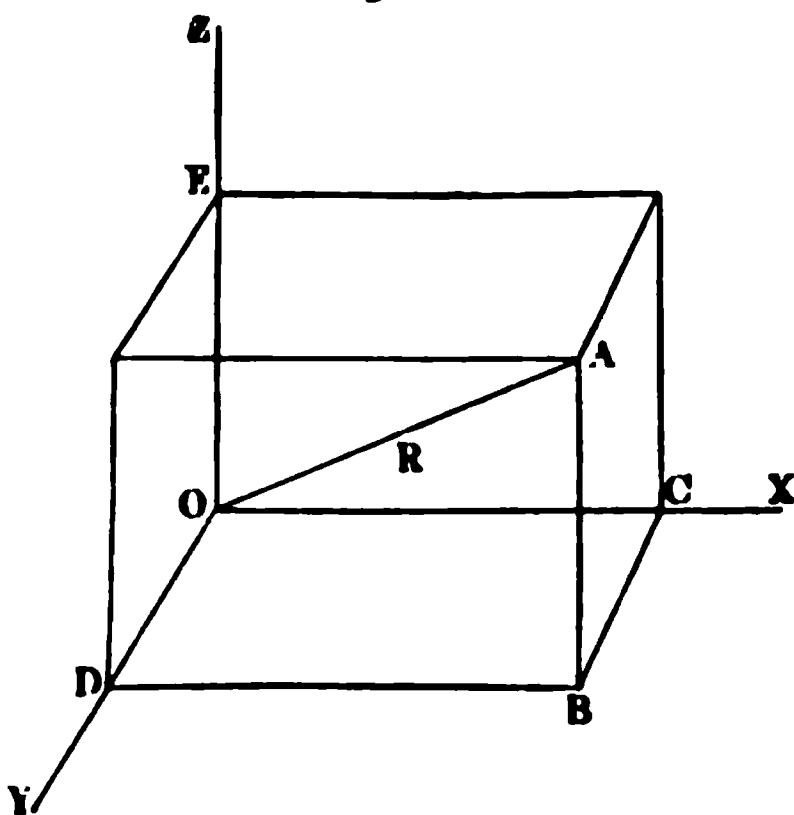
Von der schiefen Ebene macht man in der Praxis vielfache Anwendung, um Lasten eine gewisse Höhe hinaufzuschaffen. Jede Schraube ist eine um einen Zylinder gewickelte schiefe Ebene, ebenso beruht die Wirksamkeit des Keiles auf den Gesetzen der schiefen Ebene.

## § 8.

**Bedingungen des Gleichgewichtes eines Punktes, auf den beliebig viele beliebig gerichtete Kräfte wirken.** Die in dem letzten Paragraphen entwickelten Sätze bieten uns das Mittel zu bestimmen, wann ein fester Körper, der von beliebig vielen beliebig gerichteten Kräften affiziert wird, eine fortschreitende Bewegung annehmen kann, wann nicht. Greifen die Kräfte an demselben Punkte des Körpers an, so fallen die Gleichgewichtsbedingungen mit denen eines materiellen Punktes zusammen, ja sehen wir von den später zu betrachtenden drehenden Bewegungen ab, so ist die Bedingung, daß die Kräfte alle an demselben Punkt angreifen müssen, nicht einmal erforderlich, es fallen dann allgemein die Bedingungen des Gleichgewichtes eines festen Körpers mit denen eines materiellen Punktes zusammen. Setzen wir zunächst voraus, daß der Punkt sich vollkommen frei bewegen kann, so ist die für das Gleichgewicht notwendige Bedingung, daß wenn wir die Summe der Komponenten der Kräfte in irgend einer beliebigen Richtung bilden, diese Summe immer gleich Null ist, wie wir diese Richtung auch wählen. Das ist aber der Fall, wenn die Summe der nach drei durch den Punkt gelegten zueinander senkrechten Richtungen gebildeten Komponenten für jede dieser Richtungen gleich Null ist. Denn sind (Fig. 16)  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  die drei zueinander senkrechten durch den Punkt  $O$  gelegten Richtungen, und sind die nach diesen Richtungen gebildeten Komponenten gleich Null, so folgt zunächst, daß wenn eine Kraft  $P$  wirkt, daß der Punkt  $O$  sich nicht aus der durch  $OX$  und  $OZ$  gelegten Ebene bewegen kann. Jede Kraft  $P$  nämlich, welche den Punkt aus dieser Ebene zieht, würde mit  $OY$  einen Winkel  $\beta$  bilden, der kleiner ist als  $90^\circ$ . Da nun die parallel  $OY$  gebildete Komponente

ser Kraft  $P \cdot \cos \beta$  sein würde, so wäre dieselbe und damit die parallel  $Y$  gerichtete Komponente der Kräfte überhaupt nicht gleich Null. Daraus, daß die Summe aller parallel  $OZ$  gerichteten Komponenten gleich Null, folgt ferner, daß der Punkt nicht von der Linie  $OX$  in der Ebene  $ZOX$  entfernt wird; denn auch dazu wäre eine Kraft nötig, die mit der Richtung  $OZ$  einen Winkel  $\gamma$  bildet, der kleiner ist als  $90^\circ$ . Die Komponente dieser Kraft parallel  $OZ$  würde  $P \cos \gamma$ , somit wieder von Null verschieden sein. Da nun auch die parallel  $OX$  gerichtete Komponente gleich Null ist, so folgt schließlich, daß der Punkt  $O$  auch in dieser Linie nicht bewegt werden kann, somit daß der Punkt überhaupt in Ruhe ist.

Fig. 16.



Wirken demnach auf den Punkt  $O$  beliebige Kräfte  $P$ , deren Richtungen durch die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben sind, welche sie mit den festen Richtungen  $OX, OY, OZ$  bilden, so können wir die Bedingung des Gleichgewichts nach der schon im vorigen Paragraphen gewählten Bezeichnungsweise schreiben

$$\sum P \cos \alpha = 0 \quad \sum P \cos \beta = 0 \quad \sum P \cos \gamma = 0.$$

Sind diese Komponenten nicht gleich 0, so haben sie eine Resultierende, welche wir mit  $R$  bezeichnen wollen, die mit den drei Richtungen  $OX, OY, OZ$  die Winkel  $a, b, c$  bilden möge. Die Größe dieser Resultierenden und ihre Richtung ist dann vollständig dadurch bestimmt, daß ihre parallel den drei Richtungen genommenen Komponenten den Komponenten der vorhandenen Kräfte einfach gleich sein müssen, oder daß

$$\sum P \cos \alpha = R \cos a \quad \sum P \cos \beta = R \cos b \quad \sum P \cos \gamma = R \cos c$$

sein muß. Daraus folgt weiter

$$R^2 (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) = (\sum P \cos \alpha)^2 + (\sum P \cos \beta)^2 + (\sum P \cos \gamma)^2.$$

In der Stereometrie wird nun bewiesen, daß wenn  $a, b, c$  die Winkel sind, welche eine Richtung  $OA$  (Fig. 16) mit den drei zueinander senkrechten Richtungen  $OX, OY, OZ$  bildet, die Quadratsumme

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

daraus ergibt sich, wenn wir zugleich

$$\sum P \cos \alpha = X \quad \sum P \cos \beta = Y \quad \sum P \cos \gamma = Z$$

setzen,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

den Ausdruck für die Größe der Resultierenden. Stellen wir also, wie im vorigen Paragraphen, die Komponenten der Kräfte auf den drei Richtungen

und ebenso die Resultierende durch Linien dar, so ergibt sich, daß die Resultierende als die Diagonale eines Parallelepipedes angesehen werden kann, dessen drei Seiten die parallel den drei festen Richtungen genommenen Komponenten aller Kräfte sind.

Ist  $OA$  (Fig. 16) diese Resultante, und sind  $OC$ ,  $OD$ ,  $OE$  die Komponenten, so erhalten wir, da  $OCA$ ,  $ODA$ ,  $OEA$  rechtwinklige Dreiecke sind, für die die Richtung der Resultierenden bestimmenden Winkel

$$\cos a = \frac{OC}{OA} = \frac{X}{R}; \quad \cos b = \frac{OD}{OA} = \frac{Y}{R}; \quad \cos c = \frac{OE}{OA} = \frac{Z}{R}.$$

Kennen wir somit die drei Komponenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  aller Kräfte, ist dadurch Größe und Richtung der resultierenden Kraft, somit auch wenn das Gewicht des in  $O$  befindlichen Körpers bekannt ist, die ganze Bewegung desselben bestimmt.

Kann der Punkt  $O$  sich nicht frei nach allen Richtungen bewegen, ist er etwa genötigt auf einer festen Oberfläche zu bleiben, so ist die in vorigen abgeleitete Bedingung des Gleichgewichts nicht notwendig; es genügt dann, daß die an ihm angreifenden Kräfte den Körper in der Oberfläche nach keiner Richtung hin bewegen können; und dazu ist es notwendig, daß die Resultierende aller Kräfte auf der Oberfläche senkrecht ist. Welche Bedingungen dazu erforderlich sind, das mathematisch zu formulieren ist Aufgabe der theoretischen Mechanik; wir werden sie in § 22 kurz andeuten.

## § 9.

**Allgemeine Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung und Wurfbewegung.** Ebenso wie wir durch die in den §§ 6 und 7 abgeleiteten allgemeinen Gesetze imstande waren, die Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, sind wir nun auch imstande ganz allgemein zu entwickeln, welches die Bewegung eines Körpers unter Wirkung einer konstanten Kraft ist.

Lassen wir auf einen Körper vom Gewichte  $Q$  die Kraft  $P$  einwirken, so wird die Beschleunigung des Körpers in der Richtung, nach welcher die Kraft wirkt,

$$G = g \frac{P}{Q}.$$

Die in der Zeit  $t$  erlangte Geschwindigkeit ist

$$v = g \frac{P}{Q} t.$$

Besäß der Körper beim Beginne der Wirkung der Kraft bereits eine Geschwindigkeit  $a$ , so setzt nach § 6 die neuerlangte Geschwindigkeit einfach mit dieser zusammen; ist die Geschwindigkeit  $a$  mit der Kraft gleich gerichtet, so addieren sich die beiden, ist sie entgegengesetzt gerichtet, so subtrahieren sie sich. Wir können die Geschwindigkeit in beiden Fällen somit nach der Zeit  $t$  allgemein setzen

$$v = a \pm g \frac{P}{Q} t.$$

Vermöge der Geschwindigkeit  $a$  durchläuft der Körper in der Zeit  $t$  den Raum  $at$ , vermöge der ihm von der Kraft  $P$  erteilten Geschwindigkeit den Raum  $\frac{1}{2}g \frac{P}{Q} t^2$ . Hat der Körper im Beginne der Zeit  $t$  bereits den Raum  $C$  durchlaufen, so wird die am Ende der Zeit  $t$  durchlaufene Strecke

$$s = C + at \pm \frac{1}{2}g \frac{P}{Q} t^2.$$

Setzen wir hierin  $C$  und  $a$  gleich Null, so erhalten wir den mit der Fallmaschine experimentell entwickelten Ausdruck, und setzen wir  $P = Q$  und nehmen an, die Kraft  $P$  sei die Schwere, unsern Ausdruck für den freien Fall der Körper.

Die Bewegung geworfener Körper ist ein spezieller Fall dieser allgemeinen Sätze. Untersuchen wir zunächst den Fall, daß ein Körper mit der Geschwindigkeit  $a$  senkrecht in die Höhe geworfen wird.

Für die Geschwindigkeit nach  $t$  Sekunden erhalten wir, da in diesem Falle  $P = Q$  ist,

$$v = a - gt,$$

dieselbe wird mit wachsender Zeit immer kleiner, sie wird gleich Null, der Körper hört auf zu steigen, wenn

$$a = gt; \quad t = \frac{a}{g}$$

ist. Die Höhe, bis zu welcher der Körper dann aufgestiegen ist, erhalten wir durch Einsetzen dieses Ausdruckes für  $t$  in die für  $s$  erhaltene Gleichung:

$$s = a \frac{a}{g} - \frac{1}{2}g \frac{a^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{g}.$$

In dieser Höhe angekommen, hört er auf zu steigen und bleibt einen Augenblick in Ruhe, aber sofort wirkt die Schwere auf ihn ein und zieht ihn wieder herab. Seine rückgängige Bewegung ist durch die Ausdrücke

$$v = gt; \quad s = \frac{1}{2}gt^2$$

bestimmt. Auf dem Boden angelangt hat er den Weg  $\frac{1}{2} \frac{a^2}{g}$  durchlaufen: wenn wir diesen Wert in die Gleichung für  $s$ , so wird

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{g} = \frac{1}{2}gt^2; \quad t = \frac{a}{g},$$

was die Geschwindigkeit, die er dann besitzt, ist

$$v = g \frac{a}{g} = a.$$

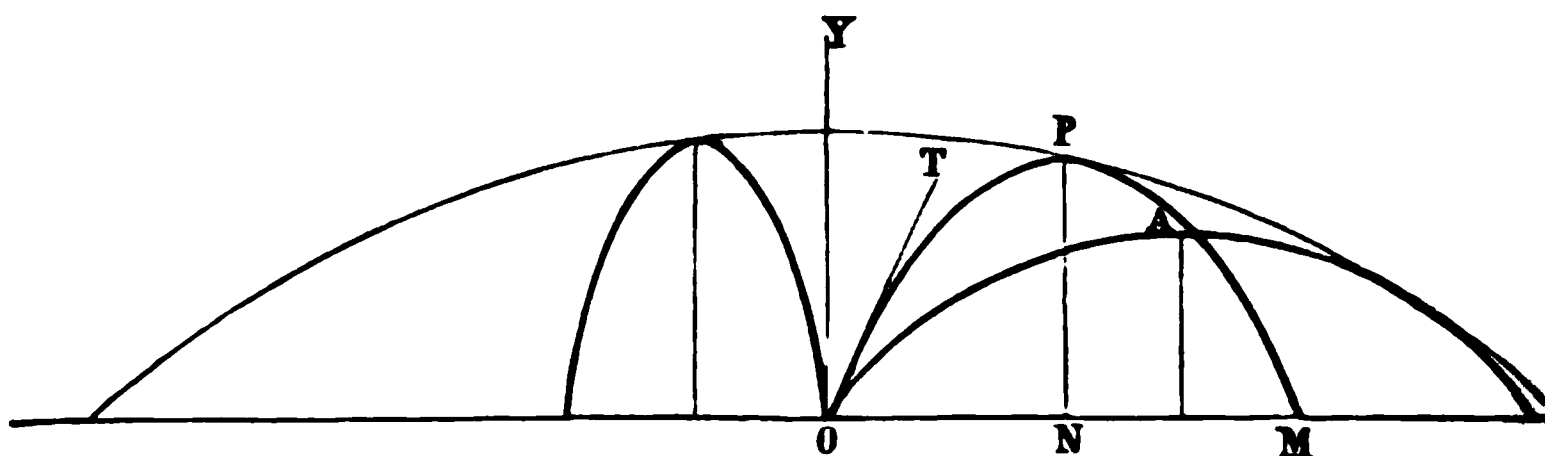
Der Körper braucht also, um die Höhe, bis zu der er gestiegen ist, zu durchfallen, dieselbe Zeit, die er zum Ersteigen der Höhe gebrauchte, mit der Geschwindigkeit, mit der er an seinem Ausgangspunkt ankommt, ist von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung als die, mit der er zu steigen begann.

Letztere Bemerkung können wir unmittelbar dahin verallgemeinern, daß ein Körper, der von einem Ausgangspunkte mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausgeht und unter Wirkung von Kräften auf seinem Wege

zur Ruhe kommt, stets in den Ausgangspunkt mit der ursprünglichen Geschwindigkeit zurückkommen muß, wenn er auf demselben Wege Wirkung derselben Kräfte zurückkehrt. Dabei ist es sogar gleichgültig, ob die Kräfte konstant oder veränderlich sind.

Untersuchen wir jetzt den Fall, daß die Richtung der dem Körper ursprünglich gegebenen Bewegung nicht mit derjenigen zusammenfällt, welche die auf ihn wirkenden Kräfte ihm erteilen. Es wird genügen, diesen Fall an einem speziellen Beispiel, an der Bewegung eines in irgend einer Richtung geworfenen Körpers zu erörtern. Nehmen wir an, daß ein Punkt  $O$  (Fig. 17) aus ein Körper mit der Geschwindigkeit  $a$  in

Fig. 17.



Richtung  $OT$  geworfen werde. Gemäß unseres in § 6 entwickelten Satzes wirken zwei Kräfte ganz unabhängig auf ihn ein; die erste erteilt ihm in der Richtung  $OT$  die Geschwindigkeit  $a$ , die zweite Wirkung der Schwere erteilt ihm in jeder Sekunde nach der Richtung der Vertikalen die Beschleunigung  $g$ . Die wirklich stattfindende Bewegung resultiert aus beiden.

Die Geschwindigkeit  $a$  können wir nach § 7 in zwei Komponenten zerlegen, in eine vertikale und eine horizontale. Bezeichnen wir den Winkel  $TON$  mit  $\alpha$ , so ist erstere  $a \sin \alpha$ , letztere  $a \cos \alpha$ . Die Schwere wirkt in der Richtung der vertikalen, und zwar in entgegengesetztem Sinne mit  $a \sin \alpha$ . Nennen wir die horizontale Geschwindigkeit  $v'$ , die vertikale  $v''$ , so erhalten wir demnach für die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$

$$v' = a \cos \alpha \quad v'' = a \sin \alpha - gt.$$

Man findet nach dem frühern daraus für die in vertikaler und horizontaler Richtung zurückgelegten Wege

$$\text{für den horizontalen } x = a \cos \alpha \cdot t$$

$$\text{für den vertikalen } y = a \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2,$$

wo  $y$  positiv in der Richtung nach oben genommen ist.

Aus diesen Ausdrücken findet man in jedem Augenblicke den Ort des Körpers, wenn man in horizontaler Richtung von  $O$  aus die für die Zeit  $t$  berechnete Größe  $x$  aufträgt und am Endpunkte dieser Linie die für die gleiche Zeit berechnete  $y$  vertikal anlegt. Der durch den Endpunkt bestimmte Punkt ist dann der Ort des Körpers. Die Linie, die durch alle so bestimmten Orte des Körpers hin legen, ist die

geworfenen Körpers. Entwickeln wir aus der zu gleicher Zeit bestehenden  $x$  und  $y$  die Größe  $t$ , so ist

$$t = \frac{x}{a \cos \alpha}$$

$$t = \frac{a \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2 y g}}{g}.$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke gleich, so gibt uns die Gleichung die Beziehung, welche immer zwischen den gleichzeitigen Werten von  $x$  und  $y$  bestehen muß, oder lösen wir die Gleichung nach  $y$  auf, so erhalten wir in der Gleichung zu jedem  $x$  das zugehörige  $y$ . Lassen wir demnach  $x$  alle Werte von Null an durchlaufen, so geben uns die Endpunkte aller dazugehörigen  $y$  die Bahn des Körpers.

Wir haben

$$\frac{gx}{a \cos \alpha} = a \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2 gy}$$

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{2 a^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{g}{a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Bezeichnen wir mit  $h$  die Höhe, bis zu welcher der senkrecht mit der Geschwindigkeit  $a$  emporgeworfene Körper aufgestiegen wäre, so haben wir wie vorhin

$$a^2 = 2gh,$$

und setzen wir das in unsern Ausdruck für  $y$

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha}.$$

Die analytische Geometrie sagt uns nun, daß eine Linie, für deren Punkte diese Beziehung zwischen  $x$  und  $y$ , den Koordinaten besteht, eine Parabel sei, die symmetrisch um eine vertikale Achse  $NP$  liegt, so daß also die Bahn des Körpers aus einem aufsteigendem Stücke  $OP$  und einem absteigendem Stücke  $P'M$  besteht, die symmetrisch zur Achse der Parabel sind.

Setzen wir  $y = 0$ , so erhalten wir zwei Werte für  $x$ , nämlich

$$x' = 0; \quad x'' = 2h \sin 2\alpha.$$

In dem Abstände  $x'' = OM$  schneidet also die Bahn des Körpers zum zweiten Male die Horizontale, der Abstand gibt also den Weg, den der Körper in horizontaler Richtung zurückgelegt hat, wenn er wieder zu Boden fällt; es ist die Wurfweite.

Man sieht, dieselbe wächst anfänglich mit  $\alpha$ , erreicht ihren größten Wert für  $\alpha = 45^\circ$  und nimmt dann wieder ab. Außerdem ist sie proportional der Größe  $h$ , also dem Quadrate der dem Körper erteilten Anfangsgeschwindigkeit  $a$ .

Setzen wir  $\alpha = 45^\circ \pm m$ , so ist die Wurfweite

$$2h \sin (90^\circ \pm 2m) = 2h \cos 2m.$$

Für gleiche Neigungen über und unter  $45^\circ$  ist also die Wurfweite dieselbe.



Die höchste Höhe, welche der Körper erreichen kann, entspricht der Punkte  $N$  der Mitte der Wurfweite. Setzen wir daher  $x = h \sin 2\alpha$ , erhalten wir für  $y$

$$y = h \sin^2 \alpha.$$

Diese Höhe wächst mit  $\alpha$  und wird am größten, wenn  $\alpha = 90^\circ$ , wenn der Körper senkrecht in die Höhe geworfen ist. Sie ist überdies mit dem Quadrate der erteilten Anfangsgeschwindigkeit proportional.

Die Geschwindigkeit ist in Punkten der Bahn, welche in gleicher Höhe liegen, gleich. Denn in der Tat, bezeichnen wir wieder die aufeinander senkrechten Komponenten der Geschwindigkeit mit  $v'$ ,  $v''$ , so folgt die wirkliche Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn  $V$  aus

$$\begin{aligned} V^2 &= v'^2 + v''^2 = a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - 2agt \sin \alpha + g^2 t^2 \\ &= a^2 - 2g \left( at \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \right) = a^2 - 2gy, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar folgt, daß  $V$  für gleiche  $y$ , also für Punkte gleicher Höhe der Bahn gleich ist; die Geschwindigkeiten sind symmetrisch zur mittelsten Höhe der Bahn  $PN$ . Bei  $P$  ist die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 - 2gy = a^2 - 2gh \sin^2 \alpha = a^2 - a^2 \sin^2 \alpha \\ V &= a \cos \alpha. \end{aligned}$$

Die vertikale Bewegung ist dort Null und nur noch die horizontale Komponente der Anfangsgeschwindigkeit vorhanden.

Die Zeit, welche der geworfene Körper braucht, um seinen höchsten Punkt zu erreichen, ist darnach gleich jener, in welcher er niederfällt.

Man kann es sich nun zur Aufgabe machen, jenen Wert von  $\alpha$  zu bestimmen, unter welchem man den Körper zur Erreichung eines bestimmten Punktes bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit werfen muß. Nennt man die Koordinaten dieses Punktes  $x'$ ,  $y'$ , so haben wir zur Bestimmung unseres Winkels  $\alpha$  nur unsere Gleichung für  $y$ , in welcher wir setzen

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha,$$

also

$$y' - x' \tan \alpha + \frac{x'^2}{4h} (1 + \tan^2 \alpha) = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - x'^2 - 4hy'}}{x'}.$$

Es gibt außer im Falle, wo die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv ist, zwei Werte für  $\alpha$ , entsprechend dem positiven und negativen Zeichen der Wurzelgröße. Es gibt somit außer in dem erwähnten Falle zwei Parabeln, in denen sich der Körper zur Erreichung seines Zieles bewegen kann.

Ist die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv, so ist die Lösung der Aufgabe möglich, d. h. alle Punkte, die durch  $x'$  und  $y'$  so bestimmt sind, daß

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' > 0,$$

können bei der durch  $h$  bestimmten Anfangsgeschwindigkeit getroffen werden, denn wir erhalten für alle zwei Werte für  $\alpha$ .

Ist der Ausdruck negativ, so wird  $\tan \alpha$  imaginär, d. h. die Punkte, deren  $x'$  und  $y'$  so bestimmt sind, daß sie den Ausdruck

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' < 0$$

machen, sind nicht erreichbar.

Die nicht erreichbaren sind von den erreichbaren Punkten getrennt durch eine Linie, deren  $x$  und  $y$  durch die Gleichung

$$4h^2 - x^2 - 4hy = 0.$$

also

$$x^2 = 4h(h - y)$$

miteinander verknüpft sind. Nach den Lehren der analytischen Geometrie ist das eine Parabel, deren Achse mit der in  $O$  errichteten  $Oy$  zusammenfällt, deren Konkavität gegen die Horizontale gerichtet ist, deren Scheitel die Höhe  $h$  und deren Parameter die Länge  $4h$  hat. Mit  $h$ , also mit der Anfangsgeschwindigkeit  $a$ , ändert sich die Grenze der erreichbaren Punkte.

Wenn man alle diese Folgerungen experimentell prüft, so findet man sie mit Abweichungen, welche in dem Widerstand der Luft und einigen andern später zu betrachtenden störenden Umständen ihren Grund haben, bestätigt.

## § 10.

**Maß der Kraft und der Masse; absolutes Maßsystem; Dimensionen der abgeleiteten Maße.** Zum Messen einer Kraft haben wir bisher den Zug benutzt, den ein Gewicht gegen den Erdboden hin erfährt, indem wir davon ausgingen, daß wir durch den Zug eines Gewichtes einer Kraft das Gleichgewicht halten können. Die Einheit der Kraft war somit die Einheit des Gewichtes, als welche wir den Zug eines Kilogramm oder eines Gramm wählten.

Bei Einführung dieses Maßes bezeichneten wir dasselbe sofort als ein Hilfsmaß und bemerkten, daß wir die nur in ihrer Wirkung erkennbare Kraft auch nur in ihrer Wirkung messen dürften.

Wir fanden dann, daß jede konstante Kraft eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung erzeugt, und daß die Beschleunigung der Größe der durch unser Hilfsmaß gemessenen Kraft proportional ist. In dieser von der Kraft bewirkten Beschleunigung müssen wir daher das Maß der Kraft suchen.

Wir sahen aber weiter, daß diese Beschleunigung auch abhängig ist von dem in Bewegung versetzten Körper und zwar, daß die Bewegung, welche eine bestimmte durch unser Hilfsmaß gemessene Kraft einem Körper erteilt, in dem Verhältnisse kleiner wird, als das Gewicht des bewegten Körpers größer wird.

Um die Eigenschaft eines Körpers zu bezeichnen, daß es einer Kraft Widerstand zu leisten vermag, um ihn in Bewegung zu versetzen bzw. den in Bewegung befindlichen Körper zu beschleunigen, sagt man, der Körper habe eine gewisse Masse. Zwei Körper haben gleiche Masse, wenn ihnen dieselbe Kraft die gleiche Beschleunigung erteilt, sie haben verschiedene Masse, wenn dieselbe Kraft ihnen verschiedene Beschleunigung erteilt; wir können die Masse also als ein Maß für den Widerstand bezeichnen, den ein Körper der

Änderung seines Bewegungszustandes entgegengesetzt, als ein Maß der Trägheit des betreffenden Körpers.

Die Erfahrung zeigt uns, daß zwei Körper gleichen Gewichtes durch dieselbe Kraft in Bewegung gesetzt die gleiche Beschleunigung erhalten, somit müssen wir Körpern gleichen Gewichtes gleiche Masse beilegen. Daraus folgt, daß Körper verschiedenen Gewichtes verschiedene Masse haben und zwar, daß die Masse eines Körpers seinem Gewichte proportional ist; denn einen Körper vom Gewichte  $m$  können wir in  $m$  Körper vom Gewichte eins zerlegen, und da jeder dieser letztern  $m$  Körper die gleiche Masse hat, so folgt, daß sie zusammen die  $m$ fache Masse des einzelnen haben.

Demnach zeigen uns die erfahrungsmäßigen Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung, daß die Beschleunigung der Größe der Kraft direkt, der Größe der bewegten Masse umgekehrt proportional ist.

Die Beschleunigung einer Bewegung hängt somit lediglich von der Größe der bewegendenden Kraft und der Größe der zu bewegendenden Masse ab, entsprechend der von uns für die Beschleunigung  $G$  einer durch die Kraft  $p$  bewegten Masse vom Gewichte  $q$  gefundenen Gleichung

$$G = g \frac{p}{q}.$$

Hierin ist die Beschleunigung gegeben, wenn wir den Quotienten aus der in Druckeinheiten gegebenen Kraft und der in Gewichtseinheiten gegebenen Masse mit einem Koeffizienten multiplizieren, der gleich ist der Beschleunigung beim freien Fall. Der so ausgedrückten Beschleunigung liegen die Einheiten zugrunde, in denen die Beschleunigung  $g$  beim freien Falle gemessen ist.

Indem wir die vorstehende Gleichung nach  $p$  auflösen, erhalten wir für die Kraft den Ausdruck

$$p = \frac{G}{g} q$$

und es hat den Anschein, als wenn wir in dieser Gleichung die Kraft durch ihre Wirkung durch die von ihr bewirkte Beschleunigung messen. In Wirklichkeit ist dies jedoch nicht der Fall, denn es ist in der für die Beschleunigung aufgestellten Gleichung die Kraft  $p$  nach unserm Hilfsmaß gemessen, und so ist auch in der letzten Gleichung als Einheit der Kraft jene gesetzt, welche dem Zuge der Gewichtseinheit entspricht.

Wollen wir in der Tat die Kraft durch ihre Wirkung messen, so müssen wir jene Kraft gleich eins setzen, welche die Einheit der Wirkung hat. Da die Wirkung der Kraft eben die Beschleunigung ist, müssen wir als Einheit der Wirkung die Erzeugung einer der Einheit gleichen Beschleunigung setzen, und zwar da die Beschleunigung von der Größe der bewegten Masse abhängt, wenn die Kraft auf die Einheit der Masse wirkt. Wir haben damit ein zusammengehöriges System von Einheiten, so daß, wenn zwei derselben bestimmt sind, die dritte Einheit ohne weiteres gegeben ist. Es erhält hiernach eine Kraft, welche einer Masse von  $m$  Masseneinheiten eine Beschleunigung von  $b$  Beschleunigungseinheiten erteilt,  $k$  Krafteinheiten, so daß

$$k = b \cdot m$$

sch dem Produkte aus der Anzahl Beschleunigungseinheiten und der Zahl Masseneinheiten ist.

Von diesen drei zusammenhängenden Einheiten haben wir die eine, nämlich die Einheit der Beschleunigung schon durch die Bestimmung der Längeneinheit, das Meter oder einer seiner Unterabteilungen, und der Zeit,

Sekunde, bestimmt. Denn die Einheit der Beschleunigung ist vorhanden, wenn die Geschwindigkeit in der Einheit der Zeit um die Einheit zunimmt. Die Einheit der Geschwindigkeit legen wir aber jener Bewegung bei, welche in der Zeiteinheit die der Längeneinheit gleiche Weglänge zurücklegt.

Wenn die Kraft durch ihre Wirkung gemessen werden soll, so ist die zweite Einheit, welche wir annehmen müssen, die Einheit der Masse. In der älteren Mechanik, und dasselbe geschieht auf den meisten Gebieten der Technik bis heute, wählte die Einheit der Masse so, daß auch wenn wir die Kraft nach ihrer Wirkung messen, die Größe der Kraft durch dieselbe Zahl gegeben wird, wie wenn wir die Kraft durch die Gewichte messen, wie schrieb die Gleichung, welche die Kraft durch ihre Wirkung gemessen anstellt

$$p = G \frac{q}{g}.$$

Ist hierin die Beschleunigung  $G$  gleich eins, so wird  $p = 1$ , wenn  $q = 1$ , wenn also das Gewicht des Körpers, auf welchen die Kraft wirkt, gleich  $g$  Gewichtseinheiten ist, es wird demnach die Masse eines Körpers gleich der Masseneinheit gesetzt, welche  $g$  Gewichtseinheiten besitzt. Bezeichnen wir die Masse eines Körpers mit  $m$ , so ist demnach

$$m = \frac{q}{g}$$

mit diesem Zeichen ist

$$p = G m.$$

Bei dieser Bestimmung ist es jedoch in der Tat nicht die Masseneinheit, die wir willkürlich festgesetzt haben; denn diese Einheit ist dadurch gegeben, daß die Krafteinheit, die wir als Hilfsmaß eingeführt hatten, beibehalten ist, weil wir jene Masse gleich eins setzten, welche von der so bestimmten Kraft eins die Beschleunigung eins erhält. Das Maß der Kraft bleibt nach wie vor die Gewichtseinheit; es ist also die Kraft nur scheinbar durch ihre Wirkung gemessen. Wollen wir die Kraft in Wirklichkeit durch ihre Wirkung messen, so müssen wir die Einheit der Masse willkürlich wählen, und nun jene Kraft eins nennen, welche dieser ein für allemal bestimmten Masseneinheit die Beschleunigung eins erteilt.

Diesen Weg schlug Gauß<sup>1)</sup> ein, indem er direkt als Maß der Masse eines Körpers das Gewicht desselben einsetzte, also die Masse  $m$  eines Körpers gleich seinem Gewichte  $q$  setzte. Die Einheit der Kraft ist damit die, welche der Gewichtseinheit die der Einheit gleiche Beschleunigung erteilt. Gauß gelangte auf diese Weise zu einem absoluten Maße, welches, wenn die Einheiten der Länge, Zeit, Masse einmal festgestellt sind, auf

<sup>1) Gauß, Intensitas vis magneticae terrestria in mensuram absolutam revocata Göttingen 1833. Poggend. Ann. 28. p. 241. 1833.</sup>

der ganzen Welt seine Gültigkeit behält, das heißt überall dieselben Größ auch mit denselben Zahlen bezeichnet.

Messen wir die Kraft durch den Antrieb, welchen das Kubikzentimet oder das Liter Wasser gegen den Boden hin erfährt, also durch Gram oder Kilogramm, so ist das nicht der Fall. Wir werden später nachweisen, daß dieser Antrieb gegen den Boden hin keineswegs an allen Stellen der Erde der gleiche ist; ein ganz anderer ist der Zug gegen den Boden, wenn wir uns auf einen andern Weltkörper versetzt denken. Es folgt einfach daraus, daß wir an den verschiedenen Stellen der Erde die Beschleunigung, welche dasselbe Gramm oder Kilogramm freifallend erhält, ein wenig verschieden finden; eine ganz andere Beschleunigung würden wir aber etwa auf dem Mars finden, sie ist auf diesem Planeten fast genau die Hälfte derjenigen an der Erdoberfläche. Setzen wir die Kraft ein, welche dem Antriebe des Kubikzentimeters Wasser gegen den Boden gleich ist, so würden wir auf dem Mars die halbe Kraft von derjenigen an der Erdoberfläche mit eins bezeichnen, oder  $p$  Krafteinheiten an der Oberfläche des Mars hätten nur die halbe Größe der mit derselben Zahl  $p$  bezeichnete Kraft an der Erdoberfläche.

Anders in dem absoluten Maßsystem, das jene Kraft eins setzt, welche durch die Gewichtseinheit definierten Masseneinheit die Beschleunigung eins erteilt. Wenn wir das Gewicht als Massenmaß definieren, so wird ein und dieselbe Masse überall durch dieselbe Anzahl Masseneinheiten gegeben. Wir bestimmen nach dieser Festsetzung die Masse eines Körpers durch die Wage, indem wir auf die eine Wagschale den Körper legen, dessen Maß gesucht wird, auf die andere Wagschale eine Anzahl Gewichtsstücke, deren jedes das gleiche Gewicht hat wie ein Kubikdezimeter Wasser bzw. ein Teil desselben, soviel daß die Wage im Gleichgewicht ist. Die Anzahl der auf der letztern Schale befindlichen Gewichtseinheiten gibt uns die Anzahl der Masseneinheiten des auf der andern Wagschale befindlichen Körpers an. Würden wir uns mit Wage, Körper und Gewichten auf den Mars begeben, so würde dort eine Wägung uns für die eben angenommene Masse genau die gleiche Anzahl Kilogramm geben; denn genau in denselben Verhältnisse, in welchem der Antrieb des abzuwägenden Körpers gegen den Boden hin kleiner geworden ist gegenüber dem Antriebe an der Erdoberfläche, ist es auch der Antrieb der Gewichtsstücke geworden. Wir bedürfen also genau derselben Gewichtsstücke, um auf der Wage dem abzuwägenden Körper das Gleichgewicht zu halten. Auch wenn wir auf dem Mars uns die Gewichtsstücke erst herstellen würden, würde das Resultat kein anderes sein; das Gewichtsstück, das auf dem Mars dem Kubikdezimeter Wasser das Gleichgewicht hält, ist genau das gleiche, das es an der Erdoberfläche tut. Wenn wir das Gewicht als Quantitätsmaß, das Massenmaß nehmen, so kommt es auf die Größe des Zuges gegen den Boden hin gar nicht an, wir nennen jene Masse eins, welche an der Stelle, wo wir messen, denselben Zug gegen den Boden hin erfährt wie die gewählte Gewichtseinheit, jene Masse  $m$ , welche denselben Zug erfährt  $m$  Gewichtseinheiten, wie groß dieser Zug ist, das ist dabei gleich.

Es folgt somit, daß wir durch eine derartige Wahl der Masseneinheit sowie der Längen- und Zeiteinheit überall in der ganzen Welt auch selbe Maß für die Kraft erhalten, indem wir jene Kraft gleich eins :

welche dieser Masseneinheit die in diesen Einheiten der Länge und der Zeit gegebene Einheit der Beschleunigung erteilt

Das absolute Maßsystem wird ein fest bestimmtes, sobald die Einheiten der Masse und der Beschleunigung festgesetzt sind. Gauß wählte Milligramm, Millimeter und Sekunde, das heißt, er nannte jene Kraft eins, welche der Masse ein Milligramm in der Sekunde die Beschleunigung von einem Millimeter erteilt. Jetzt nimmt man gewöhnlich als Einheiten die Masse eines Gramm und die Beschleunigung ein Zentimeter in der Sekunde. Die Einheit der Kraft in dem jetzigen Gramm — Zentimeter — Sekunden (als G/S bezeichneten) System ist das 10000fache der von Gauß gewählten Einheit, da das Gramm 1000 Milligramme und das Zentimeter 10 Millimeter enthält, die Kraft aber das Produkt aus Masse und Beschleunigung ist. Das im absoluten System festgesetzte Kraftmaß wird mehrfach mit dem Namen Dyne bezeichnet, so daß die Kraft nach Dynen gemessen ist. Die Bezeichnung hat sich indes nicht allgemein eingebürgert, wir werden uns derselben nicht bedienen.

In dem absoluten Maßsystem hat man zwei Normalmaße, die man aufbewahren und jederzeit an jedem Ort mit andern Maßen vergleichen kann. Wie schon in der Einleitung erwähnt ist befindet sich im internationalen Bureau für Maß und Gewicht (Pavillon Breteuil in Sèvres bei Paris) ein Normalmeter. Ebenso befindet sich daselbst die Normalmasse. Gemäß der Definition ist bei Einheit der Masse das Massengramm d. h. die Masse eines Kubikzentimeters reinen Wassers bei 4 Grad Celsius. Da es aber aus praktischen Gründen nicht geht die Masse in Form von Wasser aufzubewahren, hat man die 1000fache Masse in Gestalt eines Gewichtstückes aus Platiniridium hergestellt.

Diese Normalmasse kann mittels der Wage mit Kopieen verglichen werden und man ist dadurch imstande, überall die Masse auf das in Paris sich befindende Normalkilogramm zu beziehen.

Die Masse dieses Gewichtstückes hat man mehrere Male mit der Masse eines Kubikdezimeters Wasser bei 4 Grad verglichen und hat nun gefunden, daß natürlich eine Differenz vorhanden ist. Je bessere Methoden angewandt wurden für den Vergleich um so genauer konnte das Verhältnis der beiden Massen ermittelt werden. Auf diese verschiedenen Methoden kann hier nicht eingegangen werden.<sup>1)</sup> Der richtige Wert<sup>2)</sup> für das Verhältnis des Normalkilogramms zu der Masse des Kubikdezimeters Wasser liegt nach den Messungen zwischen

$$1,000026 \text{ und } 1,000029,$$

so daß die Masse eines Kubikdezimeters Wasser ungefähr auf ein Milliontel kleiner ist.

Umgekehrt beträgt die Masse eines Kubikdezimeters Wasser

$$999,971 \text{ Gramm.}$$

Man erkennt also hieraus, daß nach der ursprünglichen Definition das

<sup>1)</sup> Travaux et mémoires du bureau int. d. poids et mesures 14; Ann. d. chim. et d. phys. 2 7 p. 102. 1897; Comptes rend. d. l'ac. d. science 129. : 79 1899

<sup>2)</sup> Journ. d. phys. 4 41. p. 669. 1906.

Normalkilogramm aus Platiniridium einen Fehler von 26 bis 29 Milligramm hat.

Die Massenbestimmung von Wasser ist eben mit außerordentlichen Schwierigkeiten verbunden und deshalb definiert man jetzt als Einheit der Masse das Normalkilogramm in Paris und als Liter das Volumen eines Kilogramms Wassers bei 4 Grad und nicht mehr als das Volumen eines Kubikdezimeters.

Da nun aber der Unterschied dieser beiden Definitionen nur etwa  $\frac{2,5}{100000}$  beträgt, so ist derselbe auch nur da zu berücksichtigen, wo die Messungen diese Genauigkeit besitzen, was übrigens nur außerordentlich selten vorkommt. In den meisten Fällen kann man den Liter auch als den Kubikdezimeter ansehen. Immerhin ist es zweckmäßig über die Grundeinheiten im klaren zu sein.

Um das Verhältnis unseres Kraftmaßes zu dem früher benutzten Hilfsmaß, der Gewichtseinheit zu erhalten, haben wir nur zu beachten, daß die Kraft  $F$ , welche der Masse  $m$  Gramm die Beschleunigung  $G$  Zentimeter in der Sekunde erteilt, gegeben ist durch die Gleichung

$$F = Gm;$$

mit der in dem Hilfsmaß, der Druckeinheit gegebenen Kraft  $p$  erhalten wir

$$G = g \frac{p}{m}$$

somit

$$gp = Gm$$

oder es ist

$$F = g \cdot p.$$

Wenn also irgend eine Kraft durch den Zug  $p$  Gramm gemessen ist, haben wir die Zahl  $p$  mit der in Zentimetern ausgedrückten Beschleunigung bei dem freien Falle an dem Orte, wo  $p$  gemessen ist, zu multiplizieren, um die Kraft in absolutem Maßsystem zu erhalten.

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man auch direkt durch das vorhin erwähnte Beispiel der Kraft an der Oberfläche des Mars; wir erwähnten, daß dort der Zug, den das Kubikzentimeter Wasser gegen den Boden erhält, nur halb so groß ist wie an der Erdoberfläche, da dasselbe nur die halbe Beschleunigung wie an der Erde erhält. Die Zahl  $p$  auf Mars bedeutet demnach nur die halbe Kraft derjenigen, welche die gleiche Zahl  $p$  an der Erde bedeutet. Das Produkt aus der Beschleunigung auf dem Mars und derselben Zahl  $p$  gibt auch nur den halben Wert von  $F$ , da die Beschleunigung dort nur die Hälfte von derjenigen an der Erde ist.

In dem absoluten Maßsystem sind die willkürlich angenommenen Grundmaße das Maß der Masse, der Länge und der Zeit, das Maß der Kraft ist ein aus diesen abgeleitetes Maß. Es ist wichtig zu beachten in welcher Weise das Kraftmaß aus diesen drei Grundmaßen abgeleitet ist, das heißt wie sich das Maß der Kraft aus diesen drei Maßen zusammensetzt.

Die Kraft ist das Produkt aus einer Masse und einer Beschleunigung, das heißt wir erhalten die Anzahl Krafteinheiten, indem wir eine Anzahl Masseneinheiten mit einer Anzahl Beschleunigungseinheiten multiplizieren.



Wir die Masseneinheit allgemein mit  $\mu$ , die Beschleunigungseinheit mit  $\epsilon_1, \epsilon_2$  die Anzahl Masseneinheiten und Beschleunigungseinheiten, welche miteinander multipliziert die Anzahl Kräfteinheiten geben, wir schreiben

$$F = \epsilon_1 \cdot \mu \cdot \epsilon_2 \cdot \varphi.$$

Beschleunigung ist die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeit, also der Quotient aus der Differenz der Geschwindigkeit im Anfang und am Ende einer Zeit  $t$  und dieser Zeit  $t$ , sie ist demnach

$$\frac{v_2 - v_1}{t} \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dt}$$

eine ungleichförmige Bewegung haben, für welche wir nur für ein bestimmtes Moment einen bestimmten Wert der Beschleunigung annehmen. Die Geschwindigkeit ist der Quotient aus einer Länge und einer Zeit, das heißt die Zahl, welche uns die Geschwindigkeit anzeigt, der Quotient aus einer Anzahl Längeneinheiten und einer Anzahl Zeiten. Dasselbe gilt auch für die Differenz zweier Geschwindigkeiten. Man lege einen Körper mit der Geschwindigkeit  $v_1$  in der Zeit von  $t_1$  den Weg  $s_1$ , dagegen mit der Geschwindigkeit  $v_2$  in der Zeit  $t_2$  den Weg  $s_2$  zurück, so ist

$$v_2 - v_1 = \frac{s_2}{t_2} - \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2 t_1 - s_1 t_2}{t_1 t_2}.$$

Wenn der Körper bei ungleichförmiger Bewegung zur Zeit  $t$  in der Zeit  $dt$  den Weg  $ds$  zurücklegt, so ist seine Geschwindigkeit  $v$ . In dem darauffolgenden Zeitelement  $dt$  legt er den Weg  $ds_1$  zurück, also ist in diesem Zeitelement die Geschwindigkeit  $\frac{ds_1}{dt}$ , die Geschwindigkeitszunahme von der Mitte des ersten Zeitelementes  $dt$  bis zur Mitte des zweiten Zeitelementes  $dt_1$ , also während der Zeit  $dt$  ist demnach

$$\frac{ds_1 - ds}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2};$$

die Beschleunigung erhalten wir, indem wir die in der Zeit  $dt$  eintretende Zunahme der Geschwindigkeit durch die Zeit dividieren, somit gleich

$$\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Beschleunigung ist also stets der Quotient aus einer Anzahl Längeneinheiten dividiert durch das Quadrat einer Anzahl Zeiteinheiten. Ein solcher Quotient erscheint auch die Beschleunigung in unserer Formel für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Ist  $G$  die Beschleunigung einer Bewegung, welche zur Zeit  $t = 0$  beginnt, so ist der in der Zeit  $t$  zurückgelegte Weg  $s$

$$s = \frac{1}{2} G t^2$$

$$G = \frac{2s}{t^2}.$$

Bezeichnen wir mit  $\lambda$  die Einheit der Länge, mit  $\tau$  die Einheit der Zeit, so können wir schreiben

$$z_2 \varphi = \frac{z_3 \lambda}{(z_4 \tau)^2}.$$

Setzen wir dies in den für die Kraft  $F$  gefundenen Ausdruck, so wird

$$F = z_1 \mu \frac{z_3 \lambda}{(z_4 \tau)^2}.$$

Wir erhalten also die Anzahl  $z$  Krafteinheiten, welche unserer Kraft  $F$  entspricht, indem eine Anzahl Masseneinheiten mit einer Anzahl Längeneinheiten multipliziert und durch das Quadrat einer Anzahl Zeiteinheiten dividiert wird. Um diesen Zusammenhang zwischen dem abgeleiteten Maße der Kraft und den willkürlich angenommenen Grundmaßen anzuzeigen, schreibt man

$$F = \frac{z_1 z_3}{z_4^2} [\mu \lambda \tau^{-2}] = z [\mu \lambda \tau^{-2}],$$

man gibt also in den Zeichen der gewählten Einheiten in einer eckigen neben der die abgeleitete Größe angehenden Zahl gesetzten Klammer die Rechnungsweise an, wie sich die Zahl  $z$  aus den Anzahlen der einzelnen Einheiten ergibt.

Die die Größe der Kraft  $F$  darstellende Zahl  $z$  erscheint so als das Produkt aus einer Anzahl Masseneinheiten und Längeneinheiten, jede in der ersten Potenz und aus der negativ zweiten Potenz einer Anzahl Zeiteinheiten, oder wie man sich kurz ausdrückt, die Kraft ist gleich dem Produkt einer Masse und einer Länge dividiert durch das Quadrat einer Zeit.

Man nennt nach Maxwell<sup>1)</sup>, von dem diese ganze Bezeichnungsweise herrührt, die in der eckigen Klammer angegebenen Potenzen der einzelnen Einheiten, die miteinander zu multiplizieren sind, um ein abgeleitetes Maß zu erhalten, die Dimensionen des abgeleiteten Maßes, so sagt man, die Kraft ist nach der Masse und der Länge von der ersten, nach der Zeit von der negativ zweiten Potenz.

Man kann alle Maße, die wir in unsern Untersuchungen anzuwenden haben, in ähnlicher Weise durch die drei Grundmaße, Masse, Länge und Zeit darstellen, und zwar indem wir, wenn etwa eine der Einheiten einer zu messenden Größe nicht vorkommt, diese als mit der Potenz null vorkommend ansehen, durch das Produkt irgend einer Potenz dieser Größen. So ist die Geschwindigkeit Quotient aus Länge und Zeit, nach der Masse von der nullten, nach der Länge von der ersten, nach der Zeit von der negativ ersten Potenz

$$v = z [\mu^0 \lambda \tau^{-1}] = z [\lambda \tau^{-1}]$$

indem man die mit der Potenz null versehene Einheit in der Klammer fortläßt. Die Beschleunigung  $G$  ist

$$G = z [\lambda \tau^{-2}].$$

1) Maxwell, Report of the British Association for 1868, p. 130. Man auch Herwig, Physikalische Begriffe und absolute Maße. Leipzig, B. G. Teubner 1880.

Eine Fläche entspricht dem Quadrate einer Länge, ein Volumen der dritten Potenz einer Länge

$$Fl = z [\lambda^2]; \quad Vol = z [\lambda^3].$$

Ersetzen wir die allgemeinen Zeichen für die Massen-, Längen- und Zeiteneinheit durch bestimmt gewählte Größen, so ist unser Maßsystem fest bestimmt: wählen wir Gramm, Zentimeter, Sekunde, so wird

$$F = z [\text{gr cm sec}^{-2}].$$

Wir werden sehen, daß die Beachtung dieses Zusammenhanges der messenden Größen mit den Grundmaßen, die Angabe ihrer Dimensionen selbst zum Verständnis des inneren Zusammenhanges derselben und zur Klärung dessen, was die einzelnen zu messenden Größen bedeuten, beiträgt.

Einen großen Vorteil bietet uns die Beachtung der Dimensionen einer messenden Größe sofort, wenn es sich darum handelt, Größen, die in einem Maßsystem gegeben sind, in einem andern Maße auszudrücken. Wir erwähnten vorhin, daß Gauß Milligramm, Millimeter, Sekunde als Einheiten gewählt hat. Wollen wir wissen, welche Anzahl  $Z$  uns eine Kraft im Gauß'schen System ergibt, welche im GCS System gleich  $z$  ist, so setzen wir nur die Einheiten in der Klammer durch die Einheiten des Gauß'schen Systems auszudrücken, und die so in der Klammer auftretenden Zahlen vor die Klammer zu setzen und miteinander und mit  $z$  zu multiplizieren.

$$F = z [1000 \text{ mllgr } 10 \text{ mm sec}^{-2}] = 10000 z [\text{mllgr mm sec}^{-2}].$$

Die im Gramm - Zentimeter - Sekundensystem gegebenen Kräfte sind also mit 10000 zu multiplizieren, um dieselben in Gauß'schen Einheiten auszudrücken.

Oder, wir wollen eine in Kilometer und Minuten ausgedrückte Geschwindigkeit in Zentimeter und Sekunden ausdrücken

$$v = z [\text{km min}^{-1}] = z [100000 \text{ cm } (60 \text{ sec})^{-1}]$$

$$v = \frac{100000}{60} z [\text{cm sec}^{-1}] = 1666,66 z [\text{cm sec}^{-1}].$$

Besonders bei solchen Größen, welche in komplizierter Weise mit den Grundmaßen zusammenhängen, ist die Kenntnis der Dimensionen zum Übergang aus dem einen in ein anderes Maßsystem von großer Bedeutung, und diese Übersetzung sonst nur durch lange Überlegungen zu erreichen. Wir werden dafür später manche Beispiele finden.

## § 11.

**Bewegungsgröße; lebendige Kraft und Arbeit. Prinzip von der Erhaltung der Arbeit.** Aus unserer Gleichung für die Geschwindigkeit der Bewegung eines Körpers von der Masse  $m$ , auf welchen eine Kraft  $F$  die Zeit  $t$  hindurch gewirkt hat

$$v = \frac{F}{m} \cdot t$$

lassen wir unmittelbar

$$mv = F \cdot t \dots \text{I.}$$

Das Produkt aus der bewegten Masse und der von ihr in der Zeit  $t$  erreichten Geschwindigkeit ist gleich dem Produkte der Kraft und der Zeit, durch welche sie gewirkt hat.

Daß die beiden Produkte gleicher Art sind, zeigt die Beachtung ihrer Dimensionen.  $Ft$  ist Kraft mal Zeit, somit

$$Ft = z [\mu \lambda \tau^{-1}],$$

ebenso ist das Produkt auf der linken Seite Masse mal Geschwindigkeit  $z [\mu \lambda \tau^{-1}]$ .

Man nennt das Produkt  $mv$  die Bewegungsgröße der Masse  $m$  und das Produkt  $Ft$  den Antrieb der Kraft in der Zeit  $t$ .

Wirkt ein anderesmal die Kraft  $F_1$  auf die Masse  $m_1$  und erteilt ihr in derselben Zeit  $t$  die Geschwindigkeit  $v_1$ , so ist

$$m_1 v_1 = F_1 t$$

und

$$mv : m_1 v_1 = Ft : F_1 t = F : F_1.$$

Es verhalten sich hiernach die Kräfte, welche zwei Massen in Bewegung versetzen, wie die Bewegungsgrößen, welche sie den Massen in gleichen Zeiten erteilt haben.

Wir haben ferner die Gleichungen

$$v = \frac{F}{m} t; \quad s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

und aus der ersten dieser beiden Gleichungen

$$v^2 = \frac{F^2}{m^2} t^2.$$

Aus dieser Gleichung und der zweiten der eben hingeschriebenen folgt

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{F}{m} s$$

oder

$$\frac{1}{2} m v^2 = F s \dots \text{II.}$$

Auch hier erkennen wir auf beiden Seiten die Gleichheit der Dimensionen, denn Masse mal Quadrat der Geschwindigkeit ist  $z [\mu \lambda^2 \tau^{-2}]$ , die selbe Dimension hat Kraft mal Länge.

Das Produkt aus der halben Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit, welche sie besitzt, ist gleich dem Produkte aus der bewegenden Kraft und der Weglänge, auf welcher sie der Masse  $m$  diese Geschwindigkeit erteilt hat. Wirken zwei Kräfte  $F$  und  $F_1$  eine gleiche Weglänge hindurch auf zwei Massen  $m$  und  $m_1$  und erteilen ihnen die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_1$ , so besteht demnach die Gleichung

$$\frac{1}{2} m v^2 : \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = F : F_1$$

oder auch

$$m v^2 : m_1 v_1^2 = F : F_1.$$

Die Produkte  $\frac{1}{2} m v^2$  oder auch  $m v^2$  nennt man die lebendige Kraft der Masse  $m$  oder auch die Wucht. Nennt man letzteres die lebendige Kraft, so nennt man ersteres, die Hälfte des letztern, wohl die lebendige

Potenz. Wir werden später die erstere Größe, welche sich unmittelbar aus den Bewegungsgleichungen ergibt, als lebendige Kraft bezeichnen. Wir können dann obige Gleichung dahin interpretieren, daß die bewegenden Kräfte, welche auf zwei Massen den gleichen Weg hindurch gewirkt haben, sich verhalten wie die lebendigen Kräfte, welche sie den Massen erteilt haben.

Das Produkt  $Fs$ , aus der Kraft und dem Wege, durch welchen die Kraft gewirkt hat, nennt man die Arbeit der Kraft; diese Benennung beruht auf der Anschauung, daß eine Kraft auf dem ganzen Wege, auf welchem sie gewirkt hat, einen ihr an Größe genau gleichen Widerstand zu überwinden hat, eine Anschauung, die sich unmittelbar aus der Eigenschaft der Trägheit oder dem von Newton zuerst ausgesprochenen Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt.

Dieses Prinzip sagt aus, daß wenn ein Körper auf einen andern eine Wirkung, einen Zug oder einen Druck ausübt, daß er dann von dem letztern eine ebenso große Gegenwirkung, also einen ebenso starken Gegenzug oder Gegendruck erfährt. Dasselbe gibt sich überall in der Natur zu erkennen: ziehen wir einen Körper mit einer gewissen Kraft zu uns hin, so werden wir von demselben ebenso stark angezogen, denn ziehen wir mit aller Kraft an einem an einer Wand befestigten Seil, so fallen wir zurück, wenn es reißt. Üben wir auf einen Körper einen Druck aus, so erfahren wir einen Gegendruck von derselben Stärke; wird z. B. ein Gas komprimiert, so übt die Spannung des Gases in jedem Momente auf den Stempel einen genau ebenso großen Gegendruck aus, den wir in später zu besprechender Weise mit einem Manometer messen können. Der Magnet zieht das Eisen an, genau ebenso stark zieht aber, wie wir uns mit einer Waage überzeugen können, das Eisen den Magnet an.

Wie in diesen Fällen, so in allen, so auch wenn eine Kraft einen Körper in Bewegung setzt; während der ganzen Bewegung hat dieselbe Kraft ihr an Größe genau gleichen Gegenzug zu überwinden, um den momentanen Bewegungszustand des Körpers zu ändern. Daß dieser Gegenzug auch dann in der Tat vorhanden ist, können wir direkt durch einen Versuch nachweisen. Man hänge das Übergewicht  $p$  bei der Fallmaschine an das Gewicht  $P$  mit Hilfe einer Feder solange  $P$  auf dem Teller steht. Die Feder kommt dann in einen gewissen Zustand der Spannung, der beweist, daß die Feder nach entgegengesetzten Richtungen von gleich großen Kräften gezogen wird. Denn die Feder biegt sich so lange, bis die nach beiden Seiten ziehenden Kräfte genau gleich sind. Läßt man dann das System sich bewegen, so bleibt die Feder ganz genau in derselben Weise gespannt, wie groß auch die zu bewegendes Masse und wie groß auch die Geschwindigkeit ist.

Die Kraft  $F$  übt also während des ganzen Weges, durch welchen sie die Last  $m$  bewegt, den Druck  $F$  aus, wir nennen deshalb das Produkt  $Fs$  auch die Arbeit der Kraft, wie wir die beim Heben einer Last geleistete Arbeit durch das Produkt der gehobenen Last in die Strecke, welche wir die Last gehoben haben, messen. Daß dort aber die Arbeit durch dieses Produkt gemessen werden muß, ergibt die einfache Bemerkung, daß es dieselbe Arbeit ist, wenn wir  $1^{\text{kg}}$  auf die Höhe von  $2^{\text{m}}$  heben, wie wenn wir  $2^{\text{kg}}$  auf die Höhe von  $1^{\text{m}}$  heben. Denn

in beiden Fällen müssen wir zweimal ein Kilogramm auf die Höhe von  $1^m$  heben.

Die Gleichung

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$

ist zugleich der Ausdruck des wichtigsten physikalischen Prinzips, welche in der neueren Zeit immer vollständiger erkannt ist und dem wir an vielen Stellen begegnen werden, des Prinzips von der Erhaltung der Arbeit. Dieses Prinzip sagt aus, daß in der Natur keine Arbeit gewonnen und keine verloren werden kann. Wenn demnach eine Kraft irgend eine Arbeit leistet, so ist dieselbe nicht verloren, nicht verbraucht, sondern nur in eine andere Form umgesetzt, in der man sie vollständig wiederfindet. In einem speziellen Falle zeigt die obige Gleichung, sie zeigt, daß die Arbeit der Kraft  $F$  sich vollständig als lebendige Kraft oder wie man jetzt meistens sagt als kinetische Energie in der bewegten Masse wiederfindet. Wir können auch in der Tat dieselbe Arbeit aus dem Körper wiedergewinnen, wenn wir ihm seine Bewegung nehmen. Wie wir später sehen werden, geschieht das z. B. dann, wenn wir eine vollkommen elastische Kugel auf eine andere ihr gleiche stoßen lassen, welche sich in Ruhe befindet. Die ursprünglich bewegte Kugel kommt zur Ruhe, die gestoßene bewegt sich aber mit derselben Geschwindigkeit weiter. Gerade der Umstand, daß eine Masse  $m$ , welche die Geschwindigkeit  $v$  besitzt, eine Arbeit leisten kann, welche  $\frac{1}{2}mv^2$  gleich ist, wenn man sie zur Ruhe bringt, berechtigt dazu, dieses Produkt als lebendige Kraft dieser Masse zu bezeichnen.

Wie in diesem Falle, so können wir leicht das Prinzip, daß keine Arbeit verloren werden kann, auch in andern Fällen nachweisen. Heben wir ein Gewicht  $P$  durch die Höhe  $s$ , so haben wir die Arbeit  $gPs$  nur in dieses Gewicht übertragen, wir haben dem Gewicht eine gewisse Energie der Lage oder potentielle Energie mitgeteilt, das niedersinkende Gewicht kann genau dieselbe Arbeit wieder leisten.

In manchen Fällen glaubte die ältere Physik einen wirklichen Verlust von Kraft annehmen zu müssen, so z. B. bei der Reibung; wir werden später den Nachweis liefern, daß auch hier kein Verlust, nur eine Umsetzung der Kraft in andere Formen, vorzüglich in Wärme, stattgefunden hat.

## § 12.

**Bewegung infolge inkonstanter Kräfte und Maß derselben.**  
Unsere experimentell abgeleiteten Sätze über die Bewegungen, welche durch konstante Kräfte hervorgebracht werden, und die allgemeinen Sätze über die Wirkung von Kräften, welche wir daraus ableiteten, gestatten uns schließlich auch im allgemeinen zu bestimmen, welcher Art die Bewegung sein müssen, welche inkonstante Kräfte einem festen Körper oder einem materiellen Punkte erteilen. Wirken die Kräfte immer in derselben Richtung, aber mit verschiedener Stärke, so muß die Bewegung eine geradlinig fortschreitende, aber ungleichmäßig beschleunigte sein, das heißt, die Geschwindigkeitszunahme muß zu verschiedenen Zeiten in demselben Verhältnisse sich ändern, wie die Größe der Kraft sich ändert. Kennen wir das Gesetz, nach welchem die Kraft sich ändert, so können wir daraus das Gesetz bestimmen, nach welchem die Geschwindigkeit sich zu

Machen wir uns nämlich die Zeit, während welcher die veränderliche Kraft wirkt, in hinreichend kleine Zeiteilchen zerlegt, so können wir, ohne ungenau zu sein, annehmen, daß innerhalb jedes dieser Zeiteilchen die Kraft konstant ist, und daß sich dieselbe erst vom einen zu dem andern Zeiteilchen ändert. Innerhalb eines solchen Zeiteilchens gelten dann die Gesetze konstanter Kräfte. Ist demnach  $F$  die auf die Masse  $m$  wirkende Kraft zur Zeit  $t$ , so erhalten wir für die Beschleunigung in diesem Zeitelemente, welche wir nach § 1 in dem Quotienten  $\frac{dv}{dt}$  ausgedrückt haben,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}.$$

Ist hierin  $F$  als eine Funktion der Zeit  $t$  gegeben, so lehrt die Integration aus diesem Ausdrucke auch die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  und aus dieser den zurückgelegten Weg finden. Von der Form der Funktion  $F$  ist es dann, wie man sieht, abhängig, welcher Art die Bewegung sein wird, und je nach dieser Form ist auch die spezielle Lösung der Aufgabe, aus der Beschleunigung Geschwindigkeit und Weg zu finden, eine verschiedene. Einzelne Fälle werden wir später behandeln.

Kennen wir das Gesetz, nach welchem eine inkonstante Bewegung erfolgt, so können wir daraus auch umgekehrt das Gesetz ableiten, nach welchem die veränderlichen Kräfte wirken. Kennen wir nämlich den unter Wirkung der Kraft zurückgelegten Weg  $s$  in seiner Abhängigkeit von  $t$ , so können wir daraus zunächst für jeden Zeitpunkt  $t$  die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt},$$

aus dieser die Beschleunigung  $\frac{dv}{dt}$  oder  $\frac{d^2s}{dt^2}$  erhalten. Für die letztere haben wir aber die Gleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}.$$

und auch hier die bewegende Kraft in dem Momente, für welchen jener Wert gebildet ist,

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

oder wir erhalten in dem Produkte der bewegten Masse und der jedesmaligen Beschleunigung das Maß für die Größe der veränderlichen Kraft zu jedem Momente der Bewegung.

Auch diesen Satz werden wir häufig anwenden, um in speziellen Fällen das Gesetz, nach welchem eine Kraft wirkt, aus der bekannten Bewegung zu ermitteln.

Wirken die Kräfte auf eine bewegte Masse nicht immer in derselben Richtung ein, so wird die Bewegung der Masse nicht eine geradlinig fortwährende, sondern die Bahn des Bewegten wird eine von dem Gesetze der Kraftwirkung abhängige krumme Linie. Eine Untersuchung dieses Falles würde uns zu weit in die theoretische Mechanik einführen, einzelne Fälle werden wir später behandeln. Es ist unsere Aufgabe, die experimentellen Grundlagen der Bewegungslehre aufzusuchen und aus ihnen die Gesetze



abzuleiten, nach denen die Kräfte wirken; das haben wir im bisherigen für die fortschreitende Bewegung getan, indem wir gleichzeitig einige der wichtigsten Sätze der theoretischen Mechanik aus denselben folgerten, so weit wir dieselben zum Verständnis des folgenden notwendig hatten. Wegen des weitern müssen wir auf die Lehrbücher der Mechanik verweisen. Wir gehen jetzt über zur Betrachtung anderer Bewegungen, die wir in der Natur vorfinden.

## Zweites Kapitel.

### Von den drehenden Bewegungen.

#### § 13.

**Entstehung der drehenden Bewegung.** Wir haben bereits mehrfach erwähnt, daß ein Lot, wenn es aus seiner vertikalen Richtung gebracht wird, nicht einfach in diese zurückfällt, sondern eine Bewegung um die senkrechte Lage ausführt. Ganz dasselbe sehen wir, wenn wir einen festen Stab an seinem einen Ende an einer horizontalen Achse befestigen, so daß ihm eine Bewegung in der vertikalen Ebene gestattet bleibt. Sich selbst überlassen sinkt er herab und macht Schwingungen um die senkrecht nach unten gerichtete Lage. Solche Bewegungen, bei denen jeder Punkt Kreise um einen festen Mittelpunkt beschreibt mit einem Radius, der gleich ist seinem Abstände von der Drehungsachse, nennen wir drehende Bewegungen.

Bei den drehenden Bewegungen können wir, ebenso wie bei den fortschreitenden, von einer Geschwindigkeit und Beschleunigung sprechen, da wir hier jedoch nicht auf die absolut zurückgelegten Räume, sondern auf die Bogen beziehen, welche die einzelnen Punkte eines in drehender Bewegung begriffenen Körpers beschreiben. Demnach legen wir zweien in drehender Bewegung begriffenen Körpern gleiche Winkelgeschwindigkeit bei, wenn ihre einzelnen Punkte in gleichen Zeiten gleiche, verschiedene wenn sie in gleichen Zeiten verschiedene Bogen zurücklegen.

Es ist klar, daß dabei die Wege, welche verschiedene Punkte mit gleicher Winkelgeschwindigkeit zurücklegen, absolut genommen sehr verschieden sein können, indem die absolute Länge der Bogen proportional ist dem Abstände der Punkte von der Drehungsachse.

Ist die Winkelgeschwindigkeit eine ungleichförmige, so gilt alles, was wir im § 1 über die fortschreitende Bewegung gesagt haben, auch hier, wenn wir nur statt der Längen die beschriebenen Bogen in Winkel einführen.

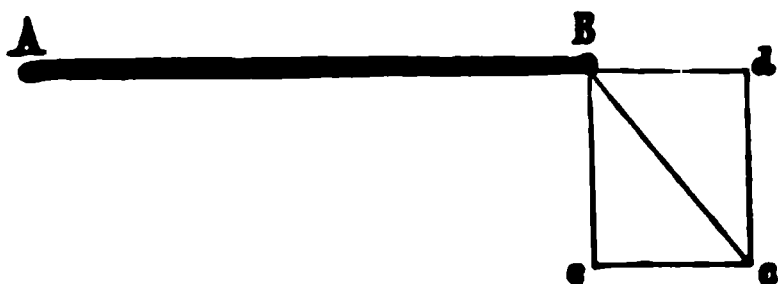
Die drehende Bewegung wird ebenso von Kräften veranlaßt als die fortschreitende, daß es aber nur Kräfte sind, die in einer ganz bestimmten Richtung wirken, läßt sich sofort erkennen.

Wir setzen voraus, daß unserem Stabe nur eine Bewegung in der Drehebene gestattet ist; es ist klar, daß dann alle Kräfte, die senkrecht zu dieser Ebene, also parallel zur Drehungsachse wirken, unsam sind, und daß von Kräften, die unter einer andern Neigung

der Ebene wirken, nur der Teil tätig sein kann, dessen Richtung in die Drehungsebene fällt, wenn wir die ganze Kraft nach § 7 in eine zu der Drehungsebene senkrechte und in eine andere zerlegt haben, deren Richtung in die Drehungsebene fällt.

Aber auch der Teil kann nicht immer vollständig zur Erzeugung der Bewegung dienen. Wirkt z. B. auf den bei  $A$  um eine horizontale Drehungsachse beweglichen Stab  $AB$  bei  $B$  eine Kraft nach der Richtung  $Bc$ , so können wir diese nach § 7 ebenfalls in zwei Teile zerlegen, die zueinander senkrecht, eine in der Richtung  $Bd$ , die andere in der Richtung  $Be$  wirksam sind. Die erstere dieser Kräfte  $Bd$  übt nur einen Zug in der Richtung senkrecht zur Achse: ihr wird durch die Befestigung des Punktes  $A$  und den Zusammenhang der Teile des Stabes  $AB$  das Gleichgewicht gehalten. Nur die andere Kraft  $Be$  kann eine drehende Bewegung des Stabes um die Achse bei  $A$  veranlassen.

Fig. 18.



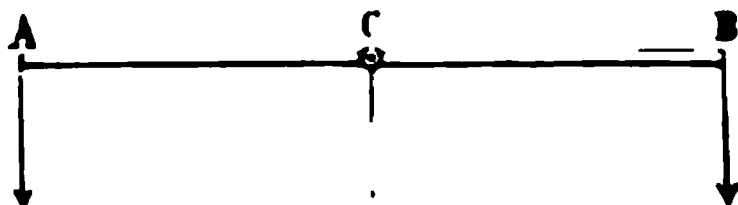
Wir sehen also, von allen Kräften, welche auf einen Körper wirken, der um eine feste Achse drehbar ist, können nur diejenigen eine drehende Bewegung erzeugen, welche in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene senkrecht auf die Verbindungslinie des Angriffspunktes mit der Drehungsachse wirken.

Die Schwere ist bei dem in  $A$  aufgehängten Stabe eine solche Kraft. Hat der Stab die horizontale Lage, so treibt das Gewicht jedes Teiles des Stabes ihn herunter, und deshalb sinkt er nieder. Die schwingenden Bewegungen um die senkrechte Lage sind dann die Folge davon, daß die Schwere, sobald der Stab die horizontale Lage verlassen hat, nur mehr ein Teil wirkt, indem dann nur eine, je mehr sich der Stab der senkrechten Lage nähert, immer kleiner werdende Komponente ihn antreibt, auf der andern Seite aber die aufsteigende Bewegung des Stabes durch die Schwere gehemmt wird. Ehe wir jedoch diese Bewegung genauer untersuchen, müssen wir uns zu der Frage wenden, ob es gleichgültig für die entstehende Bewegung sei, in welchem Abstände von der Drehungsachse eine Kraft auf unsern Stab wirkt.

## § 14.

**Die statischen Momente.** Wenn wir einen Stab an einer festen vertikalen Drehungsachse  $C$  aufhängen, so kann ihm nach dem vorigen die Schwere, welche dann der Drehungsachse parallel wirkt, keine Bewegung mitteilen. Wenn wir dann an dem Stabe an zwei Stellen dieselbe Kraft einmal in  $A$ , dann in  $C$  und später in  $B$  anbringen, so ist die Wirkung derselben immer eine andere. In  $A$  angebracht bringt dieselbe eine Drehung hervor, bei  $C$  nicht und bei  $B$  wieder eine Drehung, welche aber der erstern entgegengesetzt ist. Die Kraft hat

Fig. 19

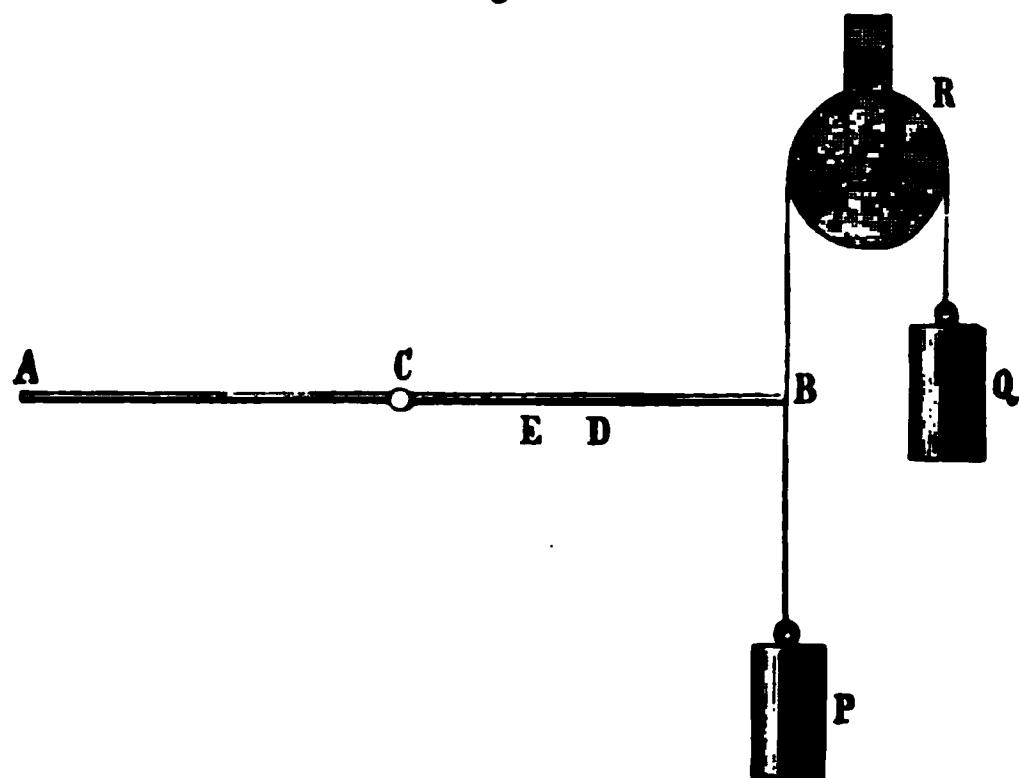


also je nach ihrem Angriffspunkte ganz verschiedene Wirkungen. V diese mit dem Angriffspunkte sich ändern, haben wir jetzt näher zu untersuchen.

Zu dem Ende wenden wir einen gleichmäßig gearbeiteten Stab, der an allen Stellen gleich dick ist, so daß gleiche Längen desselben Stab gleich schwer sind. Führen wir durch die Mitte seiner Länge eine Achse, die wir horizontal befestigen, so finden wir, daß er in Ruhe bleibt, daß keine Drehung unter dem Einflusse der Schwere annimmt. Der Grund dieser Erscheinung ist nach der eben gemachten Bemerkung klar; da die Schwere will den beiden Hälften des Stabes entgegengesetzte Drehung erteilen; da die beiden Hälften des Stabes sich aber nicht eine ohne andere drehen können, so heben sich die Drehungen auf.

Befestigen wir an dem Ende  $B$  (Fig. 20) unserer so aufgehängten Stange ein Gewicht  $P$ , so muß dieselbe eine Drehung annehmen, da jetzt

Fig. 20.



eine Kraft auf unser Körper einwirkt, welche senkrecht ist zur Verbindungslinie des Angriffspunktes und der Drehungsachse in der senkrecht zur Drehungsachse gelegten Vertikalebene.

Bringen wir aber an eben dem Punkte eine nach oben gerichtete Kraft von genau gleich Größe an, etwa indem wir an  $B$  einen Faden befestigen, diesen über eine feste Rolle  $R$  führen und

an der andern Seite des Fadens das Gewicht  $Q = P$  anbringen, so tritt keine Drehung des Stabes ein. Dies ist nach dem Früheren auch nicht zu erwarten, das Gewicht  $P$  wird durch ein ihm genau gleiches, aber in entgegengesetzter Richtung wirkendes äquilibrirt.

Verschieben wir aber nun das Gewicht  $P$  von  $B$  nach  $D$  hin, so sehen wir sofort, daß unser Stab sich dreht und zwar in einem dem früher entgegengesetzten Sinne; er folgt dem Zuge, den das Gewicht  $Q$  auf ihn ausübt, obwohl das genau gleiche Gewicht  $P$  den Stab nach unten drehen sucht. Es folgt daraus, daß eine Kraft einen Körper um so leicht zu drehen vermag, je weiter ihr Angriffspunkt von der Drehungsachse entfernt ist. Wenn wir das Gewicht  $P$  vergrößern, so sehen wir bald, wir imstande sind, die Drehung wieder aufhören zu machen. Ist nämlich  $CD = \frac{1}{2} CB$ , so hört die Drehung auf, sobald das Gewicht  $P$  verdoppelt ist, sobald wir also statt  $P$  das Gewicht  $2P$  an  $D$  angehängt haben. Eine neue Verschiebung des Gewichtes ruft sofort wieder Bewegung hervor, entweder nach unten, wenn wir das Gewicht dem Ende  $B$  nähern, oder nach oben, wenn wir das Gewicht der Drehungsachse nähern. Wenn aber auch der Abstand  $a$  von  $C$  sei, in welchem wir das Gewicht hängen, immer finden wir, daß eine entsprechende Änderung der G

das Gleichgewicht wieder herstellt und zwar, wenn wir das Gewicht  $P$  so ändern, daß das Verhältniß besteht

$$P : Q = CB : a,$$

oder daß

$$a \cdot P = CB \cdot Q.$$

Es folgt daraus, daß zwei Kräfte, welche einem Körper eine entgegengesetzte Drehung zu erteilen suchen, sich im Gleichgewicht halten, wenn sie sich verhalten umgekehrt wie die Abstände ihrer Angriffspunkte von der Drehungsachse, oder wenn die Produkte aus den Kräften und den Abständen ihrer Angriffspunkte gleich sind. Diese Produkte nennt man die statischen oder mechanischen Momente, so daß wir den Satz so aussprechen können: Zwei Kräfte, welche einem Körper entgegengesetzte Drehungen zu erteilen suchen, halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre mechanischen Momente gleich sind.

Wir wollen uns stets die Dimensionen der uns vorkommenden Größen merken; die Dimensionen des statischen Momentes, des Produktes einer Kraft und einer Länge ist

$$F \cdot l = z [\mu \lambda \tau^{-2} \cdot \lambda] = z [\mu \lambda^2 \tau^{-2}].$$

Wir sahen eben, daß eine zwischen  $C$  und  $A$  angebrachte nach unten gerichtete Kraft unseren Stab in demselben Sinne zu drehen sucht wie das Gewicht  $Q$ . Anstatt zwischen  $C$  und  $B$  eine nach oben ziehende Kraft anzubringen, können wir daher eine ihr genau gleiche, in gleichem Abstände von  $C$  zwischen  $C$  und  $A$  anbringen. Auch dann wird nach dem obigen Satze eine Bewegung nicht eintreten können, wenn die Momente gleich sind. Der Versuch bestätigt diese Folgerung unmittelbar.

Wenn wir anstatt des einen Gewichtes  $P$  eine Reihe von verschiedenen Gewichten  $p, p', p'' \dots$  in den Abständen  $d, d', d'' \dots$  anbringen und statt des einen Gewichtes  $Q$  eine Anzahl Gewichte  $q, q', q'' \dots$  in den Abständen  $c, c', c'' \dots$ , so folgt unmittelbar und zeigt uns der Versuch, daß Gleichgewicht ist, wenn die Summe der Momente nach der einen Richtung gleich ist der Summe der Momente nach der andern Richtung, wenn also

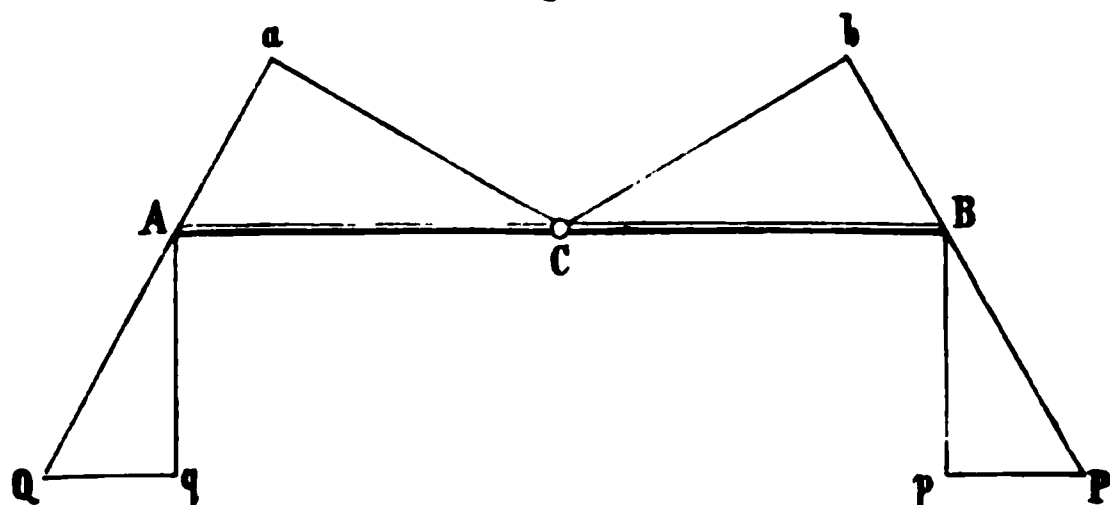
$$pd + p'd' + p''d'' \dots = qc + q'c' + q''c'' \dots$$

Wir können nun, wie man es in der Geometrie zu machen pflegt, entweder die Kräfte  $p, q$ , wenn sie nach entgegengesetzter Richtung wirken, oder die Richtungen  $d, c$ , die an entgegengesetzter Seite der Drehungsachse liegen, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen und dann unseren Satz kurz dahin aussprechen, daß sich ein drehbarer Körper im Gleichgewicht befindet, wenn die Summe der Drehungsmomente der auf ihn einwirkenden Kräfte gleich Null ist.

Wir haben bisher zwar alle Kräfte, welche nicht senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Angriffspunktes und der Drehungsachse wirken, aus der Betrachtung ausgeschlossen, aber auch auf solche Kräfte läßt sich der oben erkannte Satz ausdehnen, wenn man nur anstatt des Abstandes des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsachse den senkrechten Abstand der Richtung der Kraft von der Drehungsachse einführt. Denn

wirkt z. B. auf unsere Stange  $AB$  an dem Hebelarm (so nennt man den Abstand des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsachse, währ man den ganzen Stab als Hebel bezeichnet)  $CB$  die Kraft  $F$ , aber

Fig. 21.



einer zu  $CB$  nicht senkrechten Richtung, wirkt eigentlich, dieser Kraft nur

$$p = F \cos \alpha,$$

wenn wir mit  $\alpha$  den Winkel  $pBP$  bezeichnen und das Moment der Kraft ist

$$F \cos \alpha \cdot CB.$$

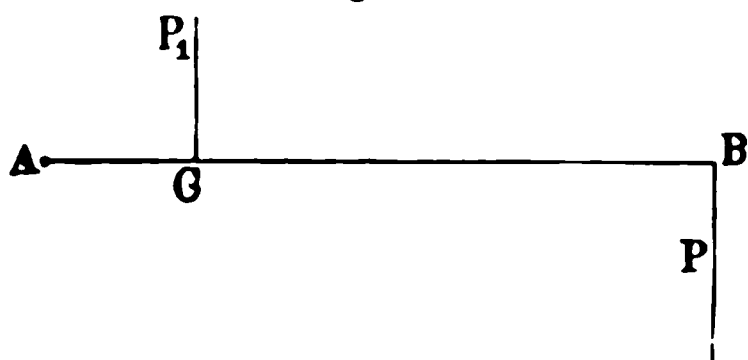
Der senkrechte Abstand der Kraft  $F$  von der Drehungsachse ist also gleich  $Cb$ . Da nun  $Cb$  senkrecht auf  $bP$  und  $CB$  senkrecht auf  $pB$  ist, so ist auch  $\angle bCB = \alpha$  und  $Cb = CB \cdot \cos \alpha$ ; also

$$F \cdot Cb = F \cos \alpha \cdot CB.$$

Man sieht, daß es gleichwertig ist, das Moment der Kraft  $F$  als  $p \cdot CB$  oder als  $F \cdot Cb$  zu nehmen, daß also, wenn wir allgemein das Moment einer Kraft das Produkt derselben in den senkrechten Abstand ihrer Richtung von der Drehungsachse definieren, der Satz von den Momenten allgemein gilt, welches auch die Richtung der Kräfte ist, vorausgesetzt, daß ihre Richtung in die Drehungsebene fällt.

Den Satz, daß bei der drehenden Bewegung zwei Kräfte sich im Gleichgewicht halten, wenn sie sich umgekehrt verhalten wie ihre Abstände von der Drehungsachse, haben wir im vorigen als einen experimentell Erfahrungssatz hingestellt. Man kann indes diesen Satz auch als eine Folge der im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätze über die Arbeit der Kräfte erhalten. Aus jenen Sätzen ergibt sich nämlich, daß ein System, an welchem Kräfte an verschiedenen Punkten, welche starr miteinander verbunden sind, wirken, im Gleichgewicht sein muß, wenn bei der Bewegung des Systems in dem einen Sinne genau soviel Arbeit geleistet wird wie bei der Bewegung im entgegengesetzten Sinne. Um die Bedeutung des Satzes und seine Richtigkeit zu erkennen, sei  $AB$  (Fig. 22) ein starrer Hebel,

Fig. 22.



wir uns ohne Gewicht denken wollen. Derselbe liege horizontal und sei um eine vertikale Achse drehbar. Punkte  $C$ , im Abstände  $l_1$  von der Drehungsachse sei eine Schnur an dem Hebel befestigt, diese sei über eine Rolle geführt und trage das Gewicht  $P$ . Ebenso sei bei  $B$  im Abstände  $l_2$  von der Drehungsachse eine Schnur

gebracht, welche das Gewicht  $P$  trage. Sinkt das Gewicht  $P$ , so muß  $P_1$  gehoben werden, sinkt  $P_1$ , so muß  $P$  gehoben werden. Daß nun, wenn zum Heben des Gewichtes  $P_1$  eine Arbeit geleistet werden muß, welche gleich ist der Arbeit, die das Gewicht  $P$  leistet, das ist gleich dem Produkte aus  $P$  und dem von ihm

a, durch diese beiden an dem Hebel angreifenden Kräfte keine stehen kann, das ergibt sich folgendermaßen. Würde durch wirkende Kraft  $P$  das System aus der Ruhe in Bewegung würde ebenso in jedem Momente die Bewegung geändert, somit ständig beschleunigte Bewegung entstehen müssen. Dadurch erlassen der Gewichte  $P$  und  $P_1$  eine mit der Zeit wachsende Arbeit, welche wieder einen gewissen Arbeitsvorrat repräsentiert. demnach durch das niedersinkende Gewicht die der Arbeit gleiche Arbeit des Emporhebens von  $P_1$  leisten, außerdem Form von lebendiger Kraft einen mit der Zeit wachsenden Arbeit erhalten, diese letztere Arbeit also ohne einen ent-Aufwand von Kraft, somit aus nichts schaffen. Das wider-dem Principe von der Erhaltung der Arbeit. Ist demnach Bewegung in dem einen Sinne zu leistende Arbeit gleich jener gesetzten Sinne, so müssen sich die Kräfte  $P$  und  $P_1$  im t halten.

aus die Bedingung des Gleichgewichts zu erhalten, denken Hebel werde in dem Sinne der Kraft  $P$  um den sehr kleinen recht, so sinkt das Gewicht  $P$  um die Strecke  $l\varphi$ , die diesem rechnende Arbeit ist  $P \cdot l \cdot \varphi$ . Dabei würde das Gewicht  $P_1$  oben, die geleistete Arbeit wäre somit  $P_1 \cdot l_1 \cdot \varphi$ , die Bedingung, Bewegung eintritt, ist somit

$$Pl\varphi = P_1l_1\varphi$$

$$Pl = P_1l_1,$$

hen Momente müssen gleich oder ihre Summe, dieselbe ge- rhin, muß gleich Null sein.

derselben Weise erhält man aus diesem Prinzip die Bedingung richtes, wenn an dem Hebel beliebig viele Kräfte angreifen; ch dann, wenn Gleichgewicht bestehen soll, die bei einer ein- hung auf beiden Seiten geleisteten Arbeiten gleich sein, somit me aller statischen Momente gleich Null sein.

en zur Ableitung des Satzes von den statischen Momenten Prinzip, daß, wenn die von den tätigen Kräften bei einer Be- Systems nach entgegengesetzter Richtung geleisteten Arbeiten ch sind, das System durch diese Kräfte keine Bewegung an- , gilt, wie leicht ersichtlich, nicht nur in dem speziellen Falle, es erläutert haben, sondern ganz allgemein. Haben wir irgend on Punkten, an dem irgend welche Kräfte angreifen, und ist ehigen Bewegung des Systems die von den Kräften geleistete derjenigen, die bei der gerade entgegengesetzten Bewegung l. so können die Kräfte keine Bewegung erzeugen, sie halten chgewicht. Das so allgemein ausgesprochene Prinzip nennt zip der virtuellen Geschwindigkeiten, eine Bezeichnung, welche l. daß die Bewegungen, welche man zur Bestimmung der htet, eben nur gedachte, nicht wirklich stattfindende sind. In

wird dieses Prinzip vielfach angewandt, um die Bedingungen richtes für ein System von Punkten, an welchen Kräfte an- rmulieren.

Da bei der drehenden Bewegung Kräfte, deren Drehungsmomente  $a$  gegengesetzt gleich sind, sich das Gleichgewicht halten, so folgt auch, daß an einem Körper angreifende Kräfte demselben eine gleiche drehende Bewegung, also in gleichen Zeiten gleiche Winkelgeschwindigkeiten, erteilen, wenn die Kräfte gleiche Momente haben. Die Winkelgeschwindigkeit ist gleich jener, welche eine im Abstände eins von der Drehungsachse angreifende Kraft dem Körper erteilt, deren Drehungsmoment den gegebenen Drehungsmomenten gleich ist. Da nun das Drehungsmoment einer im Abstände eins angreifenden Kraft soviel Einheiten hat, wie die Kraft Einheiten hat, so folgt, daß die im Abstände eins angreifende Kraft soviel Einheiten haben muß, als die gegebenen Drehungsmomente Einheiten besitzen, oder wie man kurz sagt, daß die Kraft den gegebenen Drehungsmomenten gleich sein muß. Die Summe der gegebenen Drehungsmomente gibt uns somit die Größe der Kraft, welche im Abstände eins von der Drehungsachse angbracht dieselbe drehende Bewegung erzeugt wie die gegebenen Kräfte.

### § 15.

**Zusammensetzung verschieden gerichteter Drehungen.** Wir haben bisher vorausgesetzt, daß der drehbare Körper sich nur um eine bestimmte Drehungsachse drehen könnte; es ist aber möglich, daß ein Körper sich gleichzeitig um verschiedene Drehungsachsen drehen kann und nach den verschiedenen Richtungen, nach denen er sich drehen kann gleichzeitig angetrieben wird. Es fragt sich dann, ob diese Drehungen sich ebenso zu einer resultierenden Drehung zusammensetzen, wie verschieden gerichtete fortschreitende Bewegungen eine Resultierende ergeben, und welches die Richtung und Größe der resultierenden Drehung ist. Wir können uns einen solchen Fall etwa in folgender Weise realisieren. Wir setzen eine massive Kugel in ein kleines Segment einer Halbkugel von gleichem Radius und decken, um die Kugel an der fortschreitenden Bewegung zu hindern, ein ebensolches Segment oben auf die Kugel. Eine solche Kugel kann sich dann um jede beliebige durch den Mittelpunkt derselben gehende Achse drehen. Um diese Kugel nach verschiedenen Richtungen anzutreiben, denken wir uns in der Oberfläche derselben, größten Kreisen folgend, einige Rinnen eingeschnitten, und in diese Rinnen Schnüre gelegt, in ähnlicher Weise wie bei der Rolle der Fallmaschine. Über die Schnüre dann an mehreren dieser Schnüre einen Zug aus, so erhält die Kugel Drehungsmomente um alle Achsen, welche zu den größten Kreisen gehören, welche die betreffenden Schnüre gelegt sind, senkrecht stehen.

Nehmen wir an, es werde die Kugel nach zwei gegeneinander geneigten Richtungen angetrieben, so ergeben dieselben Überlegungen, wie wir bei Entwicklung des Satzes vom Kräfteparallelogramm machten, daß die infolge der beiden Antriebe eintretende Bewegung in ihrer Richtung nicht mit der Richtung der Antriebe zusammenfallen kann, daß die Drehungsrichtung vielmehr zwischen die Richtung der beiden Antriebe fällt. Betrachten wir irgend einen Punkt auf der Oberfläche der Kugel, infolge des ersten Antriebes, wenn er für sich allein wirksam wäre, würde er den Bogen  $\alpha$  beschreiben, infolge des zweiten Antriebes in der geneigten ersten geneigten Richtung aber den Bogen  $\beta$ , so muß der unter



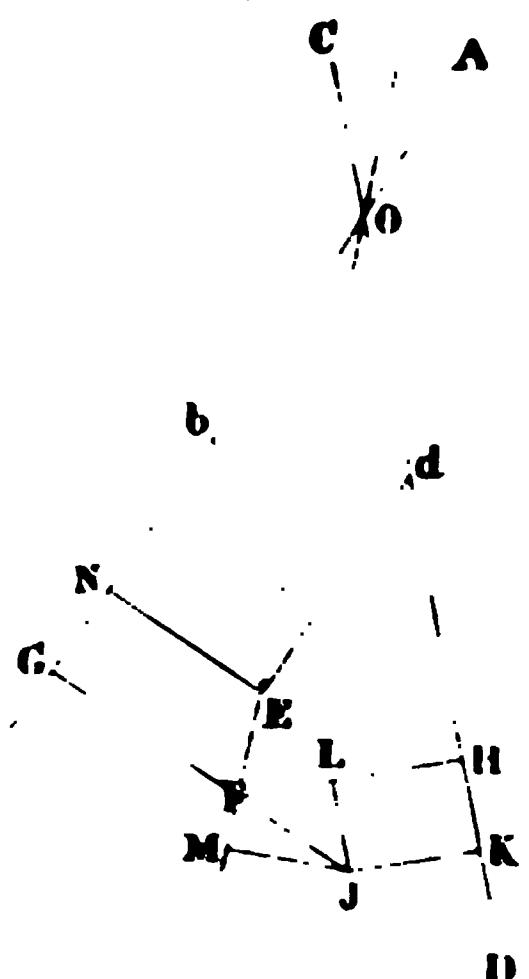
zeitiger Wirkung der beiden Antriebe in derselben Zeit von dem betrachteten Punkte erreichte Ort ganz derselbe sein, wie wenn sich der Punkt die gleiche Zeit hindurch mit der gleichen Geschwindigkeit erst in der einen, dann in der andern Richtung gedreht hätte, also in beiden Richtungen nacheinander in der einen den Bogen  $\alpha$ , in der andern  $\beta$  beschrieben hätte. Die Bahn des Punktes muß dann der Bogen sein, der den Ausgangspunkt und den so bestimmten Ort des Punktes nach der Bewegung verbindet. Dieser Bogen ist aber die Diagonale des aus den Bogen  $\alpha$  und  $\beta$  auf der Kugel gebildeten Vierecks. Die Drehungsachse, um welche eine einfache Drehung durch den von dieser Diagonale der Größe und Richtung nach gegebenen Bogen genau dieselbe Drehung dieses und damit aller Punkte der Kugel ergeben haben würde, ist diejenige Achse der Kugel, welche zu dem Kreise, zu welchem der resultierende Bogen gehört, senkrecht ist. Diese Achse liegt in der durch die beiden gegebenen Achsen bestimmten Ebene und bildet mit jeder derselben den gleichen Winkel, welchen der resultierende Bogen  $\alpha$  und  $\beta$  bildet.

Aus dieser letzteren Bemerkung erkennt man, daß man die Richtung der resultierenden Achse und auch die Größe der resultierenden Drehung durch eine ebene Konstruktion erhalten kann. Wir legen durch die beiden ursprünglich gegebenen Achsen eine Ebene und tragen von dem Punkte, wo sich die Achsen schneiden, auf denselben die Bogen  $\alpha$  und  $\beta$  als Seiten eines Parallelogrammes auf. Die durch den Schnittpunkt der Achsen gelegte Diagonale des vervollständigten Parallelogramms ist dann die Achse der resultierenden Drehung, und gleichzeitig ist die Länge der Diagonale die Größe der resultierenden Drehung.

Um die Richtigkeit dieser Konstruktion zu erkennen, seien  $AB$  und  $CD$  (Fig. 23) die beiden sich im Mittelpunkte  $O$  der Kugel schneidenden Drehungsachsen, und setzen wir voraus, daß wir in der Achse  $OB$  stehend den Kopf bei  $O$ , den Fuß bei  $B$ , die Drehung in demselben Sinne, und zwar von links nach rechts, erfolgen sehen, wie die Drehung um die Achse  $OD$ , wenn wir an dieser stehen, den Kopf bei  $O$  und den Fuß bei  $D$ . Wir wollen zunächst annehmen, die Drehungen erfolgen mit gleichförmiger Bewegung und die Bogen  $\alpha$  und  $\beta$  seien die in einer Sekunde beschriebenen Bogen, also gleichzeitig beschriebenen Winkelgeschwindigkeiten. Wir tragen dann auf  $OB$  den Bogen  $\alpha = Ob$ , auf  $OD$  den Bogen  $\beta = Od$  auf, ergänzen das Parallelogramm  $ObEd$  und erhalten in  $OE$  die Richtung der resultierenden Drehungsachse und die Größe des Bogens  $\gamma$ , um welchen der betrachtete Punkt um diese Achse in derselben Zeit einer Sekunde gedreht wird, und zwar so, daß wenn wir in der Achse stehen, den Kopf bei  $O$ , den Fuß bei  $E$ , die Bewegung in demselben Sinne von links nach rechts erfolgt.

Die Richtigkeit der Konstruktion erkennen wir durch den Nachweis, daß zufolge beider Drehungen die auf  $OE$  liegenden Punkte in Ruhe

Fig. 23



bleiben, denn bei der Drehung eines Körpers sind die Punkte der  $Ac$  und nur diese in Ruhe, und zweitens dadurch, daß wir zeigen, daß irgend ein beliebiger Punkt in der Tat mit der Winkelgeschwindigkeit  $\gamma$  diese Achse gedreht wird.

Ein Punkt  $F$  der Achse  $OE$  wird durch die Drehung um die  $Ac$   $OB$  aus der Ebene der Zeichnung nach vorn gehoben in einem Kreissegment dessen Radius die von  $F$  auf  $OB$  herabgelassene Senkrechte  $FG$  ist. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung  $\alpha$  ist, so wird in der unendlich kleinen Zeit  $dt$  der Punkt  $F$  um das unendlich kleine Stückchen  $GF \cdot \alpha \cdot dt$  und zwar weil das Kreiselement auf seinem Radius senkrecht steht, senkrecht zur Ebene der Zeichnung nach vorn gehoben. In demselben Zeitelement  $dt$  rückt der Punkt  $F$  infolge der Drehung um  $OD$  um die Strecke  $FH \cdot \beta \cdot dt$  senkrecht hinter die Ebene der Zeichnung. Die Verschiebung des Punktes  $F$  im Sinne der ersten Drehung ist die Differenz beider Verschiebungen oder

$$(FG \cdot \alpha - FH \cdot \beta) dt$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber gleich Null, denn es ist

$$\frac{GF}{FO} = \sin GOF \quad \frac{FH}{FO} = \sin FOH = \sin OEb$$

$$GF : FH = \sin GOF : \sin OEb = Eb : Ob.$$

Nun ist nach der Konstruktion

$$Eb = \beta, \quad Ob = \alpha,$$

somit

$$GF \cdot Ob = GF \cdot \alpha = FH \cdot Eb = FH \cdot \beta$$

oder

$$FG \cdot \alpha - FH \cdot \beta = 0.$$

Die Differenz der Verschiebungen, welche der beliebige Punkt  $F$  der Achse  $OE$  in dem Zeitelement  $dt$  erfährt, ist somit gleich Null, oder was dasselbe ist, der Punkt  $F$ , und somit alle Punkte der Achse  $OE$  erhalten in dem Zeitelement  $dt$  und damit überhaupt keine Verschiebung. Richtung  $OE$  ist also die resultierende Drehungsachse.

Um den Nachweis dafür zu liefern, daß für jeden beliebigen Punkt die Größe der Drehung pro Sekunde oder die Drehungsgeschwindigkeit durch den durch die Länge der Diagonale repräsentierten Bogen  $\gamma$  gegeben ist, betrachten wir die Drehung eines beliebigen in der Ebene der Zeichnung liegenden Punktes  $J$ . Wir wollen nur, um die Zeichnung nicht zu sehr zu komplizieren, annehmen, dieser Punkt liege auf der Verlängerung der vorher durch den Punkt  $F$  gelegten zu  $OB$  senkrechten Richtung. Da der Punkt  $F$  ein vorher ganz beliebig auf der Achse angenommen ist, so geschieht durch diese Voraussetzung der Allgemeinheit unserer Betrachtung kein Eintrag. Die Verschiebung des Punktes  $J$  in der Zeit  $dt$  im Sinne der Drehung um  $OB$  ist dann

$$(GJ \cdot \alpha - JK \cdot \beta) dt.$$

Ziehen wir  $JL$  parallel  $OD$ , so können wir diesen Ausdruck s

$$\{(GE + FJ)\alpha - (FH - FL)\beta\} dt = (FJ \cdot \alpha + FL \cdot \beta) dt$$

Da, wie vorher gezeigt wurde,  $OM$  die resultierende Drehungsachse ist, so können wir, wenn  $JM \perp OM$ , die resultierende Drehung um  $OE$  resp. die in der Zeit  $dt$  in demselben Sinne eintretende Verschiebung des Punktes  $J$  durch die Winkelgeschwindigkeit  $\gamma$  ausdrücken

$$MJ \cdot \gamma \cdot dt$$

und haben dann zu zeigen, daß  $\gamma = OE$  ist. Aus den beiden Ausdrücken für die Verschiebung des Punktes  $J$  erhalten wir

$$\gamma = \frac{FJ \cdot \alpha + FL \cdot \beta}{MJ}.$$

In dem Dreieck  $FJM$  ist der Winkel an  $J$ , da  $MJ \perp MO$ ,  $FJ \perp OB$ , gleich dem Winkel  $GOE$ , demnach

$$MJ = FJ \cdot \cos GOE,$$

in dem Dreiecke  $JFL$  ist der Winkel an  $F$ , da  $FH \perp OH$ ,  $FJ \perp OB$ , gleich dem Winkel  $GOH$ , welchen die beiden gegebenen Achsen miteinander bilden, demnach

$$FL = FJ \cdot \cos GOH,$$

mit

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta \cdot \cos GOH}{\cos GOE}.$$

Ziehen wir nun  $EN$  senkrecht zu  $OG$ , so sieht man, daß der Zähler des Ausdrucks die Kathete  $ON$  des rechtwinkligen Dreiecks  $ENO$  ist, welche mit der Hypotenuse  $EO$  den Winkel  $GOE$  einschließt; daraus folgt, daß der Ausdruck auf der rechten Seite eben dieser Hypotenuse gleich ist, oder daß

$$\gamma = OE.$$

Die Diagonale  $OE$  ist somit die aus den beiden gegebenen Drehungen mit  $\beta$  resultierende Drehung.

Wir haben hierbei zunächst vorausgesetzt, daß die Drehungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen, diese Beschränkung können wir aber ohne weiteres fallen lassen, wenn wir  $\alpha$  und  $\beta$  als die dem betrachteten Augenblicke oder der Zeit  $dt$  entsprechenden Drehungsgeschwindigkeiten bezeichnen. Es bedeutet dann  $\gamma$  die aus diesen beiden resultierende augenblickliche Drehungsgeschwindigkeit um die Achse  $OE$ . Die ganze Entwicklung behält auch unter dieser Voraussetzung ihre strenge Richtigkeit.

Wir erhalten somit ganz allgemein die aus zwei gegeneinander gegebenen Drehungen resultierende Drehungsgeschwindigkeit, indem wir von einem Schnittpunkte der beiden Achsen die gegebenen Drehungsgeschwindigkeiten so auftragen, daß wir den Kopf im Schnittpunkte der Achsen gehalten und in die Richtung, nach welcher wir die gegebenen Drehungen ausführen haben, uns stellend, die Drehungen im gleichen Sinne erfolgend ausführen und dann die Diagonale des aus den beiden aufgetragenen Längen resultierenden Parallelogramms ziehen. Die Diagonale gibt der Größe und Richtung nach die resultierende Drehungsgeschwindigkeit. Man kann somit die Drehungen hiernach gerade so zusammensetzen, wie fortschreitende Bewegungen.

Ganz dieselbe Konstruktion liefert uns, gerade wie bei dem Kräfteparallelogramm, auch das aus zwei gegebenen gegeneinander geneigten Drehungsmomenten resultierende Drehungsmoment, das heißt das Drehungsmoment, welches an Stelle der gegebenen um die resultierende Achse wirkend genau dieselbe Drehung hervorbringt. Ersetzen wir in unserer Konstruktion die augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten durch die Winkelbeschleunigungen, so sind diese, wie wir sahen, den Drehungsmomenten proportional. Damit ist der Satz vom Kräfteparallelogramm auch auf die Drehungsmomente ausgedehnt, indem wir dieselben als Längen auf die Drehungsachsen auftragen und diese Längen zur Konstruktion benutzen.

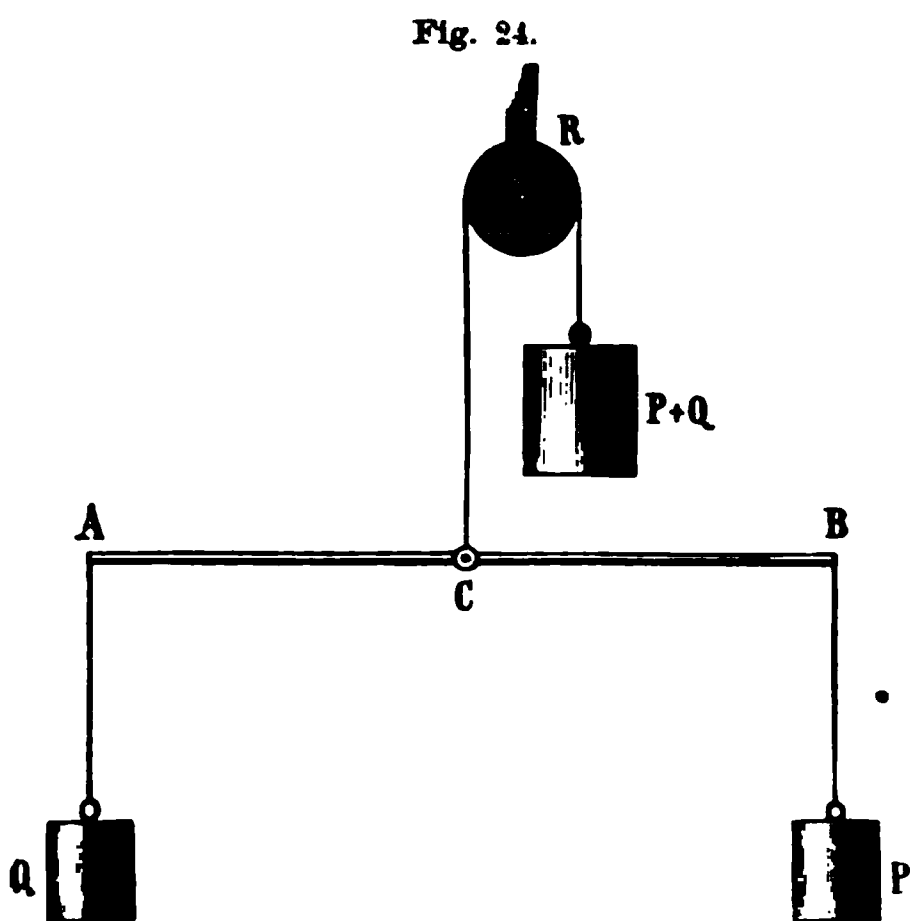
Ebenso wie zwei Drehungen oder Drehungsmomente können wir derselben Weise auch beliebig viele zu einer Resultierenden zusammensetzen, indem wir sie paarweise vereinigen.

Gerade so wie eine gegebene fortschreitende Bewegung können wir nun auch eine gegebene Drehung in andere zerlegen, so besonders in die Komponenten nach zwei zueinander senkrechten Richtungen bestimmen. Die Ausdrücke für die Komponenten fallen nach den soeben gemachten Entwicklungen ganz mit denen für die Komponenten einer fortschreitenden Bewegung zusammen. Die Komponente der Drehung um eine Achse, welche mit der gegebenen Achse den Winkel  $\varphi$  bildet, ist gleich der gegebenen Drehung multipliziert mit dem Kosinus des Winkels  $\varphi$ . Wir setzen also auf einen Körper ein Drehungsmoment ein, dessen Achse mit der Richtung der Achse, um welche sich der Körper drehen kann, einen Winkel bildet, so erhalten wir in dem Produkte aus dem gegebenen Drehungsmoment und dem Kosinus dieses Winkels auch das Drehungsmoment, welches die mögliche Drehung bewirkt.

## § 16.

**Mittelpunkt paralleler Kräfte.**

Wenn an einem Hebel  $AB$  eine Reihe von parallelen Kräften wirkt, und es ist der Punkt  $C$  in bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist, so tritt keine fortschreitende Bewegung ein. Wenn dann die Unterstützung am Punkte  $C$  genommen, so nähme der Hebel infolge der parallel wirkenden Kräfte eine fortschreitende Bewegung in der Richtung der wirkenden Kräfte an. Diese können jedoch hemmen, wenn wir am Punkte  $C$  (Fig. 24) eine Kraft in entgegengesetzter Richtung anbringen, welche



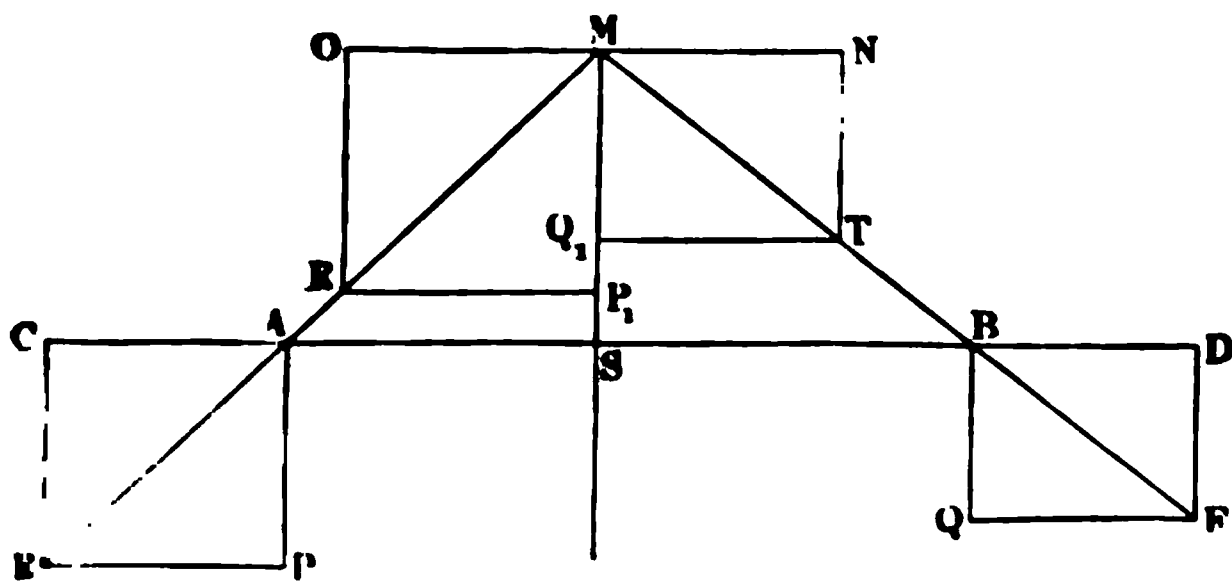
ist der Summe  $P + Q$  der gegebenen Kräfte. Die im Punkte  $C$  angebrachte Kraft  $P + Q$  hält also den beiden einzelnen in  $A$  und  $B$  angebrachten

Kräften  $Q$  und  $P$  das Gleichgewicht. Diese beiden Kräfte wirken also zusammen ebenso, als wenn am Punkte  $C$  eine ihrer Summe  $P + Q$  gleiche Kraft angebracht wäre.

Wir schließen demnach, daß auch parallele Kräfte eine Resultierende haben, welche ihrer Summe gleich ist, und daß diese Resultierende an dem Punkte angreift, in bezug auf den die Summe der Momente gleich Null ist, d. h. daß die verteilt angebrachten Kräfte gerade so wirken, als wenn an diesem Punkte alle Kräfte angebracht wären. Dieser Punkt heißt daher der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Daß in der Tat der Punkt, in bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist, der Mittelpunkt der parallelen Kräfte ist, und daß die Mittelkraft der Summe der einzelnen Kräfte gleich ist, können wir auch ohne Versuch schon aus dem Satze vom Kräfteparallelogramm beweisen. Sei zu dem Ende  $AB$  (Fig. 25) eine feste Linie, an deren Enden die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  parallel nach derselben Richtung wirkend

Fig. 25.



entzogen seien; die Längen  $AP$  und  $BQ$  stellen diese Kräfte dar. Bringen wir nun an  $A$  und  $B$  die beiden gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte  $AC$  und  $BD$  an, so wird, da sie sich gegenseitig aufheben, durch dieselben am System gar nichts gestört. Die je zwei Kräfte  $AC$  und  $AP$ , sowie  $BQ$  und  $BD$  geben eine Resultierende, welche der Größe und Richtung nach durch die Diagonalen  $AE$  und  $BF$  der Parallelogramme  $APCE$  und  $BQFD$  gegeben ist. Verlängern wir diese beiden Diagonalen rückwärts, bis sie sich im Punkte  $M$  schneiden, und denken wir uns den Punkt  $M$  mit der Linie  $AB$  in fester unveränderlicher Verbindung, so können wir uns die beiden Kräfte  $AE$  und  $BF$  an dem Punkte  $M$  in  $MR$  und  $MT$  angebracht denken. Die Verhältnisse des Systems werden dadurch nicht geändert. Die beiden Kräfte  $MR$  und  $MT$  können nun nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm zerlegt werden in  $MR$  in  $OM = AC$  und  $MP_1 = AP$  und  $MT$  in  $MN = BD$  und  $MQ_1 = BQ$ . Die beiden Kräfte  $MO$  und  $MN$  heben sich auf, und es bleibt zuletzt als Resultierende die Summe der beiden Kräfte  $P$  und  $Q$ . Daraus folgt zunächst, daß zwei parallele Kräfte eine ihrer Summe gleiche Resultierende oder Mittelkraft haben, deren Richtung jener der gegebenen Kräfte parallel ist, und die in einem Punkte  $S$  zwischen  $A$  und  $B$  die feste Linie  $AB$  schneidet. Die Lage dieses Punktes  $S$  auf  $AB$  erhält

man aus den ähnlichen Dreiecken  $ASM \sim RP_1M$  und  $BSM \sim TQ_1M$ . Dieselben geben nämlich

$$AS : SM = RP_1 : P_1M$$

$$BS : SM = Q_1T : Q_1M.$$

Und daraus, da  $SM = SM$ ,  $RP_1 = Q_1T$ ,  $P_1M = P$ ,  $Q_1M = Q$ ,

$$AS \cdot P = BS \cdot Q,$$

dieselbe Bedingung, welche wir soeben experimentell ableiteten, der Punkt  $S$  liegt so, daß in bezug auf ihn die Summe der Momente gleich Null ist.

Daß die so bestimmte Resultierende auch in bezug auf die drehende Bewegung die gegebenen Kräfte vollständig ersetzt, das heißt, daß sie unter allen Umständen genau dasselbe Drehungsmoment liefert, erkennen wir folgendermaßen.

Haben wir eine Anzahl von Kräften  $p_1, p_2 \dots$ , welche in den Abständen  $l_1, l_2 \dots$  vom Mittelpunkte angreifen, so ist die Summe

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \dots = 0.$$

Legen wir durch das System eine Drehungsachse, dessen zur Kraft-richtung senkrechter Abstand von dem Mittelpunkte gleich  $x$  ist, so wird in bezug auf diese das Drehungsmoment

$$p_1(l_1 + x) + p_2(l_2 + x) + \dots = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + (p_1 + p_2 + \dots)x.$$

Da der Voraussetzung nach

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots = 0,$$

so folgt für das Drehungsmoment in bezug auf die angenommene Achse

$$(p_1 + p_2 + \dots)x,$$

also ganz dasselbe, wie wenn im Mittelpunkte die Summe aller Kräfte angebracht wäre.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die einander parallelen Kräfte auch gleich gerichtet seien, aber ebenso haben zwei parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte im allgemeinen eine Resultierende. Um die Größe derselben und ihren Angriffspunkt zu finden, sei  $AB$  Fig. 26 wieder eine feste Linie, an deren Punkten  $A$  und  $B$  die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  wirken. Wir können  $P$  als Mittelkraft zweier anderer betrachten, wovon die eine bei  $B$  angreift und der Kraft  $Q$  gleich ist, während die andere gleich  $P - Q$  ist und in einem Punkte  $S$  angreift, dessen Lage durch die Bedingung gegeben ist, daß

$$AS \cdot (P - Q) = AB \cdot Q$$

$$AS = AB \cdot \frac{Q}{P - Q}.$$

Die beiden Kräfte  $Q$  und  $Q_1$  heben sich auf, da sie an demselben Punkte nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Es bleibt also Resultierende die Differenz der gegebenen Kräfte übrig, deren Richtung ursprünglichen parallel ist, und deren Angriffspunkt wieder jener Punkt

bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist. Denn aus der Gleichung für  $AS$  folgt

$$AS \cdot P = (AS + AB)Q = SB \cdot Q.$$

In einem Falle jedoch haben parallele Kräfte keine Resultante, wenn sie also ein ganz freies System von Punkten nicht in eine fortbreitende Bewegung, nämlich dann, wenn sie einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Daß in dem Falle keine resultierende Kraft vorhanden ist, folgt zunächst aus dem soeben abgeleiteten Satze, nach welchem bei entgegengesetzt gerichteten Kräften die Resultante gleich der Differenz der beiden Kräfte ist, es folgt aber weiter aus der Gleichung für die Lage des Angriffspunktes

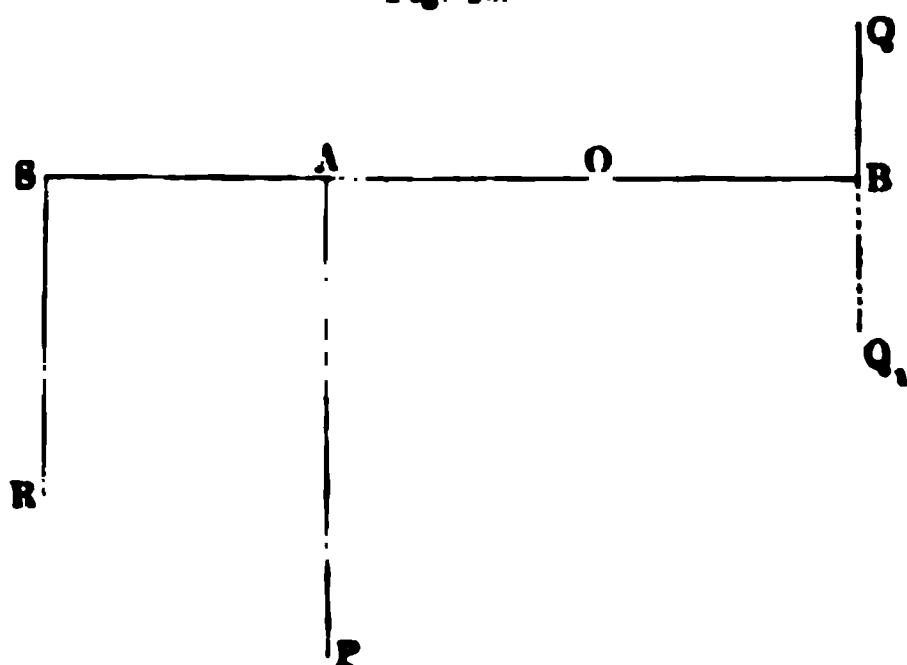
$$AS = AB \cdot \frac{Q}{P - Q}.$$

Da nämlich in diesem Falle  $P - Q = 0$  ist, so wird  $AS$  unendlich, d. h. es gibt keinen in endlicher Entfernung von  $A$  liegenden Punkt, an dem die Mittelkraft anzubringen wäre, es gibt also keine Mittelkraft.

Ein solches Kräftepaar bringt deshalb nur eine drehende Bewegung hervor, um irgend einen zwischen  $A$  und  $B$  liegenden Punkt, und das statische Moment eines solchen

Fig. 26.

Paars ist gleich dem Produkte aus einer der Kräfte und dem senkrechten Abstände beider. Bezüglich welchen Punkt wir uns als fest denken, wo auch der Punkt  $O$  (Fig. 26) liegt, das Drehungsmoment ist, da beide Kräfte das System in demselben Sinne drehen,  $P \cdot AO + Q \cdot BO$ , wenn  $P$  und  $Q$  gleich sind, auch



$$P \cdot AO + (OB) = P \cdot AB.$$

Die Kräftepaare, ihr Verhalten und die Zusammensetzung derselben sind besonders von Poincot untersucht worden, der die Anwendung derselben zur Bestimmung der drehenden Bewegungen in die Mechanik eingeführt hat. Wir verweisen wegen dieser schönen Theorie auf die Lehrbücher der Statik und besonders auf Poincot: *Éléments de statique*.

Haben wir eine Reihe von in einer Richtung wirkenden parallelen Kräften anstatt an einer Linie an einer festen Ebene verteilt, so müssen wir diese eine Resultierende und einen Mittelpunkt haben. Denn wir setzen je zwei solcher Kräfte zusammensetzen, die Resultierende dann mit der folgenden und so fort, bis uns die Mittelkraft der zuletzt übrigbleibenden Kräfte die Resultante und deren Angriffspunkt den Mittelpunkt der Kräfte gibt.

Sind die parallelen Kräfte nicht alle gleich gerichtet, so liefert die Zusammensetzung der gleich gerichteten zunächst zwei entgegengesetzt gerichtete Resultierende. Greifen dieselben an verschiedenen Punkten an



so erhalten wir die Resultierende und den Angriffspunkt in der vorangegebenen Weise; sind dieselben gleich, so gibt es nur ein resultierendes Paar.

Die gleichen Schlüsse können wir anwenden, wenn eine Anzahl paralleler Kräfte anstatt an einer festen Ebene an einem festen Körper angreift; auch für diesen muß es einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte geben, in welchem wir uns die Summe aller Kräfte angebracht denken können, und für den die Summe aller Momente gleich Null ist. Ist deshalb dieser Punkt befestigt, z. B. durch ihn eine Drehungsachse geführt, so kann der Körper weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen.

Ändern wir die Richtung sämtlicher auf ein System wirkender Kräfte aber so, daß sie einander parallel bleiben, so wird der Angriffspunkt der Resultierenden nicht geändert. Denn nach der Drehung ist die Summe der Momente in bezug auf eben diesen Punkt gerade so gleich Null wie vorher. Es folgt das unmittelbar aus unserem Satze über die Momente. Haben sich z. B. alle Kräfte um den Winkel  $\alpha$  gedreht, so sind die Momente der einzelnen Kräfte  $p, p_1, p_2 \dots$  in den Abständen  $d, d_1, d_2 \dots$ , was sie vorher waren

$$pd + p_1d_1 + p_2d_2 + \dots,$$

nach der Drehung

$$pd \cos \alpha + p_1d_1 \cos \alpha + p_2d_2 \cos \alpha \dots,$$

also gleich

$$(pd + p_1d_1 + p_2d_2 + \dots) \cos \alpha,$$

und war die Summe  $pd \dots$  gleich Null, so ist sie es auch, wenn sie mit  $\cos \alpha$  multipliziert worden ist.

## § 17.

**Gleichgewicht eines Systems, an welchem beliebige Kräfte angreifen.** Im § 8 haben wir die Bedingungen abgeleitet, unter welchen ein Körper im Gleichgewicht ist, an welchem beliebige Kräfte wirken, die aber alle an demselben Punkte angreifen. Die Bedingungen des Gleichgewichtes fielen dort zusammen mit denen eines Punktes. In den wenigen Sätzen über die drehende Bewegung, welche wir im bisherigen abgeleitet haben, setzen uns nun auch in den Stand, das Gleichgewicht eines Körpers zu bestimmen, an welchem beliebige Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen. Diese Gleichgewichtsbedingungen fallen zusammen mit denen eines Systems von Punkten, an denen Kräfte angreifen, und mit denen eines Systems, in welchem die Punkte miteinander in fester Verbindung stehen. Ein solches System kann weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen. Die Bedingung des Gleichgewichts ist daher die, daß weder die eine noch die andere Bewegung eintreten kann.

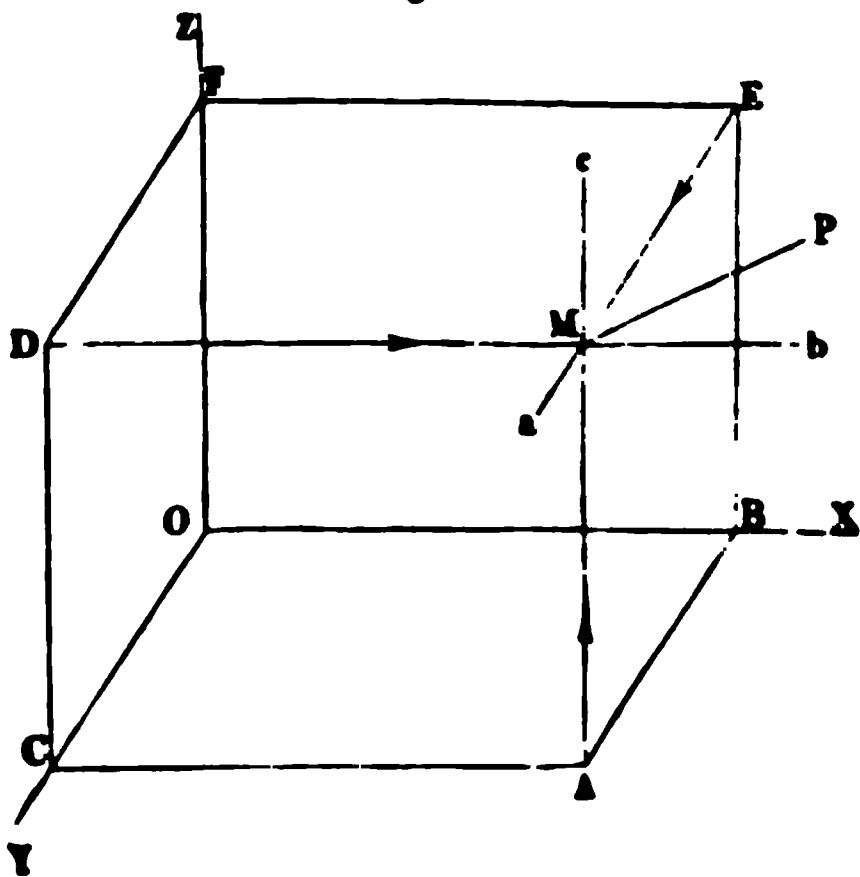
Wir denken uns, um diese Bedingungen zu erhalten, durch das System drei feste zueinander senkrechte Richtungen  $OX, OY, OZ$  (Fig. 1) gelegt, die sich in einem Punkte  $O$  schneiden. Sei  $M$  ein Punkt des Systems, dessen Lage durch die Koordinaten  $MA = x, CA = 0$

$AB = CO = y$  gegeben sei. An  $M$  greife eine Kraft  $P$  an, deren Richtung durch die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben ist, welche sie mit den Achsen bildet. Zerlegen wir die Kraft nach den drei Achsen, so erhalten wir als Komponenten parallel

$$\begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ Mb = P \cos \alpha, & Ma = P \cos \beta, & Mc = P \cos \gamma. \end{array}$$

Diese drei Kräfte können dem System sowohl eine fortschreitende Bewegung, jede nach ihrer Richtung, als auch eine drehende Bewegung geben. Um die drehenden Be-

Fig. 27.



wegungen und ihre Momente zu erhalten, legen wir durch  $M$  die Linien  $MD, ME, MA$  parallel den drei Achsen und verlängern dieselben, bis sie die durch die Achsen bestimmten Ebenen schneiden in den Punkten  $D, E, A$ , die wir uns fest mit dem Punkte  $M$  verbunden denken. Wir können uns dann, ohne irgend etwas an der Wirkung von  $P$  zu ändern, die drei Komponenten an den Punkten  $D, E, A$  angreifend denken. Jede dieser Kräfte kann das System um zwei Achsen drehen,  $Mb$  um  $Z$  und  $Y$ ,  $Ma$  um  $Z$  und  $X$ ,  $Mc$  um  $Y$  und  $X$ , so daß also

für jede der drei Achsen zwei Drehungsmomente vorhanden sind. Diese zwei Drehungen sind aber einander entgegengesetzt, so daß z. B.  $Mb$  das System in entgegengesetzter Richtung um  $Z$  zu drehen sucht als  $Ma$ , um deshalb die Drehungsmomente für die drei möglichen Drehungen zu bestimmen, müssen wir die Differenzen der je zwei Momente bilden. Die wirklichen Abstände der drei Kraftrichtungen von den Drehungsachsen sind nun

$$Ma \text{ von } X \text{ gleich } EB = z; \quad Ma \text{ von } Z \text{ gleich } EF = x$$

$$Mb \text{ „ } Z \text{ „ } DF = y; \quad Mb \text{ „ } Y \text{ „ } DC = z$$

$$Mc \text{ „ } X \text{ „ } AB = y; \quad Mc \text{ „ } Y \text{ „ } AC = x.$$

Setzen wir die Drehungen positiv, welche im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers erfolgen, wenn wir in der Richtung der positiven Achsen  $OX, OY, OZ$  stehend die Füße in der Drehungsebene, auf die Drehungsachsen hinsehen, so sind die Drehungsmomente um

$$\begin{array}{c} X \\ Mb \cdot AB - Ma \cdot EB = P \cos \gamma \cdot y - P \cos \beta \cdot z = P(y \cos \gamma - z \cos \beta); \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Y \\ Mc \cdot DC - Mc \cdot AC = P \cos \alpha \cdot z - P \cos \gamma \cdot x = P(z \cos \alpha - x \cos \gamma); \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Z \\ Ma \cdot EF - Mb \cdot DF = P \cos \beta \cdot x - P \cos \alpha \cdot y = P(x \cos \beta - y \cos \alpha). \end{array}$$

Haben wir eine beliebige Anzahl von Kräften  $P$ , welche an beliebigen Punkten des Systems angreifen und beliebig gerichtet sind, so können wir für jede Kraft ganz dieselbe Zerlegung vornehmen, und wir erhalten für jede Kraft drei mit den eben abgeleiteten gleich gerichtete Komponenten und drei Drehungsmomente, welche das System in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne zu drehen suchen. Die je drei Komponenten sowie die Summen der drei Drehungsmomente müssen einzeln gleich Null sein, wenn das System weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen soll. Bezeichnen wir diese einzelnen Summen mit  $\Sigma$ , so ist also die notwendige und ausreichende Bedingung des Gleichgewichts

$$\begin{aligned}\Sigma P \cos \alpha &= 0; \quad \Sigma P \cos \beta = 0; \quad \Sigma P \cos \gamma = 0; \\ \Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) &= 0; \quad \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0; \\ \Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) &= 0.\end{aligned}$$

Denn diese Gleichungen zeigen, daß das System infolge der wirkenden Kräfte nach keiner Richtung fortschreiten und nach keiner Richtung gedreht werden kann.

Sind die Kräfte alle parallel einer und derselben Richtung, etwa parallel  $MP$ , so daß sie entweder nach  $MP$  oder der gerade entgegengesetzten Richtung wirken, sind also für alle die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  dieselben, so vereinfachen sich die Bedingungen des Gleichgewichtes bedeutend. Da es nämlich gleichgültig ist, ob wir in einer Summe alle einzelnen Glieder mit ein und demselben Faktor multiplizieren, oder ob wir die Summe der einzelnen Glieder mit diesem Faktor multiplizieren, so können wir in obigen Gleichungen die Kosinus als gemeinschaftliche Faktoren herschreiben; wir erhalten dann als Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cdot \Sigma P &= 0; \quad \cos \beta \cdot \Sigma P = 0; \quad \cos \gamma \cdot \Sigma P = 0; \\ \cos \gamma \cdot \Sigma P y - \cos \beta \cdot \Sigma P z &= 0; \quad \cos \alpha \cdot \Sigma P z - \cos \gamma \cdot \Sigma P x = 0; \\ \cos \beta \cdot \Sigma P x - \cos \alpha \cdot \Sigma P y &= 0,\end{aligned}$$

wo in den letzten Gleichungen die Summen  $Px$  etc. die Summen der Produkte aller einzelnen Kräfte in die Abstände  $x$  etc. ihrer Angriffspunkte bedeuten.

Da nun  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel sind, welche ein und dieselbe Richtung mit drei festen Richtungen bildet, dieselben also nie gleichzeitig recht werden können, so können obige Gleichungen nur bestehen, wenn

$$\Sigma P = 0; \quad \Sigma P x = 0; \quad \Sigma P y = 0; \quad \Sigma P z = 0,$$

wenn also sowohl die Summe aller Kräfte gleich Null ist, als auch die Summe der Produkte der einzelnen Kräfte in die Abstände  $x, y, z$  ihrer Angriffspunkte von den drei festen Richtungen.

Ist das System nicht im Gleichgewicht, so kann es eine Resultante haben oder auf ein Kräftepaar zurückgeführt werden. Wenn es eine Resultante hat, so muß Gleichgewicht bestehen, wenn wir an dem Mittelpunkt eine ihr gleiche, aber entgegengesetzte Kraft anbringen. Ist die Resultante gleich  $R$ , und sind die Abstände des Mittelpunktes von den drei festen Richtungen  $x_1, y_1, z_1$ , so erhalten wir, da nach dem vorigen die Richtung der Resultante derjenigen der gegebenen Kräfte parallel sein

dieselbe mit den Achsen also dieselben Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bilden muß, zur Bestimmung derselben und ihres Angriffspunktes

$$\cos \alpha \cdot \Sigma P = \cos \alpha \cdot R; \quad \cos \beta \cdot \Sigma P = \cos \beta \cdot R; \quad \cos \gamma \cdot \Sigma P = \cos \gamma \cdot R,$$

somit zunächst, wie wir vorhin schon ableiteten,

$$\Sigma P = R.$$

Ferner aber

$$\cos \gamma \cdot \Sigma Py - \cos \beta \cdot \Sigma Pz = \cos \gamma \cdot Ry_1 - \cos \beta \cdot Rz_1;$$

$$\cos \alpha \cdot \Sigma Pz - \cos \gamma \cdot \Sigma Px = \cos \alpha \cdot Rz_1 - \cos \gamma \cdot Rx_1;$$

$$\cos \beta \cdot \Sigma Px - \cos \alpha \cdot \Sigma Py = \cos \beta \cdot Rx_1 - \cos \alpha \cdot Ry_1$$

und daraus

$$\Sigma Px = Rx_1; \quad \Sigma Py = Ry_1; \quad \Sigma Pz = Rz_1.$$

oder

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}; \quad y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}; \quad z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Wir erhalten demnach die Lage des Mittelpunktes durch seine Abstände  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  von den Achsen, indem wir die Summen der Produkte der einzelnen Kräfte in die Abstände ihrer Angriffspunkte von den festen Richtungen durch die Summe der Kräfte dividieren.

Das System reduziert sich auf das Kräftepaar, wenn  $\Sigma P = 0$ , aber eine der Summen  $\Sigma Px$ ,  $\Sigma Py$ ,  $\Sigma Pz$  oder alle drei von Null verschieden sind.

Es genüge an diesen Entwicklungen, um zu zeigen, wie wir aus den experimentell abgeleiteten Gesetzen über die drehende Bewegung in Verbindung mit den allgemeinen Sätzen über die Wirkung von Kräften auf mathematischem Wege zu weiteren Gesetzen gelangen können; ein weiteres Verfolgen dieses Weges würde uns zu weit in die analytische Mechanik führen.

## § 18.

**Schwerpunkt.** Wenden wir uns jetzt dazu, die Bedingungen des Gleichgewichtes eines beliebigen festen Körpers, auf den nur die Schwere wirkt, abzuleiten. Alle Körper, welche der Schwere unterworfen sind, unterliegen der Wirkung paralleler vertikal abwärts gerichteter Kräfte, da die Schwere auf alle Teile des Körpers gleichmäßig wirkt. Die Schwere wirkt überdies an einem Orte in der gleichen Richtung, nur an sehr weit voneinander entfernten Orten sind die Richtungen der Schwerkraft merklich verschieden. Für die der Schwere unterworfenen Körper gibt es demnach einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte, an dem wir uns alle Kräfte vereinigt denken können, und in bezug auf welchen die Summe der Drehungsmomente gleich Null ist. Man nennt diesen Punkt, in welchem man sich demnach das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken kann, den Schwerpunkt des Körpers. Ist deshalb der Schwerpunkt unterstützt, der greift an ihn eine vertikal nach oben gerichtete dem Gewichte des Körpers gleiche Kraft an, so kann der Körper gar keine, weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen, derselbe ist im Gleichgewicht.

Der Schwerpunkt ist in einem gegebenen Körper ein ganz fester Punkt, der seine Lage nicht ändert, wenn wir auch den Körper drehen. Denn eine solche Drehung hat denselben Erfolg, als wäre bei ungeänderter Körperlage die Richtung sämtlicher Kräfte um einen gleichen Winkel gedreht. Wie aber in § 16 nachgewiesen ist, ändert eine solche Drehung den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nicht.

Den Schwerpunkt von Linien, Flächen und geometrisch bestimmbar Körpern kann man mit Hilfe der in den beiden letzten Paragraphen abgeleiteten Sätze und der vorhin gemachten Bemerkung, daß ein an den Schwerpunkt vertikal nach oben angebrachter Zug, der gleich dem Gewichte des Körpers ist, den Körper im Gleichgewichte halte, berechnen.

Wir können nämlich jeden schweren Körper als ein System von Punkten betrachten, auf welche alle vertikal abwärts gerichtete Kräfte wirken, indem wir den ganzen Körper als aus einzelnen schweren Elementen zusammengesetzt ansehen. Die Summe der Gewichte dieser Elemente ist das Gewicht des Körpers. Denken wir uns nun durch den Körper ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt und für alle einzelnen schweren Punkte die Abstände  $x, y, z$  gegeben, so sind es einfach die am Schlusse des vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen, die uns die Lage des Schwerpunktes geben. Nennen wir die Gewichte der einzelnen Körperelemente  $p$ , das Gewicht des ganzen Körpers  $P$ , so sind die Abstände des Schwerpunktes von den drei Achsen

$$x_1 = \frac{\sum px}{P}; \quad y_1 = \frac{\sum py}{P}; \quad z_1 = \frac{\sum pz}{P}.$$

Um demnach die Lage des Schwerpunktes eines solchen Körpers zu erhalten, haben wir das Gewicht jedes Körperelementes mit seinem Abstände von jeder der drei Achsen zu multiplizieren, für jede Achse die Summe dieser Produkte zu bilden und jede dieser Summen durch das Gewicht des ganzen Körpers zu dividieren. Diese drei Quotienten bestimmen die Lage des Schwerpunktes, indem sie uns die Abstände desselben von den drei festen Richtungen geben.

In welcher Weise die Rechnungen in speziellen Fällen durchzuführen sind, können wir hier nicht besprechen, wir verweisen deshalb auf die Lehrbücher der Mechanik.

Man kann indes leicht den Schwerpunkt der Körper, auch solcher, die geometrisch nicht bestimmbar sind, experimentell bestimmen, indem man den Satz von den statischen Momenten anwendet.

Ist nämlich der Schwerpunkt unterstützt, so ist der Körper in Ruhe; ist er es nicht, so nimmt der Körper, wenn seine fortschreitende Bewegung gehemmt ist, eine drehende Bewegung an, bis sein Schwerpunkt sich senkrecht unter dem Unterstützungspunkte befindet. Denn wir sahen vorhin, daß eine Reihe von Kräften nur dann keine drehende Bewegung hervorruft, wenn die Summe ihrer statischen Momente gleich Null ist. Da wir nun in dem Schwerpunkte das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken können, so folgt, daß nur dann das statische Moment des Körpers gleich Null ist, wenn der horizontale Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse oder dem Unterstützungspunkte gleich Null ist, d. h. wenn beide einer vertikalen geraden Linie liegen.

Wir nehmen einen Körper, dessen Schwerpunkt wir suchen, an einem Faden an und hängen ihn frei herab, so ist er darnach nur in einer Lage im Gleichgewicht, und wir können sicher sein, daß der Schwerpunkt auf der Verlängerung des Fadens liegt. Befestigen wir den Körper mit einem andern Punkte am Faden, so wird der Körper in der Gleichgewichtslage auch dann auf der Verlängerung liegen. Diese beiden so bestimmten Richtungen schneiden sich in einem Punkte, und dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Körpers. Es ist sich davon leicht, indem dieser Punkt stets in der Verlängerung des Fadens liegt, wenn der Körper im Gleichgewichte ist, an demselben Orte des Körpers wir denselben auch befestigen.

Auf diese Weise kann man leicht finden, daß in einer homogenen Kugel der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammenfällt, daß er bei einem Zylinder oder senkrechten Prisma auf der Achse in deren Mitte liegt, daß er bei einem Dreiecke mit dem Punkte zusammenfällt, in dem sich die drei von den Winkelspitzen zu den Halbirungslinien der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Linien schneiden, daß er bei einer gleichseitigen Pyramide in  $\frac{1}{4}$  der Höhe derselben liegt usf.

Der Schwerpunkt eines Körpers kann auf drei verschiedene Weisen in der Drehungsachse oder der Drehungsachse in einer Vertikalen liegen. Diesen entsprechen drei Arten von Gleichgewicht des Körpers; 1. Der Schwerpunkt liegt in der Drehungsachse. Wir mögen dem Körper eine Lage geben, welche wir wollen, der Schwerpunkt ist dann in der Drehungsachse in derselben Vertikalebene, er ist daher in demselben Gleichgewicht. Man nennt diesen Gleichgewichtszustand den Zustand des indifferenten Gleichgewichtes.

2. Der Schwerpunkt liegt senkrecht unter der Drehungsachse. Dreht man den Körper um seine Achse, so kehrt er, da das in seinem Schwerpunkt vereinigte Gewicht ihn nach unten treibt, in seine frühere Lage zurück, oder nach einigen Schwankungen darin zu verharren. Man nennt diesen Gleichgewichtszustand den des stabilen Gleichgewichtes.

3. Der Schwerpunkt liegt senkrecht über der Drehungsachse. Der Körper ist dann im labilen Gleichgewicht. Ist er aus seiner Lage gebracht, so muß eine Drehung eintreten, da das Drehungsmoment, das bezug auf die Drehungsachse nicht mehr gleich Null ist, dem Körper dann aber eine Drehung, welche den Schwerpunkt noch weiter aus seiner frühern Lage entfernt, sie dreht ihn, bis das Hindernis die Bewegung hemmt, bis der Körper sich in den Zustand des stabilen Gleichgewichtes befindet.

Es geht hervor, daß ein Körper nur dann feststeht, d. h. jeder Lage seiner Lage einen großen Widerstand entgegensetzt und nach einer Störung wieder in seine frühere Lage zurückkehrt, wenn eine Erhebung des Schwerpunktes bewirkt. Aufgestellte Körper, deren Schwerpunkt stets über der Stütze liegt, stehen daher nur auf demselben Orte fest und zwar um so fester, je breiter die Ebene ist, auf der

Wir nehmen z. B. einen Körper  $ABCD$ , dessen Schwerpunkt in  $M$  liegt. Wenn wir denselben nur dadurch umwerfen, daß wir ihn um einen Punkt oder  $A$  als Drehungsachse drehen. Dabei muß der Schwer-

punkt den Kreisbogen  $MN$  beschreiben mit dem Radius  $MB$ , und  $MB$  größer ist als  $MO$ , so muß der Schwerpunkt des Körpers gehen werden. Es läßt sich auch leicht berechnen, welche Kraft aufgewendet werden muß, um den Körper

$B$  oder  $A$  zu drehen und so umzuwerfen. Das Drehungsmoment des Körpers in bezug auf eine durch  $B$  gehende Drehungsachse ist nach dem vorigen

$$M \cdot OB,$$

wenn wir mit  $M$  das Gewicht des Körpers bezeichnen, das wir Schwerpunkt vereinigt denken können. Dieses Moment strebt dem Körper eine Drehung in dem Sinne

zu erteilen, daß  $M$  sich nach unten bewegt, eine Drehung, welche durch den Widerstand des Bodens, auf welchem der Körper steht, verhindert wird.

Um dem Körper eine entgegengesetzte Drehung um  $B$  zu erteilen müssen wir also auf den Körper einen Druck wirken lassen, welcher entgegengesetzter Richtung dasselbe Moment hat.

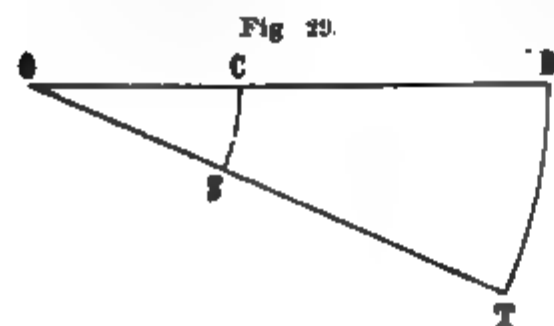
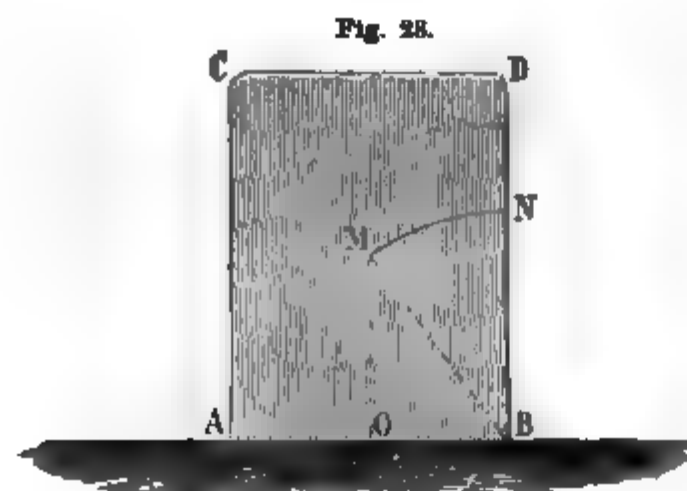
Je größer also  $M \cdot OB$  ist, um so größer ist die Stabilität des Körpers. Man nimmt daher auch dieses Moment als Maß der Stabilität des Körpers, so daß diese Stabilität durch das Produkt aus dem Gewichte des Körpers und dem senkrechten Abstand einer durch den Schwerpunkt gehenden Vertikalebene von der Umdrehungskante bestimmt wird.

## § 19.

**Trägheitsmomente.** Wir haben bisher bei der drehenden Bewegung nur die Kräfte betrachtet, welche die Bewegung hervorbringen, und untersucht, wie die Kräfte an verschiedenen Punkten sich ersetzen können, um die gleiche drehende Bewegung zu erzeugen, indem wir bestimmen, welche Kräfte in verschiedenen Abständen von der Drehungsachse angebracht werden müssen, um sich gegenseitig das Gleichgewicht zu halten. Dadurch ist die Abhängigkeit der drehenden Bewegung von den Kräften vollständig gegeben, wir können sie in dem Satze zusammenfassen: Kräfte gleiche drehende Bewegungen, also gleiche Winkelgeschwindigkeiten hervorbringen, wenn ihre statischen Momente denselben Wert haben.

In bezug auf die drehende Bewegung haben wir nun noch die Frage zu beantworten, in welcher Weise dieselbe abhängig ist von der Masse des durch die Kräfte in Bewegung zu setzenden Systems. Denken wir uns deshalb wieder einen gewichtlosen Hebel

(Fig. 29), an dessen Ende bei  $B$  eine Kraft  $F$  angreife, von der Einfachheit wegen voraussetzen wollen, daß sie in jeder Lage des





constant und senkrecht zum Hebelarm sei. Im Punkte  $B$  befinde sich eine Masse  $m$ , welche durch die Kraft  $F$  in Bewegung gesetzt wird. Der Weg  $BT = s$ , den die Masse in irgend einer Zeit zurücklegt, ist dann, da die Kraft als immer von gleicher Größe vorausgesetzt haben,

$$BT = s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

Nennen wir die Länge des Hebels  $l$  und den Bogen, dem der Weg  $s$  entspricht,  $\varphi$ , so können wir auch schreiben

$$s = l\varphi = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2; \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{F}{lm} t^2.$$

Man werde die Masse  $m$  bei  $B$  fortgenommen, und es soll dann bei  $C$  im Abstände  $r$  von  $O$  eine Masse  $m'$  angebracht werden, so daß auch jetzt in derselben Zeit  $t$  durch die Wirkung der bei  $B$  angreifenden Kraft  $F$  in dem System derselbe Bogen  $\varphi$  beschrieben wird.

Um die Größe dieser Masse zu bestimmen, haben wir zunächst uns daran zu erinnern, daß die bei  $B$  wirkende Kraft  $F$  in dem Punkte  $C$  den Druck  $F'$  ausübt, der gegeben ist durch die Gleichung

$$Fl = F'r$$

$$F' = F \frac{l}{r}.$$

Der Weg, den die Masse  $m'$  in der Zeit  $t$  durch die Wirkung dieser Kraft zurücklegt, ist

$$s' = \frac{1}{2} \frac{F' l}{m'} t^2.$$

Dieser Weg soll nun demselben Bogen  $\varphi$  entsprechen, es ist also  $s' = r\varphi$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{Fl}{r^2 m'} t^2.$$

Da die beiden Gleichungen für  $\varphi$  ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{F}{lm} = \frac{1}{2} \frac{Fl}{r^2 m'}$$

oder

$$m \cdot l^2 = m' \cdot r^2.$$

Die in dem Punkte  $C$  anzubringende Masse  $m'$  bekommt also durch die bei  $B$  angreifende Kraft  $F$  dieselbe Winkelbewegung wie die in  $B$  angebrachte Masse  $m$ , wenn das Produkt aus der Masse  $m'$  und dem Quadrate ihres Abstandes von der Drehungsachse gleich ist der Masse  $m$ , multipliziert mit dem Quadrate ihres Abstandes; oder zwei Massen erhalten durch eine an demselben Punkte angreifende Kraft dieselbe drehende Bewegung, wenn sie ihrer Größe nach umgekehrt sich verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsachse.

Das Produkt  $mr^2$  einer Masse  $m$  in das Quadrat ihres Abstandes  $r$  von der Drehungsachse bezeichnet man als das Trägheitsmoment der Masse; mit dieser Bezeichnung können wir somit den eben abgeleiteten Satz auch so aussprechen, daß durch eine gegebene Kraft verschiedene Massen

gleiche drehende Bewegung erhalten, wenn sie gleiche Trägheitsmomente besitzen. Die Dimensionen des Trägheitsmomentes sind nach seiner Definition  $K = \sum [\mu \lambda^2]$ .

Das Trägheitsmoment einer gegebenen Masse bedeutet gleichzeitig jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsachse angebracht werden muß, um die im Abstände  $r$  befindliche Masse  $m$  zu ersetzen, so daß die Winkelgeschwindigkeit dieselbe ist.

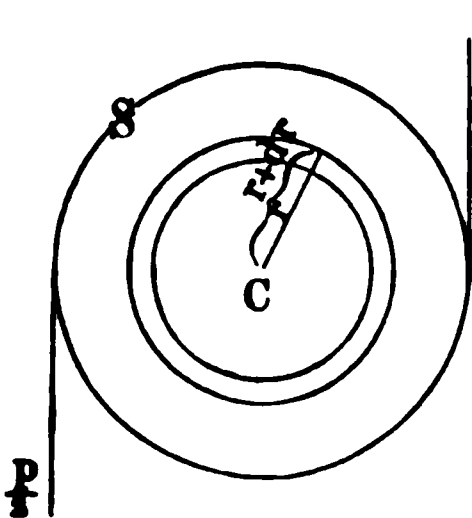
Dieser Satz von den Trägheitsmomenten setzt uns in den Stand, die drehende Bewegung eines Systems, in welchem Massen in verschiedenen Punkten vorhanden sind und von verschiedenen Kräften angegriffen werden, oder auch diejenige eines ausgedehnten Körpers wenigstens dann vollständig zu bestimmen, wenn wir die Verteilung der Massen und Kräfte kennen. Indem wir nämlich die Trägheitsmomente der vorhandenen Massen bestimmen, erhalten wir jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsachse die sämtlichen vorhandenen Massen so ersetzt, daß die drehende Bewegung, welche diese in der Abstandseinheit vorhandene Masse durch die wirksamen Kräfte erhält, genau jener gleich ist, welche die verteilten Massen erhalten. Durch Bestimmung der statischen Momente erhalten wir die in der Abstandseinheit von der Drehungsachse angreifende Kraft, welche die sämtlichen an verschiedenen Punkten angreifenden Kräfte ersetzt. Da diese Kraft in demselben Punkte angreift, in welchem die durch das Trägheitsmoment bestimmte Masse sich befindet, so erhalten wir die Beschleunigung dieser Masse, indem wir den Quotienten aus der Kraft und der Masse bilden, und aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit und den in einer gegebenen Zeit zurückgelegten Weg ganz nach den im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätzen.

Bei einem ausgedehnten um eine Achse drehbaren Körper haben wir, um das Trägheitsmoment desselben zu bilden, uns den Körper in einzelne Elemente zerlegt zu denken; die Summe der Trägheitsmomente aller einzelnen Elemente ist dann das Trägheitsmoment des ganzen Körpers. Hat der Körper eine geometrisch bestimmte Gestalt, und ist die Masse in ihm gleichförmig verteilt, so daß also innerhalb des Körpers gleiche Volumina überall gleiche Masse enthalten, so läßt sich das Trägheitsmoment berechnen und damit die drehende Bewegung des Körpers vollständig bestimmen.

Um diese Rechnung zu übersehen, wollen wir als Beispiel die drehende

Bewegung einer Kreisscheibe um eine durch ihre Achse gehende Drehungsachse untersuchen. Die

Fig. 30.



Kreisscheibe  $S$  (Fig. 30) habe den Durchmesser  $2a$ , die Dicke  $b$  und an ihrem Umfange greife eine konstante Kraft  $F$  an; etwa so, daß wir die Drehungsachse der Scheibe vertikal gestellt, dann um die Scheibe zwei Schnüre gelegt denken, welche an einem Punkte des Umfangs befestigt und über zwei Rollen geführt sind. An den über die Rollen herabhängenden Enden der Schnüre seien

jeder das Gewicht  $\frac{p}{2}$  befestigt, so daß die wi

same Kraft  $F = gp$  ist. Das Gewicht oder die Masse eines Kubikzentrums der Scheibe sei gleich  $q$ .

Um das Trägheitsmoment der Scheibe zu erhalten, denken wir uns derselben einen Ring ausgeschnitten, dessen innerer Radius gleich  $r$  und dessen äußerer den um das Differential  $dr$  größeren Wert  $r + dr$  hat. Da  $dr$  einen verschwindend kleinen Wert hat, ist der äußere Umfang des Ringes nur unendlich wenig von dem innern verschieden, wir können deshalb ohne einen merklichen Fehler das Volumen dieses Ringes gleich  $2\pi r dr b$  setzen. Die Masse desselben wird dann  $2\pi r dr b q$ . Eben deshalb, weil wir den Ring als unendlich dünn vorausgesetzt haben, können wir den Abstand aller seiner Punkte von der mit der Achse des Ringes zusammenfallenden Drehungsachse als gleich, und zwar als gleich  $r$  annehmen. Dann wird das Trägheitsmoment dieses Ringes gleich

$$r^2 \cdot 2\pi r dr b q = 2\pi b q \cdot r^3 dr.$$

Wir bekommen somit das Trägheitsmoment dieses Ringes in Form eines Differentialausdrucks. Das Trägheitsmoment der ganzen Scheibe erhalten wir, indem wir die Trägheitsmomente aller der unendlich vielen, unendlich kleinen Ringe summieren, aus welchen wir die Scheibe zusammengesetzt denken können. Die Trägheitsmomente dieser Ringe erhalten wir, wenn wir in obigem Ausdrucke für  $r$  nach und nach alle, jedesmal um  $dr$  zunehmende Werte von 0 bis  $a$  einsetzen. Das Trägheitsmoment der ganzen Scheibe ist somit das von 0 bis  $a$  genommene bestimmte Integral

$$K = \int_0^a 2\pi b q \cdot r^3 dr.$$

Dem Begriffe des Integrals als Summe entsprechend können wir den konstanten Faktor vor das Summenzeichen setzen und erhalten

$$K = 2\pi b q \int_0^a r^3 dr.$$

Nach E 1 ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen das Differential  $\frac{1}{4} r^4$ , somit nach E VIII

$$K = 2\pi b q \left( \frac{1}{4} a^4 - 0 \right) = \frac{1}{2} \pi b q \cdot a^4$$

Nun ist  $\pi a^2 b$  das Volumen unserer Kreisscheibe, somit

$$\pi a^2 b q = m$$

die Masse der Kreisscheibe; wir können somit das Trägheitsmoment derselben schreiben

$$K = \frac{1}{2} m a^2,$$

das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe, oder allgemein eines massiven Zylinders, da die Kreisscheibe ja nur ein Zylinder von geringer Höhe ist. Da der Abstand aller Punkte des Zylinders von der Drehungsachse gleich der halben Masse des Zylinders multipliziert mit dem Quadrate des Radius. Damit erhalten wir die Beschleunigung bei der drehenden Bewegung

$$G = \frac{F a}{\frac{1}{2} m a^2} = 2 \frac{F}{m a} = 2 \frac{g p}{m a}.$$

ein Ausdruck, der gleichzeitig, wenn wir  $G$  als Bruchteil von  $2\pi$  angeben, uns die Winkelbeschleunigung gibt, da die Beschleunigung sich auf einen Punkt bezieht, der sich im Abstände eins von der Drehungsachse befindet.

Das Trägheitsmoment einer Kugel in bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Achse können wir leicht aus dem soeben abgeleiteten Träg-

heitsmoment der Scheibe erhalten. Sei, um die Berechnung durchzuführen, der Kreis  $R$  ein Durchschnitt durch die Kugel, deren Radius gleich  $a$  sei, und  $AA$  sei die Drehungsachse. Sei auch jetzt wieder  $q$  das Gewicht der Volumeinheit der Kugel. Sei  $BB$  eine Scheibe, welche durch zwei unendlich nahe zur Drehungsachse senkrechte Schnitte begrenzt sei, deren erster im Abstände  $x$ , deren zweiter im Abstände  $x + dx$  vom Mittelpunkte  $C$  der Kugel sich befinde. Diese Scheibe können wir als einen Zylinder ansehen, dessen Höhe gleich  $dx$  und dessen Radius  $r$  gegeben ist durch die Gleichung

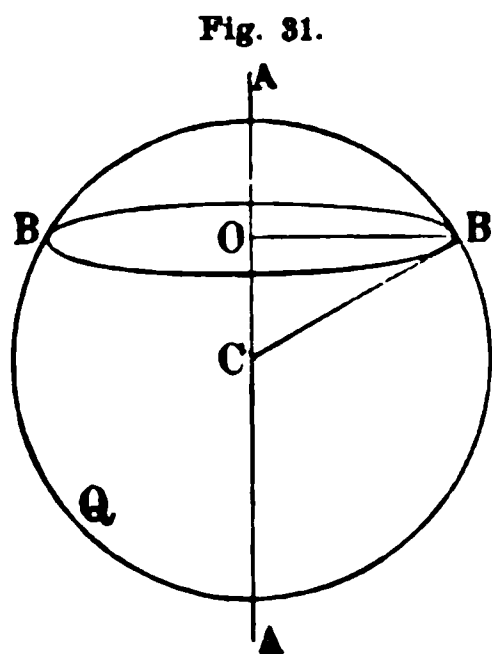
$$r^2 = a^2 - x^2.$$


Fig. 31.

Da die Drehungsachse der Kugel durch die Achse dieser Scheibe geht, so ist das Trägheitsmoment derselben, wie eben abgeleitet wurde,

$$\frac{1}{2} \pi q r^4 dx = \frac{1}{2} \pi q (a^2 - x^2)^2 dx \dots (1).$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Kugel ist die Summe der Trägheitsmomente aller Scheiben, in welche wir auf diese Weise die Kugel zerlegen können. Wir erhalten alle diese einzelnen Trägheitsmomente, indem wir in dem soeben entwickelten Ausdruck nach und nach für  $x$  alle die Abstände einsetzen, welche in der Kugel vorkommen. Die obere Hälfte der Kugel bekommen wir, indem wir für  $x$  nach und nach alle Werte einsetzen, von 0 bis  $a$ , die untere, deren Scheiben an der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes sich befinden, wenn wir für  $x$  alle Werte zwischen 0 und  $-a$  einsetzen; denn um die in bezug auf den Mittelpunkt, von dem aus wir die Abstände  $x$  rechnen, entgegengesetzte Lage der Scheiben zu beachten, müssen wir den nach unten gerechneten Abständen  $x$  das negative Vorzeichen geben. Wir erhalten somit das Trägheitsmoment der ganzen Kugel, indem wir von  $-a$  angefangen nach und nach für  $x$  alle Werte von  $-a$  bis  $+a$  setzen und alle die so sich ergebenden Werte des Ausdruckes (1) summieren, oder

$$K = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi q (a^2 - x^2)^2 dx = \frac{1}{2} \pi q \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx.$$

Um dieses bestimmte Integral nehmen zu können, führen wir die unter dem Integralzeichen angedeutete Quadrierung aus; das Integral zerlegt sich dann in drei, da sich aus dem Begriffe des Integrals als Summe ergibt, daß das Integral einer Summe gleich ist der Summe der Integrale der einzelnen Glieder

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx = \int_{-a}^{+a} a^4 dx - \int_{-a}^{+a} 2a^2 x^2 dx + \int_{-a}^{+a} x^4 dx.$$

Nach E 1 ist der Ausdruck unter dem ersten Integralzeichen das Differential von  $a^4 x$ , unter dem zweiten von  $\frac{2}{3} a^3 x^2$ , unter dem dritten von  $\frac{1}{5} x^5$ . Damit wird nach E VIII

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx = (a^5 + a^5) - \frac{2}{3} (a^5 + a^5) + \frac{1}{5} (a^5 + a^5) = \frac{16}{15} a^5$$

omit 
$$K = \frac{1}{2} \pi q \cdot \frac{16}{15} a^5 = \frac{8}{15} (\frac{1}{2} \pi a^3 q) a^2.$$

Der in der Klammer eingeschlossene Teil des Ausdruckes ist die Masse der Kugel; bezeichnen wir dieselben mit  $m$ , so wird

$$K = \frac{8}{15} m \cdot a^2.$$

Die beiden Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie man durch Rechnung das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers von geometrisch bestimmter Gestalt erhalten kann. Für alle Formen, welche uns für das Trägheitsmoment eines Elementes einen Differentialausdruck liefern, dessen Integral man auswerten kann, läßt sich das Trägheitsmoment berechnen.

Außer durch Rechnung läßt sich das Trägheitsmoment einer Masse auch experimentell bestimmen. Dafür geeignete Methoden werden wir in § 34 kennen lernen.

## § 20.

**Allgemeiner Satz über die Trägheitsmomente.** Das Trägheitsmoment einer Masse hat nach der Definition dieses Begriffes keineswegs einen für die gegebene Masse immer gleichen Wert, sondern dieser Wert hängt wesentlich ab von der Lage der Drehungsachse, um welche die lebende Bewegung stattfindet. Auf spezielle Fälle der Art einzugehen, würde zu weit führen; wir wollen in der Beziehung nur einen allgemeinen Satz beweisen, der uns immer gestattet, das Trägheitsmoment einer Masse in bezug auf eine beliebige Achse zu bestimmen, wenn man es in bezug auf eine der beliebigen Achse parallele durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Achse kennt. Ist nämlich  $M$  die Masse eines Körpers und  $Mk^2$  das Trägheitsmoment desselben in bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Achse, so ist in bezug auf eine mit der letztern parallele und im Abstände  $z$  von derselben befindliche Drehungsachse das Trägheitsmoment gleich  $M(k^2 + z^2)$ .

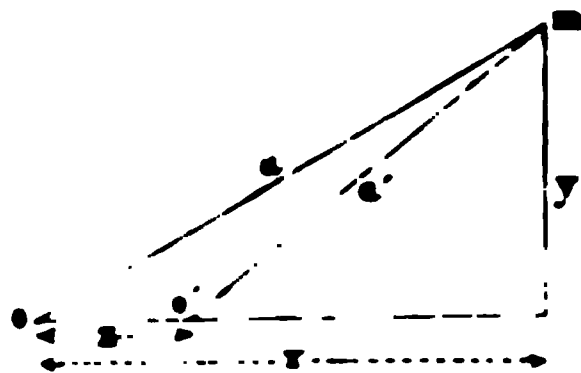
Um diesen Satz zu beweisen, sei der senkrechte Abstand  $a$  des Punktes  $m$  (Fig. 32) von der durch den Schwerpunkt  $o$  des Körpers senkrecht zur Ebene der Zeichnung gehenden Achse durch zwei senkrechte Koordinaten  $x$  und  $y$  gegeben, so daß

$$a^2 = x^2 + y^2.$$

Das Trägheitsmoment des im Punkte  $m$  befindlichen Massenelementes ist dann

$$ma^2 = m(x^2 + y^2).$$

Fig 32



und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers ist die Summe der so alle Massenelemente gebildeten Momente

$$\Sigma m a^2 = \Sigma m (x^2 + y^2) = M k^2.$$

Liege die zweite Achse in der Richtung der senkrechten Abstände von der ersten Achse um  $z$  entfernt, sie gehe durch  $o'$ , so ist das Trägheitsmoment des in  $m$  befindlichen Massenelementes in bezug auf die neue Achse

$$m a'^2 = m \{ (x - z)^2 + y^2 \},$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers die Summe der Trägheitsmomente aller Massenelemente

$$\Sigma m a'^2 = \Sigma m \{ (x - z)^2 + y^2 \}.$$

Letztere Summe ist aber gleich

$$\Sigma m \{ (x - z)^2 + y^2 \} = \Sigma m x^2 + \Sigma m z^2 + \Sigma m y^2 - 2z \Sigma m x$$

oder auch

$$\Sigma m \{ (x - z)^2 + y^2 \} = \Sigma m (x^2 + y^2) + \Sigma m z^2 - 2z \Sigma m x.$$

Das erste Glied des Ausdruckes auf der rechten Seite ist gleich  $M k^2$ , das zweite, da  $z^2$  ein für alle Glieder der Summe konstanter Faktor und  $\Sigma m = M$  gleich der Masse des Körpers ist, gleich  $M \cdot z^2$ . Wir bekommen demnach für das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in bezug auf neue Achse

$$M k^2 + M z^2 - 2z \Sigma m x = M (k^2 + z^2) - 2z \Sigma m x.$$

Das Glied  $- 2z \Sigma m x$  ist nun aber gleich Null, weil die Achse, durch die die Abstände  $x$  gerechnet sind, durch den Schwerpunkt geht, und nach unserer Definition des Schwerpunktes als des Mittelpunktes der durch die Schwere der einzelnen Körperelemente gegebenen parallelen Kräfte die Summe der Momente in bezug auf denselben Null ist.

Es bleibt somit für das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die neue Achse, welche mit der durch den Schwerpunkt gehenden Achse um  $z$  von ihr entfernt ist,

$$M (k^2 + z^2).$$

Wir werden von diesem Satze demnächst Gebrauch machen.

Mit Hilfe der Sätze über das Trägheitsmoment ist, wie schon bemerkt wurde, die Behandlung der drehenden Bewegung auf jene fortschreitenden zurückgeführt, indem wir die Masse des zu bewegenden Körpers immer in dem Angriffspunkt der resultierenden Kraft konzentrieren können.

## § 21.

**Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft.** Bei der Untersuchung der drehenden Bewegung haben wir bisher die Voraussetzung gemacht, daß sich ein fester Körper um eine fest mit ihm verbundene Drehachse drehe. Es ist das jedoch keine notwendige Bedingung, daß eine drehende Bewegung entstehe, notwendig ist nur, daß auf einen in Bewegung

den Körper eine Kraft einwirkt, welche die fortschreitende Bewegung in eine Drehbewegung verwandelt. Bei der Drehbewegung wird in jedem Augenblicke die Richtung der Bewegung geändert, indem die augenblickliche Bewegungsrichtung stets mit der Tangente zusammenfällt, die an den Punkt der Bahn gelegt wird, an welchem sich der Körper in dem betreffenden Augenblicke befindet. Es folgt das aus dem bekannten geometrischen Satze, daß für ein unendlich kleines Stück der Kreis, ja jede krumme Linie, mit der an dieser Stelle an den Kreis bzw. die krumme Linie gelegten Tangente zusammenfällt. Vermöge der Trägheit hat der Körper das Bestreben, in der einmal angenommenen Bewegungsrichtung zu verharren, also nach der Richtung der Tangente weiter zu gehen. Soll der Körper seine Bewegungsrichtung ändern und sich in der kreisförmigen Bahn bewegen, so muß auf ihn eine Kraft einwirken, welche ihn dem Centrum der Bahn in derselben Zeit soviel nähert, als die Bahn selbst von der Tangente sich entfernt. Diese Kraft, welche die notwendige und ausreichende Bedingung der drehenden Bewegung ist, bezeichnet man als Zentripetalkraft.

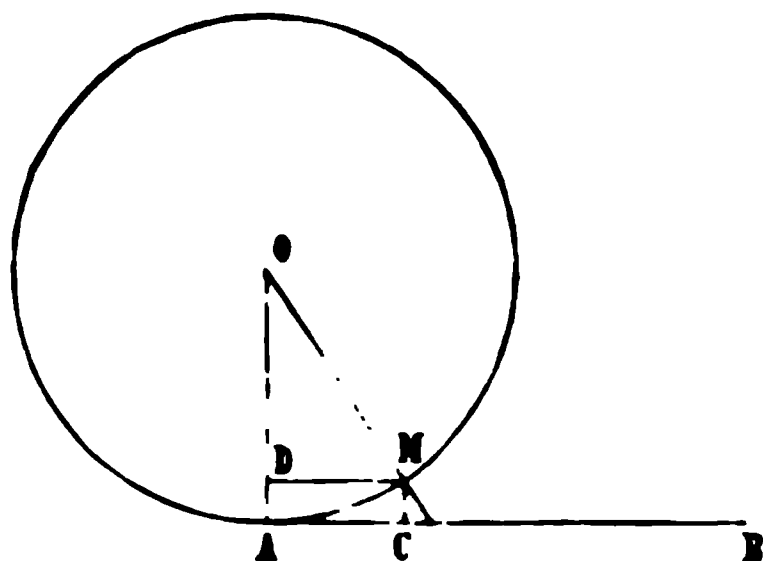
Wie groß diese Zentripetalkraft in jedem Falle sein muß, ergibt sich auf folgender Weise. Es bewege sich ein Körper  $A$  mit der Masse  $m$  in einem Kreise vom Radius  $R$  um den Mittelpunkt  $O$  (Fig. 33), mit welchem er etwa durch einen Faden verbunden ist, er habe beim Beginne der Bewegung eine konstante nach  $AB$  gerichtete Geschwindigkeit erhalten. Nach einer sehr kleinen Zeit  $t$  sei er in  $M$  angekommen, er hat den Bogen  $AM$  zurückgelegt, den wir so klein voraussetzen, daß wir ihn als mit der Sehne  $AM$  zusammenfallend ansehen dürfen. Der ursprünglich dem Körper erteilte Bewegungsimpuls hätte ihn nach  $C$  geführt, der Zusammenhang des Fadens hat ihn in derselben Zeit durch die Strecke  $CM$  gleich  $AD$  gezogen; dieser Zusammenhang des Fadens ist also in diesem Falle die Kraft, welche ihn in der angegebenen Zeit von  $A$  nach  $D$  gezogen hätte. Da wir  $AM$  als verschwindend klein voraussetzen, können wir für das hier in Betracht kommende Zeitelement die Zentripetalkraft als konstant in der Richtung  $AO$  wirkend denken, somit die Größe derselben aus den für die Bewegung infolge einer konstanten Kraft gültigen Gleichungen ableiten. Ist die Zentripetalkraft gleich  $F$ , so erhalten wir für den in der Zeit  $t$  zurückgelegten Weg  $AD$

$$AD = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \cdot t^2.$$

Nach einem bekannten Satze aus der Lehre vom Kreise besteht zwischen der Strecke  $AM$ , dieselbe als Sehne betrachtet, und der Länge  $AD$  die Beziehung

$$AD \cdot 2R = AM^2.$$

Fig. 33.





Andererseits ist  $AM$  die von dem Körper in der Zeit  $t$  mit der Geschwindigkeit  $v$  zurückgelegte Strecke, somit

$$AM = v \cdot t$$

und

$$MA^2 = v^2 t^2 = 2R \cdot AD; \quad AD = \frac{v^2 t^2}{2R}$$

oder auch, indem wir diesen Wert in die erste Gleichung für  $AD$  einsetzen

$$v^2 t^2 = R \frac{F}{m} t^2$$

und daraus

$$F = \frac{mv^2}{R}.$$

Damit also der Körper sich im Kreise bewege, muß ihn an jeder Stelle seiner Bahn eine Kraft nach dem Mittelpunkte ziehen, die proportional ist der Masse des Körpers, dem Quadrate seiner Geschwindigkeit, und die umgekehrt proportional ist dem Radius des Kreises, in welchem der Körper sich bewegt.

Man kann dem Ausdrucke für die Zentripetalkraft eine in manchen Fällen bequemere Form geben, indem man die Zeit  $T$  einführt, in welcher der Körper den Kreis  $2\pi R$  mit der Geschwindigkeit  $v$  durchlaufen würde oder, wenn sich der Körper mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  im Kreise bewegt, wirklich durchläuft. Es ist dann

$$2\pi R = vT,$$

somit, indem wir den hieraus sich ergebenden Wert von  $v$  in die Gleichung für  $F$  einsetzen

$$F = \frac{4\pi^2 Rm}{T^2}.$$

Der Zentripetalkraft an Größe gleich und in der Richtung ihr gerade entgegengesetzt ist die sogenannte Zentrifugalkraft. Daß der rotierende Körper einen genau ebensolchen Zug auf die Drehungsachse ausüben muß bzw. einen der Zentripetalkraft gleichen Druck von der Drehungsachse fort, wie der auf ihn wirkende gegen die Drehungsachse hin gerichtete Zug, das ergibt sich unmittelbar aus dem im § 11 besprochenen Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Wir nehmen diese Zentrifugalkraft auch bei jeder Drehbewegung wahr. Ist der im Kreise bewegte Körper an einem Faden befestigt, so ist es, wie vorhin erwähnt, der Zusammenhang des Fadens, der ihn nach dem Mittelpunkte hinzieht; der Faden ist gespannt, ein Beweis, daß der Körper einen ebenso starken Zug auf den Mittelpunkt ausübt, als derjenige ist, welcher ihn aus der geraden linigen Bewegung ablenkt. Reißt der Faden, so bewegt sich der Körper einfach in der Tangente der Bahn weiter.

Durch einen andern sehr hübschen Versuch kann man die Existenz dieser Zentrifugalkraft und zugleich zeigen, daß sie nichts anderes ist als die Gegenwirkung der Zentripetalkraft, daß mit Aufhören der letztern bis dahin im Kreise bewegte in der Richtung der Bahntangente weitergeht. Man bringt auf die Achse der gleich zu beschreibenden Zentrifugmaschine einen zur Hälfte mit Wasser gefüllten passend hohen Glaszylinder

10<sup>ter</sup> Weite. Sowie man den Zylinder in Rotation versetzt, Wasser an der Zylinderwand empor, deren Festigkeit das Wasser sich im Kreise zu bewegen, eine Erscheinung, die später im einsprochen wird. Ist die Drehung des Zylinders schnell genug, so Wasser bis auf den Rand des Zylinders, sowie es den Rand fließt in der Tangente des Zylinders an dem Punkte, wo der pfen den Rand erreicht, derselbe fort. Da gleichzeitig bzw. in der Folge eine Anzahl von Tropfen den Rand erreicht, sieht man der, so lange die rasche Rotation dauert, mit einer Schar solcher umgeben, in denen das Wasser strahlenförmig von dem Zylinder und in der Wurfkurve niederfällt.

kann die Zentripetalkraft mit der Zentrifugalmaschine sichtbar und messen; eine Einrichtung derselben zeigt Fig. 34. Eine e Achse  $EF$ ,

al auf einem he steht, kann ner Kurbel  $M$ , inrad  $C$  in ein chse befestig- ad  $D$  eingreift, tion versetzt Auf der Achse hteck  $TAB$  dessen eine aus einem len Stabe be- ler beliebig ommen wer-

Man schiebt n Stab eine e Kugel  $S$ ,

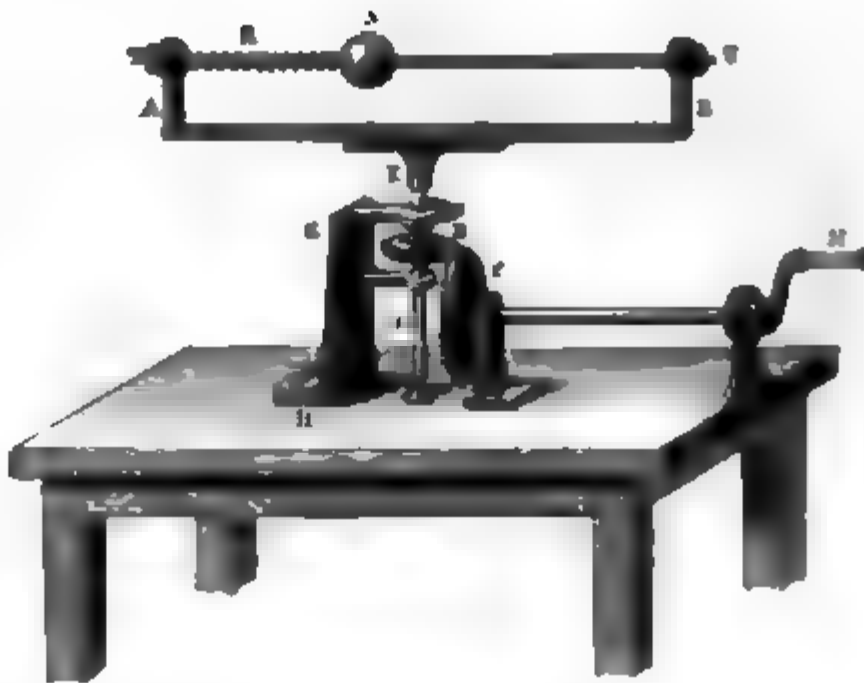
wicht  $P$  sei, und zwischen die Kugel und die Scheibe  $T$  eine welche mit einem Zeiger versehen ist, um den Druck zu be- welchen die Kugel auf sie ausübt.

t man mittels der Kurbel den Apparat in rasche Rotation, so che Kugel anfangs eine Spirale, indem sie sich von der Achse dadurch wird die Feder zusammengedrückt. Ist die Rotations- ngkeit eine konstante, so wird die Feder bis zu einem bestimmten zusammengedrückt. Die Kugel beschreibt dann einen Kreis und der r Feder auf die Kugel ist die diese Kreisbewegung bedingende ikraft, der Druck der Kugel gegen die Feder die der Zentri- zeiche nach außen gerichtete Zentrifugalkraft. Indem man z. verschiedenem Gewichte  $P$  nimmt, und verschiedene Rotations- zketten  $r$  verwendet, kann man die Gleichung

$$F = \frac{Pr^2}{R}$$

ifen

Fig. 34.



## § 22.

**Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines Körpers.** Die in vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze lassen sich sofort auf jede Bewegung in einer krummlinigen Bahn anwenden und führen uns so, wenn wir von einer Drehung der Körper um eine in ihnen liegende Achse absehen, also insoweit die sich bewegenden Körper als Massenpunkte betrachten, zu den allgemeinen Gleichungen der Bewegung. Diese Gleichungen sollen uns für jede Zeit den Ort des Punktes im Raume, also seine Bahn ebenso auch für jeden Augenblick die Geschwindigkeit und zwar im allgemeinen aus den uns gegebenen Kräften abzuleiten gestatten.

Soll ein Körper sich in einer krummlinigen Bahn bewegen, so muß stets eine Kraft auf ihn einwirken, welche ihn aus der augenblicklichen Bewegungsrichtung, welche mit der Tangente der Bahn zusammenfällt, die Bahn hineintreibt. Diese Kraft muß also stets senkrecht zu der Tangente der Bahn an dem Punkte wirken, in welchem sich unser Körper gerade befindet. Die Richtung der Kraft ist also stets in der sogenannten Hauptnormale der Bahn. Für ein verschwindend kleines Stückchen der Bahn mit einem Kreise, dem sogenannten Krümmungskreise zusammenfassen dessen Mittelpunkt, da der zu einem Punkte des Kreises gezogene Radius zu der in diesem Punkte gezogenen Tangente senkrecht ist, in die Hauptnormale der Bahn fällt. Eben weil für ein unendlich kleines Stück der Bahn dieselbe mit dem Krümmungskreise zusammenfällt, ist die Größe der für die krummlinige Bewegung parallel der Normale erforderlichen Kraft gleich der zentripetalen Kraft, welche den Körper aus der Tangente den Krümmungskreis treibt. Ist demnach  $m$  die Masse des Körpers,  $v$  die augenblickliche Geschwindigkeit und  $\rho$  der Krümmungsradius für die betreffende Stelle der Bahn, so ist die für den betreffenden Moment erforderliche Kraft gleich  $\frac{mv^2}{\rho}$ .

Wenn die Wirkung einer solchen Kraft die notwendige und ausreichende Bedingung ist, damit eine Bewegung in irgend einer krummlinigen Bahn stattfindet, so können wir sofort ein System von Gleichungen für irgend eine beliebige Bewegung aufstellen. Es sei  $F$  die Kraft, die den Körper in seiner Bahn beschleunigt. Wir beziehen die Bahn auf ein dreiaxsiges rechtwinkliges Koordinatensystem und nennen die der Richtungen der Koordinatenachsen parallelen Komponenten dieser Kraft  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Es seien die Winkel, die die Richtung der an der betreffenden Stelle erforderlichen Zentripetalkraft mit den Achsen die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , so sind deren Komponenten parallel den Achsen  $\frac{mv^2}{\rho} \cos \alpha$ ,  $\frac{mv^2}{\rho} \cos \beta$ ,  $\frac{mv^2}{\rho} \cos \gamma$ . Die gleichgerichteten Komponenten können wir einfach summieren, die Beschleunigung des Körpers parallel den einzelnen Achsen multipliziert mit der Masse des Körpers demnach gleich der Summe der beiden soeben bestimmten Komponenten. Ist  $ds$  das Element der Bahn, so daß  $\frac{ds}{dt}$  in dem betrachteten Punkte die Geschwindigkeit der Bewegung ist, und sind  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  die Projektionen des Elementes  $ds$  auf die Koordinatenachsen, so ist  $\frac{dx}{dt}$  die Geschwindigkeit

er Bewegung parallel  $x$ ,  $\frac{dy}{dt}$  jene parallel  $y$  und  $\frac{dz}{dt}$  jene parallel  $z$ .  
 Ebenso wie  $\frac{d^2x}{dt^2}$  die Beschleunigung ist, welche das Bewegliche in dem Augenblicke erfährt, sind die zweiten Differentialquotienten von  $x$ ,  $y$  und  $z$  nach  $t$  die den Achsen parallelen Beschleunigungen.

Wir erhalten somit die Gleichungen

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{mv^2}{\rho} \cos \alpha; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \frac{mv^2}{\rho} \cos \beta;$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \frac{mv^2}{\rho} \cos \gamma.$$

Soll aus diesen Gleichungen die Bahn des Beweglichen bestimmt werden, müssen die auf der rechten Seite befindlichen Kräfte, welche die gesamte Bewegung bedingen, gegeben sein. In dieser Form ist das selten der Fall.

Sehr häufig sind dagegen die Bewegungsbedingungen in der Weise gegeben, daß das von bestimmten Kräften angetriebene Bewegliche sich auf einer gegebenen Fläche oder auf einer bestimmten Kurve bewegen soll, auf welcher es sich aber frei bewegen kann.

Soll das Bewegliche sich auf einer Fläche bewegen, so ist die notwendige und ausreichende Bedingung, daß das Bewegliche einen Druck erhält, der in jedem Augenblicke senkrecht zur Fläche, also parallel zur Normalen an jedem Punkte der Fläche steht, welche auf der Bahn des Punktes liegt.

Bezeichnen wir mit  $N$  diesen Druck, der mit der Zeit sich ändern kann, und mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Winkel, welche seine Richtung mit den Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems bildet, und sind wie vorher  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die den Achsen parallelen Komponenten der Kräfte, so gehen die vorigen Gleichungen über in

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X - N \cos \alpha; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N \cos \beta;$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N \cos \gamma.$$

Die jedem Punkte der Fläche entsprechenden Werte der Kosinus sind durch die Gleichung gegeben, welche die Fläche bestimmen, auf der das Bewegliche bleiben soll. Ist die Gleichung der Fläche in der Form gegeben

$$f(x, y, z) = 0,$$

wird in der analytischen Geometrie bewiesen, daß die Kosinus der Winkel, welche die Normale mit den drei Achsen bilden, gegeben sind durch die Ausdrücke

$$\cos \alpha = \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}; \quad \cos \beta = \frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

worin  $\frac{df}{dx}$  den Differentialquotienten der gegebenen Funktion bedeutet, derselbe gebildet, wie wenn lediglich  $x$  eine veränderliche Größe wäre, dagegen  $y$  und  $z$  konstant wären. Gleiches gilt von den beiden anderen Differentialquotienten nach  $y$  und  $z$ .

Daß diese Ausdrücke z. B. für die Kugel die Kosinus ergeben, sieht man sofort. Für die Kugel ist der zu einem Punkte derselben gezogene Radius  $R$  senkrecht zu der an diesem Punkte gelegten Tangentialebene, die Richtung des Radius ist also die Richtung der Normale. Legt man den Anfang des Koordinatensystems, auf welches wir die Kugel beziehen, in den Mittelpunkt der Kugel, so sind die Projektionen des Radius auf die drei Achsen einfach  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , und es ist

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}; \quad \cos \beta = \frac{y}{r}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}.$$

Die Gleichung der Kugel ist aber in obiger Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

woraus folgt

$$\frac{df}{dx} = 2x; \quad \frac{df}{dy} = 2y; \quad \frac{df}{dz} = 2z.$$

Setzt man diese Werte der Differentialquotienten in obige Ausdrücke für die Kosinus ein, so erhält man unmittelbar die Kosinus der Winkel, welche der Radius mit den drei Achsen bildet.

Schreiben wir

$$\frac{N}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}} = \lambda,$$

so gehen unsere Gleichungen für die Bewegung eines Punktes, der auf einer Fläche bleiben muß, welche durch die Gleichung gegeben ist

$$f(x, y, z) = 0$$

über in die Form

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{df}{dx}; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{df}{dy}; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{df}{dz}.$$

In dieser Form sind die Bewegungsgleichungen zuerst von Lagrange aufgestellt, man nennt sie die Gleichungen von Lagrange in der zweiten Form.

Ist gleichzeitig die Bahn des Beweglichen auf der Fläche beschrieben, so erhalten die Gleichungen folgende Gestalt.

Jede Kurve können wir geometrisch als den Durchschnitt zweier Flächen auffassen; so können wir einen Kreis als den Durchschnitt einer Kugel und einer Ebene, als den Durchschnitt einer zur Achse eines Kreiszylinders senkrechten Ebene und des Zylinders oder auch als den Durchschnitt zweier Kugelflächen usw. ansehen.

Die Bedingung, daß ein Punkt eine bestimmte Bahn zurücklegt, kann sich demnach dahin aussprechen, daß das Bewegliche gleichzeitig auf beiden Flächen sich bewege, deren Durchschnitt die gegebene

Wirkt auf allen Stellen der Bahn die Kraft  $N$  normal zu der einen der beiden Flächen, so bleibt das Bewegliche auf dieser; wirkt eine Kraft  $M$  normal zur zweiten Fläche, so bleibt das Bewegliche auch auf dieser; wirken beide Kräfte gleichzeitig, so muß der Körper auf beiden bleiben, er ist also stets im Durchschnitt derselben, beschreibt somit die Bahn, deren Durchschnitt die beiden Flächen bilden. Sind die Gleichungen der beiden Flächen

$$f(x, y, z) = 0; \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

so werden die Bewegungsgleichungen des Punktes, welcher die durch diese beiden Gleichungen bestimmte Bahn zurücklegt,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{df}{dx} + \mu \frac{d\varphi}{dx}; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{df}{dy} + \mu \frac{d\varphi}{dy};$$

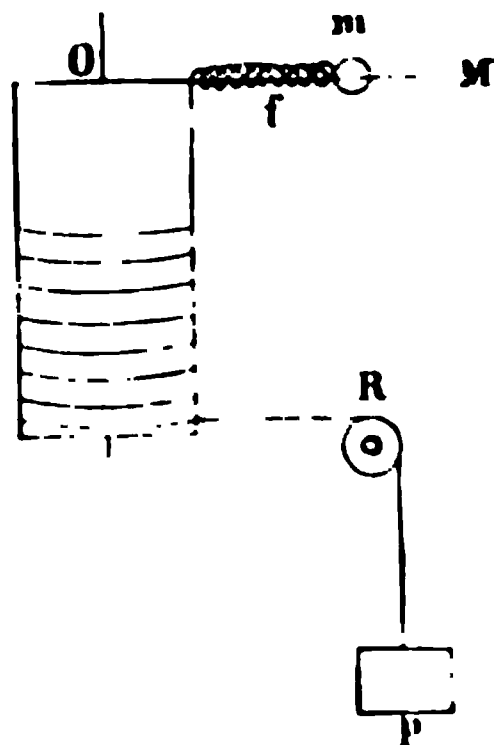
$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{df}{dz} + \mu \frac{d\varphi}{dz},$$

wenn  $\mu$  aus  $M$  und den Differentialquotienten von  $\varphi$  ebenso gebildet ist, wie  $\lambda$  aus  $N$  und den Differentialquotienten von  $f$ .

Um die Verwendung dieser Gleichungen deutlich zu machen, wollen wir eine Aufgabe mit denselben behandeln. Es sei eine mit einem Faden umschlungene Walze vom Radius  $\rho$  um eine vertikale Achse drehbar (Fig. 35). An der Walze sei ein Arm befestigt  $OM$ , auf welchem verschiebbar eine Masse  $m$  aufgesetzt sei; an derselben ist eine Feder angebracht, welche, wenn  $m$  sich von  $O$  entfernt, einen Zug auf  $m$  gegen  $O$  hin ausübe, welcher der Verlängerung der Feder proportional sei. Die um die Walze geschlungene Schnur führt über eine Rolle  $R$ , und an dem Ende der Schnur befindet sich ein Gewicht  $p$ , welches der Schwere folgend fällt. Das fallende Gewicht setzt die Walze in Drehung, und damit rotiert die Masse  $m$  mit der Walze um ihre Achse. Infolge der Zentrifugalkraft entfernt sich  $m$  von der Achse, gleichzeitig wird aber die Feder gespannt, so daß die Masse  $m$  sich nur in dem Maße von der Achse entfernen kann, als die Zentrifugalkraft die Spannung der Feder überwiegt.

Setzen wir alles außer dem Gewichte  $p$  und der Masse  $m$  als massenlos voraus, so sind  $m$  und  $p$  die in diesem System bewegten Massen; die Masse  $m$  bewegt sich nur in der Horizontalebene und erhält in dieser eine gleichförmige Bewegung um die Achse, indem sie mit wachsendem Abstande von der Achse umkreist. Daß die Masse  $m$  immer auf dem Radius  $Om$  bleibt, ist durch die Starrheit des Armes bedingt, die überhaupt die Ursache ist, daß die Masse bei der Bewegung mitgenommen wird. Diese Starrheit des Armes führen wir in die Gleichungen von Lagrange als die Kraft ein, welche die Masse  $m$  in ihrer Bahn erhält. Ist die Masse in Bewegung, so wirkt auf die Masse direkt der Zug der Feder ein, der sie stets in der Richtung  $Om$  zieht. Bei dem Beginne der Bewegung, wenn die Feder noch nicht gespannt ist, befinde sich  $m$  im Abstände  $b$  von  $O$ ; nennen wir

Fig. 35.



den Zug der Feder, wenn sie um die Längeneinheit der Länge zugenommen hat,  $a$ , so ist der Zug derselben, wenn sich  $m$  bis zu dem Abstände  $r$  entfernt hat,  $a(r - b)$ . Diese Kraft führen wir als eine die Masse  $m$  in horizontaler Richtung bewegendende Kraft ein.

Das Gewicht  $p$  fällt infolge der Schwere herab, es bewegt sich somit einfach in der Richtung der dasselbe bewegendenden Kraft, seine Beschleunigung ist aber kleiner als die beim freien Fall, da es die Masse  $m$  mit in Rotation versetzt.

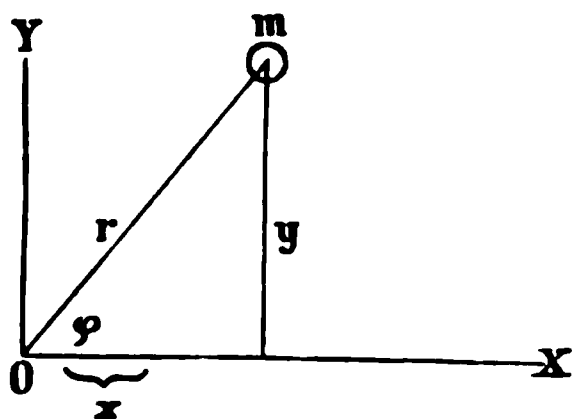
Um die Lagrangeschen Gleichungen bilden zu können, beziehen wir alles auf ein rechtwinkliges dreiachsiges Koordinatensystem. Die Richtung der  $XY$ Ebene sei die horizontale; bei dem Beginne der Bewegung also zur Zeit  $t = 0$  befinde sich  $m$  auf der  $X$ Achse im Abstände  $b$ ; die Richtung der Drehung gehe von der positiven Seite der  $X$ Achse gegen die positive Seite der  $Y$ Achse. Die Richtung der  $Z$ Achse ist vertikal positiv nach unten. Bei dem Beginne der Bewegung sei der Abstand des Gewichtes  $p$  von der  $XY$ Ebene gleich  $c$ .

Ist das Gewicht  $p$  bis zu dem Abstände  $z$  von der  $XY$ Ebene herabgesunken, so ist die Länge des abgewickelten Fadens gleich  $z - c$ ; nennen wir den Radius der Walze  $\rho$ , so ist der Bogen  $\varphi$ , um welchen sich dieselbe gedreht, den also unser Arm mit der Masse  $m$  durchlaufen hat,

$$\varphi = \frac{z - c}{\rho}.$$

Ist  $Om$  (Fig. 36) die Lage des Armes zu dieser Zeit, so daß  $mOx$  der Winkel  $\varphi$  ist, so sieht man sofort, daß

Fig. 36.



$$\frac{y}{x} = \tan \varphi = \tan \frac{z - c}{\rho}$$

ist. Die Bedingungsgleichung für die Bahn des Beweglichen  $m$  ist somit

$$y - x \tan \frac{z - c}{\rho} = 0,$$

wozu noch weiter hinzutritt  $z = 0$ , da die Masse  $m$  immer in der  $XY$ Ebene bleibt. Diese Bedingung tritt in die Bewegungsgleichungen nicht ein, da der der Masse durch ihr Gewicht erteilte Antrieb wird durch die Starrheit des Armes aufgehoben, sie erfährt parallel  $z$  keinen Antrieb.

Da der Abstand  $r$  von  $O$  gleich ist  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , so ist die Kraft, welche die Masse gegen  $O$  hintreibt

$$a(\sqrt{x^2 + y^2} - b).$$

Da die Kraft gegen  $O$  gerichtet ist, wird die  $x$  Komponente

$$X = -a(\sqrt{x^2 + y^2} - b) \cos \varphi = -a(\sqrt{x^2 + y^2} - b) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und

$$Y = -a(\sqrt{x^2 + y^2} - b) \sin \varphi = -a(\sqrt{x^2 + y^2} - b) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$



Die Komponente  $Z$  der bewegenden Kraft ist  $g \cdot p$ , der Antrieb, den das Gewicht nach unten erfährt.

Aus der Bedingungsgleichung

$$f(x, y, z) = y - x \cdot \tan^2 \frac{z - c}{\varrho} = 0$$

folgt, da zur Bildung von  $\frac{df}{dx}$  nur  $x$ , für  $\frac{df}{dy}$  nur  $y$ , für  $\frac{df}{dz}$  nur  $z$  als veränderlich anzusehen ist,

$$\frac{df}{dx} = -\tan^2 \frac{z - c}{\varrho}; \quad \frac{df}{dy} = 1; \quad \frac{df}{dz} = -\frac{x}{\varrho} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{z - c}{\varrho}},$$

wie sich unmittelbar aus den Sätzen der mathematischen Einleitung, der erste Differentialquotient aus E 6 und E IV, ergibt.

Hiermit werden die Gleichungen von Lagrange

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \frac{df}{dx} = -a(\sqrt{x^2 + y^2} - b) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \lambda \tan^2 \frac{z - c}{\varrho}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{df}{dy} = -a(\sqrt{x^2 + y^2} - b) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \lambda$$

$$p \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{df}{dz} = gp - \lambda \frac{x}{\varrho} \frac{1}{\cos^2 \frac{z - c}{\varrho}}.$$

Anstatt durch die drei veränderlichen  $x, y, z$  können wir alles durch zwei veränderlichen  $r$  und  $\varphi$  ausdrücken, denn es ist

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = \varrho \varphi + c.$$

Es ist  $r$  der mit der Zeit wachsende Abstand der Masse  $m$  von  $O$  und  $\varphi$  der mit der Zeit wachsende Drehungswinkel. Die Differentialquotienten von  $x$  und  $y$  und  $z$  nach  $t$ , also die Geschwindigkeiten parallel zu den drei Richtungen, werden nach den Sätzen der Einleitung

$$\frac{dx}{dt} = \cos \varphi \frac{dr}{dt} - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \cos \varphi \frac{dr}{dt} - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin \varphi \frac{dr}{dt} + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = \varrho \frac{d\varphi}{dt}.$$

Aus diesen Geschwindigkeiten erhalten wir die Beschleunigungen, indem wir die Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit, also die ersten Differentialquotienten der Wege nach der Zeit, die zweiten Differentialquotienten nach der Zeit ableiten. Dieselben werden, da auch  $\frac{d\varphi}{dt}$  Funktionen der Zeit sind,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \cos \varphi \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} - \frac{dr}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \frac{dr}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \\ &\quad - r \sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \\ &= \cos \varphi \frac{d^2 r}{dt^2} - 2 \frac{dr}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - r \cos \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \cos \varphi \frac{d^2 r}{dt^2} - 2 \sin \varphi \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - r \cos \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

ebenso wird

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \sin \varphi \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \cos \varphi \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - r \sin \varphi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \varrho \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Führen wir diese Ausdrücke in unsere Gleichungen ein, und setzen der Kürze wegen

$$\frac{dr}{dt} = r' \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = r'' \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi' \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \varphi'',$$

so werden unsere Gleichungen

$$m (\cos \varphi \cdot r'' - 2 \sin \varphi \cdot r' \varphi' - r \cos \varphi \cdot \varphi'^2 - r \sin \varphi \cdot \varphi'') = -a(r-b) \cos \varphi - \lambda \tan \varphi$$

$$m (\sin \varphi \cdot r'' + 2 \cos \varphi \cdot r' \varphi' - r \sin \varphi \cdot \varphi'^2 + r \cos \varphi \cdot \varphi'') = -a(r-b) \sin \varphi + \lambda$$

$$p \varrho \varphi'' = gp - \lambda \frac{r}{\varrho} \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Unsere eigentliche Aufgabe ist,  $r$  und  $\varphi$  in ihrer Abhängigkeit von  $t$  zu bestimmen, denn kennen wir diese, so können wir daraus die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ableiten als die Differentialquotienten von  $r$  und  $\varphi$  nach  $t$ . Aus jenen Gleichungen können wir nun zunächst  $\lambda$  fortschaffen. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $\cos \varphi$ , die zweite mit  $\sin \varphi$  und addieren die beiden dann entstandenen Gleichungen, so ergibt sich

$$m (r'' - r \varphi'^2) = -a(r-b) \dots A.$$

Multiplizieren wir die erste mit  $-r \sin \varphi$ , die zweite mit  $r \cos \varphi$ , die dritte mit  $\varrho$  und addieren die drei so entstandenen Gleichungen, so wird

$$m (2rr' \varphi' + r^2 \varphi'') + p \varrho^2 \varphi'' = gp \varrho \dots B.$$

Diese beiden letzten Gleichungen geben uns gleichzeitig die sogenannte zweite Form der Grundgleichungen von Lagrange, welche eine Beziehung liefern zwischen den lebendigen Kräften der bewegten Massen und den wirkenden Kräften. Ist die lebendige Kraft unseres bewegten Systems gleich  $T$ , so können wir dieselbe, da  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  die Komponenten der Geschwindigkeiten des bewegten Systems parallel den drei Achsen stets schreiben

$$T = \frac{1}{2} m \left\{ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} p \left( \frac{dz}{dt} \right)^2.$$

Das erste Glied der rechten Seite gibt die lebendige Kraft der in der horizontalen Ebene beweglichen Masse  $m$ , das zweite die lebendige Kraft der nur parallel  $z$  beweglichen Masse  $p$ . Ersetzen wir die Differentialquotienten durch ihre Werte in  $r$  und  $\varphi$  ausgedrückt, so wird

$$T = \frac{1}{2} m r'^2 + \frac{1}{2} m r^2 \varphi'^2 + \frac{1}{2} p \varrho^2 \varphi'^2.$$

Die Richtigkeit der Gleichung erkennt man sofort, denn die Masse  $m$  bewegt sich gleichzeitig parallel  $r$  mit der Geschwindigkeit  $r'$  und senkrecht zu  $r$  in der Richtung des Bogens  $\varphi$  mit der Geschwindigkeit  $r\varphi'$ , die Masse  $p$  sinkt abwärts mit der Geschwindigkeit  $p\varphi'$ . Betrachten wir jetzt  $T$  als abhängig von den vier veränderlichen Größen  $r$ ,  $\varphi$  und den Geschwindigkeiten  $r'$  und  $\varphi'$ , so daß insoweit auch die letzteren als unabhängige veränderliche angesehen werden, so können wir die Änderungen von  $T$  bestimmen, wenn jede dieser vier Größen sich ohne die andere ändert. Wenn sich nur  $r$  ändert, so wird

$$dT = mr\varphi'^2 dr; \quad \frac{dT}{dr} = mr\varphi'^2.$$

Ändert sich  $\varphi$  ohne die andern, so ändert sich die lebendige Kraft nicht, denn eine Änderung von  $\varphi$  allein ändert die Geschwindigkeit der Bewegung nicht. Da  $\varphi$  auf der rechten Seite der Gleichung für  $T$  gar nicht vorkommt, folgt auch

$$\frac{dT}{d\varphi} = 0.$$

Ändert sich die Geschwindigkeit  $r'$ , so wird

$$\frac{dT}{dr'} = mr'$$

und schließlich wenn  $\varphi'$  sich ändert,

$$\frac{dT}{d\varphi'} = mr^2\varphi' + p\varphi^2\varphi'.$$

Die Quotienten  $\frac{dT}{dr'}$  und  $\frac{dT}{d\varphi'}$  ändern sich mit der Zeit, da  $r'$   $\varphi'$  und  $r$  von der Zeit abhängig sind. Wir erhalten die Quotienten aus den in der Zeit  $dt$  eintretenden Änderungen und dem Zeitelement  $dt$  nach den Sätzen der mathematischen Einleitung

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dr'} = m \frac{dr'}{dt} = mr''; \quad \frac{d}{dt} \frac{dT}{d\varphi'} = mr^2\varphi'' + 2mr r' \varphi' + p\varphi^2\varphi''.$$

Setzen wir die so bestimmten Quotienten in die Gleichung A, so lautet wir dieselbe schreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dr'} - \frac{dT}{dr} = -a(r-b) \dots \text{Aa.}$$

und ebenso können wir Gleichung B schreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\varphi'} - \frac{dT}{d\varphi} = -g p \varphi \dots \text{Ba.}$$

Die Gleichung Aa gibt den parallel der Richtung  $r$  wirkenden Zug, also das das Bewegliche  $m$  in der Richtung  $r$  bewegende Kraft, die Gleichung Ba das auf die Walze ausgeübte Drehungsmoment des Zuges  $gp$ , also das System in der Richtung  $\varphi$  bewegende Kraft.

Wir erhalten also hier die nach einer Richtung hin wirksame Kraft, indem wir den Differentialquotienten der lebendigen Kraft des bewegten Systems nach der Geschwindigkeit parallel der Richtung dieser Kraft bilden, von diesem Differentialquotienten denjenigen nach der Zeit bilden, und von diesem den Differentialquotienten der lebendigen Kraft nach dem der Krafrichtung parallelen Wege abziehen.

Die hier für einen speziellen Fall aus der ersten Form der Lagrange'schen Gleichung abgeleitete zweite Form gilt ganz allgemein. Ist die einem Systeme erteilte lebendige Kraft zur Zeit  $t$  gleich  $T$ , ist die Geschwindigkeit parallel  $x$  gleich  $x'$ , so ist die nach dieser Richtung wirksame Kraft stets gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dx'} - \frac{dT}{dx} = X$$

und entsprechend für  $Y$  und  $Z$ .

Wir können zur Ableitung der Gleichungen A und B auch von dieser Form der Gleichungen von Lagrange ausgehen, da wir die lebendige Kraft unseres Systems sofort angeben können; in Fällen, wo das möglich ist, bietet dieser Weg oft Vorteile.

Wir haben die uns gestellte Aufgabe nur behandelt, um zu zeigen, wie man die von Lagrange aufgestellten Bewegungsgleichungen zu verwenden hat und um aus der ersten auch die zweite Form der Gleichungen abzuleiten, da wir in einem spätern Teile dieselben benutzen müssen; wir wollen sie deshalb auch nicht im speziellen weiter verfolgen. Nur wollen wir noch zeigen, daß in dem Grenzzustande diese Gleichungen zu den uns bereits bekannten, denselben darstellenden Ausdrücken führen.

Als diesen Grenzzustand bezeichnen wir jenen, bei welchem die Feder vollständig gespannt ist, so daß sie keiner Verlängerung mehr fähig ist. Von da ab hält der Zusammenhang der Feder der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht, wie groß auch die Geschwindigkeit der Drehung sein mag. Ist  $r_e$  der Abstand der Masse  $m$  von der Achse, so ändert sich  $r$  nicht mehr, es wird  $r'$  und  $r''$  gleich Null. Die Gleichung A wird dann

$$\frac{mr_e^2\varphi'^2}{r_e} = a(r_e - b).$$

Die linke Seite ist nichts anderes als die Zentripetalkraft, welche auf das Bewegliche wirken muß, um es, welches auch die Geschwindigkeit  $r\varphi'$  ist, in der Kreisbahn zu halten, und die auf der rechten Seite stehende Größe  $a$  bedeutet dann nicht mehr eine Konstante, sondern eine mit der Geschwindigkeit wachsende Größe, und die Gleichung sagt eben aus, daß, wenn dieser Zustand erreicht ist, die Zentrifugalkraft durch einen ihr stets gleichen Zug aufgewogen werden muß.

Die Gleichung B wird

$$\varphi'' = \frac{gpq}{mr_e^2 + pq^2}; \quad q\varphi'' = \frac{gp}{m\frac{r_e^2}{q^2} + p},$$

die Beschleunigung in Längenmaß des Gewichtes  $p$  ist gleich dem Quotienten aus dem Zuge des Gewichtes und der Summe der Masse des

wichtiges und der auf dem Umfange der Walze die Masse  $m$  ersetzenden Masse. In der Tat sind ja diese die durch den Zug des Gewichtes zu bewegend Massen.

Aus der konstanten Beschleunigung erhalten wir nach den Gesetzen der gleichmäßig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit  $\varphi'$  zur Zeit  $t$ , dieselbe von dem Eintritt des Endzustandes an gerechnet,

$$\varphi' = \frac{g p \varrho}{m r^2 + p \varrho^2} t + \varphi_c,$$

wenn  $\varphi_c$  die Geschwindigkeit zur Zeit des Eintrittes des Endzustandes ist.

Ebenso erhält man in bekannter Weise den zurückgelegten Weg.

Ein weiteres Eingehen auf die Sätze der Dynamik ist uns hier nicht möglich, wir verweisen deshalb auf die Lehrbücher der Mechanik. Es erübrigt uns jetzt noch, einige Anwendungen unserer Sätze auf die wichtigsten Apparate zu betrachten.

### § 23.

**Die Wage.** Wir wenden unsere Sätze zunächst an, um die Theorie des für uns wichtigsten Meßapparates, der Wage zu erhalten.

Die Wage hat die Aufgabe, das Gewicht der Körper zu bestimmen, das heißt das Gewicht eines gegebenen Körpers mit demjenigen uns bekannter Gewichtstücke zu vergleichen. Zu dem Zwecke besteht dieselbe aus einem in seiner Mitte unterstützten Stabe, der an seinem Ende die Wagschalen trägt, deren eine den abzuwägenden Körper, deren andere die Gewichte aufnimmt. Die Wagschalen sind um ihre Aufhängeachse drehbar, so daß sie stets vertikal, das heißt mit ihrem Schwerpunkte unter der Aufhängeachse hängen. Wir schließen, daß das Gewicht des abzuwägenden Körpers demjenigen der Gewichte gleich ist, wenn der die Schalen tragende Stab der Wagebalken horizontal steht. Die horizontale Stellung erkennen wir an einem mit dem Wagebalken fest verbundenen Zeiger, der dann auf eine bestimmte Marke zeigt. Wir verlangen ferner, daß der Wagebalken in einer geneigten Stellung zur Ruhe kommt, wenn auf der einen Seite ein nicht zu großes Übergewicht ist. Die Neigung soll für das kleinste Übergewicht noch deutlich sichtbar sein, der Wagebalken also mit einem deutlich erkennbaren Winkel mit der Horizontalen bilden. Ihr kleinste Übergewicht ist je nach dem Zwecke der Wagen verschieden: Wagen zu wissenschaftlichen Untersuchungen sollen schon einen deutlich sichtbaren Winkel mit der Horizontalen, einen deutlichen Ausschlag zeigen, wenn die eine Seite um Bruchteile eines Milligramm schwerer ist.

Aus dieser Aufgabe der Wage läßt sich unmittelbar ableiten, wie dieselbe eingerichtet sein muß. Wir wollen aus der Horizontalstellung der Wage auf die Gleichheit der abzuwägenden Gewichte schließen: daraus folgt zunächst, daß die Wage im unbelasteten Zustande horizontal stehen, das heißt, daß dann der Schwerpunkt mit der Drehungsachse in derselben Vertikalen liegen muß. Dazu ist erforderlich, daß die beiden Hälften der Wage an jeder Seite der Drehungsachse derselben durch die Schwere erhaltenen Drehungsmoment erhalten, somit daß, wenn die beiden Hälften gleichartig gearbeitet sind, was wir voraussetzen, dieselben gleiche Gewichte haben müssen.

Es ergibt sich daraus zweitens, daß die beiden Hälften des Wagebalkens, die Abstände der Drehungsachse der Wage von den Aufhängepunkten der Wagschalen, gleiche Längen haben müssen. Denn in der Voraussetzung, daß die erste Bedingung erfüllt ist, beweist uns die horizontale Stellung der belasteten Wage nur, daß die Drehungsmomente der beiden Seiten gleich sind. Aus der Gleichheit der Drehungsmomente folgt aber die Gleichheit der wirkenden Kräfte, hier also der in den Wagschalen liegenden Gewichte, nur dann, wenn die Hebelarme, hier also die horizontalen Abstände der Aufhängepunkte der Wagschalen von der Drehungsachse, einander gleich sind. Inwieweit diese Bedingung streng erfüllt werden kann, werden wir im nächsten Paragraphen besprechen.

Da die Wage, wenn auf der einen Wagschale ein kleines Übergewicht liegt, in einer geneigten Lage zur Ruhe kommen soll, so folgt als dritte notwendig zu erfüllende Bedingung, daß die unbelastete Wage im stabilen Gleichgewichte sich befinden, daß also der Schwerpunkt unter der Drehungsachse liegen muß. Würde die Wage im labilen Gleichgewichte sein, so würde sie bei der geringsten Bewegung umschlagen. Wäre die Wage im indifferenten Gleichgewicht, so würde sie unbelastet in jeder Lage im Gleichgewichte sein, bei dem geringsten Übergewichte auf der einen Seite sich dagegen um  $90^\circ$  drehen, so weit, bis der Schwerpunkt des Übergewichtes unter der Drehungsachse in derselben Vertikalen liegen würde. Denn da im Zustande des indifferenten Gleichgewichtes die Summe der statischen Momente der einzelnen Teile der Wage in bezug auf die Unterstützungsachse selbst Null ist und in jeder Lage Null bleibt, kann bei Hinzufügung eines Übergewichtes nur dann Gleichgewicht sein, wenn das Moment des Übergewichtes für sich gleich Null ist; das ist aber nur dann der Fall, wenn sein Schwerpunkt mit der Drehungsachse in derselben Vertikalen ist. In diesem Falle würde somit die Wage ebenfalls unbrauchbar sein. Ist die unbelastete Wage dagegen im stabilen Gleichgewicht, so tritt eine von der Größe des Übergewichtes abhängige Drehung der Wage ein. Denn dadurch, daß die Wage sich nach der Seite des Übergewichtes neigt, wird ihr Schwerpunkt nach der andern Seite gehoben, somit ein die Wage zurückdrehendes Moment erzeugt; die Gleichgewichtslage ist dann jene, in welcher die nach entgegengesetzter Richtung drehenden Momente einander gleich sind.

Indem wir diese Gleichgewichtsbedingung formulieren, erkennen wir weiter, von welchen Umständen außer von der Größe des Übergewichtes die Größe der Drehung abhängig ist, welche speziellere Einrichtung somit die Wage haben muß, damit sie für ein möglichst kleines Übergewicht einen deutlich erkennbaren Ausschlag gibt. Bei dieser Formulierung machen wir die allgemeinste mit den bereits erkannten Bedingungen verträgliche Annahme, die sich im allgemeinen stets realisiert findet, daß nämlich der Wagebalken  $ABC$  (Fig. 37) nicht eine gerade Linie bilde, daß also die Verbindungslinie der Aufhängepunkte der Wagschalen nicht durch die Drehungsachse gehe. Wir nehmen aber an, daß in der Gleichgewichtslage die Verbindungslinie  $AC$  horizontal sei, daß also  $AB$  und  $BC$  mit der horizontalen  $MN$  den gleichen Winkel  $\beta$  bilden. Die Längen  $AB = BC$  seien gleich  $l$ . Der Schwerpunkt des Wagebalkens liege in  $g'$  im Abstände  $l'$  unter  $B$ .

Ferner sei  $p$  das Gewicht des Balkens und sei das Gewicht der an  $A$  |  $C$  angehängten Wagschalen inklusive der eingelegten Gewichte auf der ~~an~~ Seite gleich  $Q$ , auf der ~~an~~ Seite  $Q + q$ . Die Wage

dreh sich um einen Winkel  $\alpha$  ~~gen~~ und die Lage  $A'BC'$  ~~nehmen~~. Der Schwerpunkt

der Wage rückt dann nach  $g$ . ~~steht~~ Gleichgewicht, so muß

die Summe der Momente der ~~stehenden~~ Gewichte  $Q, p, Q + q$  ~~ich~~ Null sein.

Die Hebelarme der ~~Ge-~~ ~~ichte~~ sind für  $Q$  die Länge  $A'P$ , für das Gewicht  $p$  der ~~age~~  $gD$  und für die ~~Ge-~~ ~~ichte~~  $Q + q$ , welche an dem ~~unkte~~  $C'$  angreifen,  $C'Q$ , es muß sonach

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD - (Q + q) C'Q = 0,$$

oder

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD = (Q + q) C'Q \dots 1.$$

Nun sind

$$A'P = A'B \cdot \cos B A'P = A'B \cos A'BM = l \cdot \cos (\alpha - \beta),$$

$$gD = gB \cdot \sin gBD = l' \cdot \sin \alpha,$$

$$C'Q = C'B \cdot \cos QC'B = C'B \cdot \cos C'BN = l \cdot \cos (\alpha + \beta)$$

Setzt man daraus, wenn wir diese Ausdrücke in (1) einsetzen,

$$Ql \cos (\alpha - \beta) + pl' \sin \alpha = (Q + q) l \cos (\alpha + \beta)$$

oder auch

$$ql \cos \beta \cdot \cos \alpha = \{2Ql \sin \beta + ql \sin \beta + pl'\} \sin \alpha.$$

Dividieren wir durch  $\cos \alpha$  und lösen die Gleichung nach  $\tan \alpha$  auf,

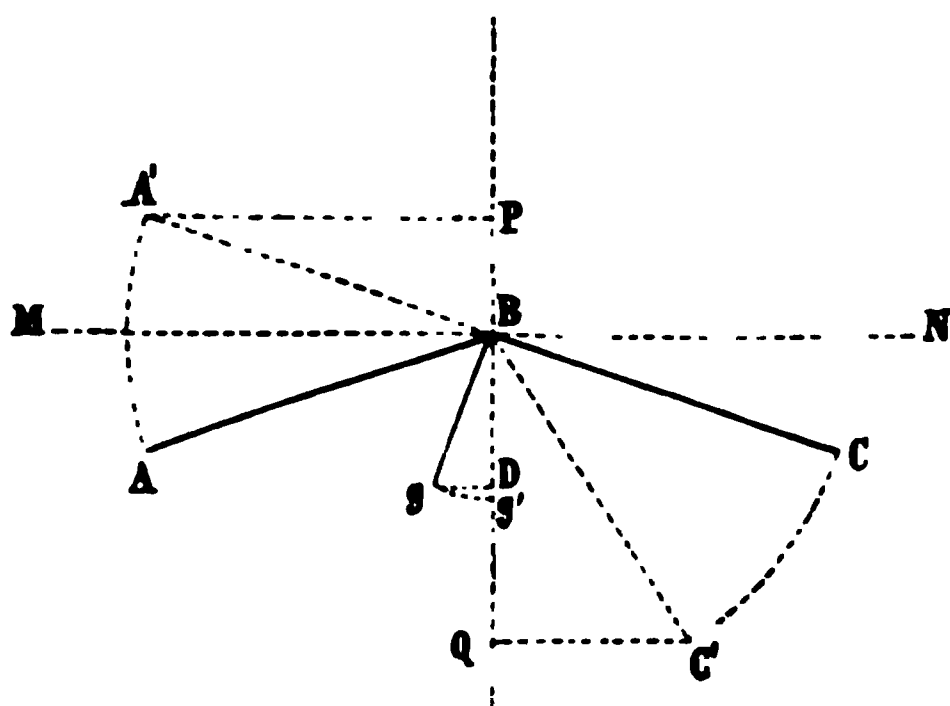
$$\tan \alpha = \frac{ql \cos \beta}{2Ql \sin \beta + ql \sin \beta + pl'}$$

oder

$$\tan \alpha = \frac{ql}{2Q + q} \frac{\cos \beta}{l \tan \beta + \frac{pl'}{\cos \beta}} \dots 2.$$

Der Winkel  $\alpha$  gibt die Neigung des Wagebalkens, wenn in die Wagschale bei  $C$  das Übergewicht  $q$  gebracht ist, er mißt also die Empfindlichkeit der Wage. Da  $\alpha$  immer sehr klein ist, können wir auch  $\tan \alpha$  als Maß der Empfindlichkeit betrachten. Man sieht in obiger Gleichung, daß wenn der Winkel  $\beta$  von Null verschieden ist, der Wert  $\alpha$  abhängig ist von  $2Q + q$ , das heißt, die Empfindlichkeit der Wage ist nicht konstant, sie ändert sich bei gleichem Übergewichte  $q$  mit der gemeinsamen Belastung der Wage, sie ist größer, wenn die Wage weniger belastet ist. Das ist der Fall sein muß, ergibt die direkt an Fig. 37 als richtig ein-

Fig. 37.





zusehende Überlegung, daß bei der hier vorausgesetzten Neigung der Wagebalken die Drehung der Wage zur Folge hat, daß der Hebelarm, an welchem das Übergewicht wirkt, in stärkerem Verhältnisse kleiner wird, als der Hebelarm an der andern Seite der Wage.

Lägen die Punkte  $A$  und  $C$  anstatt unter der Horizontalen über derselben, so wäre die Rechnung genau so durchzuführen, nur müßte man in den Gleichungen den Winkel  $\beta$  negativ setzen, wo in den vorigen Gleichungen  $\alpha + \beta$  steht, müßten wir  $\alpha - \beta$  setzen und umgekehrt. Die Gleichung (2) wird dann

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{ql}{\frac{pl'}{\cos \beta} - (2Q + q)l \operatorname{tang} \beta}.$$

Hier wird der Nenner unseres Ausdrucks mit zunehmender Belastung kleiner, die Empfindlichkeit der Wage also größer.

Ist der Winkel  $\beta$  gleich Null, so ist die Empfindlichkeit der Wage konstant, unabhängig von der Belastung. Da das durchaus wünschenswert ist, so sucht man soviel wie möglich die drei Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in eine gerade Linie zu legen. Nehmen wir an, daß das erreicht, also  $\beta = 0$  sei, so wird die Empfindlichkeit der Wage gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{l} \left( \frac{l}{p} \right) q.$$

Bei gleichem gegebenen Übergewicht wird somit der Ausschlag der Wage um so größer,

1) je kleiner  $l$ , also der Abstand des Schwerpunktes von dem Unterstützungspunkte ist. Man erkennt das auch an der Fig. 37 sofort als richtig, denn je näher  $g$  an  $B$  liegt, um so größer muß der Winkel  $\alpha$  werden, damit der Hebelarm, an welchem das Gewicht des Wagebalkens angreift, einen solchen Wert hat, daß das zurückdrehende Moment dem Drehungsmoment des Übergewichtes gleich wird.

2) Der Winkel  $\alpha$  wird um so größer, je größer der Quotient  $\frac{l}{p}$ , also aus der Länge des Wagebalkens und dem Gewichte desselben, wird, je länger also bei gegebenem Gewichte  $p$  die Wagebalken sind, oder je leichter bei gegebener Länge das Gewicht des Wagebalkens ist. Diese Bedingungen sind selbstverständlich innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen, da bei zu großer Länge, oder zu kleinem Gewichte die Wagebalken sich biegen, somit die Bedingung, daß  $\beta = 0$  ist, nicht mehr erfüllt sein kann. Von zwei Wagen, bei denen der Quotient  $\frac{l}{p}$  denselben Wert hat, ist schon deshalb diejenige die beste, deren Wagebalken die kürzeren sind, da bei dieser nicht so leicht Verbiegungen eintreten. Es wird sich im nächsten Paragraphen herausstellen, daß sich mit einer solchen Wage auch schneller wägen läßt.

Die Theorie liefert daher für eine gute Wage folgende Bedingungen, die man in der Praxis möglichst zu erfüllen sucht;

1) Die beiden Wagebalken sollen einander gleich sein.

2) Der Quotient  $\frac{l}{p}$  soll möglichst groß sein.

3) Der Aufhängepunkt des Wagebalkens und diejenigen der Wagschalen sollen in einer geraden Linie liegen.

4) Der Schwerpunkt der Wage soll unter der Drehungsachse liegen, und derselben möglichst nahe.

Um diesen vielfachen Bedingungen Genüge zu leisten, wendet man dem Wagebalken einen Messingstreifen von ungefähr 5<sup>mm</sup> Dicke und 60<sup>cm</sup> Länge an. Man gibt ihm die Form (Fig. 38) eines länglichen verschobenen Rechtecks, und, um ihn leicht zu machen, wird er vielfach durchbrochen, so daß nur die Seiten des Vierecks übrig bleiben nebst einigen das Viereck durchsetzenden Stützen. Man erfüllt dadurch die zweite Bedingung, und erhält einen bei gegebener Länge möglichst leichten Wagebalken, ohne zu fürchten zu müssen, daß er sich biegt.

Fig. 38.



Auf die Aufhängung des Balkens sowohl als der Schalen ist große Sorgsamkeit zu verwenden. Es ist notwendig, Träger herzustellen, die senkrecht zur Drehungsebene des Wagebalkens senkrechten Linie auslaufen, und fähig sind, dem Drucke zu widerstehen, welchen die angehängten Gewichte ausüben, die sich während der Drehung des Wagebalkens nicht bewegen und die hinlänglich beweglich sind, um nicht durch einen zu großen Reibungswiderstand die Bewegung des Wagebalkens zu hemmen. Man befestigt zu dem Ende in dem Wagebalken ein Prisma von gehärtetem Stahl *F*, dessen untere möglichst geradlinig gearbeitete Kante auf einer gut polierten Platte von Stahl, oder besser noch von Achat, aufliegt.

An den Enden des Wagebalkens sind ebenfalls zwei Prismen angebracht, deren Kanten nach oben gerichtet sind, um auf diese die unten angehängten Stahlstücke *A* aufzunehmen, an denen die Wagschalen abhängen. Die Aufhängeachsen des Wagebalkens sowie der Wagschalen sind demnach die Kanten dieser drei Prismen. Diese drei Kanten sollen gemäß der dritten Regel möglichst in eine gerade Linie gebracht werden, und die beiden Abstände der an den Enden des Wagebalkens betrachteten von der mittlern nach der ersten Regel unter sich so genau wie möglich gleich gemacht werden.

Meistens ist zur Erfüllung dieser Bedingungen an den feinen Wagebalken eine Korrektionsvorrichtung angebracht. In dem Falle sind nur zwei Prismen unveränderlich fest. Das dritte kann durch Schrauben vertikal verschoben werden, um die Kanten der drei Prismen in eine Linie zu bringen, und horizontal, um die Abstände der beiden äußeren Prismen vom mittlern unter sich gleich zu machen.

Um die vierte und wichtigste Bedingung herzustellen, ist an dem oberen Rande des Wagebalkens gerade über dem Aufhängepunkt eine Schraubenspindel mit sehr schmalen Gängen eingesetzt, auf welcher sich zwei Laufgewichte  $E$  auf und abschrauben lassen. Das untere ist größer und schwerer, das obere kleiner und leichter. Eine Bewegung dieser Gewichte ändert die Lage des Schwerpunktes; werden sie hinaufgeschraubt, so steigt der Schwerpunkt, werden sie hinabgeschraubt, so sinkt derselbe. Die gröbern Hebungen und Senkungen des Schwerpunktes werden durch eine Bewegung der großen, die kleinern durch eine Drehung der kleinen Schraubenmutter bewirkt. Durch diese Vorrichtung wird also der Schwerpunkt des Wagebalkens beweglich, und man sieht, wie man ihn dadurch der Aufhängeachse so nahe bringen und dadurch die Wage so empfindlich machen kann, wie man will. Man hat diese Vorrichtung noch dahin vervollkommen, daß man mittels derselben dem Schwerpunkt auch eine seitliche Bewegung geben kann. Zu dem Ende ist auf der einen Schraubenmutter ein exzentrischer Knopf angebracht, der durch seine seitliche Bewegung bei der Drehung des Laufgewichtes den Schwerpunkt auch seitlich etwas verschiebt, um also in den Stand setzt, ihn genau vertikal unter die Aufhängeachse zu bringen in dem Augenblicke, wo die drei Prismenkanten sich in der Horizontalen befinden.

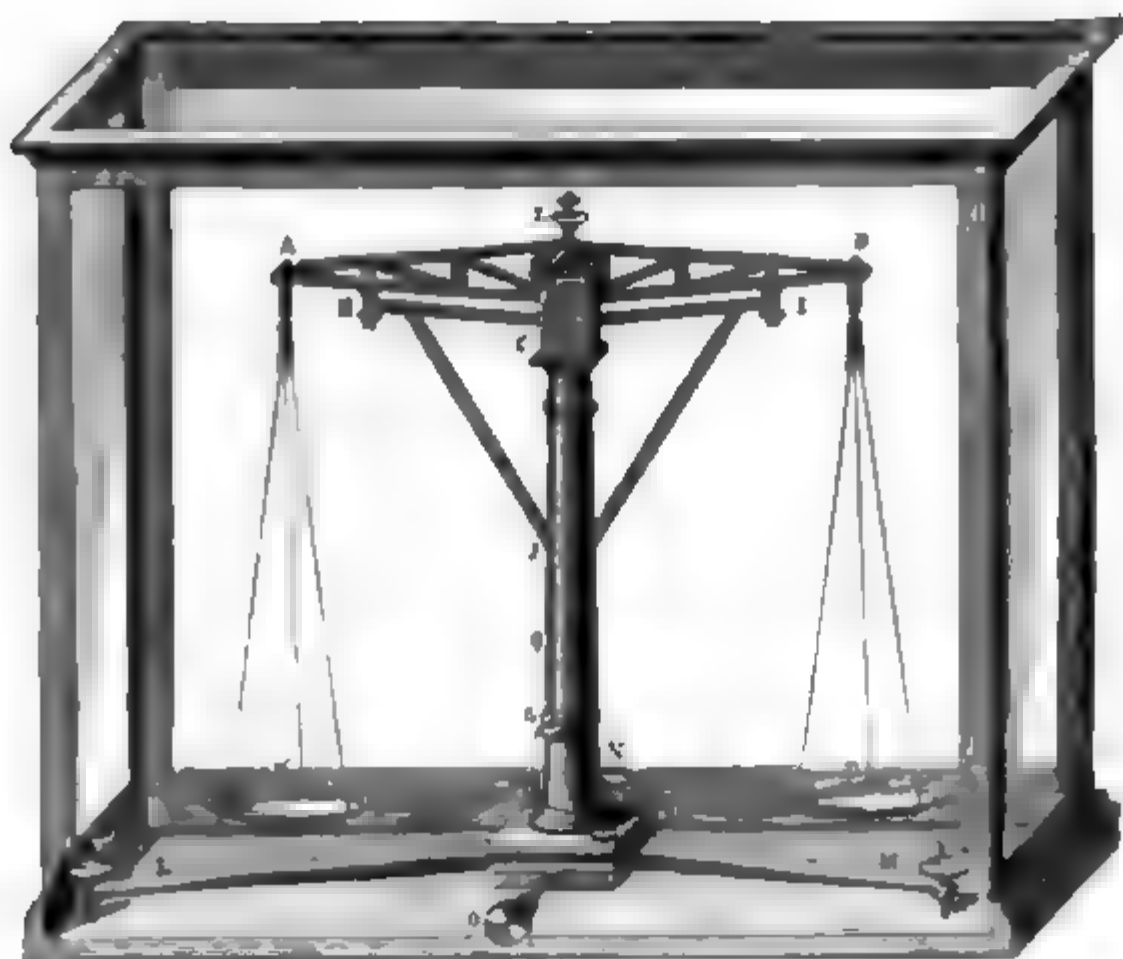
Um zu erkennen, ob die Wage horizontal steht, ist in der Mitte des Balkens über der Aufhängeachse eine stählerne Nadel  $Q$  (Fig. 39) befestigt, die bis unten an die Säule hinabreicht, welche die Wage trägt. Die Spitze der Nadel schwingt vor einer Elfenbeinplatte  $G$  hin und her, welche mit einer Teilung versehen ist. Man reguliert die unbelastete Wage durch Drehung der Stellschrauben  $V V'$  so, daß das Ende der Nadel auf der Mitte der Teilung, dem mit 0 bezeichneten Teilstrich, einstellt. Von dem Punkte geht man aus, eine Neigung des Wagebalkens wahrzunehmen, dann durch einen Ausschlag der Nadel angegeben; und da letztere so lang ist, so gibt sie für die geringste Neigung schon einen deutlichen Ausschlag.

Es erübrigt noch, die Aufstellung der Wage zu betrachten. Dieselbe steht auf einem eisernen Dreifuß  $LMN$  (Fig. 39), welcher mit Stellschrauben  $V V'$  versehen ist. Von der Mitte des Dreifußes erhebt sich eine Messingsäule  $DC$ , auf deren Spitze die Achatplatte angebracht ist, auf welcher die Schneide des Stahlprisma  $F$  ruht. Teils um die Schneide zu schonen, teils um die Wagebalken vor einer Biegung zu wahren und die Wage besser transportieren zu können, ist an der Säule eine Gabel  $H I J$  angebracht, deren Arme den Wagebalken erreichen. Man kann mittels einer in der Säule verborgenen Zahnstange, in welcher mittels des Knopfes  $O$  drehbares Zahnrad eingreift, gehoben und gesenkt werden. Dreht man den Knopf nach der einen Seite, so hebt man die Gabel; dieselbe nimmt den Wagebalken zwischen ihre Arme bei  $H$  und  $J$ .

d unterstützt ihn, indem sie ihn ein wenig emporhebt. Dreht man den Kopf  $O$ , und damit das Zahnrad, nach der entgegengesetzten Seite, so hebt die Gabel hinunter, läßt die Schneide  $F$  sehr langsam auf ihre Unterlage herab und läßt dann den Wagebalken frei.

Um beim Vornehmen einer Wägung die störenden Luftströmungen, welche die Bewegung der Wage hemmen, um die Wirkung der Feuchtigkeit auf die zu wägenden Körper zu hindern, und andererseits um die

Fig. 29



Wage vor Staub und sonstigen verderblichen Einflüssen zu schützen, umschließt man den ganzen Apparat mit einem Glaskasten, der vorn und an den Seiten geöffnet werden kann.

## § 24

**Prüfung der Wage; Methode der Wägungen.** Wenn man die in der Theorie geforderten Bedingungen bei Herstellung der Wagen auch zu erfüllen sucht, so läßt sich eine theoretisch vollkommene Wage nicht herstellen. Man muß deshalb eine jede Wage prüfen, besonders wie weit die Grundbedingung an derselben, die Gleichheit der Wagemomente erfüllt ist. Man kann das leicht durch zwei Wägungen. Wir legen auf die Wagehale links einen Körper, dessen Gewicht mit  $q$  bezeichnet werde, und bringen ihn durch das auf die Schale rechts gelegte erforderliche Gewicht  $p$  ins Gleichgewicht. Ist die Länge des Wagebalkens links gleich  $l$ , rechts gleich  $r$ , so folgt

$$lq = pr.$$

Wir legen dann den Körper vom Gewichte  $q$  auf die Wagschale rechts und bringen ihn durch die erforderlichen in die linke Schale gelegten Gewichte ins Gleichgewicht. Sei dazu  $p + p_1$  erforderlich, so ist

$$(p + p_1) l = r q.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{r}{l} = \sqrt{1 + \frac{p_1}{p}}.$$

Bei der Wägung mit einer solchen Wage müßte somit auch das beobachtete Gewicht korrigiert werden, es wäre

$$q = p \cdot \sqrt{1 + \frac{p_1}{p}}.$$

Bei Wägungen, bei denen es sich um die äußerste Genauigkeit handelt, wird man sich indes nicht mit dieser Korrektur begnügen, da schon geringe Temperatureinflüsse das Verhältnis der Längen der Wagebalken ändern können. Man wendet da besser die Methode der doppelten Wägung an. Zu dem Zwecke legt man den abzuwägenden Körper auf die eine Wagschale und bringt ihn durch Schrotkörner und ähnliches, die auf die andere Wagschale gelegt werden, ins Gleichgewicht. Dann ersetzt man den abzuwägenden Körper durch Gewichtsstücke, bis wiederum die Wage im Gleichgewichte ist.

Da auf diese Weise die Gewichtsstücke, durch welche das Gewicht des Körpers bestimmt wird, in derselben Schale liegen, somit an demselben Hebelarme wirken, so muß das Gewicht derselben auf das genaueste den Gewichte des Körpers entsprechen, mögen die Arme des Wagebalkens gleich sein oder nicht, wenn nur die Wage empfindlich genug ist, um die kleinsten Gewichts differenzen anzugeben.

Die Empfindlichkeit der Wage nimmt, wenn die Aufhängepunkte des Wagebalkens und der Wagschalen nicht in einer geraden Linie liegen, mit steigender Last ab. Wenn nun auch ursprünglich diese drei Punkte in einer geraden Linie liegen, so ist bei den feinen Wagen doch nicht zu vermeiden, daß bei Wägung großer Gewichte eben wegen der Länge und Leichtigkeit des Wagebalkens derselbe eine geringe Biegung erhält. Dadurch aber sinkt der Schwerpunkt des Wagebalkens herab, und die Wage verliert an Empfindlichkeit. Um diesen Fehler zu korrigieren, sind die über dem Wagebalken angebrachten Laufgewichte vorzüglich brauchbar, indem sie die Lage des Schwerpunktes ändern. Man kann mittels derselben der Wage die größte Empfindlichkeit geben.

Will man kleine Gewichte wägen, so schraubt man vorher die beiden Laufgewichte in die Höhe, bis die Wage in den Zustand des labilen Gleichgewichts versetzt wird; dann schraubt man das eine der Gewichte wieder herunter, bis das Gleichgewicht der Wage gerade wieder anfängt stabil zu werden. Auf diese Weise ist in dem Falle das Maximum der Empfindlichkeit erreicht. Will man große Gewichte abwägen, so legt man zunächst auf die beiden Wagschalen Gewichte, welche nahezu eine Belastung ausmachen als die zu bestimmenden. Dann verfährt man wie vorher, man schraubt die beiden Laufgewichte bis zum labilen

gewichte der Wage in die Höhe und läßt dann das eine soweit herab, bis das Gleichgewicht der Wage wieder stabil wird. Auch hier ist so wieder das Maximum der Empfindlichkeit erreicht.

Da die Wägungen zu den feinsten und wichtigsten Versuchen in der Physik gehören, so wird es gut sein, das Verfahren bei denselben etwas genauer zu beschreiben. Wir setzen voraus, die Wage stehe auf einem festen Tische, durch die Stellschrauben sei der Zeiger bei unbelasteter Wage auf den Nullpunkt geführt, man habe der Wage den abzuwägenden Gewichten gemäß das Maximum der Empfindlichkeit gegeben und wolle die Methode der doppelten Wägung anwenden. Man legt alsdann den abzuwägenden Körper in die eine Wagschale und Schrot in die andere, bis das Gleichgewicht nahezu hergestellt ist; das bietet keine Schwierigkeit. Ist das erreicht, so arretiert man mittels der Gabel den Wagebalken, hemmt mit der Hand die Schwankungen der Schalen, schließt den Kasten und läßt die Gabel vorsichtig wieder herab. Die Nadel wird dann vor der Teilung hin und her schwingen. Man beobachtet eine Anzahl Schwingungen; ist das Gleichgewicht erreicht, so sind die Schwingungen um den Nullpunkt symmetrisch, so daß die Summe zweier aufeinander folgender Schwingungen nach der einen Seite gleich ist dem doppelten Werte der zwischen den beiden liegenden Schwingung nach der entgegengesetzten Seite. Man wird nämlich bei absolut gleicher Belastung, oder auch wenn man die mit aller Genauigkeit justierte Wage ohne Belastung in Schwingung versetzt, finden, daß die aufeinander folgenden Schwingungen nicht von gleicher Größe sind, daß die Weite der Schwingungen vielmehr stetig und regelmäßig abnimmt. Geht etwa die erste Schwingung nach rechts um  $r$  Skalenteile, so findet man die darauf folgende Schwingung nach links etwa  $r - \alpha$  Skalenteile; dann bewegt sich der Zeiger nach rechts um  $r - 2\alpha$  Skalenteile, wieder nach links um  $r - 3\alpha$  Skalenteile usw. Der Grund dieser Abnahme liegt darin, daß der Bewegung der Wage der Widerstand der Luft und die Reibung in der Aufhängung entgegen wirkt. Bezeichnen wir nun die Schwingungen, ausgedrückt in Teilen der Skala nach rechts mit  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , nach links mit  $l_1, l_2, l_3, \dots$ , so muß, wenn die Wage um die horizontale Lage, der Zeiger also um den Nullpunkt schwingt,

$$r_1 + r_2 = 2l_1,$$

$$2r_2 = l_1 + l_2$$

$$r_3 + r_2 = 2l_2$$

usw. Findet man also nach der vorgenommenen Tarierung, daß dies erfüllt ist, so folgt, daß die Ruhelage des Wagebalkens die horizontale, d. h. daß das Gleichgewicht erreicht ist. Findet man dagegen, daß

$$r_1 + r_2 \geq 2l_1$$

usw., so beweist das, daß die Ruhelage des Wagebalkens nicht die horizontale, somit daß das Gleichgewicht noch nicht erreicht ist; ist  $r_1 + r_2 < 2l_1$ , so ist die Wage rechts zu schwer, im entgegengesetzten Falle auf der linken Seite. Man muß dann, nachdem man die Wage arretiert hat, mit einer Pinzette ein Schrotkorn fortnehmen oder zulegen,

je nachdem die Tara zu groß oder zu klein ist. Wenn durch Wegnehmen oder Zulegen eines Schrotkornes aber die Tara zu sehr geändert wird, muß man feineres Schrot anwenden, oder Papierschnitzel oder auch Saatkörner, und so lange mit dem Ab- und Zugeben dieser kleinen Gewichte fortfahren, bis die Schwingungen des Zeigers der angegebenen Bedingung entsprechen<sup>1)</sup>.

Dann ist der Körper tariert; nun wird er aus der Wagschale genommen, statt seiner werden Gewichte hineingelegt und mit den Gewichten jetzt gerade so verfahren, wie vorhin mit der Tara. Man findet zunächst das notwendige Gewicht leicht als zwischen  $n$  und  $n + 1$  Gramm zu erhalten und hat dann zu dem Gewichte noch die Bruchteile eines Gramms zu legen. Zu dem Ende befinden sich in den Gewichtssätzen 9 Dezigramme in Stücken von 5, 2 und 1 Dezigramm, so daß man dadurch eine beliebige Zahl von Dezigramm zwischen 1 und 9 herstellen kann. Ebenfalls findet man 9 Zentigramm und 9 Milligramm in ähnlichen Stücken, so daß man bis auf Milligramm genau das Gewicht eines Körpers erhalten kann.

An vielen Wagen ist nun noch eine Vorrichtung, um selbst die Bruchteile der Milligramm bis auf 0,1 zu erhalten. Es ist nämlich jede Hälfte des Wagebalkens durch vertikale Striche zunächst in 10 gleiche Teile geteilt und diese einzelnen Teile nochmal in 10 gleiche Unterabteilungen. Bei den Gewichtssätzen befinden sich dann Haken von Platindraht oder Aluminiumdraht, ein Zentigramm schwer, welche als Reiterchen auf dem Wagebalken verschoben werden können. Auf dem ersten Hauptteilstrich wirkt dann ein solches Reiterchen gerade soviel als 1 Milligramm in der Wagschale, weil es an einem Hebelarm wirkt, der nur 0,1 der Länge des Wagebalkens hat; auf den Teilstrichen 2, 3 . . . als 2, 3 . . . Milligramm und auf den zwischen den Hauptteilstreichen eingeschnittenen Teilstrichen als 1,1; 1,2 etc. Milligramm, so daß man durch Verschiebung der Reiter zugleich die Milligramme und ihre Bruchteile erhält.

## § 25.

**Spezifisches Gewicht und Dichtigkeit.** Mittels der Wage sind wir imstande, eine wichtige Eigenschaft der Körper zu erkennen. Man findet nämlich sehr oft, daß zwei gleiche Volumina verschiedener Körper das gleiche Gewicht haben, oder was dasselbe ist, daß das Verhältnis der Volumina verschiedener Körper zu ihren Gewichten nicht dasselbe ist. Für einen und denselben Körper ist das Gewicht  $P$  seinem Volumen  $V$  proportional, also

$$P = V \cdot s \quad \text{oder} \quad \frac{P}{V} = s.$$

Diese Größe  $s$  nennt man das spezifische Gewicht der Körper. Diese Größe  $s$  gibt also das Verhältnis des Gewichtes zum Volumen eines Körpers.

1) Die oben auseinandergesetzte Beobachtung der Gleichgewichtslage durch die Schwingungen ist der Beobachtung ohne Schwingungen vorzuziehen, weil sie genauer ist und rascher zum Ziele führt. Gerade dann zeigt sich der Vorzug der Wagen, welche bei gleicher Empfindlichkeit die kürzesten Schwingungen haben, da die Schwingungsdauer bei kürzeren Balken immer kleiner ist als bei längeren Balken.



oder das Gewicht der Volumeneinheit. Die Größe  $s$  ist konstant für ein und dieselbe Substanz bei gleicher Temperatur, für verschiedene Substanzen verschieden.

Da die Größe  $s$  das Gewicht eines bestimmten Volumens eines Körpers ausdrückt, so ist sie eigentlich abhängig von den gewählten Einheiten des Gewichtes und des Volumens und war daher vor Einführung des metrischen Gewichtssystems numerisch verschieden. Um jedoch diese Verschiedenheit zu vermeiden war man übereingekommen, die spezifischen Gewichte überall in derselben Weise auszudrücken, nämlich als Einheit das Gewicht der Volumeneinheit Wasser zu nehmen. Man gelangte darnach zu der Definition des spezifischen Gewichtes, daß es das Verhältnis zwischen dem Gewichte eines Körpers und dem Gewichte des dem Körpervolumen gleichen Volumens Wasser sei.

Da in dem metrischen System das Gewicht der Volumeneinheit Wasser bei 4° C., des Kubikzentimeters, die Gewichtseinheit, das Gramm ist, so fällt, wenn wir das Gewicht in Gramm, das Volumen des Körpers in Kubikzentimeter angeben, die alte Definition mit der neuen zusammen. Ebenso wie Gramm und Kubikzentimeter können wir selbstverständlich Kilogramm und Liter als Einheiten wählen. Das spezifische Gewicht oder, wie man es auch häufig bezeichnet, die Dichtigkeit eines Körpers ist gleich dem Quotienten aus seinem Gewicht und seinem Volumen; da wir das Gewicht eines Körpers gleich seiner Masse setzen, können wir es auch als den Quotienten seiner Masse und seines Volumens bezeichnen. Da das Volumen der dritten Potenz einer Länge gleich ist, so folgt für das spezifische Gewicht die Dimension

$$s = \frac{P}{V} = z [\mu \lambda^{-3}].$$

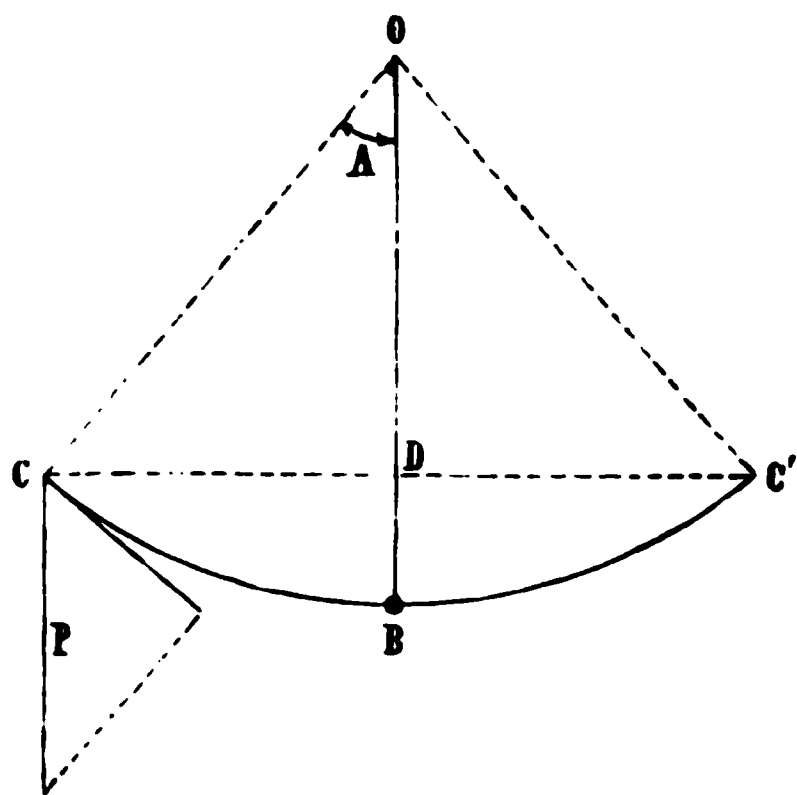
Bei den Gasen und Dämpfen pflegt man das spezifische Gewicht etwas anders zu definieren: man bezeichnet dort als solches das Verhältnis des Gewichtes eines Volumens Gas zu dem unter gleichen Umständen genommenen Volumen Luft. Man bezeichnet dieses Verhältnis als das spezifische Gewicht des Gases oder Dampfes bezogen auf Luft. Das Gewicht eines Volumens Gas ist also nicht gleich dem Produkte aus dem Volumen und dessen spezifischem Gewichte, sondern es muß als Faktor noch das Gewicht der unter gleichen Umständen genommenen Volumeneinheit Luft hinzutreten, oder das spezifische Gewicht eines Gases im strengen Sinne ist das Produkt aus dem spezifischen Gewichte bezogen auf Luft und dem Gewichte der unter gleichen Umständen genommenen Volumeneinheit Luft.

## § 26.

**Das Pendel.** Die zweite Anwendung, welche wir von den in den obigen Paragraphen abgeleiteten Gesetzen der drehenden Bewegung machen, ist die Untersuchung der Bewegung des Pendels; wir erhalten dadurch zunächst die Theorie des gewöhnlichen Pendels, welches wir zum Messen der Zeit gebrauchen; weiter aber benutzen wir diese Sätze in ausgedehntester Weise zur Messung von Kräften, Trägheitsmomenten und Be-

Das Pendel in seiner einfachsten Form ist ein Stab oder Faden (Fig. 40), welcher um eine Achse  $O$  drehbar ist und an seinem unteren Ende oder in der Nähe desselben ein Gewicht  $B$  trägt. In der Gleichgewichtslage muß der Schwerpunkt des Pendels vertikal unter der Drehachse sich befinden, das Pendel muß also vertikal hängen. Heben

Fig. 40.



dasselbe aus der Gleichgewichtslage nach der einen Seite heraus, z. B. nach  $OC$ , so daß die Lage des Pendels mit der Gleichgewichtslage einen Winkel  $A$  bildet, und überlassen dann sich selbst, so muß das Pendel sich gegen die Gleichgewichtslage hin bewegen. Denn das im Schwerpunkte des Pendels angreifende Gewicht  $P$ , welches vertikal abwärts gerichtet ist, gibt demselben gegen die Gleichgewichtslage gerichtetes Drehungsmoment, gleich dem Produkte aus der zu  $OC$  senkrechten, also der in die augenblickliche Bewegungsrichtung fallenden Komponente der Kraft des Schwerpunktes angreifenden Gewichtes  $P$ , und dem Abstände des Schwerpunktes von der Drehungsachse. Die zu  $OC$  senkrechte Komponente der Kraft ist  $gP \sin A$ ; nennen wir den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse  $z$ , so ist das Drehungsmoment, welches das Pendel aus seiner augenblicklichen Lage gegen die Gleichgewichtslage hindrückt,  $gP \sin A \cdot z$ . Sowie aber das Pendel seine Lage  $OC$  verlassen hat und einen kleinern Winkel  $\alpha$  mit der Gleichgewichtslage bildet, wird sofort das Drehungsmoment kleiner, es geht über in  $gP \sin \alpha \cdot z$ , da die Komponente der Kraft nur noch  $gP \sin \alpha$  ist. Die bewegende Kraft wird somit stetig kleiner mit  $\sin \alpha$ , um gleich Null zu werden, wenn  $\alpha$  Null wird, damit  $\sin \alpha = 0$  wird. Das Pendel muß daher auf seiner Bahn  $OB$  eine beschleunigte Bewegung erhalten, deren Beschleunigung mit Annäherung an die Gleichgewichtslage aber immer kleiner wird.

In der Lage  $OB$  angekommen besitzt das Pendel eine gewisse Winkelgeschwindigkeit, es kann deshalb in dieser Lage nicht verharren, sondern muß vermöge der Trägheit nach der andern Seite weitergehen. Wenn es aber an dieser mit der Gleichgewichtslage einen Winkel  $\alpha$  bildet, wird wieder ein Drehungsmoment von der Größe  $gP \sin \alpha \cdot z$  auf dasselbe ausgeübt, aber jetzt in entgegengesetzter Richtung, da  $\alpha$  jetzt an der andern Seite der Vertikalen liegt. Dasselbe wirkt somit jetzt gerade so verzögernd auf die Bewegung ein wie vorher beschleunigend. Da die jetzt verzögernden Drehungsmomente genau denselben Wert haben, wie bei einem gleichem Winkel  $\alpha$  auf der andern Seite die beschleunigenden, so folgt, daß das Pendel sich nach dieser Seite der Vertikalen, bis durch die fortwirkende Verzögerung die Geschwindigkeit gleich Null geworden ist, genau denselben Winkel  $BC'$  aufsteigend bewegen muß, als der Winkel  $OC$  war, auf welchem die Geschwindigkeit von Null bis zu jenem  $V$

wachsen ist, den das Pendel bei dem Passieren der Gleichgewichtslage besch. In dieser äußersten Lage angekommen muß das Pendel einen Augenblick in Ruhe sein; das dann aber wirkende Drehungsmoment  $gP \sin \alpha$  treibt das Pendel zurück, und da das Pendel diesen Rückgang unter genau denselben Umständen beginnt und fortsetzt, so folgt, daß es jetzt genau denselben Bogen  $C'BC$  und genau in derselben Weise in entgegengesetztem Sinne durchläuft wie bei der ersten Bewegung von  $C$  nach  $C'$ . Daraus folgt, daß das Pendel unaufhörlich denselben Bogen  $CBC'$  einmal in der einen, dann in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen muß. Das Pendel nimmt somit eine schwingende Bewegung an, es vollführt Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Die Größe des Bogens, durch welchen das Pendel schwingt, nennt man seine Schwingungsweite oder Amplitude. Dieselbe müßte nach unserer Betrachtung konstant sein; in Wirklichkeit ist das indes nicht der Fall, da wir bei unserer Ableitung der Bewegung entgegenstehenden Hindernisse, als Reibung in der Aufhängeachse, Widerstand der Luft, außer Acht gelassen haben. Da die Überwindung derselben in jedem Momente etwas Arbeit erfordert, so wird der dem Pendel durch die erste Hebung erteilte Arbeit allmählich verbraucht, die Amplituden werden kleiner, und das Pendel kommt allmählich zur Ruhe. Diese Abnahme lassen wir zunächst außer Acht und nehmen an, das Pendel bewege sich ohne Widerstand, oder, wie es in unsern Uhren der Fall ist, es erhalte jedesmal in der äußersten Lage einen solchen Antrieb, daß dadurch der zur Überwindung der Widerstände stattgehabte Arbeitsverlust gerade ausgeglichen werde.

Dann erkennt man weiter, daß die Zeit, welche das Pendel zur Vollführung einer Schwingung braucht, seine Schwingungsdauer, immer dieselbe sein muß, da es immer denselben Weg unter denselben Verhältnissen zurücklegt. Gerade das macht das Pendel zu einem vorzüglichem Mittel der Zeitmessung, daß es uns genau gleiche Zeitabschnitte angibt.

## § 27.

**Ableitung der Schwingungsdauer des Pendels.** Die Untersuchung, zu welchen Umständen die Schwingungsdauer des Pendels abhängig ist, könnten wir zum Teil wenigstens experimentell führen, wir wollen indes die Gesetze der Pendelbewegung aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ableiten, da sie uns ein ausgezeichnetes Beispiel der Bewegung durch nicht konstante Kräfte bietet.

Zur Ableitung der Pendelgesetze könnten wir von den im § 22 behandelten Grundgleichungen von Lagrange ausgehen, aber wir kommen lieber zum Ziele, wenn wir die Bewegungsgleichung direkt hinschreiben.

Die das Pendel in jedem Momente bewegende Kraft ist das demselben durch den Zug des Gewichtes  $P$  bzw. der in die Bahnrichtung desselben stehenden Komponente erteilte Drehungsmoment. Die zur Bahnrichtung senkrechte Komponente des Zuges ebenso wie die Zentrifugalkraft wird durch Festigkeit des Stabes oder Fadens aufgehoben. Die bewegende Kraft ist somit  $gP \sin \alpha$ . Setzen wir den Bogen  $\alpha$  als so klein voraus, daß wir den Sinus mit dem Bogen vertauschen können, so wird dieselbe  $gP\alpha$ .

Um die dem Pendel in der Lage  $\alpha$  erteilte Beschleunigung zu erhalten, haben wir die Kraft durch die in der Abstandseinheit von der Achse die Masse des Pendels ersetzende Masse, also durch das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf die Drehungsachse zu dividieren. Dasselbe ist gleich  $K$ . Dann ist die Beschleunigung des Pendels bzw. die Beschleunigung des in der Abstandseinheit von der Drehungsachse befindlichen Punktes

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g P z \alpha}{K}.$$

Wir müssen in dieser Gleichung indes für die rechte Seite noch das Vorzeichen richtig bestimmen, da wir sahen, daß die Beschleunigung bald positiv, bald an der andern Seite der Gleichgewichtslage negativ ist. Da das Pendel sich zu verschiedenen Zeiten an den entgegengesetzten Seiten der Gleichgewichtslage in gleichen Abständen  $\alpha$  befindet, so müssen wir, um die absolut gleichen aber an entgegengesetzten Seiten der Ruhelage vorkommenden Lagen zu unterscheiden, dieselben mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen. Wir wollen nun die Abstände von der Gleichgewichtslage nach links hin mit dem positiven, diejenigen nach rechts hin mit dem negativen Vorzeichen versehen. Dann müssen wir auch die Beschleunigung nach links hin als positive, die nach rechts hin als negative bezeichnen. Nun ist, solange das Pendel sich links befindet, also  $\alpha$  positiv ist, die Beschleunigung nach rechts gerichtet, also negativ, solange  $\alpha$  negativ ist, das Pendel sich rechts befindet, nach links; oder die Beschleunigung hat immer die dem augenblicklichen Abstände  $\alpha$  entgegengesetzte Richtung. Wir müssen daher in unserer Gleichung der rechten Seite das negative Vorzeichen geben, um zu erkennen, daß die Beschleunigung immer der Richtung, nach welcher  $\alpha$  gerechnet ist, entgegengesetzt ist, oder es ist

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{g P z \alpha}{K}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{g P z}{K} = k^2,$$

so wird

$$\frac{dv}{dt} = - k^2 \alpha \dots \dots \dots (1)$$

Wir erhalten hier den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit nicht als eine Funktion der Zeit angegeben, sondern als eine Funktion der Lage des Punktes in seiner Bahn. Wir können demnach nicht die in der Einleitung abgeleiteten Sätze, nach denen wir aus dem Differentialquotienten nach einer Veränderlichen die Funktion ableiten, unmittelbar anwenden. Wir gelangen indes leicht dazu, wenn wir mit Hilfe des im § 11 abgeleiteten Satzes, daß die Arbeit der Kraft gleich ist der lebendigen Kraft, welche diese Arbeit der Masse erteilt hat, aus Gleichung (1) eine andere ableiten. Wir gehen dabei aus von der ersten Lage des Pendels, in welcher es die Ablenkung  $\alpha_0$  und die Geschwindigkeit 0 hat. Fällt es herab, bis die Ablenkung  $\alpha$  ist, so sei seine Geschwindigkeit in diesem Momente gleich  $v$ , somit seine lebendige Kraft gleich  $\frac{1}{2} K v^2$ . Diese lebendige Kraft ist der Masse  $K$  dadurch

worden, daß auf jedem Wegeelement  $d\alpha$  von  $\alpha_0$  bis  $\alpha$  die Kraft  $gPz\alpha$  gewirkt hat. Da die Masse  $K$  sich in der Abstandseinheit von der Drehungsachse befindet, und wir  $\alpha$  als Bogen in Bruchteilen des Kreisumfanges  $2\pi$  rechnen, so ist  $d\alpha$  im Längenmaß der Weg, durch welchen die Kraft  $gPz\alpha$  gewirkt hat, somit  $gPz\alpha d\alpha$  die auf dem Wegelement  $d\alpha$  geleistete Arbeit. Die Summe aller der Arbeiten von  $\alpha_0$  bis  $\alpha$  genommen ist demnach gleich der überhaupt geleisteten Arbeit oder gleich der gewonnenen lebendigen Kraft, oder es ist

$$\frac{1}{2} K v^2 = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} g P z \alpha d\alpha,$$

wora wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen setzen müssen, weil das Zurücklegen des Bogens  $d\alpha$ , wenn  $\alpha$  positiv ist, während die Geschwindigkeit  $v$  wächst, einer Verminderung des Bogens  $\alpha$  entspricht. Das auf der rechten Seite der Gleichung stehende bestimmte Integral ergibt sich unmittelbar nach E 1 und VIII, es ist

$$\frac{1}{2} K v^2 = - \frac{1}{2} g P z (\alpha^2 - \alpha_0^2) = \frac{1}{2} g P z (\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Für die Geschwindigkeit  $v$  im Abstände  $\alpha$  von der Gleichgewichtslage ergibt sich daraus

$$v^2 = \frac{g P z}{K} (\alpha_0^2 - \alpha^2) = k^2 (\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Daß diese Gleichung die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung gemäß unserer vorigen Betrachtung wiedergibt, erkennt man sehr leicht. Die Geschwindigkeit ist gleich Null, wenn  $\alpha = \alpha_0$ , in der äußersten Lage, wo aus die Bewegung beginnt; sie wächst mit abnehmendem  $\alpha$  und erhält ihren größten Wert, wenn  $\alpha = 0$ , wenn das Pendel die Gleichgewichtslage passiert. Nach Überschreiten derselben nimmt sie wieder ab, und hat für gleiche Werte  $\alpha$  auf beiden Seiten der Gleichgewichtslage denselben Wert, da  $\alpha^2$  für ein positives oder negatives  $\alpha$  denselben Wert hat. Da die Gleichung für  $v$

$$v = \pm k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}$$

und so gibt sie gleichzeitig an, daß die Geschwindigkeit bei der einen Schwingung an der einen, bei der andern nach der entgegengesetzten gerichtet ist.

Aus dieser Gleichung für die Geschwindigkeit der Bewegung müssen wir nun ableiten, welche Zeit das Pendel braucht, um irgend ein beliebiges Stück seiner Bahn zurückzulegen, woraus sich dann die Zeit ergibt, welche das Pendel zum Durchlaufen seiner ganzen Bahn braucht. Wenn  $s$  die von dem Körper in der Zeit  $t$  durchlaufene Bahn ist, so ist die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  gleich

$$\frac{ds}{dt} = v; \quad ds = v \cdot dt.$$

Da nun  $d\alpha$  die von dem Pendel in der Zeit  $dt$  zurückgelegte Strecke ist, wird

$$d\alpha = v dt = - k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2} \cdot dt.$$

wo wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen schreiben, wir die Bewegung von dem positiven Werte  $\alpha_0$  aus verfolgen, da die Geschwindigkeit, wenn wir die Schwingung von  $+\alpha_0$  zu  $-\alpha_0$  betrachten, nach der negativen Seite gerichtet, also negativ zu setzen ist. Für  $dt$ , während welcher die Strecke  $d\alpha$  durchlaufen wird, ergibt sich

$$dt = - \frac{d\alpha}{k \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}.$$

Die Bewegung beginnt in dem Augenblicke, in welchem wir das Pendel in seiner äußersten Lage, wo  $\alpha = \alpha_0$ , loslassen, die Zeit  $t$ , welche es braucht, um einen solchen Bogen zurückzulegen, daß  $\alpha_0$  in  $\alpha$  übergeht, ist die Summe der Zeitelemente  $dt$ , während deren es die Wege  $d\alpha$  durchlief, welche auf dem Wege von  $\alpha_0$  bis  $\alpha$  liegen, also

$$t = \int dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{-d\alpha}{k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}},$$

oder auch

$$k \cdot t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\frac{1}{\alpha_0} d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}}.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Differentialausdruck ist aus E 9 abgeleitet, wie man unmittelbar erkennt, wenn man  $\frac{\alpha}{\alpha_0} = x$  setzt, wonach  $dx = \frac{1}{\alpha_0} d\alpha$  wird. Demnach wird

$$kt = \arccos\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) - \arccos\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0}\right).$$

Der Bogen, dessen Kosinus gleich  $\frac{\alpha_0}{\alpha_0}$ , also gleich 1 ist, ist  $0$  oder überhaupt irgend ein Vielfaches von  $2\pi$ . Welchen Wert wir setzen, ist gleichgültig, da wir für  $t = 0$  auch in dem ersten Glied der rechten Seite  $\alpha = \alpha_0$  zu setzen haben, wir also dort von  $0$  ausgehen müssen, den wir dem zweiten beilegen. Wir setzen deshalb am einfachsten das Glied gleich Null und erhalten

$$kt = \arccos\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right).$$

Die Schwingungsdauer des Pendels  $T$  erhalten wir hieraus, wenn wir  $\alpha$  so bestimmen, daß die zurückgelegte Bahn der ganzen Amplitude entspricht; das ist der Fall, wenn  $\alpha = -\alpha_0$  wird, demnach

$$kT = \arccos(-1) = \pi,$$

somit

$$T = \pi \frac{1}{k}.$$

Da wir nun gesetzt hatten

$$k^2 = \frac{gPz}{K}; \quad \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{K}{gPz}},$$

es folgt schließlich

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{g P z}}.$$

Die Schwingungsdauer des Pendels ist somit gleich der Zahl  $\pi$  multipliziert mit der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Trägheitsmomentes des Pendels und des Drehungsmomentes, welches die wirksamen Kräfte dem Pendel erteilen, wenn  $\alpha$  oder vielmehr, da wir  $\alpha$  für  $\sin \alpha$  gesetzt haben, wenn  $\sin \alpha = 1$  ist, also das Pendel in horizontaler Lage ist.

Beachtet man die Dimensionen der unter dem Wurzelzeichen auf der rechten Seite der Gleichung für  $T$  stehenden Größen, so erkennt man sofort, daß die Wurzel die Dimension einer Zeit hat; es ist  $M$  als Trägheitsmoment gleich  $z[\mu \lambda^2]$ , der Nenner als Drehungsmoment gleich  $z[\mu \lambda^2 \tau^{-2}]$ . Der Quotient aus beiden ist daher  $z[\tau^2]$ .

Um zu erkennen, daß obige Gleichung für  $t$  uns die Schwingung des Pendels so darstellt, wie uns die Betrachtungen des vorigen Paragraphen lieferten, schreiben wir

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \cos kt; \quad \alpha = \alpha_0 \cos kt,$$

wofür wir auch, da

$$k = \frac{\pi}{T},$$

setzen können

$$\alpha = \alpha_0 \cos \pi \frac{t}{T}.$$

Ist  $t = 0$ , so wird der Kosinus gleich 1, somit  $\alpha = \alpha_0$ ; wächst  $t$ , so wird der Kosinus immer kleiner, bis er für  $t = \frac{1}{2}T$  gleich Null wird, das Pendel hat somit nach der ersten Hälfte der Schwingungsdauer die Gleichgewichtslage erreicht. Wächst  $t$  weiter, so wird der Kosinus und damit  $\alpha$  negativ, das Pendel bewegt sich auf die andere Seite der Gleichgewichtslage, bis für  $t = T$  die Ablenkung  $\alpha = -\alpha_0$  wird. Bei weiterer Zunahme von  $t$  nimmt der negative Wert des Kosinus und damit  $\alpha$  wieder ab, wird für  $t = \frac{3}{2}T$  gleich Null, und wird dann wieder positiv und wächst bis  $\alpha_0$  für  $t = 2T$  usf. Kurz, wir sehen, das Pendel geht unaufhörlich hin und her und legt jedesmal in der Zeit  $T$  seine Bahn zurück.

Die abgeleitete Gleichung gibt somit in der Tat die Bewegung des Pendels gerade so wieder, wie wir sie durch die Betrachtung des vorigen Paragraphen erkannt hatten.

## § 28.

**Mathematisches und physisches Pendel.** Der vorhin für die Schwingungsdauer des Pendels erhaltene Ausdruck

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{g P z}}$$

nimmt eine sehr einfache Form an, wenn wir voraussetzen, das Pendel bestehe aus einem gewichtslosen Faden, an dessen unterem Ende sich ein schwerer Punkt befände. Sei die Länge des Fadens gleich  $l$ , das



Gewicht des Punktes gleich  $P$ , so erhalten wir für das Trägheitsmoment des Pendels

$$K = Pl^2,$$

und für das statische Moment

$$gPz = gPl,$$

da, wenn der Faden gewichtslos ist und das Gewicht  $P$  ein schwerer Punkt ist, die ganze Masse sich im Abstände  $l$  von der Drehungsachse befindet und ebenso der Schwerpunkt in den Punkt  $P$  fällt. Die Schwingungsdauer wird dann

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ein solches Pendel, welches man in Wirklichkeit streng nicht herstellen kann, nennt man ein mathematisches Pendel. Für dieses gelangen wir zu dem Satze, daß die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Pendellänge direkt und der Quadratwurzel aus der Beschleunigung bei dem freien Falle umgekehrt proportional ist.

Die wirklich herstellbaren Pendel, bei denen also die Masse an dem ganzen Pendel verteilt ist, nennt man physische Pendel. Mit einem jeden physischen Pendel hat ein mathematisches bestimmter Länge die gleiche Schwingungsdauer; diese Länge bezeichnet man als die Länge des mathematischen Pendels. Einen Ausdruck für diese Länge gibt uns unsere Gleichung für die Schwingungsdauer des physischen Pendels unmittelbar;

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{gPz}},$$

so ist die Länge  $l$  des isochron schwingenden mathematischen Pendels

$$l = \frac{K}{Pz}.$$

Den in dem so bestimmten Abstände  $l$  von der Drehungsachse liegenden Punkt des physischen Pendels nennt man den Schwingungspunkt des Pendels.

## § 29.

**Experimentelle Prüfung der Pendelgesetze.** Die theoretisch abgeleiteten Gesetze über die Schwingungsdauer des Pendels lassen sich doppelter Weise experimentell prüfen. Zunächst kann man Pendel herstellen, welche einem mathematischen Pendel möglichst nahe kommen, indem man einen möglichst leichten Faden unten mit einer kleinen möglichst schweren Kugel belastet. Für ein solches Pendel muß dann die Schwingungsdauer durch die Gleichung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gegeben sein, worin man für  $l$  ohne merklichen Fehler den Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Drehungsachse einsetzen kann.

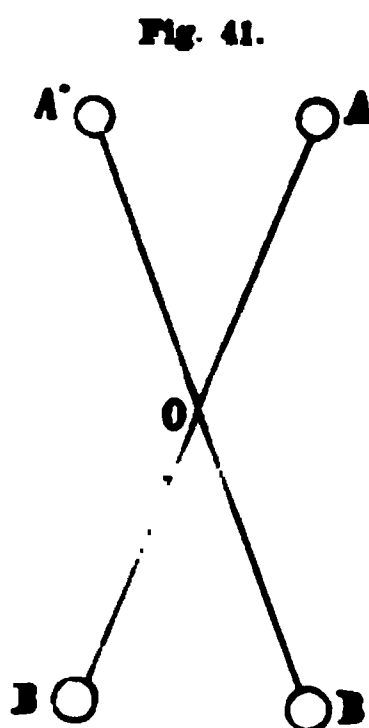
Stellt man ein solches Pendel etwa aus einem ganz feinen Kupferdraht her, an welchem unten eine Bleikugel befestigt ist, so

ist leicht zeigen, daß bei kleinen Amplituden die Schwingungsdauer merklich von der Amplitude beeinflusst wird. Man versetzt in Schwingungen, so daß  $\alpha_0$ , der Anfangsausschlag, nur etwa

Wie wir schon bemerkten, werden wegen der verschiedenen Kräfte, welche der Bewegung des Pendels entgegenwirken, die Amplituden der Bewegung immer kleiner, ein solches Pendel macht aber doch, bevor Ruhe kommt, einige hundert Schwingungen. Bestimmt man nun etwa der ersten hundert, dann der zweiten usw. hundert Schwingungen, so findet man die Zeit stets gleich, trotzdem die Größe der Amplitude bei den weiter folgenden Schwingungen stets kleiner ist als bei den ersten.

Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Länge des Pendels kann man, indem man Fäden von verschiedener Länge anwendet. Nimmt man Fäden, deren Längen sich verhalten wie 1 : 4 : 9 : 16, so findet man, daß die Schwingungsdauern sich verhalten wie 1 : 2 : 3 : 4.

Vollständigere experimentelle Prüfung der Pendelgesetze können wir durch Herstellung eines Pendels erreichen, an welchem wir die Massen und die Trägheitsmomente zu verändern sind. An den beiden Enden  $AB$  (Fig. 41) eines dünnen und leichten Stabes von Tannenholz befestigen wir zwei schwere Bleikugeln, deren Gewicht mit  $P + p$  ist. Mittels einer in der Mitte  $O$  des Stabes befestigten Stahlschneide setzen wir den Stab auf eine horizontale Unterlage und erhalten so ein Pendel, dessen Schwingungsdauer wir leicht berechnen können. Die wirkende Kraft für dieses Pendel ist nicht der Zug der Bleikugeln, sondern nur der des Übergewichts  $p$ , welches die beiden Gewichte  $P$  im Abstande  $\pm l = OB = OA$  von der Mitte  $O$  der Stabhälfte halten. Der Angriffspunkt der Kraft ist  $O$ , wenn wir annehmen, daß dort der Schwerpunkt des Pendels sei. Das statische Moment des Pendels ist somit gleich  $gp \cdot l$ . Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Holzstabes mit  $m$  und die Radien der beiden Kugeln mit  $r$ , so ist nach § 19 und 20 das Trägheitsmoment des ganzen Pendels



$$M = m + P(\frac{1}{2}r^2 + l^2) + (P + p)(\frac{1}{2}r_1^2 + l^2)$$

$$= m + \frac{1}{2}(Pr^2 + (P + p)r_1^2) + (2P + p)l^2.$$

Wenn wir den Stab recht leicht und geben ihm eine Länge von  $l = 1^m$  wird, so können wir ohne merklichen Fehler die letzten Glieder vernachlässigen, da der Radius der Bleikugeln, selbst bis zu einem Gewichte von  $2^{kg}$  gehen, nur etwa  $3,5^{cm}$  betragen. Der Wert der beiden ersten Glieder erreicht dann noch nicht 0,001

Vorausgesetzt erhalten wir für die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{(2P + p)l}{gp}} = \pi \sqrt{\frac{(2P + p)l}{gp}}$$

Wählen wir nun als Kugel bei  $A$  eine von  $1^{\text{kg}}$  Gewicht und bei  $B$  der Reihe nach Kugeln von

$$1,6666^{\text{kg}}, \quad 1,25^{\text{kg}}, \quad 1,1333^{\text{kg}},$$

wodurch also

$$p = \frac{2}{3}^{\text{kg}}, \quad \frac{2}{5}^{\text{kg}}, \quad \frac{2}{15}^{\text{kg}}$$

wird, so werden die Schwingungsdauern des Pendels

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad 3\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad 4\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

die Schwingungsdauern müssen also untereinander und zu denen des einfachen Pendels von der Länge  $l$  im Verhältnis  $2:3:4$  stehen.

Man wird bei Versuchen diese Resultate leicht bestätigt finden, um so genauer, je leichter man den Pendelstab gewählt hat.

Wir können noch in anderer Weise die Beschleunigungen und Schwingungsdauern variieren und damit gleichzeitig einen experimentellen Beweis für die Richtigkeit des im § 19 abgeleiteten Satzes über das Trägheitsmoment liefern. Wir nehmen zwei Bleikugeln, jede vom Gewichte  $P$ , und durchbohren sie so, daß sie auf dem Stabe verschiebbar und in verschiedenen Abständen von der Drehungsachse festgeklemmt werden können. Im Abstände  $l$  unten am Ende des Stabes befestigen wir eine Kugel vom Gewichte  $p$ . Klemmen wir dann die Kugeln  $P$  einmal so ein, daß ihr Mittelpunkt sich im Abstände  $\frac{3}{4}l$  befindet, dann, daß der Abstand der Mittelpunkte wird  $\frac{1}{2}l$ ,  $\frac{1}{4}l$ , so lassen wir die bewegende Kraft und die bewegte Masse ganz ungeändert, geben letzterer aber eine andere Verteilung, und infolgedessen muß die Schwingungsdauer jedesmal eine andere sein. Befinden sich die Kugeln im Abstand  $\frac{3}{4}l$ , so wird das Trägheitsmoment des Pendels

$$M = m + 2P\left(\frac{9}{16}l^2 + \frac{2}{5}r^2\right) + p(l^2 + \frac{2}{5}r_1^2),$$

wenn  $r$  der Radius der Kugeln  $P$  und  $r_1$  jener der Kugel  $p$  ist. Nach der vorhin gemachten Bemerkung können wir auch hier die nicht mit  $l^2$  multiplizierten Glieder vernachlässigen und erhalten dann

$$M = (\frac{9}{8}P + p)l^2$$

und für die Schwingungsdauer des Pendels

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(18P + 16p)l}{16 \cdot gp}}.$$

Klemmen wir die beiden Kugeln  $P_1$  so, daß ihre Mittelpunkte sich in  $\frac{1}{2}l$  befinden, so wird in derselben Weise berechnet

$$t = \pi \sqrt{\frac{(8P + 16p)l}{16 \cdot gp}},$$

und wenn die Kugeln in  $\frac{1}{4}l$  eingeklemmt werden,

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(2P + 16p) \cdot l}{16 \cdot pg}}.$$

Nehmen wir nun jede der Kugeln  $P$  gleich  $1^{\text{kg}}$  und  $p$  gleich  $\frac{1}{16}^{\text{kg}}$ , so werden diese Schwingungsdauern

$$t = 4,35\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad 3\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad 1,732\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

die man leicht durch den Versuch bestätigt findet. Damit ist dann experimentell der Nachweis geführt, daß das Produkt einer Masse inadrat ihres Abstandes von der Drehungsachse ihr Trägheitsmoment ist, daß bei der drehenden Bewegung Massen sich ersetzen, welche umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungs-

### § 30.

**Korrektur wegen der Amplitude.** Wir haben schon im § 26 hingewiesen, daß unsere Ableitung der Pendelgesetze die Voraussetzung macht, daß die Amplitude so klein sei, daß wir die Bogen für Kreisbögen einsetzen dürfen. Das ist streng nur für unendlich kleine Bogen l. In der Tat ist deshalb auch die Schwingungsdauer etwas von der Amplitude abhängig und etwas größer, als unsere Gleichung sie angibt. Die Berechnung der Schwingungsdauer, wenn wir in der Gleichung 17  $\sin \alpha$  anstatt  $\alpha$  beibehalten, ist ziemlich kompliziert, ohne jedoch irgendwie anders geführt zu werden, als wir sie führten. Wir teilen uns deshalb hier damit, das Resultat der Rechnung mitzuteilen. Sei  $\alpha_0$  der Ausschlagswinkel des Pendels, so wird

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{gPl}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0 + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{1}{2} \alpha_0 + \dots \right).$$

Wenn  $\alpha_0$  nur wenige Grade beträgt, so kann man schon das dritte Glied der Klammer fortlassen. Der Wert der ganzen Korrektur beträgt, wenn  $\alpha_0 = 10^\circ$  ist, etwa 0,2 Prozent der Schwingungsdauer, das heißt ein Pendel, welches mit dieser Amplitude 1000 Schwingungen vollführt, mit unendlich kleiner Amplitude 1001,89 Schwingungen machen. Wenn man die Korrektur erhält man aus der beobachteten Schwingungsdauer auf unendlich kleine Amplitude reduzierte  $T'$

$$T' = \pi \sqrt{\frac{K}{gPl}} = \frac{T}{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0},$$

die somit die abgeleitete Gleichung für die Schwingungsdauer des Pendels streng gilt.

### § 31.

**Bestimmung von  $g$ .** Eine der wichtigsten Anwendungen unserer Formel ist für die Schwingungsdauer des Pendels,

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

die vorhin definierte Länge des physischen Pendels bedeutet, ist die Bestimmung der Größe  $g$ , der Beschleunigung beim freien Fall, da diese auf keinem andern Wege mit einer ähnlichen Genauigkeit bestimmt werden kann, als durch Beobachtung der Pendelschwingungen. Man bedient sich dazu mit möglichster Genauigkeit die Schwingungsdauer eines

Fig. 42



Pendels, bestimmt die mathematischen Pendel, deren Schwingungsdauer  $g$  rechnet. Die einzige Schwierigkeit ist die Bestimmung des mathematischen physischen isochronen Pendels. Man kann einem doppelten Wege, entweder gibt man dem eine geometrisch bestimmte Gestalt und sorgt dafür, dass die Masse des Pendels die gleiche Dichtigkeit hat, so kann man das Trägheitsmoment des Pendels berechnen kann den Weg schlagen Borda und Biot, sowie Biot seinen ersten Bestimmung  $g$  ein; oder man gibt dem eine solche Form, an ihm experimentell zu bestimmen, das mit ihm isochron zu den mathematischen Pendeln bestimmen kann. Letzteres ist von Bohnenberger gegeben und vorzugsweise Kater ausgeführt worden.

Die Anordnung der Pendel, wie sie Borda, Arago und Biot zeigt Fig. 42. Das Pendel besteht aus dünnem Platin, welchem unten eine Kugel aus Platin befestigt ist. Diese Kugel ist befestigt an einem Prisma, das mit seiner scharfen Kante auf dem eisernen Träger liegt, in ihrer Mitte durchlassen des Pendels eine bohrte Platte von Saphir Achat aufsteht. Da die Kugel und die Klemmvorrichtung den Draht hält, an dem die Pendel teilnehmen und zu vernachlässigendes haben, so würde die Schwingungsdauer des Pendels aus

Verteilung der Masse des Prismas abhängen. Dadurch würde es schwierig sein, durch Rechnung das Pendel auf ein mathematisches zu reduzieren, da man der Aufhängevorrichtung nicht eine so einfache geometrische Gestalt geben kann, wie sie zur Berechnung des Trägheitsmomentes erforderlich ist. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit richtete Borda die Aufhängevorrichtung so ein, daß sie auf die Schwingungsdauer des Pendels gar keinen Einfluß hatte. Wegen der unter dem Prisma angebrachten, zur Aufnahme des Platindrahtes dienenden Klemmvorrichtung liegt der Schwerpunkt der ganzen Aufhängevorrichtung unterhalb der Schneide. Stellt man daher das Prisma ohne angehängtes Pendel auf die Unterlage, so schwingt es selbst als Pendel hin und her. Um nun die Schwingungsdauer dieses kleinen Pendels verlängern zu können, ist, wie die Figur zeigt, in der Mitte des Prismas, gewissermaßen als eine nach oben gerichtete Verlängerung des Pendelfadens, eine Schraubenspindel aufgesetzt, auf welcher ein Laufgewicht auf und nieder bewegt werden kann. Durch eine Hebung des Laufgewichtes wird der Schwerpunkt der Aufhängevorrichtung der Schneide näher gebracht, und damit wird die Schwingungsdauer derselben eine größere. Denn nennen wir das Gewicht der Aufhängevorrichtung  $p$ , den Abstand ihres Schwerpunktes von der Schneide  $a$ , und das Trägheitsmoment in bezug auf die Schneide  $K_1$ , so ist die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{K_1}{g a p}};$$

es wächst somit  $t$ , wenn  $a$  kleiner wird. Das Laufgewicht wurde nun so gestellt, daß die Schwingungsdauer der Aufhängevorrichtung für sich genau gleich war der Schwingungsdauer des ganzen zusammengesetzten Pendels. Dann ist die Schwingungsdauer des ganzen Pendels dieselbe, als wenn es nur aus dem Aufhängedraht und der unten angehängten Kugel bestände. Sei, um das nachzuweisen,  $K$  das Trägheitsmoment des Fadens und der unten angehängten Kugel,  $A$  der Abstand des Schwerpunktes dieser beiden Teile von der Schneide, und  $P$  das Gewicht von Faden und Kugel. Ist die Schwingungsdauer des ganzen Pendels ebenfalls gleich  $t$ , so ist

$$t = \pi \sqrt{\frac{K_1 + K}{g a p + A P}};$$

da das Trägheitsmoment eines zusammengesetzten Körpers gleich ist der Summe der Trägheitsmomente der Bestandteile, und das statische Moment mehrerer Kräfte gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber

$$\frac{K_1}{g a p} = \frac{K_1 + K}{g a p + A P},$$

oder daraus unmittelbar

$$\frac{K_1 + K}{g a p + A P} = \frac{K}{g A P}$$

oder auch

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{g A P}}.$$

Bei den eigentlichen Versuchen zur Bestimmung von  $g$  war die Kugel aus Platin; um aber zu untersuchen, ob der Wert von  $g$  für alle Substanzen

genau derselbe sei, wurde die Kugel zuweilen gewechselt. Deshalb war die Kugel nicht direkt, sondern durch ein ganz kleines Ansatzstück  $A$  welches unten konkav als Teil einer Kugelfläche, deren Radius gleich der der anzuhängenden Kugeln war, befestigt. Die Kugel wird mittels einer ganz dünnen Wachsschicht in diese Vertiefung eingeklebt. Dadurch ist gleichzeitig ermöglicht, die Kugel an verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche anzukleben, um so zu untersuchen, ob der Mittelpunkt der Kugel auch der Schwerpunkt derselben ist.

Das Pendel wurde an einem festen schmiedeeisernen Träger  $EG$  (Fig. 42) aufgehängt, welcher in einer massiven steinernen, von belebten Straßen entfernten Mauer derartig befestigt und durch Streben  $E$  unterstützt war, daß er weder durch äußere Stöße, noch auch durch die Schwingungen des Pendels die geringste Bewegung annahm. Auf diesem Träger war bei  $G$  die gut polierte Platte von Stahl oder Achat fest aufgesetzt, auf welcher die Schneide der Aufhängevorrichtung aufstand.

Das Pendel hing vor einer gut regulierten astronomischen Uhr herab, so daß man gleichzeitig die Bewegung des zu den Beobachtungen dienenden und des Pendels der Uhr übersehen konnte. Schließlich war Uhr und Pendel von einem Glasgehäuse umgeben, welches etwaige Luftströmungen von dem Pendel abhielt.

Zur Bestimmung von  $g$  bedarf es zunächst der Kenntnis der Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem physischen isochron schwingt, also des Wertes

$$l = \frac{K}{A P}.$$

Dazu ist es notwendig, die Länge  $f$  des Fadens, das Gewicht des Fadens und den Radius, sowie das Gewicht der Kugel, zu dem wir ohne merklichen Fehler das Gewicht des Ansatzstückes  $B$  hinzuziehen können, zu messen. Die Länge des Fadens, deren Bestimmung vor Konstruktion des Kathetometers mit einiger Schwierigkeit verknüpft war, ist mit Hilfe dieses Meßapparates leicht zu erhalten. Borda brachte eine genau horizontale Platte durch eine Mikrometerschraube mit dem tiefsten Punkte der Kugel in Berührung und maß dann mit Hilfe eines Maßstabes den Abstand der Platte von der Schneide. Jetzt visiert man mit einem Kathetometer einmal die Schneide und dann den tiefsten Punkt der Kugel, so daß der horizontale Faden des Fadenkreuzes gerade als Tangente der Kugel erscheint. Die Differenz der Stellungen des Kathetometerfernrohrs gibt die Länge des Fadens plus dem Durchmesser der Kugel. Ist das Pendel länger als die Skala des Kathetometers, so visiert man zunächst die Schneide und irgend einen zwischen dem oberen und untern Ende des Pendels liegenden Punkt, setzt dann das Kathetometer tiefer und visiert von neuem den eben visierten Punkt und darauf den tiefsten Punkt der Kugel.

Um den Durchmesser der Kugel zu erhalten, kann man sich des Sphärometers bedienen, oder genauer man bestimmt den Gewichtsverlust der Kugel beim Eintauchen derselben in Wasser von bestimmter Temperatur; in welcher Weise, wird später hervortreten, wenn wir die Methode zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der festen Körper besprechen. Die Differenz zwischen den Ablesungen des Kathetometers und dem Durchmesser  $2r$  der Kugel gibt die Länge  $f$  des Fadens.



Da der Faden überall dieselbe Dichtigkeit hat, so liegt sein Schwerpunkt in dem Abstände  $\frac{1}{2}f$  von der Aufhängeachse; der Schwerpunkt der Kugel liegt in ihrem Mittelpunkte. Ist daher  $p_1$  das Gewicht des Fadens,  $P_1$  das Gewicht der Kugel, so ist

$$AP = p_1 \frac{f}{2} + P_1 (f + r).$$

Das Trägheitsmoment des Fadens erhalten wir in folgender Weise. Sei  $q$  das Gewicht der Längeneinheit des Fadens, so ist das Gewicht eines unendlich kleinen Stückchens von der Länge  $dx$  gleich  $q \cdot dx$ . Befindet sich dieses Stückchen im Abstände  $x$  von der Schneide, so ist das Trägheitsmoment dieses Stückchens

$$q x^2 dx$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Fadens

$$K_2 = q \int_0^f x^2 dx = \frac{1}{3} q f^3.$$

Sum ist  $qf = p_1$  gleich dem Gewichte des Fadens, somit

$$K_2 = \frac{1}{3} p_1 f^3.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende, der Schneide parallele Achse ist

$$\frac{2}{5} P_1 r^2.$$

Da diese Achse sich im Abstände  $f + r$  von der Drehungsachse des Pendels befindet, so wird das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf diese Achse

$$K_3 = P_1 \left\{ \frac{2}{5} r^2 + (f + r)^2 \right\},$$

somit

$$K = K_2 + K_3 = \frac{1}{3} p_1 f^3 + P_1 \left\{ \frac{2}{5} r^2 + (f + r)^2 \right\}$$

und schließlich die Länge  $l$  des mathematischen Pendels

$$l = \frac{\frac{1}{3} p_1 f^3 + P_1 \left\{ \frac{2}{5} r^2 + (f + r)^2 \right\}}{p_1 \frac{f}{2} + P_1 (f + r)}.$$

Da die Länge  $f$  des Fadens und der Radius der Kugel von der Temperatur abhängig sind, so ändert sich auch die Länge  $l$  des Pendels mit der Temperatur. Ist daher die Temperatur bei den Beobachtungen nicht immer dieselbe und zwar jene, bei welcher die Längenmessungen durchgeführt sind, so muß man eine Korrektur anbringen, um die für jeden Versuch richtige Länge des Pendels zu erhalten. Ist Faden und Kugel von demselben Metall und  $t$  die Temperatur, bei welcher die Längenmessungen vorgenommen sind,  $t_1$  die Temperatur, bei welcher die Schwingungen beobachtet werden, so ist die zur Bestimmung von  $g$  in Rechnung zu ziehende Länge  $l'$

$$l' = l \cdot (1 + \beta (t_1 - t)).$$

wo  $\beta$  den Ausdehnungskoeffizienten des Metalls bedeutet. Die Werte

von  $\beta$  für die verschiedenen Metalle werden wir im zweiten Bande kennenlernen<sup>1)</sup>).

Um die Schwingungsdauer des Pendels mit größter Genauigkeit bestimmen, vergleicht man die Schwingungen des Beobachtungspendels mit denen des Uhrpendels. Zu dem Zwecke beobachtet man die Schwingung des durch einen kleinen Stoß in Bewegung gesetzten Pendels mit Hilfe eines dem Apparate gegenüber in der Richtung  $DD'$  in einer Entfernung von mehreren Metern aufgestellten Fernrohrs.

Man sieht dann, wenn man durch das Fernrohr auf den Apparat blickt, das Pendel der Uhr, auf welches man vorher einen feinen vertikalen Strich gezogen hat, und das davor aufgehängte Pendel gesondert durch das Gesichtsfeld gehen. Da nun das eine der Pendel immer etwas rascher schwingt als das andere, nehmen wir an, das raschere sei das Pendel  $G$ , so werden nach einigen Schwingungen die beiden Pendel zugleich in das Gesichtsfeld treten und sich decken. Diesen Zeitpunkt einer Koinzidenz der beiden Pendel wählt man zum Ausgangspunkte der Beobachtungen. Um ihn genau zu erhalten, beginnt man die Beobachtungen schon etwas früher, man sieht dann, daß bei den aufeinanderfolgenden Durchgängen die Pendel sich immer näher rücken, bis sie endlich bei einem Durchgange zur Koinzidenz kommen. Bei den weiter folgenden Schwingungen eilt dann das Pendel  $GB$  vor, so daß nach einiger Zeit das Pendel  $GB$  schon eine rückgängige Bewegung hat, während das Uhrpendel noch eine vorwärts gerichtete Bewegung besitzt. Dabei kommt wieder ein Zeitpunkt, zu welchem die beiden Pendel sich in der Mitte des Gesichtsfeldes decken, aber jetzt mit entgegengesetzt gerichteter Bewegung. Dann hat das Pendel  $GB$  eine Oszillation mehr gemacht als das Pendel der Uhr, wenn man als Ausgangspunkt der Bewegung gerechneten Zeitpunkte der vorigen Koinzidenz an. Weiterhin eilt das Pendel  $GB$  immer mehr vor, es geht bald wieder in gleicher Richtung mit dem Uhrpendel durch das Gesichtsfeld und kommt dann wieder mit dem Uhrpendel zur Koinzidenz wie bei der ersten Beobachtung. Bei dieser zweiten Koinzidenz hat das Pendel  $GB$  zwei Schwingungen mehr gemacht, und so bei jeder folgenden Koinzidenz jedesmal eine Schwingung mehr. Setzen wir nun voraus, daß das Uhrpendel genau Sekunden schwingt, und daß man, während man  $m$  Koinzidenzen beobachtet hat, an dem Sekundenzeiger der Uhr  $n$  Sekunden abgelesen hat, so ist die Schwingungsdauer  $t$  gleich

$$t = \frac{n}{n + m}.$$

Diese Art, die Schwingungen des Pendels zu beobachten, die Methode der Koinzidenzen, bietet eine Reihe von Vorteilen. Zunächst leitet man die Dauer einer Schwingung aus der Beobachtung einer sehr großen Zahl  $(n + m)$  Schwingungen ab; der bei der Zeitmessung begangene Fehler wird deshalb durch die Division mit dieser großen Zahl beträchtlich verkleinert. Ferner kann man bei der Beobachtung mit dem Fernrohr den Zeit-

1) Genaueres über die Bestimmung der Pendellänge und insbesondere den Einfluß der als Drehungsachse dienenden Schneide auf die Länge des Pendels sehe man: *F. W. Bessel*, Untersuchungen über die Länge des einfachen Seilpendels. Aus den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1826.

der einzelnen Koinzidenz scharf beobachten. Schließlich bedarf es nur einer sehr scharfen Beobachtung der ersten und letzten Koinzidenz; ja man kann sogar, nachdem man die zweite Koinzidenz beobachtet und so jedenfalls mit großer Annäherung die zwischen zwei Koinzidenzen liegende Anzahl  $z$  von Sekunden erhalten hat, die Beobachtungen bis kurz vor der letzten Koinzidenz unterbrechen, indem dann der Koeffizient  $\frac{n}{z} = m$  uns die Anzahl der Koinzidenzen liefert.

Zur Berechnung von  $g$  müssen die Schwingungsdauern auf unendlich kleine Bogen reduziert werden. Sind die Bogen überhaupt nur sehr klein, so genügt es, das Mittel aus der ersten und letzten Amplitude zu nehmen. Man mißt zu dem Ende die Amplituden an einem hinter dem Pendel angebrachten Gradbogen, den man gleichzeitig mit dem Pendel im Fernrohr sehen kann. Ist die erste Amplitude  $\alpha_1$ , die letzte  $\alpha_n$ , so setzt man in der Gleichung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \right)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}.$$

Will man bei der Rechnung strengere verfahren, so hat man zu beachten, daß die Dauer der einzelnen Schwingungen untereinander nicht ganz gleich ist, und daß der gefundene Mittelwert  $t$  nicht gerade die Schwingungsdauer des Pendels bei der so bestimmten Amplitude  $\alpha$  ist. Es würde das nur der Fall sein, wenn die Schwingungsdauer sich in einfach linearer Weise mit dem Bogen änderte, und wenn weiter die aufeinanderfolgenden Bogen immer um dieselbe Größe kleiner würden. Beides ist nicht der Fall; daß ersteres nicht der Fall ist, zeigt unsere Gleichung für die Schwingungsdauer, und daß letzteres nicht der Fall ist, ergibt die Beobachtung. Dieselbe zeigt nämlich, daß nicht die Differenzen der aufeinanderfolgenden Schwingungsbogen konstant sind, sondern daß dieselben sehr nahe in einem konstanten Verhältnisse stehen, oder daß die Schwingungsbogen sehr nahe eine geometrische Reihe bilden, um so näher, je kleiner überhaupt die Schwingungen sind. Sind also  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$  die einzelnen Bogen, so ist

$$\alpha_2 = c \cdot \alpha_1; \quad \alpha_3 = c \cdot \alpha_2 = c^2 \cdot \alpha_1 \dots \alpha_h = c^{h-1} \cdot \alpha_1,$$

wobei wir mit  $c$  einen echten Bruch bezeichnen.

Da wir bei den hier vorausgesetzten kleinen Bögen die Sinus noch den Bögen proportional setzen können, so dürfen wir auch schreiben

$$\sin \frac{1}{2} \alpha_2 = c \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1; \quad \sin \frac{1}{2} \alpha_3 = c^2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1 \dots \sin \frac{1}{2} \alpha_h = c^{h-1} \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1,$$

so daß zur genaueren Berechnung von  $g$  erhalten wir dann folgende Gleichungen, wenn wir mit  $t_1, t_2, \dots, t_h$  die Dauer der ersten, zweiten usw. bis zur letzten Schwingung, für welche wir  $h = m + n$  setzen, bezeichnen:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 \right)$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} c^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 \right)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$t_h = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \cdot c^{2h-2} \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 \right).$$

Die Summe aller dieser Schwingungsdauern ist gleich der Dauer  $n$  der ganzen Beobachtung. Bilden wir die Summe aller dieser Gleichungen, so erhalten wir deshalb auf der linken Seite  $n$ , und die Gleichung wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \{h + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 (1 + c^2 + c^4 + \dots + c^{2h-2})\}.$$

Die Summe der geometrischen Reihe ist bekanntlich

$$1 + c^2 + c^4 + \dots + c^{2h-2} = \frac{c^{2h} - 1}{c^2 - 1},$$

somit wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ h + \frac{c^{2h} - 1}{c^2 - 1} \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 \right\},$$

worin  $c$  nach dem eben angeführten Gesetze aus zwei aufeinanderfolgenden Amplituden, oder aus der ersten und letzten Amplitude gegeben ist durch

$$c^{2h-1} = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_h}{\sin \frac{1}{2} \alpha_1}.$$

Bei einer Bestimmung von  $g$  darf man weiter den bisher von uns außer acht gelassenen Einfluß der Luft, in welcher das Pendel schwingt, nicht vernachlässigen. Dieser Einfluß der Luft ist ein doppelter. Zunächst wird das Gewicht des Pendels verkleinert, somit das statische Moment, also die bewegende Kraft, verkleinert. Diese Verkleinerung des Gewichtes ist, wie wir später nachweisen werden, gleich dem Gewichte der von dem Pendel verdrängten Luft, wofür wir auch ohne merklichen Fehler das Gewicht der von der Kugel verdrängten Luft einsetzen dürfen. Nennen wir dieses Gewicht  $L$ , so haben wir das von dem Gewichte  $P_1$  der Kugel abzuziehen, und der Nenner unseres Ausdruckes für  $l$ , den wir auf Seite 147 entwickelten, geht dadurch über in

$$p_1 \frac{f}{2} + (P_1 - L) (f + r).$$

Dann aber zweitens, und darauf hat Bessel<sup>1)</sup> zuerst aufmerksam gemacht, wird die Bewegung des Pendels durch den Widerstand der Luft verzögert; das Pendel muß, indem es in der Luft von einer Stelle zur andern geht, die Luft verdrängen, welche den Raum einnimmt, in welchen das Pendel eintritt; dazu muß eine gewisse Arbeit verwendet werden, welche in jedem Momente von der Beschleunigung des Pendels abzuziehen ist; außerdem tritt durch die Reibung in der Luft eine Verminderung der Geschwindigkeit ein, wie wir bei der Untersuchung der Luftreibung nachweisen werden. Diese beiden Umstände kann man dadurch in Rechnung ziehen, daß man annimmt, mit dem Pendel bewege sich gleichzeitig nahezu die den Raum des Pendels ausfüllende Luftmenge. Wir müssen demnach zu dem Trägheitsmomente des Pendels eine dem Trägheitsmomente dieser Luftmenge nahezu gleiche Größe hinzuaddieren. Bezeichnet demnach  $K'$  das Trägheitsmoment, für das wir ohne merklichen Fehler dasjenige der von

1) Bessel, Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandl. d. Berl. Ak. 1826, p. 32 ff.

Platinkugel verdrängten Luftkugel setzen dürfen, und ist  $k$  eine Zahl kleiner wie 1, so wird der Zähler unseres Ausdruckes für  $l$

$$K + kK',$$

oder die Länge des mathematischen Pendels, welches im luftleeren Raume schwingend, dieselbe Schwingungsdauer hat, wird

$$l = \frac{K + kK'}{P_1 \frac{f}{2} + (P_1 - L)(f + r)}.$$

Die Konstante  $k$  hängt von der Länge und Gestalt des Pendels ab; Bessel bestimmte dieselbe, indem er die Schwingungsdauer zweier Pendel verglich, deren einziger Unterschied darin bestand, daß bei dem einen die Kugel aus Messing, bei dem andern aus Elfenbein hergestellt war. Der Durchmesser der Kugeln war bei beiden gleich. Der Wert des Gliedes  $kK'$  ist dann in beiden Fällen derselbe, während  $K$  für das Pendel mit der Messingkugel einen erheblich größern Wert hat als für die Elfenbeinkugel. Eine Vergleichung der Schwingungsdauern der Pendel gestattet demnach, dieses Glied zu eliminieren oder auch den Wert von  $k$  zu berechnen und so die Länge  $l$  des Pendels zu berechnen, welches im luftleeren Raume die gleiche Schwingungsdauer hat<sup>1)</sup>. Mit dem so berechneten  $l$  erhalten wir dann den Wert von  $g$  aus der Gleichung

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2}.$$

Der so berechnete Wert für  $g$  gilt nur für den Ort, an dem man die Messungen durchgeführt hat. Im nächsten Kapitel wird sich ergeben, daß der Wert von  $g$  mit der Erhebung von der Erdoberfläche resp. dem Meeresniveau kleiner wird; wir werden dort auch zeigen, wie wir den beobachteten Wert auf das Meeresniveau reduzieren; wir werden weiter sehen, daß der Wert von  $g$  von der geographischen Breite abhängig ist.

Borda erhielt auf diese Weise für  $g$  in Paris unter  $48^\circ 50' 14''$  n. Br. auf die Meereshöhe

$$g = 980,882^{\text{cm}}.$$

Biot fand unter denselben Verhältnissen

$$g = 980,896^{\text{cm}},$$

zwei Werte, die sich nur um  $0,14^{\text{mm}}$  unterscheiden. Bessel erhielt für Hainberg unter  $55^\circ 42'$  n. B. und auf das Niveau der Ostsee reduziert

$$g = 981,443^{\text{cm}},$$

in Berlin unter  $52^\circ 30' 16''$  n. Br.

$$g = 981,278^{\text{cm}}.$$

Borda sowohl als Bessel haben weiter gezeigt<sup>2)</sup>, daß der Wert von  $g$  fast derselbe ist, aus welcher Substanz man auch die Kugel des Pendels wählt; daraus folgt mit aller Strenge, daß die Schwere auf alle Körper gleichmäßig wirkt, daß alle Körper beim freien Fall dieselbe Beschleunigung erhalten.

<sup>1)</sup> Man sehe Bessel a. a. O. und O. E. Meyer, Poggend. Ann. 142. 1871.

<sup>2)</sup> Bessel, Über die Kraft der Schwere Abh. der Berl. Akad. von 1830.

## § 32.

**Bestimmung von  $g$  mittels des Reversionspendels.** Die im vorigen Paragraphen besprochene Methode zur Bestimmung von  $g$  leidet an einer Unsicherheit, ob nämlich, wie es bei der Berechnung des Trägheitsmomentes vorausgesetzt werden muß, die Kugel am untern Ende des Pendels überall dieselbe Dichtigkeit besitzt. Von dieser Unsicherheit ist die zweite der vorhin erwähnten Methoden frei, welche die Länge des mit dem physischen isochronen Pendels auf experimentellem Wege bestimmt. Die Methode wurde im Anfange des 19. Jahrhunderts von dem Astronomen Bohnenberger zu Tübingen vorgeschlagen und später besonders von dem englischen Naturforscher Kater zur Messung der Länge des Sekundenpendels benutzt. Das Verfahren beruht auf einer besonderen Eigenschaft des Schwingungspunktes des physischen Pendels. Führt man nämlich durch den Schwingungspunkt eines physischen Pendels eine der Aufhängeachse des Pendels parallele Achse und hängt an dieser als Drehungsachse ein Pendel auf, so ist die Schwingungsdauer des Pendels bei dieser Aufhängung genau gleich derjenigen bei der früheren Aufhängung. Da der Abstand des Schwingungspunktes von der Drehungsachse gleich ist der Länge des mathematischen Pendels, welches dieselbe Schwingungsdauer hat wie das physische Pendel, so gibt uns der Abstand der beiden Schneiden die Länge des mathematischen Pendels, mit der wir den Wert von  $g$  zu berechnen haben.

Wir können diese Eigenschaft des Schwingungspunktes leicht nachweisen mit Hilfe des im § 20 abgeleiteten Satzes, daß wenn das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine durch den Schwerpunkt geführte Achse gleich ist  $Pa^2$ , daß es dann in bezug auf eine mit dieser parallele und im Abstand  $z$  von ihr befindliche Achse gleich ist  $P(a^2 + z^2)$ .

Ist nämlich  $P$  die Masse unseres Pendels, und  $z$  bei der ersten Aufhängung der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse, so ist die Länge des mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer

$$l = \frac{P(z^2 + a^2)}{P \cdot z} = z + \frac{a^2}{z}.$$

Sei bei der zweiten Aufhängung der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse gleich  $z'$ , so ist der Abstand der beiden Schneiden gleich  $z + z'$ , und die Länge des mathematischen Pendels

$$l' = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Ist nun die Schwingungsdauer in beiden Fällen dieselbe, so folgt auch

$$l = l'$$

oder

$$z + \frac{a^2}{z} = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Diese Gleichung besteht erstens, wenn  $z = z'$  ist, wenn also der Schwerpunkt des Pendels in der Mitte zwischen den beiden Schneiden liegt. Ist das aber der Fall, so können wir aus der Gleichheit der Schwingungsdauern nur auf die Gleichheit der beiden Werte von  $l$  und  $l'$  schließen.

daß der Abstand der beiden Schneiden  $z + z'$  gleich  $l$  zu sein braucht. Ist  $z$  von  $z'$  verschieden, so ergibt sich durch Auflösung der letzten Gleichung nach  $a^2$

$$a^2 = z z'$$

Fig. 43.

$$l = z + z'.$$

Da aber der Schwerpunkt nicht in der Mitte zwischen beiden Schneiden liegt, so folgt aus der Gleichheit der Schwingungsdauern, daß eine zweite Schneide durch den Schwingungspunkt geht, so daß der Abstand der beiden Schneiden gleich ist der Länge des mathematischen Pendels mit gleicher Dauer der Schwingungen.

Aus diesem Satz gegründete Katersche Pendel (Fig. 43) sind aus einem Messingstabe, der an seinen beiden Enden mit Kanten versehen ist, um bei der Beobachtung der Schwingungen die Methode der Kanten anwenden zu können. Die beiden Schneiden  $S$  und  $S'$  sind für allemal an dem Pendel unveränderlich, und zwar ist so angeordnet, daß das fertige Pendel ungefähr jede Sekunde eine Schwingung vollführt. Unterhalb der einen Schneide  $S'$  ist eine Masse angebracht, welche den Schwerpunkt des Pendels, das gegen in bezug auf die beiden Schneiden symmetrisch eintritt, sicher unterhalb der Mitte von  $SS'$  herab, also näher zu  $S'$  legt. Zwischen den beiden Schneiden ist auf dem Messingstabe eine Masse  $m$  mit Reibung verschiebbar, und außerdem findet sich an einer andern Stelle eine zweite Masse  $m_1$ , durch eine in dem Ringe  $a$  befestigte Mikrometerschraube eine Verschiebung auf und ab erhalten kann.

Man hängt das Pendel zunächst an die eine der Schneiden,  $S$ , und beobachtet in der vorher beschriebenen Weise seine Schwingungsdauer. Darauf hängt man das Pendel um und beobachtet durch eine Verschiebung der Massen  $m$  und  $m_1$ , daß bei beiden Aufhängungen die Schwingungsdauer dieselbe ist. Hat man dies erreicht, so hat man nur mit dem Kathetometer den Abstand der beiden Schneiden zu messen und die so gefundene Länge in die Gleichung zur Berechnung von  $g$  für die Länge  $l$  des Pendels einzusetzen, also in die Gleichung

$$g = \pi^2 \sqrt{\frac{l}{T^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{c^{2h} - 1}{c^2 - 1} \right)}.$$

Die Bedeutung der Zeichen dieselbe ist wie im vorigen Paragraphen.

Es ist selbstverständlich, daß man bei einem solchen Pendel auch die Luftleere auf den luftleeren Raum anbringen muß, was bei der ursprünglichen Form des Reversionspendels einige Schwierigkeit hat. Bei der von Bessel angegebenen Form des Reversionspendels fällt indes der





Einfluß der Luft ganz aus dem Resultate fort<sup>1)</sup>. Es ist das der Fall, wenn man dem Pendel in bezug auf beide Schneiden eine genau symmetrische Gestalt gibt. Man würde das in Fig. 43 mit hinreichender Annäherung erreichen, wenn man über der Schneide  $S$  eine in der äußern Form der untern ganz gleiche Linse anbrächte, die indes hohl und überdies möglichst leicht gearbeitet wäre. Durch diese symmetrische Form wird nämlich erreicht, daß der Schwerpunkt der verdrängten Luftmenge genau in die Mitte der beiden Schneiden fällt, und daß das Trägheitsmoment der verdrängten Luft in bezug auf beide Schneiden genau denselben Wert hat. Nennen wir  $L$  die Masse oder das Gewicht der verdrängten Luft,  $z_1$  den Abstand ihres Schwerpunktes von jeder der beiden Schneiden, und  $K_1$  das Trägheitsmoment der verdrängten Luft, so wird nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen die Schwingungsdauer um die Schneide  $S$

$$t = \pi \sqrt{\frac{P(z^2 + a^2) + k K_1}{g(Pz - Lz_1)}},$$

oder die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem gegebenen die gleiche Schwingungsdauer hat, ist

$$l = \frac{P(z^2 + a^2) + k K_1}{Pz - Lz_1}.$$

Lassen wir das Pendel um die andere Schneide schwingen, so wird

$$l = \frac{P(z'^2 + a^2) + k K_1}{Pz' - Lz_1}.$$

Multiplizieren wir beide Ausdrücke mit den Nennern und subtrahieren, so wird

$$Pl(z - z') = P(z^2 - z'^2) \\ l = z + z'.$$

In dem Falle gibt uns also der Abstand der beiden Schneiden die Länge des mathematischen Pendels, welches im luftleeren Raume dieselbe Schwingungsdauer hat, wie das Reversionspendel.

Eine volle Übereinstimmung der Schwingungsdauern ist nur schwierig zu erreichen; wenn man indes die Lage des Schwerpunktes des Pendels bestimmt und die Schwingungsdauern so nahe gleich macht, daß man annehmen darf, der Schwerpunkt der verdrängten Luft läge auch jetzt in der Mitte zwischen beiden Schneiden, und das Trägheitsmoment der verdrängten Luft habe für beide Aufhängungen denselben Wert, so läßt sich aus der Beobachtung der beiden Schwingungsdauern auch jetzt  $g$  ableiten, oder die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels bestimmen, dessen Länge gleich ist dem Abstände der beiden Schneiden.

Sei die Schwingungsdauer um die Schneide  $S$  gleich  $t_1$ , um die Schneide  $S^1$  gleich  $t_2$ , so ist

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{P(z^2 + a^2) + k K_1}{g(Pz - Lz_1)}} \\ t_2 = \pi \sqrt{\frac{P(z'^2 + a^2) + k K_1}{g(Pz' - Lz_1)}}.$$

1) Bessel, Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandl. der Berl. Ak. 1826. p. 97.

Wir erhalten dann zunächst

$$g \frac{t_1^2}{\pi^2} (Pz - Lz_1) = Pz^2 + Pa^2 + kK_1$$

$$g \frac{t_2^2}{\pi^2} (Pz' - Lz_1) = Pz'^2 + Pa^2 + kK_1$$

und daraus

$$g = \pi^2 \frac{z^2 - z'^2}{t_1^2 z - t_2^2 z' - \frac{L}{P} z_1 (t_1^2 - t_2^2)}$$

und für die Schwingungsdauer des Pendels von der Länge  $z + z'$

$$t = \sqrt{\frac{t_1^2 z - t_2^2 z' - \frac{L}{P} z_1 (t_1^2 - t_2^2)}{z - z'}}$$

Wie man sieht, muß man in dem Falle nur das Gewicht der verdrängten Luft bestimmen. Da  $L$  gegen  $P$  indes schon sehr klein ist, darf man, wenn  $t_1$  und  $t_2$  nahe gleich sind, das davon abhängige Korrektionsglied außer acht lassen.

Bei den letzteren Gleichungen ist zu beachten, daß für  $t_1$  und  $t_2$  die auf unendlich kleine Schwingungen reduzierten Schwingungsdauern zu nehmen sind.

Mit einem solchen Pendel erhielt Kater für die Länge eines Pendels, welches in einer Sekunde seine Schwingung vollführt, unter der Breite von Paris und im Niveau des Meeres

$$l = 99,38606^{\text{cm}}.$$

Daraus ergibt sich der Wert von  $g$  nach der Gleichung

$$1 = \pi \sqrt{\frac{99,38606}{g}}$$

$$g = \pi^2 \cdot 99,38606 = 980,904^{\text{cm}},$$

die Zahl, welche mit der von Biot gefundenen fast genau übereinstimmt.

### §. 33.

**Anwendung des Pendels bei Uhren.** Da die Schwingungen eines Pendels von gegebener Länge eine ganz bestimmte Dauer haben, so kann man sich derselben zu Zeitmessungen bedienen.

Obwohl findet das Pendel seine ausgedehnteste Anwendung bei den Uhren. Die Einrichtung der Uhren ist im wesentlichen folgende. Um die Waage (Fig. 44) ist ein Faden geschlungen, an dessen Ende sich ein Gewicht  $P$  befindet, welches beim Herabsinken bewirkt, daß sich die Waage hebt. Auf die Walze ist ein gezähntes Rad  $H$  mit schräg gezähnten Zähnen aufgesetzt. An einer mit der Achse der Walze parallelen horizontalen Achse  $A$  ist ein Pendel  $ACB$  aufgehängt, welches durch seine Schwingungen einem Stift  $CD$  und einem mit dem Stift verbundenen Hebelarmen  $GE$  eine hin- und hergehende Bewegung erteilt. Die um-

gebogenen Enden des Doppelhakens greifen in die Zähne des Rades. Bewegt sich das Pendel und hebt sich der Haken bei *E*, so sinkt

Fig. 44.



Gewicht, und die Walze dreht sich; während der senkt sich jedoch die andere Seite des Doppelhakens greift in die Zähne des Rades ein und hemmt die Drehung der Walze. Bei der folgenden Schwingung hebt sich diese Seite, die Walze dreht sich wieder, das Ende *E* neuerdings in das Rad eingreift, nicht in denselben, sondern in den folgenden Zahn des Rades. Für je zwei Oszillationen des Pendels dreht sich also die Walze um einen Zahn weiter. Die Walze dreht sich somit während gleicher Zeiten, die den Schwingungen des Pendels gegeben sind, um gleichen Winkel; ist an ihrer Achse ein Zeiger befestigt, der sich vor einem Zifferblatte dreht, so schreitet auch der Zeiger in gleichen Zeiten um gleiche Bogen fort. Hat das Rad z. B. 30 Zähne und vollführt das Pendel der Sekunde eine Schwingung, so wird der Zeiger in einer Minute um das ganze Zifferblatt bewegt und ist der Umkreis desselben in 60 Teile geteilt, entspricht jeder Teilstrich einer Sekunde. Wie man mittels passend angebrachter Räderwerke die Bewegung der Zeiger ändern, Sekunden- und Minutenzeiger bringen kann, ist leicht ersichtlich. Nur ist zu erwähnen, daß die Stellung der Zähne und Haken soartig ist, daß der Haken jedesmal, wenn er gehoben wird, zugleich einen Anstoß erhält, wodurch die Bewegung des Pendels, welche sonst durch die Reibung aufhören würde, erhalten wird.

wird, zugleich einen Anstoß erhält, wodurch die Bewegung des Pendels, welche sonst durch die Reibung aufhören würde, erhalten wird.

Um die Bewegung der Uhr zu regulieren, ist die Linse *B* an der Pendelstange verschiebbar angebracht; ein Heraufziehen beschleunigt, Herabziehen verzögert die Bewegung. Dadurch ist es möglich zu wirken, daß das Pendel gerade in der gewünschten Zeit eine Schwingung vollführt.

### § 34.

**Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze.** Es wird im Laufe unserer Untersuchungen häufig unsere Aufgabe sein, Kräfte zu messen, welche zwar den verschiedensten Ursprung haben, sich aber durch Anziehungen und Abstoßungen äußern. Wir haben dann zwei Mittel, die Kräfte zu messen: entweder halten wir der Kraft durch eine in entgegengesetzter Richtung an ihrem Angriffspunkte wirkende das Gleichgewicht; diese Methode gibt meist nur angenähert richtige Resultate; oder wir messen die Beschleunigung, welche sie einer bekannten Masse *m* erteilt. Bezeichnet wir diese Beschleunigung mit *G*, so ist nach § 11 und 12 die Kraft gegeben durch

$$F = G \cdot m.$$

Zur Bestimmung der Beschleunigung ist das genaueste Mittel, ein Pendel unter dem Einflusse der Kraft schwingen zu lassen. Sind die Kräfte

mer festen Richtung parallel, oder sind sie, wie die Schwerkraft, nach einem festen Zentrum gerichtet, welches hinlänglich weit entfernt ist, so daß man sie in bezug auf ein kleines Pendel als parallel ansehen kann, so beobachtet man die Schwingungsdauer, welche dasselbe unter Wirkung dieser Kräfte annimmt. Nach § 27 ist diese Schwingungsdauer gleich

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{D}},$$

wann  $K$  das Trägheitsmoment des Pendels und  $D$  das Drehungsmoment bedeutet, welches die wirksame Kraft dem Pendel in einer zur Richtung der Kraft senkrechten Lage erteilt. Die Beschleunigung, welche diese Kraft je der Masse erteilt, die in der Abstandseinheit von der Drehungsachse die Masse des Pendels ersetzt, ist dann

$$G = \frac{D}{K},$$

und da  $K$  die Masse ist, der jene Beschleunigung erteilt ist, so erhalten wir für die Größe der Kraft

$$F = G K = D,$$

so daß also schon der Nenner des Ausdrucks unter dem Wurzelzeichen im Ausdruck für die Schwingungsdauer uns die gesuchte Größe der Kraft gibt, indem wir den Ausdruck für  $t$  nach  $D$  auflösen

$$D = \frac{\pi^2 K}{t^2}.$$

Ändert sich die Größe der Kraft mit dem Abstände vom anziehenden Mittelpunkte, so können wir durch Annäherung oder Entfernung des Pendels von demselben auch das Gesetz ableiten, nach welchem die Kraft sich ändert.

Die Pendelgesetze finden noch weitere Anwendung: wir werden mehrheitlich schwingende Bewegungen von Körpern um eine bestimmte Gleichgewichtslage beobachten, deren Schwingungsdauer von der Größe der Amplitude unabhängig ist. Wir schließen daraus stets, daß die Kraft, welche diese Schwingungen veranlaßt, dem Ausschlagswinkel proportional ist, oder daß bei einem Ausschlagswinkel  $\alpha$  diese in der Abstandseinheit von der Drehungsachse angreifende Kraft gleich  $F' \cdot \alpha$  ist. Die Kraft  $F'$ , welche das auf den schwingenden Körper wirkende Drehungsmoment gibt, wenn der Wert von  $\alpha$  gleich 1 wird, also auch den in dieser Lage auf die Masse, welche die Masse des Körpers in der Abstandseinheit von der Drehungsachse ersetzt, wirkenden Druck bedeutet, erhalten wir ebenfalls aus der Beobachtung der Schwingungsdauer  $t$ . Ist  $K$  das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers, so ist gerade wie in den vorher besprochenen Fällen

$$F' = \frac{\pi^2 K}{t^2}.$$

Es ergibt sich das aus der Überlegung, daß die Kraft  $F'$  in diesem Falle ganz an die Stelle des Gewichtes an dem unter der Wirkung der Schwerkraft schwingenden Pendel tritt, indem ja bei diesem die Kraft bei dem Ausschlagswinkel  $\alpha$ , so lange derselbe nur klein ist, gleich  $g P \cdot \alpha$  ist. Die Kraft  $F'$  bewirkt also in dem jetzt betrachteten Falle die schwingende Be-

wegung, wie die Kraft  $gPz$  bei dem unter Wirkung der Schwere schwingenden Pendel; beide müssen also auf dieselbe Weise aus der beobachteten Schwingungsdauer abgeleitet werden.

Ebenso benutzen wir die Pendelgesetze in manchen Fällen zu einer experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente, wo die Formen oder die Verteilung der Massen der schwingenden Körper eine Berechnung derselben nicht zulassen. In welcher Weise das geschehen kann, möge kurz an einem Beispiele angedeutet werden. Man hänge an einem Metalldrahte einen Stab in seiner Mitte so auf, daß der Stab horizontal schwebt. Ist der Draht oben ganz fest eingeklemmt, so nimmt der Stab eine bestimmte Lage an; stößt man ihn an, so vollführt er in horizontaler Ebene Schwingungen um seine Gleichgewichtslage, deren Dauer von der Größe der Schwingungen unabhängig ist. Es ergibt sich somit, daß auf den Stab eine Kraft wirkt, welche der Ablenkung des Stabes von der Gleichgewichtslage proportional ist; dieselbe rührt, wie wir später nachweisen werden, daher, daß der Draht um eine in ihm liegende Achse gedreht, daß er tordiert ist. Bezeichnen wir diese Kraft, wenn die Ablenkung gleich Eins ist, mit  $F$  und das Trägheitsmoment des Stabes und Drahtes in bezug auf die Drehungsachse mit  $K$ , so ist nach der vorhin gemachten Bemerkung

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{F}}.$$

Um  $K$  experimentell zu bestimmen, hängen wir etwa mit Hilfe einer Schlinge von ganz feinem Draht an den Stab an jeder Seite des Aufhängedrahtes und in gleichen Abständen  $r_1$  von demselben ein Gewicht, dessen Masse mit der der Drahtschlinge gleich  $p$  sei. Da jetzt das Trägheitsmoment der schwingenden Masse ein anderes ist, so wird auch die Schwingungsdauer eine andere; bezeichnen wir das Trägheitsmoment nach dem Anhängen der Gewichte mit  $K_1$ , so wird die Schwingungsdauer sein

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{K_1}{F}}.$$

Das Trägheitsmoment  $K_1$  ist gleich dem frühern Trägheitsmomente  $K$  plus dem Trägheitsmomente der angehängten Gewichte. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment jedes der angehängten Gewichte in bezug auf eine durch den Schwerpunkt der Gewichte gehende vertikale Achse mit  $pa^2$ , so ist das Trägheitsmoment desselben in bezug auf die Drehungsachse des horizontalen Pendels gleich  $p(a^2 + r_1^2)$ . Denn jedes der Gewichte hängt sich so, daß sein Schwerpunkt senkrecht unter dem Aufhängepunkte liegt; die Verbindungslinie des Aufhängepunktes mit dem Schwerpunkte ist also jene Achse in bezug auf welche das Trägheitsmoment des Gewichtes gleich  $pa^2$  ist. Da diese Achse dem Aufhängedrahte parallel und im Abstände  $r_1$  von demselben befindlich ist, so ist das Trägheitsmoment jedes der Gewichte in bezug auf den Aufhängedraht gleich  $p(a^2 + r_1^2)$ . Damit wird

$$K_1 = K + 2p(a^2 + r_1^2)$$

und

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2p(a^2 + r_1^2)}{F}}.$$

gen dieselben Gewichte in einem Abstände  $r_2$  von der Drehungs-  
d beobachten die Schwingungsdauer  $t_2$ , dann ist

$$t_2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2p(a^2 + r_2^2)}{F}}.$$

beobachteten Schwingungsdauern liefern die Gleichungen

$$F \cdot t^2 = \pi^2 K$$

$$F \cdot t_1^2 = \pi^2 (K + 2pa^2 + 2pr_1^2)$$

$$F \cdot t_2^2 = \pi^2 (K + 2pa^2 + 2pr_2^2).$$

ren wir von der zweiten die dritte Gleichung, so wird

$$F(t_1^2 - t_2^2) = \pi^2 2p(r_1^2 - r_2^2)$$

$$F = \pi^2 \frac{2p(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \dots \dots (A),$$

wir diesen Wert von  $F$  in die erste Gleichung setzen und nach  
n

$$K = t^2 \cdot \frac{2p(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \dots \dots (B).$$

erhalten somit den Wert von  $K$  ausgedrückt in lauter bekann-  
n.

Gleichung (A) zeigt gleichzeitig, daß wir aus so geführten Be-  
n auch direkt die Größe der bewegenden Kraft ableiten können,  
wir den Wert des Trägheitsmomentes  $K$  zu berechnen haben.

sieht demnach, wie das Pendel in der einen oder andern Form  
perimentelle Physik einer der wichtigsten Apparate ist; wir werden  
zur Messung von Kräften von demselben Gebrauch machen.

### § 35.

**Erhaltung der Rotationsebene.** In gleicher Weise, wie ein Körper  
stehenden Bewegung der Änderung der Bewegungsrichtung in seiner  
n gewissen Widerstand leistet, welcher sich in der Zentrifugal-  
rt, so strebt auch ein rotierender Körper in der Ebene, in welcher  
zu verharren. Jeder Teil des Körpers beschreibt nämlich bei seiner  
einen ebenen Kreis und in jedem Augenblicke besitzt derselbe  
der Tangente des Kreises gerichtete Geschwindigkeit. Wenn man  
rotierenden Körper so drehen will, daß die Ebene, in der sich  
kt desselben bewegt, mit ihrer ursprünglichen Lage einen Winkel  
muß ebenfalls die Richtung der Bewegung geändert werden.

bedarf es aber ebenso einer Kraft, wie zu der Änderung der  
richtung in der Rotationsebene. Wirken demnach keine äußeren  
 können solchen rotierenden Körper ein, so bleibt er in seiner Lage,  
 von den einzelnen Punkten beschriebenen Kreise stets derselben  
teil bleiben.

steht dieses sehr deutlich an einem schmalen Rade oder einer  
Scheibe, welche sofort umfallen, wenn man sie ruhend auf dem



Rande vertikal aufstellen will, welche aber in der vertikalen Ebene rollen, wenn man sie in rasche Drehung um eine horizontale Achse versetzt. Dasselbe zeigt sich in dem Beharren der sogenannten freien Achsen rotierender Körper. Dreht sich nämlich der Körper um eine Achse, um welche die Masse desselben ganz symmetrisch verteilt ist, so zwar, daß die Schwer-

Fig. 45



punkte aller einzelnen auf der Achse stehenden Schichten auf der Achse liegen, da übt die Zentrifugalkraft nach allen Richtungen hin einen gleichen Zug auf die Achse aus, ihre Wirkung hebt sich also auf. Eine solche Achse, welche durch die Zentrifugalkraft gar keinen Zug erfährt, nennt man eine freie Achse. Daß eine solche Achse ihre Richtung im Raume beibehält, sieht man sehr deutlich an dem Bohnenbergerschen Apparate. Derselbe besteht aus drei ineinander liegenden Ringen, in deren Mitte eine Kugel in rasche Rotation versetzt werden kann. Der äußerste Ring (Fig. 45) ist fest vertikal aufgestellt. Der zweite Ring *B* kann sich in dem ersten um eine vertikale Achse frei drehen. Der dritte Ring *C* kann sich in dem zweiten um eine Achse frei drehen, welche mit der Drehungsachse des zweiten Ringes einen rechten Winkel bildet, und die Kugel endlich ist um eine auf dieser senkrecht stehende Achse drehbar. An der Achse der Kugel

ist eine kleine Rolle angebracht, um welche ein Faden vielfach geschlungen werden kann. Zieht man den Faden rasch ab, während man den Ring festhält, so nimmt die Kugel eine rasche Rotation um ihre Achse an.

Man sieht, durch diese dreifache Aufhängung kann sich die Achse der Kugel ganz frei nach allen Richtungen drehen; rotiert die Kugel nicht, bringt auch der leiseste Druck eine Drehung der Achse hervor. Hat man aber die Kugel mittels raschen Abziehens der Schnur in schnelle Rotation versetzt, so mag man den Apparat drehen und wenden wie man will, die Achse der Kugel bleibt sich immer parallel. Sehr deutlich sieht man dies, wenn man den Apparat auf der Zentrifugalmaschine befestigt und die Maschine dann in langsame Rotation versetzt; die Richtung der Drehungsachse wird dadurch nicht geändert.

Ganz dieselbe Erscheinung zeigt sich bei dem bekannten Kinderspielzeug, dem Kreisel. Wenn derselbe nicht rotiert, so fällt er, auf die Spitze gestellt, sofort um, weil er sich dann im Zustande des labilen Gleichgewichts befindet. Rotiert er dagegen, so fällt er nicht um, selbst wenn die Achse gegen die Vertikale geneigt ist, also der Kreisel durch die Schwerkraft umgeworfen würde, wenn er nicht rotierte.

Wie groß der Widerstand ist, den ein rotierender Körper einer Änderung der Rotationsebene entgegensetzt, fühlt man sehr deutlich, wenn man versucht, die Achse der rotierenden Kugel im Bohnenbergerschen Apparat



drehen. Noch auffallender zeigt es sich an einem Versuche, welcher Hanikus Fessel auf die Konstruktion eines besonderen Apparates, Fesselschen Rotationsapparates, führte.

Man man eine an ihrem Rande mit einem starken Messingwulste versehene Scheibe auf einer Achse befestigt, welche wie die Bohnenbergergabel in einem Ringe angebracht ist, nun die in sehr rasche Rotation versetzt und dann in der in Fig. 46 bezeichneten Weise an einem Stiele aufhängt, so sinkt Ring und Scheibe fort herab, sondern bleibt frei schweben, weil das Sinken eine Änderung der Rotationsebene bewirkt, welcher die Rotation entgegenwirkt, das Gewicht des Apparates wegen der Scheibe ein ziemlich bedeutendes ist.

Gegen sieht man an diesem Apparate sowohl als auch an einem Kreisel eine andere auf den ersten Blick auffallende Erscheinung; die Scheibe dreht sich um den vertikalen Stiel in einer der Rotation der Scheibe in ihrem Ringe entgegengesetzten Richtung, während ein langsames Sinken der Drehungsachse statt-

Fig. 46.



Fig. 47

allseitiger Darstellung dieser Erscheinungen dient der Fesselsche Rotationsapparat (Fig. 47). Die Scheibe des Apparates von Fig. 46 ist nach

Bohnenbergerschen Aufhängeapparat in einem zweiten Ringe befestigt, an welchem sich ein Stiel befindet, welcher in der Gabel G um eine horizontale Achse drehbar befestigt ist. Die Gabel befindet sich in der vertikalen im Fuß des Apparates. An der Ver-  
 2 des Stieles können Gewichte angehängt werden, um die rotierende Scheibe ganz oder zum Teil zu äquilibrieren. Hängt die Scheibe ganz frei, so rotiert sie, so sieht man eine Drehung der Scheibe mit den Ringen um die vertikale Achse in dem eben

angegebenen Sinne; ist sie ganz äquilibrirt, so hängt die Scheibe ganz frei, wenn sie nicht rotierte; ist dagegen das Übergewicht auf der einen Seite des Stieles, so dreht sich die ganze Vorrichtung in einer der angegebenen entgegengesetzten Richtung um die vertikale Achse, in der Richtung der Rotation der Scheibe.

Da alle diese Erscheinungen nur Folge der tangentialen Geschwindigkeiten der einzelnen Teile der Scheibe sind, hat Poggendorff in sehr einfacher Weise gleich nach dem Bekanntwerden des Fesselschen Apparates



Wird nämlich die Drehungsachse der rotierenden Scheibe zuerst horizontal gehalten, wie Fig. 46, und die Scheibe in der Vertikalebene rotieren gelassen, indem man den zweiten Ring parallel dem ersten feststellt, wird beim Loslassen der Scheibe, wenn sie nicht durch ein Gewicht in Gleichgewichte gehalten wird, zunächst die Schwere einwirken und die Vorrichtung ein wenig sinken machen.

Durch dieses Sinken tritt eine geringe Drehung der Scheibe um eine horizontale Achse ein, und dadurch wird die Bewegung der Teilchen der Scheibe vorn, wo sie aufsteigen, und hinten, wo sie hinuntersinken, gestört. Dieselben haben eine vertikale Geschwindigkeit, die Scheibe nimmt dagegen eine etwas geneigte Lage an. Die vertikalen Geschwindigkeiten der Teilchen treten daher vorn, wo sie aufsteigen, zur Rechten, hinten, wo sie absteigen, zur Linken aus der Scheibe heraus. Da nun die Teilchen der Scheibe ihnen nicht mehr ganz folgen können, so üben sie einen Zug senkrecht auf die Scheibe aus, vorn nach rechts hin, hinten nach links hin. Beide Wirkungen unterstützen sich, und die Folge davon ist eine Drehung der ganzen Vorrichtung um die vertikale Achse, und zwar von oben gesehen umgekehrt, wie die Bewegung eines Uhrzeigers stattfindet.

Sobald aber diese Drehung der Vorrichtung um die vertikale Achse beginnt, wird auch die Bewegung der Teilchen unten, wo sie sich nach vorn, oben, wo sie sich nach hinten bewegen, gestört. Die augenblickliche Geschwindigkeit derselben tritt unten nach links und oben nach rechts aus der augenblicklichen Stellung der Scheibe hervor. Zerlegen wir sie in zwei Komponenten, eine in der Richtung der augenblicklichen Bewegung der Scheibe und eine darauf senkrechte, so sieht man sofort, wie dadurch an dem tiefsten Punkte des Scheibendurchmessers ein Zug nach links und an höchsten ein Zug nach rechts entsteht. Beide Kräfte zusammen müssen die Drehungsachse der Scheibe ein wenig heben, also in der entgegengesetzten Richtung bewegen, in welcher die Schwere ursprünglich das Bestreben hatte, die Achse zu drehen.

Ist dagegen dem Gewichte der Vorrichtung durch ein gleiches Gegengewicht das Gleichgewicht gehalten, so fehlt der erste Impuls, der die Scheibe ein wenig dreht, die Wirkung der Schwere, deshalb tritt gar keine Bewegung ein.

Ist aber das Gegengewicht schwerer, so ist die Wirkung eine ganz entgegengesetzte, wie eine der vorigen ganz analoge Betrachtung unmittelbar ergibt.

Die Bewegung der Rotationsachse des Kreisels auf einem Kegel in die Vertikalrichtung wird man sich leicht auf die gleiche Weise ableiten können.

### § 36.

**Foucaults Pendelversuch.** Ein schwingendes Pendel hat eben das Bestreben, stets in derselben Vertikalebene zu schwingen, indem man an diesem die einzelnen Teile in ebenen Kurven, in Kreisbogen, sich bewegen. Wenn daher keine seitliche Einwirkung auf das Pendel stattfindet, so wird es stets in derselben Ebene schwingen.

Diese Eigenschaft des Pendels hat der französische Physiker Foucault benutzt, um einen experimentellen Beweis für die Achsendrehung

tern. Man denke sich ein Pendel gerade über dem Pole der Nordpole, aufgehängt und das Pendel in einem Meridiane

Das Pendel bleibt sich mit seinen Schwingungen stets parallel aber, mit dem es sich anfänglich parallel hin und her schüttelt unter dem Pendel in 24 Stunden vollständig im Kreise

Beobachter muß daher nach und nach die Richtung der Pendel von der des Meridians abweichen sehen und, da er die Drehung nicht wahrnimmt, glauben, daß sich die Pendelebene in entgegengesetzte Richtung drehe. Es muß daher den Anschein haben, als wenn sich die Erde mit der Sonne drehe.

Je nach dem Orte der Erde ist das Verhältnis nicht ganz so einfach, die Pendelebene nicht ganz ihre Lage beibehalten, wie unter dem Einfluß der Rotation der Erde die Richtung der Schwere sich ändert; dort, wo eine Drehung der Pendelebene eintreten muß, gibt folgende

Die Lage der Pendelebene in einem bestimmten Momente ist durch die Richtung der Vertikalen und durch die Richtung der

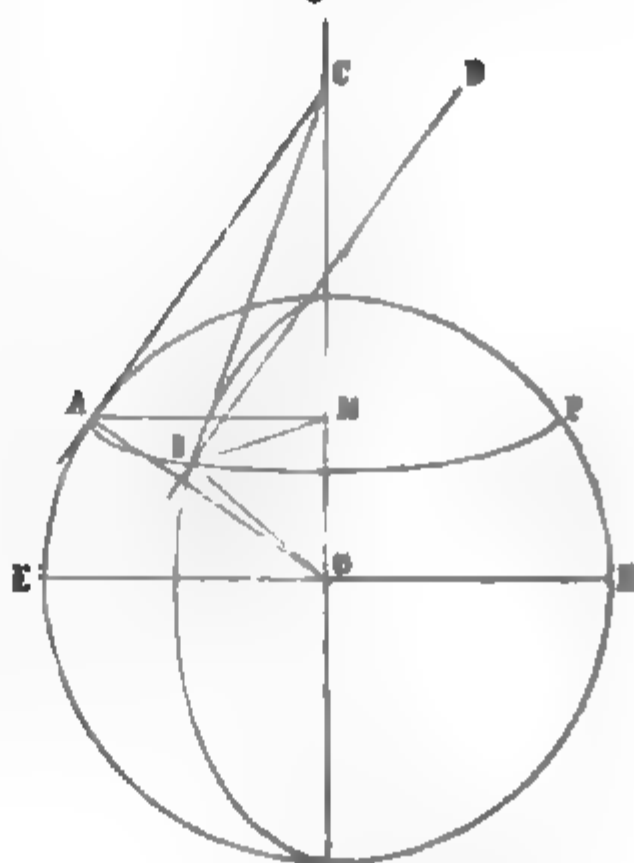
Tangente, die wir an den Ort des von dem Pendel beschriebenen Kreisbogens legen, also den Winkel, den diese mit der Vertikale bildet. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, das Pendel sei in dem betrachteten Momente genau in den Meridian gelegten Ort, so würde  $OAC$  (Fig. 48) die Lage der Pendelebene darstellen, wenn  $A$  einen Ort auf dem Äquator,  $P$  und  $O$  den Mittelpunkte bedeutet. Dreht sich

$CO$  als Achse, so ändert sich die Richtung der Vertikalen stetig, die Drehung der Vertikalen ändert die Lage der Pendelebene, sie dreht sich immer um die augenblickliche Vertikale als die Gleichgewichtsachse infolge der nach der Richtung der Vertikalen gerichteten Wirkung der Schwerkraft und her schwingen muß.

Die Erde so weit gedreht, daß der Punkt  $A$  auf dem Parallel gekommen ist, so hat sich die Vertikale um den Winkel  $AOB$  gedreht, die wir indessen nicht wahrnehmen, da wir uns mit der Erde bewegen.

Die andere Richtung dagegen, welche uns die Lage des Pendels zeigt, ist die horizontale Komponente seiner Bewegung, die wirkt gar nicht ein, so daß die horizontale Richtung, das heißt die an den Ort des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente, im Raume dieselbe Richtung beibehalten muß. Denn ein Verlassen dieser Richtung ist nur möglich, wenn auf das schwingende Pendel in der Ebene irgend eine der horizontalen parallelen Kraft einwirkte.

Fig. 48.



Es muß deshalb im Punkte  $B$  die zweite Richtung, welche die Lage der Pendelebene bestimmt, die an den tiefsten Punkt des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente  $BD$  der ursprünglichen Richtung  $AC$  parallel sein. Wir setzten ursprünglich voraus, das Pendel schwinde in der durch den Meridian gelegten Vertikalebene. Da diese Ebene, resp. die Richtung des Meridians, sich gedreht hat, so muß die an den untersten Punkt des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente mit der Richtung des Meridians im Punkte  $B$  einen Winkel  $\beta$  bilden, der, wenn  $\varphi$  die geographische Breite und  $\alpha$  der Winkel  $AB$  ist, den der Punkt  $A$  auf seinem Parallelkreis durchlaufen hat, wie sich leicht zeigen läßt, gegeben ist durch

$$\beta = \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Dieser Ausdruck für die Größe des Winkels  $\beta$  ergibt sich unmittelbar aus dem § 15 bewiesenen Satze über die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen. Wir können nämlich darnach die um die Erdachse  $AO$  stattfindende Drehung der Erde in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen, und zwar in die beiden Komponenten, die wir auch eben gesondert betrachtet haben. Die beiden Komponenten sind die Drehung um eine zu  $AO$  senkrechte mit  $AC$  parallele Achse und um  $AO$  als Achse. Die erstere Drehung bringt die Vertikale in die Richtung  $BO$ , oder bringt die Ebene  $AOC$  in die Lage  $DBO$ . Die zweite gleichzeitig mit der ersten in jedem Momente um  $AO$  stattfindende Drehung dreht dann die Ebene aus der Lage  $DBO$  in die Lage  $CBO$ . Der Winkel  $CBD$ , den die Pendelebene  $DBO$  mit der Meridianebene  $CBO$  bildet, ist demnach gleich der zweiten Komponente der Drehung. Nach § 15 ist die Komponente einer Drehung um eine Achse, welche mit der gegebenen Drehungsachse einen Winkel  $\psi$  bildet, gleich der gegebenen Drehung multipliziert mit  $\cos \psi$ . Die Achse  $AO$  bildet nun, wenn wir die geographische Breite  $AE$  des Beobachtungsortes mit  $\varphi$  bezeichnen, mit der gegebenen Drehungsachse  $AC$  einen Winkel  $90 - \varphi$ . Einer Drehung  $\alpha$  um die Achse  $CO$  entspricht also eine Komponente der Drehung um die Achse  $AO$  der Winkel

$$\beta = \alpha \cdot \cos(90 - \varphi) = \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Oder der Winkel der scheinbaren Drehung der Pendelebene ist gleich dem Produkte des Winkels, um den sich die Erde in der Zeit gedreht hat, in den Sinus der Breite.

Am Pole ist  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\sin \varphi = 1$ ,  $\beta = \alpha$ ; am Pole dreht sich die Pendelebene ebenso rasch wie die Erde, am Äquator ist  $\varphi = 0$ ,  $\sin \varphi = 0$ ,  $\beta = 0$ , dort dreht sich die Pendelebene gar nicht, wie sich auch unmittelbar daraus erkennen läßt, daß am Äquator alle an den Meridian gehenden Tangenten der Erdachse und somit einander parallel sind.

Für Berlin ist  $\beta = \alpha \cdot \sin 52^\circ 30' = 0,79335 \alpha$ .

Für Aachen  $\beta = \alpha \cdot \sin 50^\circ 46' 48'' = 0,77459 \alpha$ .

In 24 Stunden dreht sich somit, da  $\alpha$  dann gleich  $360^\circ$  ist, das Pendel

zu Berlin um  $285^\circ 36'$ ,

zu Aachen um  $278^\circ 51' 43''$ ,

oder zu einer ganzen Umdrehung braucht das Pendel

in Berlin 30 Stunden 15 Minuten

und

in Aachen 30 Stunden 59,5 Minuten.

Genau ausgeführte Versuche haben wirklich diese von der Theorie geforderten Zahlen geliefert und haben somit einen experimentellen Beweis für die Achsendrehung der Erde gegeben.

Am bequemsten werden die Versuche in hohen Räumen ausgeführt. Man befestigt an einem langen feinen Drahte ein schweres Gewicht und stellt um den Punkt, auf welchen das Pendel zeigt, wenn es vertikal herabhängt, als Mittelpunkt einen geteilten Kreis. Man sieht, wie nach und nach das schwingende Pendel über immer andere Teilstriche geht, indem sich seine Schwingungsebene scheinbar mit der Sonne dreht.

### Drittes Kapitel.

#### Von der allgemeinen Gravitation.

##### § 37.

**Allgemeine Anziehung. Kepplers Gesetze.** In den beiden vorigen Kapiteln haben wir mehrfach gesehen, daß alle Körper auf der Erde von Kräften angegriffen werden, die wir ihr Gewicht nannten, und welche an jeder Stelle senkrecht gegen den Horizont wirken. Es hat demnach den Anschein, als wenn die ganze Masse der Erde auf die an ihrer Oberfläche befindlichen Körper eine Anziehung ausübe, welche überall merklich gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet ist, und welche bis zu irgend einer Höhe über dem Boden wirksam ist. Durch Induktion schließen wir daraus, daß sich diese Anziehung über jene Grenzen ausdehnt, welche wir erreichen können, daß sie sich bis zu den Sternen erstreckt, aber mit der Entfernung an Größe abnehmend.

Andererseits dürfen wir mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen, daß alle Gestirne ähnliche Erscheinungen darbieten, daß es auf allen eine gegen den Mittelpunkt gerichtete Schwere gebe, die bis zu einer gewissen Entfernung auf alle anderen Himmelskörper wirkt. Diese Schlüsse waren es, welche Newton dahin führten, anzunehmen, daß alle Gestirne sich anziehen, daß ihre Bewegungen durch die wechselseitige Einwirkung derselben aufeinander bestimmt seien, und daß das ganze Weltall durch Kräfte regiert werde, die aus einer einzigen Quelle fließen, aus der Anziehung der Materie.

Ist dem so, so müssen die Bewegungen der Gestirne äußerst verwickelter Natur sein, weil ihre Zahl äußerst groß ist, und alle aufeinander wirken. Indes ist es leicht ersichtlich, daß sich das Problem mit einer guten Annäherung einfacher stellt. Die Himmelskörper teilen sich in zwei Klassen: die eine umfaßt die Fixsterne, welche sich in so großen Entfernungen von der Sonne und Erde befinden, daß man ihren Einfluß vernachlässigen kann; die andern stehen sich näher, sie wirken einer auf den andern ein und bilden eine abgeschlossene, von Fixsternen freie Gruppe;

es sind dies die Sonne nebst ihren Planeten. Wir haben uns zunächst mit der Wechselwirkung dieser aufeinander zu befassen. Vergleichen wir nun die einzelnen Körper dieser Gruppe miteinander, so erkennen wir sofort, daß die Sonne wegen ihrer überwiegenden Größe in dem System auch einen überwiegenden Einfluß haben muß, derart, daß ein Planet wie unsere Erde von der Sonne sehr stark angezogen werden muß, von den übrigen so unbedeutend, daß wir auch deren Einfluß zunächst vernachlässigen dürfen. Wir betrachten daher die Sonne als den einzigen anziehenden Mittelpunkt in unserem Systeme und nehmen an, daß die übrigen Planeten unabhängig voneinander sich nach denselben Gesetzen bewegen jeder so, als sei er allein der Anziehung der Sonne unterworfen. Wir haben dann, um die Gesetze der Anziehungskraft zu erhalten, nur die Aufgabe die Bewegung der einzelnen Planeten um die als fest betrachtete Sonne zu untersuchen, und aus dieser nach den bisher entwickelten Gesetzen auf diejenigen zurückzuschließen, nach welchen die Kraft wirksam ist.

Die Gesetze, nach denen sich die einzelnen Planeten um die Sonne bewegen, sind im Anfange des 17. Jahrhunderts von dem großen deutschen Astronomen Keppler aus den sorgfältigen und langjährigen Beobachtungen Tycho de Brahes abgeleitet worden und werden daher nach ihm die Kepplerschen Gesetze genannt<sup>1)</sup>. Es sind folgende drei:

1. Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen um die Sonne welche in dem einen Brennpunkte der Ellipsen steht.

2. Die von dem Radius vector jedes Planeten beschriebenen Flächenräume verhalten sich wie die Zeiten, in denen sie beschrieben sind.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von der Sonne.

Auf diese Gesetze gründete Newton den Nachweis von der Existenz einer zwischen verschiedenen Massen tätigen, anziehenden Kraft und die Entwicklung der Gesetze, nach welchen dieselbe sich ändert.

### § 38.

Die Anziehung ist gegen die Sonne gerichtet. Sei  $O$  (Fig. 38) das Zentrum der Sonne, und  $A$  das eines Planeten in einem bestimmten Augenblicke. Während einer sehr kleinen Zeit beschreibt letzterer das Stück  $AB$  seiner Bahn. Wenn nun keine äußere Kraft auf ihn einwirkt, so würde er in einer der ersten folgenden und ihr folgenden Zeit das gleiche Stück  $BC$  in der Richtung seiner Bewegung zurücklegen. Anstatt dieses legt jedoch der Punkt  $A$  in der auf die erste folgenden und ihr folgenden Zeit den Weg  $BD$  zurück. Man muß daraus schließen, daß auf ihn eine Kraft einwirkt, welche seine Bewegungsrichtung ändert. Um die Richtung dieser Kraft zu erhalten, bedenken wir, daß nach dem zweiten Kepplerschen Gesetze die Fläche

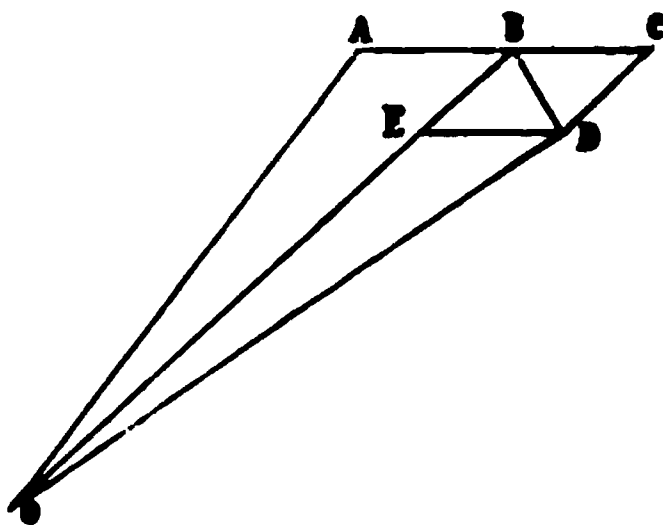
$$ABO = BDO = CBO$$

sein muß. Soll aber das Dreieck  $BDO$  gleich dem Dreieck  $CBO$

1) Man sehe Poggendorff, Geschichte der Physik. Leipzig 1879, p

1  $ABO$  ist, weil  $AB = BC$  ist, und die Spitzen der Dreiecke  $ABO$  und  $BCO$  so müssen die Spitzen  $C$  und  $D$  der beiden Dreiecke  $BDO$  auf einer mit  $BO$  parallelen Linie liegen, da sie die Seite  $BO$  gemeinsam haben. Konstruieren wir das Parallelogramm  $ABDC$ , so sehen wir, daß auf  $B$  eine Kraft wirken muß, welche  $B$  durch den Raum  $BE$  zu durchlaufen, vermöge seiner anfänglichen Geschwindigkeit sich nach  $BC$  bewegt haben würde. Diese Kraft ist aber nach dem Zentrum  $O$  gerichtet. Es ist also bewiesen, daß die Planeten, da sie sich in geraden Linien bewegen, einer stetig wirkenden Kraft unterworfen sind, und daß aus dem zweiten Keplerschen Gesetze, nach welchem die von den Radien vectoren in gleichen Zeiten überlaufenen Flächenräume gleich sind, hervorgeht, daß diese Kraft zum Centrum der Sonne gerichtet sein muß. Das ist der erste Teil der Entwicklung.

Fig. 49.



## § 39.

Entwicklung des Anziehungsgesetzes. Das erste Keplersche Gesetz bestimmt die Gestalt der Planetenbahnen, es erklärt sie für Ellipsen, deren Exzentrizitäten verschieden sind. Nehmen wir als einen bestimmten Fall an, daß die Exzentrizität gleich Null sei, daß also die elliptische Bahn in eine Kreisbahn übergehe. In Wirklichkeit ist das zwar für keinen Planeten der Fall; da jedoch die Exzentrizität der Planetenbahnen klein ist, so wird unsere Annahme nicht weit von der Wahrheit entfernt sein, und wir werden durch unsere Entwicklungen eine erste Annäherung erhalten. Den gleichen Weg schlug Newton ein.

Wenn der Planet sich in einer kreisförmigen Bahn bewegt, in der das Zentrum der Sonne befindet, müssen die einzelnen Bogen, welche der Planet in gleichen Zeiten durchläuft, gleich sein, da diese Gleichheit aus dem zweiten Keplerschen Gesetze für die von den Radien beschriebenen Flächenräume, die Sektoren, bestehen muß. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Planet in seiner Bahn bewegt, ist demnach eine gleichbleibende während der ganzen Umlaufzeit. Wir haben somit hier einen Fall einer gleichförmigen Bewegung, wie wir ihn in dem Paragraphen über die Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft betrachtet haben.

Zentripetalkraft hatten wir den Ausdruck

$$F' = \frac{m \cdot v^2}{R},$$

von der Zentripetalkraft hervorgebrachte Beschleunigung

$$\frac{F'}{m} = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

Radius des von dem bewegten Körper beschriebenen Kreises,  $T$  die Umlaufzeit bedeutet. Nehmen wir für  $R$  den Radius der Planeten-



bahn und für  $T$  seine Umlaufszeit, so haben wir also hier den Ausdruck für die Beschleunigung, welche der Planet gegen die Sonne erhält, also die Anziehung der Sonne auf die Einheit der Masse des Planeten, in dem Abstände  $R$  von der Sonne.

Für die verschiedenen Planeten in den Abständen  $R, R', R''$  von der Sonne erhalten wir aus den Umlaufszeiten  $T, T', T''$  für die Größe der anziehenden Kraft der Sonne auf die Einheit der Masse in den Entfernungen  $R, R', R''$  die Ausdrücke

$$G = \frac{4\pi^2 R}{T^3}, \quad G' = \frac{4\pi^2 R'}{T'^3}, \quad G'' = \frac{4\pi^2 R''}{T''^3}.$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetze verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen, so daß wir haben

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{R'^3} = \frac{T''^2}{R''^3} = K,$$

also

$$T^2 = K \cdot R^3, \quad T'^2 = K \cdot R'^3, \quad T''^2 = K \cdot R''^3.$$

Setzen wir diese Werte in unsere Ausdrücke für  $G, G' \dots$  ein, so erhalten wir

$$G = \frac{4\pi^2}{KR^2}, \quad G' = \frac{4\pi^2}{KR'^2}, \quad G'' = \frac{4\pi^2}{KR''^2},$$

oder in Worten: die von der Sonne in verschiedenen Entfernungen den Planeten erteilten gegen die Sonne gerichteten Beschleunigungen, welche die auf die Einheit der Massen ausgeübte Anziehungskraft messen, sind dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportional.

Wollen wir aus der Beschleunigung die anziehende Kraft  $F$  erhalten, welche die Sonne auf die verschiedenen Planeten ausübt, so haben wir  $F = m \cdot G$ , also die Beschleunigung  $G$  mit der Masse  $m$  zu multiplizieren. Es wird dann

$$F = m \cdot G = \frac{m}{R^2} \cdot \varphi,$$

wenn wir mit  $\varphi$  die Anziehung der ganzen Sonnenmasse auf die Einheit der Planetenmasse in der Einheit des Abstandes bezeichnen. Da nun diese Anziehung gleich ist der Summe der Anziehungen der einzelnen Massenteilchen, so ist sie proportional der gesamten Masse  $M$  der Sonne, so daß wir setzen können

$$\varphi = M \cdot A$$

und dann allgemein

$$F = \frac{m \cdot M}{R^2} \cdot A.$$

Das Gesetz der Massenanziehung können wir daher ganz allgemein ausdrücken: „Die Anziehung zweier Körper aufeinander ist proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes.“

Wir haben bisher die der Wirklichkeit nicht entsprechende Annahme gemacht, daß die Planetenbahnen Kreise seien; es entsprach das uns

Abicht, durch eine angenäherte Methode zu zeigen, wie Newton die Gesetze der Attraktion entwickelte. In der theoretischen Mechanik werden diese Probleme jedoch ohne diese Beschränkung abgehandelt; man gelangt dann genau zu denselben Resultaten, daß auf die Planeten eine gegen die Sonne gerichtete Kraft wirke, die mit dem Quadrate ihres Abstandes von der Sonne abnimmt.

Nachdem man die Gesetze erkannt hat, denen die Attraktionskraft folgt, liegt es nahe, sich die Frage vorzulegen, wodurch es dahin gekommen, daß die Planeten sich in diesen Bahnen bewegen. Es ist das eine rein mathematische Aufgabe, wie aus folgendem ersichtlich ist. Wären Sonne und Erde z. B. anfänglich ohne Bewegung sich im Raume in einem gewissen Abstände gegenübergestellt, so würden beide Gestirne infolge der Anziehung auf einander bewegt haben, bis sie sich berührt hätten. Hatte aber die Erde anfänglich eine Geschwindigkeit in anderer Richtung als in der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte erhalten, so mußte sie sich unter dem doppelten Einfluß dieser Anfangsgeschwindigkeit und der Anziehung der Sonne in einer krummlinigen Bahn bewegen. Die Rechnung zeigt nun, daß diese Bahn jedenfalls ein Kegelschnitt sein mußte, und zwar je nach dem anfänglichen Abstände der beiden Körper und der Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen, ein Kreis, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Einmal auf dieser Bahn bewegt, muß das Gestirn dieselbe unaufhörlich durchlaufen, entweder wenn die Kurve geschlossen ist, seinen Weg immer wieder rücklegend, wie es bei den Planeten der Fall ist, oder ohne Wiederkehr fortschreitend, wenn die Kurve eine nicht geschlossene ist. Letzteres ist für einige Kometen wahrscheinlich.

Dieses ist jedoch noch nicht die exakte Lösung des Problems der Astronomie, man kann die Gestirne in ihrer Bewegung nicht als unabhängig voneinander betrachten, denn jedes derselben wird in jedem Augenblicke von der Sonne und allen anderen angezogen. Deshalb sind die Bahnen der Planeten nicht vollkommene Ellipsen, als welche Keppler sie ansah, sondern sehr verwickelte Kurven, welche infolge der Störungen der anderen Planeten, bald an der einen, bald an der andern Seite von der Ellipse abweichen. Dadurch wird das allgemeine Problem der Bewegung der Gestirne äußerst verwickelt.

Wir haben in den beiden letzten Paragraphen die zwischen den Gestirnen wirkende Kraft als eine Anziehung der Materie bezeichnet; mit dieser Bezeichnung haben wir bereits den Boden der Tatsachen verlassen und uns auf das Gebiet der Hypothese begeben. Die Tatsachen beweisen nur, daß zwischen den Gestirnen ein Antrieb zur Wirksamkeit kommt, welcher die Planeten gegen die Sonne treibt, und daß dieser Antrieb den Massen der Planeten direkt, den Quadraten ihrer Abstände umgekehrt proportional ist. Nach unserer Definition des Wortes Kraft, als die Ursache des Antriebes, können wir ebenso sagen, daß zwischen den Weltkörpern eine Kraft tätig ist. Sowie wir aber als die Quelle dieser Kraft eine durch den Raum wirkende Anziehung der Materie bezeichnen, machen wir zur Befriedigung unseres Kausalitätsbedürfnisses, zur Beantwortung der Frage, woher diese Kraft, eine Hypothese. Ob Newton diese Hypothese aufstellt, läßt sich nicht mit Sicherheit behaupten, sicher ist, daß diese Hypothese zuerst von Roger Cotes in der Vorrede zu der von demselben noch

bei Lebzeiten Newtons veranstalteten Ausgabe der *Philosophiae naturalis Principia mathematica* deutlich ausgesprochen wurde.

Bis vor wenigen Jahren hat man sich mit dieser Hypothese ziemlich allgemein begnügt. In neuester Zeit sucht man indes die zwischen zwei entfernten Massen tätige Kraft in anderer Weise zu erklären, indem man davon ausgeht, daß die Annahme einer durch nichts weiter vermittelten Anziehung in die Ferne unserem Kausalitätsbedürfnisse nicht genüge, oder mit anderen Worten, daß eine solche unvermittelte Wirkung in die Ferne für uns nicht begreiflich sei. Man hat deshalb ein Zwischenmittel angenommen, welches die von den einzelnen Massen ausgehenden Antriebe übermittelt, und hat als solches vorzugsweise den Äther angesehen, auf dessen Existenz im sogenannten leeren Raume wir aus den Lichterscheinungen schließen müssen. Man hat weiter verschiedene, zum Teil als abenteuerliche zu bezeichnende Vorgänge ersonnen, durch welche die Antriebe und deren Übermittlung zwischen den Massen zustande kommen sollen<sup>1)</sup>. Wir können auf die verschiedenen Erklärungsversuche hier nicht eingehen, kein einziger derselben ist haltbar, entweder sind die Hypothesen, auf denen die Erklärungsversuche beruhen, selbst ebenso unbegreiflich als die Wirkung in die Ferne, welche sie erklären sollen, oder sie stehen mit anderweitig erkannten Prinzipien oder Gesetzen im Widerspruch.

Nur wollen wir hier sofort schon bemerken, daß alle diese Erklärungsversuche eigentlich müßig sind, solange wir in der Auffassung der Naturerscheinungen an der atomistischen Konstitution der Materie festhalten. Vom Beginne des nächsten Abschnittes an werden wir nämlich sehen, daß wir in einer Erklärung der Naturerscheinungen am weitesten kommen, oder um an die Sätze der Einleitung anzuknüpfen, daß wir die weitaus größte Zahl von Naturerscheinungen aus einer einzigen Hypothese ableiten können, wenn wir annehmen, daß die Materie aus einzelnen Teilchen, den Atomen oder Molekülen besteht, welche, ohne sich gegenseitig zu berühren, nebeneinander gelagert sind. Damit sind wir genötigt, Kräfte anzunehmen, welche zwischen diesen Teilchen tätig sind, ohne daß wir ein Zwischenmittel annehmen können, welches die Wirkungen von einem Molekül auf das andere übermittelt. Zwar sind die Abstände der Moleküle für uns unmeßbar klein. Indes eine unvermittelte Fernwirkung ist für kleine Entfernungen gerade so schwer oder so leicht begreiflich als für große Entfernungen. Klein und groß sind überhaupt nur relative Begriffe. Zudem wissen wir nicht, ob nicht der Abstand der Moleküle im Verhältnis zur Größe derselben ebenso groß ist, als der Abstand der Weltkörper im Verhältnis zur Größe dieser. Nur in einer solchen Hypothese zur Erklärung der Fernwirkung können wir daher einen Fortschritt erblicken, welche gleichzeitig die sogenannten Molekularkräfte überflüssig macht, welche uns also gestattet, die Materie als ein nicht aus diskreten Teilchen bestehendes Kontinuum aufzufassen. Da vorläufig dazu noch keine Aussicht vorhanden ist, halten wir an der Hypothese der Fernwirkung fest<sup>2)</sup>.

1) Eine ziemlich vollständige Übersicht über die verschiedenen Versuche zur Erklärung der Fernwirkung gibt Dr. *Isenkrahe* in seinem Buche: *Das Räthsel der Schwerkraft*. Braunschweig bei Vieweg 1879.

2) Wir werden im 3. Bande bei Besprechung der Gesetze der elektrischen Anziehung Gelegenheit nehmen, nochmals auf diese Frage zurückzukommen.

wir indes eine Fernwirkung annehmen oder nicht, das sogenannte ~~mag~~gesetz, das Gesetz, nach welchem der zwischen zwei Massen ver-  
Antrieb von der Größe und dem Abstände der Massen bedingt  
ist fest, und nur dieses Gesetz ist es, welches unseren weiteren  
Betrachtungen zugrunde liegt.

## § 40.

**Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung.** Machen  
uns jetzt zur Aufgabe, den Nachweis zu liefern, daß die Ursache,  
auf der Erde die Körper fallen macht, dieselbe ist wie jene, welche  
die betrachteten Bewegungen regelt. Auch dieses zuerst nachgewiesen  
ist Newtons Verdienst.

Erde besitzt einen Trabanten, den Mond, dessen Zentrum im  
60 Erdradien von dem Mittelpunkte der Erde entfernt ist. Astro-  
gesprochen ist dieser Abstand sehr gering, und daher kommt es,  
daß die Anziehung der Erde auf den Mond viel größer ist als die An-  
ziehung der Sonne, so zwar, daß man annehmen darf, der Mond sei nur  
der Anziehung der Erde unterworfen. Es ist dieses allerdings nicht genau,  
eine ähnliche Annäherung an die Wirklichkeit wie bei unserer vorigen  
Annahme, daß die Planetenbahnen Kreise seien. Der Mond wird deshalb  
nicht als ruhend betrachtet, sondern eine Ellipse beschreiben.  
Wir überdies an, daß die Mondbahn ein Kreis sei, was bei ihrer  
geringen Exzentrizität nur wenig von der Wahrheit abweicht, sowie die  
Erde und der Mond seien vollkommene Kugeln. Nach allen diesen An-  
nahmen können wir zwar keine genauen numerischen Daten erwarten, je-  
doch unsere Zwecke hinreichende, da alle diese Annahmen nur sehr  
wenig von der Wahrheit abweichen.

Anziehung, welche der Mond von der Erde erfährt, können wir  
als zentripetalen Beschleunigung berechnen, welche der Mond von der  
Erde erfährt; diese Beschleunigung ist gleich der Kraft, welche die Massen  
des Mondes von der ganzen Erde erfährt. Bezeichnen wir die Um-  
laufzeit des Mondes mit  $T$ , den Radius der Mondbahn mit  $r$ , so ist die  
centrifugale Beschleunigung

$$G = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Der Radius der Mondbahn ist, wie erwähnt, gleich 60 Erdradien;  
wenn wir letztern mit  $R$ , so wird

$$G = \frac{2\pi R \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{T^2}.$$

In diesem Ausdrucke ist  $2\pi R$  gleich dem Umfange der Erde, gleich  
40000 km; die Umlaufzeit  $T$  des Mondes ist gleich 27 Tage, 7 Stunden,  
43 Minuten = 39343 · 60 Sekunden. Demnach wird  $G$

$$G = \frac{40000000 \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{(39343 \cdot 60)^2} = \frac{40000000 \pi}{(39343)^2 \cdot 30}$$

$$G = 0,002706^m \quad \text{oder} \quad 0,2706^{cm}.$$

Die Zahl gibt uns die Beschleunigung, welche der Mond durch die  
Anziehung der Erde in jeder Sekunde gegen den Mittelpunkt der Erde hin

erhält, also auch die Anziehung in Krafteinheiten, welche die an der Stelle des Mondes befindliche Gewichtseinheit, das Gramm, von der Erde erhält.

Ein an der Erdoberfläche befindlicher Körper erhält die Beschleunigung  $981 \text{ cm}$ , oder was dasselbe ist, die Erde zieht an ihrer Erdoberfläche eine Gewichtseinheit, das Gramm, mit 981 Krafteinheiten an. Ist deshalb die Schwerkraft mit der allgemeinen Gravitation dieselbe Kraft, so würden in beiden Fällen auf die Masseneinheiten wirkenden Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Abstände derselben von dem Punkte der Erde, von welchem wir uns die Anziehung der Erde ausgehend denken können.

Um diese Vergleichung durchführen zu können, müssen wir deshalb zunächst untersuchen, von welchem Punkte der Erde aus die auf außerhalb der Erde befindliche Massen ausgeübte Anziehung ausgeht, von wo aus wir die Abstände der zu vergleichenden Masseneinheiten zu rechnen haben.

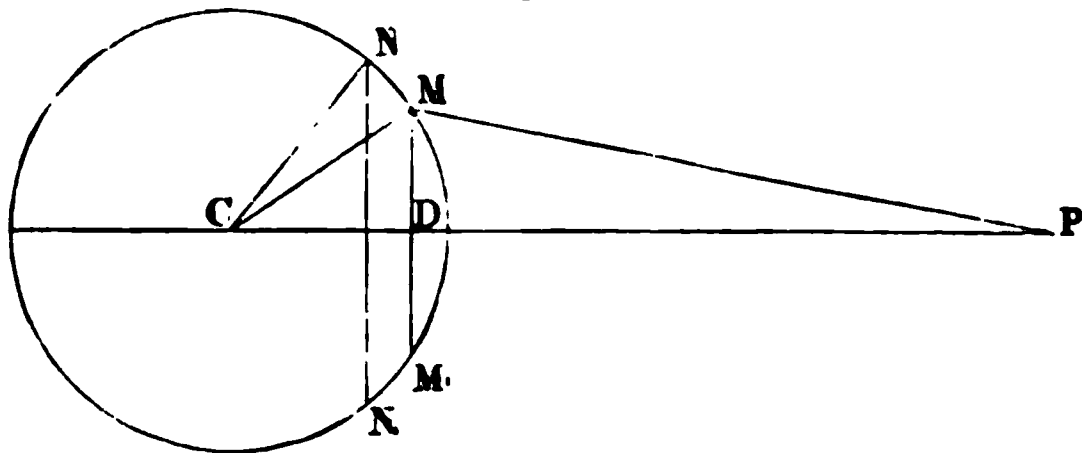
Befindet sich die angezogene Masse von der Erde so weit entfernt, daß wir die Verbindungslinien aller Punkte der Erde mit dieser Masse als einander parallel ansehen können, so lehrt uns schon der Satz vom Mittelpunkte der parallelen Kräfte, daß die Erde und die Masse sich gerade anziehen müssen, als ginge die gesamte Anziehung von dem Mittelpunkt der Erde aus. Denn da an allen Punkten der Erde in dem Falle parallel gegen die angezogene Masse gerichtete Kräfte angreifen, so befindet sich die Erde jener Masse gegenüber gerade wie eine auf der Erde befindliche schwere Kugel. Wie nun letztere von der Erde gerade so angezogen wird, als wäre ihr ganzes Gewicht im Schwerpunkte, welcher bei einer homogenen Kugel der Mittelpunkt ist, vereinigt, so ist auch die Anziehung der entfernten Masse auf die Erde und der Erde auf die entfernte Masse gerade so, als wenn die ganze anziehende Masse der Erde in deren Mittelpunkt vereinigt wäre.

Als Abstand der an der Stelle des Mondes befindlichen angezogenen Masseneinheit von der Erde müssen wir deshalb den Abstand der Mittelpunkte des Mondes und der Erde oder 60 Erdradien einsetzen.

Aber ebenso wie auf entfernte Massen wirkt eine Kugel auch auf solche, die sich in ihrer Nähe befinden, gerade so, als wenn die ganze an-

ziehende Masse der Kugel in ihrem Schwerpunkte, also bei einer homogenen Kugel in ihrem Mittelpunkte, vereinigt wäre. Zunächst erkennt man leicht, daß die Anziehung einer Kugel gegen den Mittelpunkt derselben gerichtet sein muß. Denkt man sich den Kreis (Fig. 50)

Fig. 50.



den Durchschnitt einer Kugel nach einem größten Kreise vor, welche auf irgend einen Punkt  $P$  wirkt, so sieht man sofort, daß die anziehenden Punkte der Kugel ganz symmetrisch um die Verbindung  $PC$  des Punktes  $P$  mit dem Mittelpunkte verteilt sind. Jedem Punkte oberhalb  $PC$  entspricht ein genau so weit von  $P$  entfernter Punkt

halb  $PC$ . Zerlegen wir nun die nach  $M$  und  $M_1$  gerichteten Anziehungen in ihre Komponenten parallel zu  $PC$  und senkrecht zu  $PC$ , so heben die letzteren sich auf, da die Winkel  $MPC$  und  $M_1PC$  einander gleich sind. Wie hier, so bleiben in allen Fällen nur die gegen den Mittelpunkt gerichteten Komponenten übrig, es muß also die gesamte Anziehung gegen den Mittelpunkt der Kugel gerichtet sein.

Um die Anziehung der Kugel auf eine im Punkte  $P$  befindliche Masse  $m$ , deren Abstand vom Mittelpunkte  $CP$  gleich  $a$  sei, zu berechnen, denken wir uns die Kugel in lauter einzelne sehr dünne Schalen zerlegt, deren Dicke gleich  $\delta$  sei. Stelle jener Kreis den Durchschnitt einer solchen Schale vor; die Dichtigkeit der Schale, d. h. die in der Volumeneinheit enthaltene Masse, sei gleich  $\sigma$ . Führen wir durch die Kugelschale zwei einander sehr nahe, zu  $PC$  senkrechte Schnitte  $MM_1$  und  $NN_1$ , so schneiden dieselben aus der Schale eine Zone heraus, deren Volumen gleich dem Produkte aus dem Kreisumfange  $MM_1$ , dem Bogen  $MN$  und der Dicke  $\delta$  der Schale ist, wenn wir eben  $MN$  und  $\delta$  so klein voraussetzen, daß der Kreis  $MM_1$  von dem in der Mitte der Schale mitten zwischen  $M$  und  $N$  gelegten Schnitte nur unendlich wenig verschieden ist. Das Volumen dieser Zone ist demnach

$$2\pi MD \cdot MN \cdot \delta,$$

und die in dieser Zone enthaltene Masse erhalten wir, wenn wir das Volumen mit  $\sigma$  multiplizieren. Nennen wir die Anziehung, welche zwei der Einheit gleiche Massen in der Entfernungseinheit aufeinander ausüben,  $A$ , so erhalten wir für die Anziehung der Kugelzone auf die in  $P$  befindliche Masse  $m$  nach dem im vorigen Paragraphen entwickelten Anziehungsgesetze

$$A \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2}$$

und die allein übrig bleibende in  $PC$  fallende Komponente, wenn wir obigen Ausdruck mit  $\cos CPM$  multiplizieren,

$$A \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2} \cdot \cos CPM.$$

Bezeichnen wir den Radius der Kugelschale  $CM$  mit  $r$ , den Abstand des Punktes  $P$  von der Zone  $MP$  mit  $c$ , den Winkel  $MCP$  mit  $\vartheta$ , die Breite der Zone im Winkelmaße oder  $MCN$  mit  $d\vartheta$ , so erhalten wir

$$MD = r \cdot \sin \vartheta, \quad MN = r \cdot d\vartheta$$

$$\cos CPM = \frac{DP}{c} = \frac{a - r \cos \vartheta}{c};$$

zur Bestimmung des Zählers im Ausdrucke für  $\cos CPM$  haben wir

$$MP^2 = MC^2 + CP^2 - 2MC \cdot CP \cdot \cos \vartheta = r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos \vartheta$$

$$r \cdot \cos \vartheta = \frac{r^2 + a^2 - c^2}{2a}$$

$$a - r \cdot \cos \vartheta = \frac{a^2 + c^2 - r^2}{2a}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in den für die Anziehung der Kugelzone erhaltenen ein, so wird derselbe

$$A \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot r \cdot d\vartheta \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{e^2} \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2a \cdot e},$$

oder, indem wir passender ordnen,

$$A \cdot \frac{\pi r^2 \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a} \cdot \sin \vartheta d\vartheta \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{e^3}.$$

Um die Anziehung der ganzen Kugelschale auf  $m$  zu erhalten, haben wir für alle die Kugel zusammensetzenden Zonen obigen Ausdruck zu bilden und alle diese Ausdrücke zu addieren. Wir erhalten diese Werte für die einzelnen Zonen, indem wir für  $\vartheta$  nach und nach alle Werte von  $0 - \pi$  und gleichzeitig den jeder Zone entsprechenden Wert von  $e$  einsetzen. Mit Hilfe unseres Wertes für  $e$  können wir bequemer den Winkel  $\vartheta$  eliminieren und die Breite der einzelnen Zonen durch  $e$  ausdrücken. Nennen wir nämlich die Länge von  $e$ , wenn wir von dieser Zone zur nächstfolgenden übergehen, deren Grenze in  $N$  liegt,  $e + de$ , so haben wir nach E 1 und E 5 aus

$$e^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta,$$

da auf der rechten Seite nur  $\vartheta$  veränderlich ist,

$$2e de = 2ar \sin \vartheta d\vartheta,$$

und daraus

$$\sin \vartheta d\vartheta = \frac{e}{ar} de.$$

Setzen wir diesen Wert in unsern Ausdruck ein, so erhalten wir für die Anziehung der ganzen Kugelzone

$$A \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a^2} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Lassen wir hierin  $e$  nach und nach alle der Kugelschale entsprechenden Werte annehmen, also  $e$  von  $a - r$  bis  $a + r$  sich ändern, so gibt uns die Summe der unendlich vielen Ausdrücke, die den einzelnen zwischen diesen Grenzen enthaltenen Werten von  $e$  entsprechen, die Anziehung der ganzen Kugelschale.

Die Anziehung der ganzen Kugelschale ist somit das Integral

$$\int_{a-r}^{a+r} A \frac{\pi r \delta \sigma m}{a^2} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de,$$

oder, da wir den nicht von  $e$  abhängigen Faktor vor das Integralzeichen schreiben können,

$$A \frac{\pi r \delta \sigma m}{a^2} \int_{a-r}^{a+r} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Das Integral zerfällt in zwei, von denen das erste nach E 1 und E V

$$\int_{a-r}^{a+r} de = (a + r) - (a - r) = 2r,$$



das zweite nach denselben Regeln, da  $\frac{dc}{c^2} = -d\frac{1}{c}$

$$\int_{a-r}^{a+r} (a^2 - r^2) \frac{dc}{c^2} = - (a^2 - r^2) \left( \frac{1}{a+r} - \frac{1}{a-r} \right) = 2r.$$

Die Summe der beiden Integrale ist somit gleich  $4r$  und damit der Ausdruck für die Anziehung der ganzen Kugelschale

$$A = \frac{4r^2\pi \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a^2}.$$

In diesem Ausdrucke ist  $4r^2\pi$  die Oberfläche der mit dem Radius  $r$  beschriebenen Kugel,  $4r^2\pi\delta$  somit das Volumen und  $4r^2\pi\delta \cdot \sigma$  die Masse der Kugelschale. Bezeichnen wir diese Masse mit  $M$ , so erhalten wir für die Anziehung der Kugelschale auf die im Abstände  $a$  von ihrem Mittelpunkte befindliche Masse  $m$

$$A = \frac{M \cdot m}{a^2},$$

oder die Kugelschale zieht die Masse  $m$  gerade so an, als wenn die gesamte Masse derselben in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Was nun für diese Kugelschale gilt, dasselbe gilt für alle, in welche wir uns die Kugel zerlegt gedacht haben, selbst dann, wenn die einzelnen Schalen eine verschiedene Dichtigkeit haben, jedoch in einer und derselben Schale die Dichtigkeit  $\sigma$  überall die gleiche ist. Wir erhalten deshalb ganz allgemein den Satz, daß die Anziehung einer homogenen oder einer aus konzentrischen Schalen zusammengesetzten Kugel, bei der nur die einzelnen Schalen überall dieselbe Dichtigkeit haben, nach außen gerade so wirkt, als wäre die ganze Masse derselben im Mittelpunkte vereinigt.

Zur Vergleichung der Anziehung, welche der Mond von der Erde erhält, mit der Schwere auf der Erde, müssen wir also auch für die auf der Erde befindlichen Gegenstände als anziehenden Punkt den Mittelpunkt der Erde ansehen, als Abstand der Masseneinheit auf der Oberfläche von der anziehenden Masse der Erde somit den Radius der Erde einsetzen.

Für die auf die Masseneinheit des Mondes wirkende Anziehung erhalten wir 0,2706, für die auf der Erdoberfläche wirkende 981; ist deshalb die Schwere mit der allgemeinen Massenanziehung identisch, so müssen diese Zahlen umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernung beider Massen vom Mittelpunkte der Erde, oder es muß

$$g = 981 = 3600 G = 3600 \cdot 0,2706$$

Führen wir die angedeutete Multiplikation aus, so erhalten wir aus der Anziehung des Mondes

$$g = 974,2,$$

eine Zahl, die so nahe mit der aus der Pendelbewegung gefundenen übereinstimmt, daß unter Berücksichtigung der gemachten nicht ganz genauen Annahmen dadurch der sicherste Beweis geführt ist, daß die Schwere mit der allgemeinen Anziehung identisch ist.

Dieser Satz, daß die Schwere mit der allgemeinen Gravitation identisch ist, und daß die Erde auf alle auf ihr befindlichen Gegenstände gerade so

wirkt, als wäre ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt, führt unmittelbar zu der am Schluß von § 31 erwähnten Folgerung, daß ein Pendel in verschiedener Höhe über der Erdoberfläche eine verschiedene Schwingungsdauer haben, oder daß  $g$  in verschiedenen Höhen verschieden groß sein muß. In einer Höhe  $h$  über der Erdoberfläche muß der Wert von  $g$  nach dem Gesetze der Massenattraktion sich ergeben aus der Gleichung

$$g : g_0 = R^2 : (R + h)^2$$

$$g (R + h)^2 = g_0 R^2,$$

wenn  $g_0$  die Beschleunigung an der Erdoberfläche oder im Niveau des Meeres bedeutet; es ist somit

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2},$$

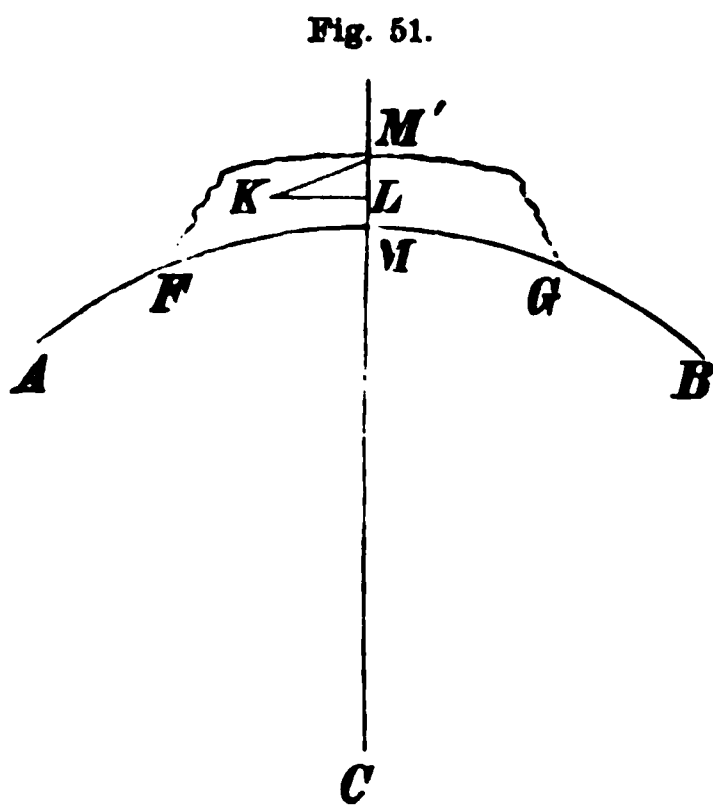
oder mit hinreichend großer Annäherung, da  $h$  gegen  $R$  immer sehr klein ist,

$$g = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right); \quad g_0 = g \left(1 + 2 \frac{h}{R}\right),$$

ein Ausdruck, der uns gestattet, aus den in verschiedenen Höhen über der Erdoberfläche oder dem Meeresniveau beobachteten Werten von  $g$  den Wert von  $g_0$  für das Meeresniveau zu berechnen.

Poisson hat darauf aufmerksam gemacht<sup>1)</sup>, daß diese Korrektion des Wertes  $g$  auf das Meeresniveau nur dann zulässig ist, wenn man sich in

einem isolierten Punkte in der Höhe  $h$  über dem Meeresniveau befindet, nicht aber, wenn der Punkt auf einem ausgedehnten Festlande in der Höhe  $h$  gegeben ist. In diesem Falle wird nämlich die Beschleunigung  $g'$  gleich der soeben berechneten vermehrt um die Anziehung des Festlandes. Dieselbe läßt sich in folgender Weise berechnen. Sei (Fig. 51)  $C$  der Mittelpunkt der Erde,  $AMB$  das Meeresniveau,  $F'M'G$  ein sich über demselben befindendes Festland und  $M'$  ein Punkt auf demselben in der Höhe  $h$  über  $M$ . Wir betrachten dann das Festland als einen um die Vertikale  $CM'$  gelegten Zylinder von der Höhe  $h$  und dem Durch-



messer  $2c$ . Aus diesem Zylinder denken wir uns an irgend einer Stelle einen unendlich dünnen Kreisring geschnitten, dessen Mittelpunkt auf der Achse  $CM'$  liegt, dessen Radius  $KL = y$ , dessen Breite gleich  $dy$  ist, dessen Abstand  $LM'$  von der Oberfläche gleich  $z$ , dessen Dicke  $ds$  ist. Das Volumen des Ringes ist dann

$$2\pi y dy dz.$$

Ist  $\sigma$  die Dichte des Festlandes, also die Masse der Volumeneinheit

1) Poisson, Traité de mécanique Bd. I. § 255.

so wird gerade wie vorhin die gegen  $C$  gerichtete Anziehung dieses Ringes auf die in  $M'$  befindliche Masse  $m$

$$A \frac{2\pi\sigma'm y dy dz}{KM'} \cos KM'L.$$

Nun ist

$$KM'^2 = y^2 + z^2; \quad \cos KM'L = \frac{LM'}{KM'} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Damit wird die Anziehung des Ringes

$$A 2\pi\sigma'm \frac{y z dy dz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Anziehung des Festlandes ist die Summe der Anziehungen aller dazwischen zusammensetzenden Ringe, die wir erhalten, wenn wir in dem letzten Ausdrucke für  $y$  und  $z$  alle dem Festlande entsprechenden Werte einsetzen. Zur Bildung dieser Summe berechnen wir zunächst die Anziehung einer Platte von der Dicke  $dz$ , welche in der Tiefe  $LM' = z$  unter  $M'$  liegt: diese ist die Summe der Anziehungen aller Kreisringe, deren Radius zwischen  $y = 0$  und  $y = c$  ist, somit das nach  $y$  genommene Integral von  $y = 0$  bis  $y = c$

$$2\pi A\sigma'm z dz \int_0^c \frac{y dy}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dasselbe ist, da nach E IV und E 1

$$\frac{y dy}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = d \left( -\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right),$$

$$2\pi A\sigma'm z dz \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{c^2 + z^2}} \right).$$

Die Anziehung des Festlandes ist dann die Anziehung aller Platten, die zwischen  $z = 0$  und  $z = h$  liegen, also das Integral des letztern Ausdruckes von  $z = 0$  bis  $z = h$ . Dieses ist aufgrund derselben Regeln

$$\varphi = 2\pi A\sigma'm (h + c - \sqrt{c^2 + h^2}).$$

Ist die horizontale Ausdehnung des Festlandes gegen die Höhe  $h$  sehr groß, so können wir unter dem Wurzelzeichen  $h^2$  gegen  $c^2$  vernachlässigen und erhalten

$$\varphi = 2\pi A\sigma'm h.$$

Die Beschleunigung, welche die Masse infolge dieser Anziehung erfährt, ist

$$g = \frac{\varphi}{m} = 2\pi A\sigma'h.$$

Es wird

$$g' = g + g = g_0 \left( 1 - 2 \frac{h}{R} \right) + 2\pi A\sigma'h.$$

Ist nun  $\sigma$  die Masse der Volumeneinheit unserer Erde, dieselbe als gleichmäßig dicht vorausgesetzt, so ist die Masse der Erde

$$\frac{4}{3} R^3 \pi \sigma,$$

somit die auf die Masseneinheit an der Oberfläche wirkende Anziehung oder die derselben erteilte Beschleunigung

$$g_0 = A \frac{\frac{4}{3} R^3 \pi \sigma}{R^2} = \frac{4}{3} \pi A \sigma R.$$

Damit wird

$$\frac{\gamma}{g_0} = \frac{2\pi A \sigma' h}{\frac{4}{3}\pi A \sigma R} = \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}$$

oder

$$g' = g_0 \left( 1 - 2 \frac{h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2\sigma R} \right)$$

und mit hinreichender Genauigkeit

$$g_0 = g' \left( 1 + \frac{2h}{R} - \frac{3\sigma' h}{2\sigma R} \right).$$

Die in diesem Falle anzubringende Korrektur ist also eine erheblich kleinere, als wenn man sich in einem isolierten Punkte in der Höhe  $h$  über der Erde befindet.

Ist ein Punkt in der Höhe  $h'$  über dem Festlande gegeben, so erhalten wir die Anziehung des Festlandes auf denselben, indem wir beachten, daß die nächste Scheibe, deren Anziehung auf denselben wirkt sich nicht im Abstände 0, sondern im Abstände  $h'$  von demselben befindet. Wir haben dann nur das zuletzt gebildete Integral nicht von  $z = 0$  bis  $z = h$ , sondern von  $z = h'$  bis  $z = h + h'$  zu nehmen. Dasselbe wird

$$\varphi' = 2\pi A \sigma' m (h + h' - h' + \sqrt{c^2 + h'^2} - \sqrt{c^2 + (h + h')^2}).$$

Ist nun  $h'$  ebenso wie  $h$  gegen  $c$  klein, so wird auch jetzt

$$\varphi' = 2\pi A \sigma' m h.$$

Die Anziehung des als Zylinder betrachteten Festlandes ist auf Punkte, welche nicht weit über demselben liegen, von dem Abstände dieser Punkte unabhängig. Die Beschleunigung  $g''$ , welche ein Punkt in dieser Höhe erhält, ist dann

$$g'' = g_0 \left( 1 - \frac{2(h + h')}{R} \right) + 2\pi A \sigma' h$$

$$g'' = g_0 \left( 1 - \frac{2h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2\sigma R} - \frac{2h'}{R} \right) = g' - g_0 \frac{2h'}{R}$$

oder

$$\frac{g'}{g''} = \frac{1}{1 - \frac{g_0}{g'} \frac{2h'}{R}} = 1 + \frac{g_0}{g'} \frac{2h'}{R}.$$

Jolly hat diese Zunahme der Anziehung direkt beobachtet<sup>1)</sup>. In einem Turm zu München, der von drei Seiten frei stand, wurde 25<sup>m</sup> über dem Boden eine empfindliche Wage aufgestellt, an der man bei einer Belastung von 5<sup>kg</sup> auf jeder Seite noch 0,01<sup>mg</sup> ablesen konnte. Von jeder Wagschale führte ein Draht, geschützt durch eine Röhre von Zinkblei in den Turm hinab. An den unteren Enden der Drähte waren ebenfi

1) Jolly, Abhandlungen der Münchener Akademie 14. II. Abtlg. 1883.

Wagschalen aufgehängt. Der Abstand der unteren und oberen Schalen ergab sich zu  $21.005^m$ .

Wiegt man einen Körper in dem oberen Schalenpaar ab und bringt ihn dann in die untere Schale, während die ihn äquilibrierenden Gewichte in der oberen Schale beobachtet werden, so nimmt das Gewicht des Körpers in dem Verhältnis der Beschleunigungszunahme  $\frac{g'}{g''}$  zu, während das Gewicht der vorher ihn oben äquilibrierenden Gewichtsstücke ungeändert bleibt. Man muß daher in die obere Wagschale, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, der Gewichtszunahme des nach unten gebrachten Körpers entsprechend, Gewichte hinzulegen. Ist  $m$  die Masse des Körpers,  $g'$  der Antrieb, welchen der Körper durch die Schwere oben erhält,  $g''$  unten gleich  $mg'$ , somit ist

$$\frac{mg'}{mg''} - 1 = \frac{g_0}{g'} \cdot \frac{2h'}{R}; \quad mg' - mg'' = \frac{g_0}{g'} \cdot \frac{2h'}{R} mg''.$$

Als abzuwägender Körper wurde eine mit Quecksilber gefüllte Glasblase angewandt. Um den später zu besprechenden Einfluß des Gewichtes der verdrängten Luft auszuschließen, wurden zunächst vier Glaskolben von gleichem Volumen und gleichem Gewichte hergestellt. Zwei der Kolben wurden mit dem gleichen Gewichte Quecksilber gefüllt und alle Kolben in der Glasbläserlampe zugeschmolzen. Das Gewicht  $m$  des Quecksilbers war

$$m = 5009\,450^{mg}.$$

Es wurden nun zunächst die beiden gefüllten Kolben auf die obere, die beiden leeren auf die untere Wagschalen gelegt und durch Hinzufügen der erforderlichen Ausgleichgewichte scharf das Gleichgewicht hergestellt. Dann wurde an der einen Seite der mit Quecksilber gefüllte Kolben nach unten, der leere Kolben nach oben gebracht, das Quecksilber somit dem Mittelpunkt der Erde um  $21.005^m$  genähert. Es mußten zur Herstellung des Gleichgewichtes oben  $31,686^{mg}$  hinzugefügt werden, so daß

$$mg' - mg'' = 31,686 \cdot g''.$$

Nach der Theorie soll demnach

$$31,686 \cdot g'' = \frac{g_0}{g'} \cdot \frac{2h'}{R} mg''.$$

Der Erdradius  $R$  in der Breite von München,  $48^\circ 8'$  n. Br. ist

$$R = 6\,365\,722^m.$$

Es ist demnach das Zulagegewicht  $\mu$  sein

$$\mu = \frac{g_0}{g'} \cdot 2 \cdot 21.005 \cdot \frac{5009\,450}{6\,365\,722} = \frac{g_0}{g'} \cdot 33,059^{mg}$$

München liegt auf einer Hochebene von  $515^m$  Höhe; nehmen wir die Dichte  $\sigma'$  etwa die Hälfte der mittleren Dichte der Erde, so würde

$$\begin{aligned} \frac{g_0}{g'} &= 1,00011 \\ \mu &= 33,063. \end{aligned}$$

Der theoretische Wert der Gewichts-differenz ist also etwas größer als der beobachtete. Jolly glaubt, daß der Grund dieser Abweichung der ist, daß in der Umgebung des Turmes der Boden etwas höher war als der Boden des Turmes, so daß von der Umgebung ein kleiner nach oben gerichteter Zug ausging.

### § 41.

**Verschiedenheit von  $g$  in verschiedenen Breiten.** Ist die Beschleunigung  $g$  eine Folge der Anziehung der Erdmasse auf die an der Oberfläche befindlichen Körper, so muß der Wert derselben an verschiedenen Punkten der Erde verschieden sein. Denn die Erde dreht sich in 24 Stunden um ihre Achse, und jeder Punkt beschreibt in dieser Zeit einen Kreis, dessen Radius gleich ist dem senkrechten Abstand desselben von der Erdachse. Die bei der drehenden Bewegung auftretende Zentrifugalkraft sucht daher alle Punkte von der Erde zu entfernen. Da aber diese Radien und somit die Kreise um so kleiner werden, je mehr wir uns den Polen nähern, so wird auch die Rotationsgeschwindigkeit und mit ihr die Zentrifugalbeschleunigung im quadratischen Verhältnisse kleiner. Die Zentrifugalkraft wirkt aber auch nur unter dem Äquator der Schwere gerade entgegen; an allen andern Orten bildet ihre Richtung, da sie senkrecht zur Erdachse ist, mit der Richtung der nach dem Mittelpunkt der Erde gehenden Anziehung einen Winkel, der gleich ist der Breite des Ortes. Nur die in der Richtung der Schwere fallende Komponente, welche gleich dem Produkte aus der Zentrifugalkraft in den Kosinus der Breite ist, wirkt an diesen Orten der Schwere entgegen. Es muß deshalb die Beschleunigung der Körper durch die Schwere zunehmen, so wie wir uns vom Äquator zu den Polen entfernen.

Andererseits ist, wie uns geodätische Messungen lehren, die Erde nicht eine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Ellipsoid, zwar, daß die Abplattung, das Verhältnis der Differenz zwischen Äquator- und Polarradius zum Äquatorialradius  $= \frac{1}{299}$  ist. Daraus folgt aber, daß wir dem Mittelpunkt der Erde näher kommen, wenn wir uns vom Äquator aus zu den Polen hin bewegen. Es muß also auch aus diesem Grunde die Beschleunigung des freien Falles zunehmen, da, wie wir vorhin gezeigt haben, die Erde alle auf ihr befindlichen Körper so anzieht, als wenn die gesamte anziehende Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt.

Mit diesen Forderungen der Theorie ist die Beobachtung im Einklang, sie zeigt uns, daß die Beschleunigung vom Äquator zu den Polen hin zunimmt, und daß sie stärker zunimmt, als sie es allein wegen der Abnahme der Zentrifugalbeschleunigung tun müßte. Ja noch mehr, die theoretische Mechanik gibt uns an, in welcher Weise wegen der Abplattung die Beschleunigung wachsen muß, und gibt uns so ein Mittel an, die Erde aus der beobachteten Beschleunigungsänderung die Abplattung theoretisch zu berechnen. Der so erhaltene Wert stimmt sehr nahe mit der geodätischen Messungen abgeleiteten überein.

Die Änderungen der Größe  $g$  hat man aus den Änderungen der des Sekundenpendels bestimmt. Man hat

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}};$$

ist  $l = 1$ , so wird

$$g = \pi^2 \cdot l.$$

genügt also, die Länge des Sekundenpendels an verschiedenen Orten zu messen, um daraus den Wert für  $g$  zu erhalten.

Die nachstehenden Werte sind nach den Messungen von Sabine reduziert auf das Meeresniveau.

Breite.	Länge des Sekundenpendels. cm.	$g$ . cm.
$0^\circ$	99,0938	978,009
$45^\circ$	99,3509	980,552
$90^\circ$	99,6080	983,089.

Die nachstehenden Werte für  $g$ , sowie alle an verschiedenen Orten beobachteten, sind hier wiedergegeben und durch die von Helmholtz<sup>1)</sup> im Jahre 1884 gebrauchte Formel darstellen

$$g = 978,009 + 5,190 \sin^2 \varphi,$$

in welcher mit  $\varphi$  die Breite des Ortes bezeichnet, an welcher die Beschleunigung  $g$  cm ist.

Im Jahre 1901 hat Helmholtz<sup>2)</sup> mit Berücksichtigung der später gemachten Messungen der Formel die Gestalt gegeben

$$g = 978,046 \{ 1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2 \varphi \}$$

Welcher Weise  $g$  sich ändern müßte, wenn nur die Zentrifugalbeschleunigung es affizierte, läßt sich leicht berechnen. Die Zentrifugalbeschleunigung am Äquator ist

$$\frac{4 \pi^2 R}{T^2} = \frac{2 \pi \cdot 40000000}{24 \cdot 60 \cdot 60^2} = 0^m,03368 = 3,368^m.$$

Der Radius der Kreise, in welchem sich die nicht unter dem Äquator ruhenden Punkte bewegen, ist der senkrechte Abstand der Punkte von der Rotationsachse der Erde. Nennen wir daher die Breite eines Ortes  $\varphi$ , so ist der Radius  $R \cos \varphi$ .

Die Zentrifugalbeschleunigung ist also für einen Ort der Breite  $\varphi$  gleich  $3,368 \cos \varphi$ . Die in die Richtung der Schwere und ihr entgegenwirkende Komponente ist demnach  $3,368 \cos^2 \varphi$ . Wir bezeichnen die Beschleunigung durch die Schwere, wenn die Zentrifugalbeschleunigung nicht vorhanden wäre, so ist die wirklich stattfindende Beschleunigung  $g$

$$g = G - 3,368 \cos^2 \varphi.$$

Setzt man für den Äquator, wo  $\varphi = 0$  ist, nach Sabine

$$G = 978,009 + 3,368.$$

ausgesetzt, daß nur die verschiedene Zentrifugalkraft die Beschleunigung affiziert, muß dies aber auch die Beschleunigung durch die Schwere

<sup>1)</sup> Helmholtz, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höhern Mathematik. II Teil: Die physikalischen Theorien etc. Leipzig 1884.  
<sup>2)</sup> Helmholtz, Sitzungsber. der Berliner Akad. 1901 Nr. 14.



an allen Orten der Erde sein, demnach allgemein die um die Zentrifugalbeschleunigung verminderte und zu beobachtende Beschleunigung  $g$

$$g = 978,009 + 3,368 - 3,368 \cos^2 \varphi$$

$$g = 978,009 + 3,368 \sin^2 \varphi.$$

Nach unserer obigen aus der Beobachtung abgeleiteten Formel ist Koeffizient von  $\sin^2 \varphi$  größer, so daß also die Beschleunigung  $g$  in Tat stärker zunimmt, als sie es nur der Abnahme der Zentrifugalkraft wegen tun würde.

Um aus der Beschleunigungsänderung die Abplattung zu berechnen dient das Clairautsche Theorem<sup>1)</sup>, nach welchem die Summe des Quotienten aus der Beschleunigungsdifferenz am Pol und Äquator und der Beschleunigung am Äquator, und der Abplattung gleich dem Zweiundeinhalbfachen des Quotienten aus der Zentrifugalbeschleunigung und der Beschleunigung durch die Schwere am Äquator ist, oder

$$\frac{\Delta g}{g_0} + e = 2,5 \frac{c}{g_0},$$

wenn  $\Delta g$  den Unterschied der Beschleunigung an dem Pole und Äquator,  $g_0$  die Beschleunigung am Äquator,  $e$  die Abplattung und  $c$  an dem Äquator stattfindende Zentrifugalbeschleunigung bedeutet. Wir erhalten daraus für die Abplattung

$$e = 2,5 \frac{c}{g_0} - \frac{\Delta g}{g_0}$$

oder, wenn wir die eben erhaltenen Zahlenwerte einsetzen,

$$e = 2,5 \frac{3,368}{978,046} - \frac{5,1856}{978,046} = 0,003308 = \frac{1}{302}.$$

Man sieht, daß dieser aus den Pendelschwingungen unter Annahme, daß die nicht kugelförmige Anordnung der Erdmasse die Beschleunigung ändere, berechnete Wert für die Abplattung sehr nahe mit dem aus geodätischen Messungen erhaltenen übereinstimmt. Der Unterschied ist nicht auffallen, wenn man einerseits die Schwierigkeit der Messungen wägt und andererseits bedenkt, daß die besondere Bodenbeschaffenheit an Orten auf die Pendelschwingungen von Einfluß ist.

## § 42.

**Dichtigkeit der Erde.** Daß die Bodenbeschaffenheit auf die Bewegung des Pendels von Einfluß ist, folgt direkt aus dem experimentellen Nachweis, daß die einzelnen Körper auf der Erde anziehend aufeinander wirken. Die ersten, welche diesen Nachweis lieferten, waren die englischen Physiker Cavendish und Maskelyne. Cavendish zeigte, daß

1) *Clairaut*, Théorie de la figure de la terre. Paris 1743. Das ergibt sich aus der Untersuchung, welche Gestalt die Erde annimmt unter der Voraussetzung, daß die Erde früher eine flüssige Masse gewesen und unter der Voraussetzung, daß nicht die ganze Masse der Erde, sondern daß die Erde aus konzentrischen homogenen Schalen bestehe.

Daß die Bleimasse eine metallene Kugel anzieht, Maskelyne bewies, daß ein Pendel in der Nähe großer Gebirge aus der Vertikalen abgelenkt wurde.

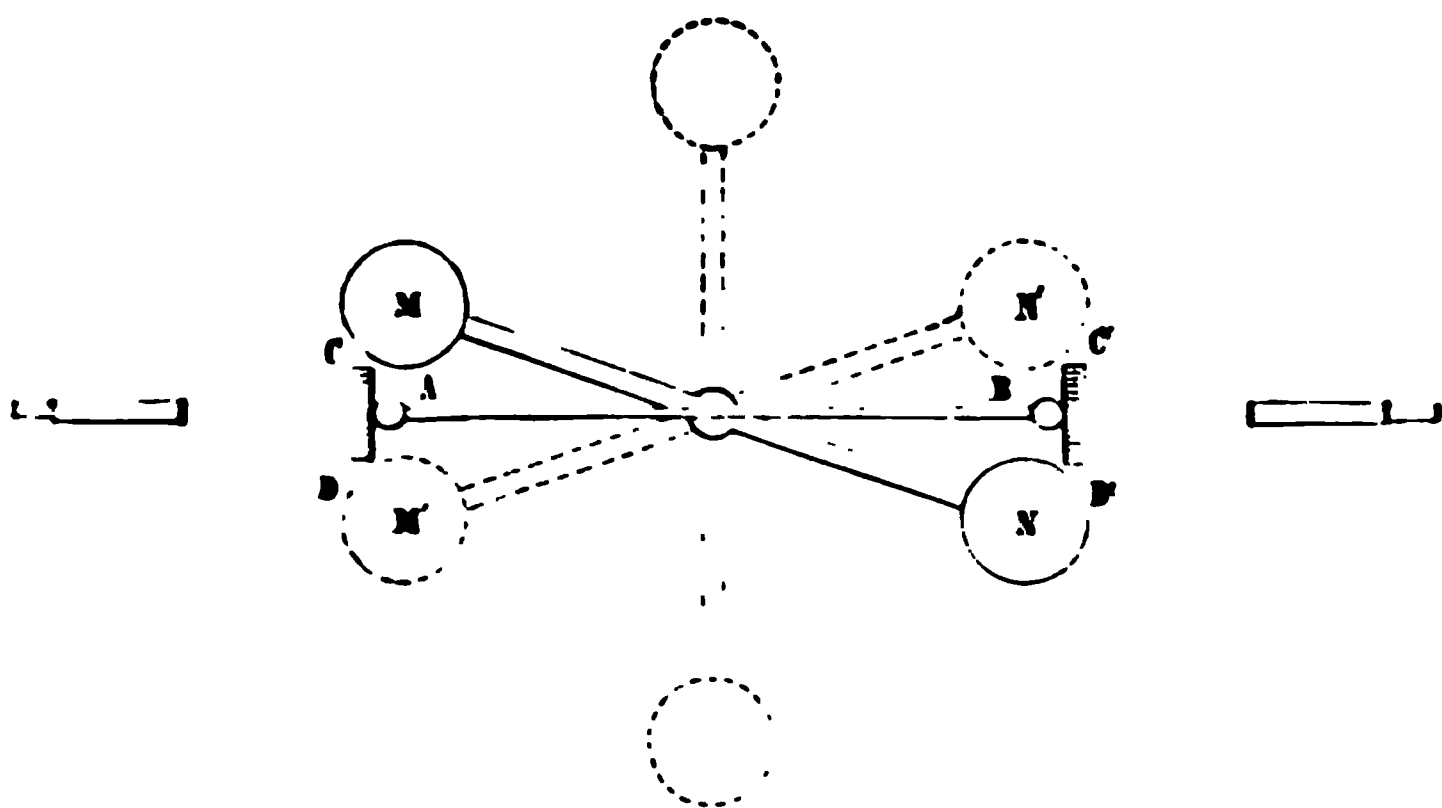
Beide Anziehungen sind gemessen und durch Vergleichung mit der Anziehung der Erde die Masse der Erde bestimmt.

Die ersten Versuche wurden von Cavendish durchgeführt nach Angabe von Michell angegebenen Methode.

Ein leichter und gleichmäßig gearbeiteter Hebel von Tannenholz  $AB$  (Fig. 52) ist in seiner Mitte an einem sehr feinen Metalldrahte horizontal aufgehängt, welcher an der Decke eines verschlossenen Zimmers befestigt ist. An seinen Enden trägt er zwei ganz gleiche Kugeln  $A$  und  $B$  und an diesen zwei mit einer Teilung versehene Elfenbeinplättchen  $CD$  und  $C'D'$ . Faden und Hebel sind von einem hölzernen Gehäuse umgeben, um die Luftströmungen abzuhalten. Die Seiten desselben bei  $A$  und  $B$  sind von Spiegelglas, um die Teilungen  $CD$  und  $C'D'$  beobachten zu können. Die Beobachtungen der Teilungen geschehen mittels zweier mit Fadenkreuz versehener Fernrohre, welche den Teilungen gegenüber in der Mauer des Zimmers angebracht sind.

Wir haben schon im § 34 die Bedingungen kennen gelernt, unter denen ein solches System im Gleichgewicht ist und dort ebenfalls erwähnt, daß dasselbe infolge der im nächsten Abschnitt näher zu besprechenden Torsion des Drahtes als horizontales Pendel Schwingungen um die Gleichgewichtslage vollführt, wenn durch Drehung des Stabes um die Achse des Aufhängedrahtes das System aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist.

Fig. 52



Es geht daraus, wie wir sahen, daß auf den abgelenkten Stab ein Drehungsmoment wirkt, welches ihn gegen die Gleichgewichtslage zurückführt, und daß dem Ablenkungswinkel  $\varphi$ , denselben in Bogenmaß als Bruchteil  $\frac{\varphi}{2\pi}$  gemessen gleich ist

$$D = F' \varphi.$$

Das Drehungsmoment  $F'$ , wenn  $\varphi$  gleich 1 ist, erhalten wir durch Betrachtung der Schwingungsdauer  $t$  aus der Gleichung

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{K}{F'}}.$$

Das Trägheitsmoment  $K$  bestimmt man füglich nach der in § 34 besprochenen Methode.

Ist  $F$  auf diese Weise bestimmt, so erhalten wir die an  $A$  und  $B$  anzubringende Kraft, welche eine Ablenkung  $\varphi$  hervorbringt, aus der Erwägung, daß  $F$  die im Abstände eins von der Drehungsachse anzubringende Kraft ist, wenn  $\varphi = 1$  ist. Nennen wir den Abstand der Mittelpunkte der Kugeln  $A$  und  $B$  von der Achse des Drahtes  $l$ , so ist die zu einer Ablenkung  $\varphi$  an jeder der Kugeln anzubringende Kraft

$$f = \frac{1}{2} \frac{F}{l} \varphi.$$

Der Bogen  $\varphi$  wird bei der Anordnung von Cavendish dadurch bestimmt, welcher Teilstrich der Skala  $CD$  oder  $C'D'$  an Stelle des Nullpunktes der Skala am Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs erscheint. Sei das der  $n$ -Teilstrich und sei  $\alpha$  der Abstand zweier Teilstriche, so ist, da der Bogen  $\varphi$  dem Radius 1 entspricht

$$\varphi = \frac{n\alpha}{l},$$

damit wird die an  $A$  und  $B$  angreifende Kraft, welche der Hebel um  $n$  Teilstriche ablenkt,

$$f = \frac{1}{2} \frac{F}{l} \frac{n\alpha}{l}.$$

Eine solche Ablenkung des Hebels wurde hervorgebracht durch die beiden Bleikugeln  $M$  und  $N$  von je  $158^{\text{kg}}$  Gewicht, welche in einer passenden Entfernung von den beiden Kugeln  $A$  und  $B$  aufgestellt werden konnten. Dieselben sind an den Enden eines drehbaren Stabes befestigt, der von außen gedreht wird, ohne daß der Beobachter in das zu den Messungen dienende Zimmer eintritt. Man kann diesen Stab senkrecht zu  $AB$  stellen und ihn ebenso in der Lage  $MN$  und  $M'N'$ , die symmetrisch sind zu der Ruhelage des Stabes  $AB$ , feststellen. In der ersten Lage beeinflussen die Kugeln die Lage des Hebels nicht; beide Kugeln ziehen sowohl  $A$  als  $B$  ganz gleichmäßig an, diese Anziehungen können demnach eine Änderung der Stellung des Hebels nicht bewirken. Man beobachtet zunächst die Stellung des Hebels, wenn die Kugeln diese Lage haben, und nimmt diese Lage des Hebels als die Gleichgewichtslage. Darauf bringt man die Kugeln in die Lage  $MN$ ; jetzt zieht  $M$  die Kugel  $A$ ,  $N$  die Kugel  $B$  an; der Hebel dreht sich und erreicht eine neue Gleichgewichtslage, wenn die Anziehung von  $M$  auf  $A$  und von  $N$  auf  $B$  gleich der Kraft  $f$  geworden ist, mit welcher die Torsionskraft den Faden zurückzudrehen sucht. Sei die beobachtete Ablenkung  $n$ . Eine zweite Messung macht man, indem man die Kugeln in die Stellung  $M'N'$  bringt, man erhält dann die Ablenkung  $n$  nach der entgegengesetzten Seite. Da man die Ablenkungen nach beiden Seiten nie absolut gleich findet, nimmt man als richtigen Wert von  $n$  die halbe Summe beider Ablenkungen.

Es möge bemerkt werden, daß man in allen den drei Fällen (Ruhelagen nicht direkt beobachten kann, weil der Stab stets kleine Schwüngen vollführt. Da die Schwingungen nur klein sind, erfolgt aber eine hinreichende Anzahl derselben mit konstanter Amplitude. Man nin

halb als Gleichgewichtslage die Mitte zwischen den beiden äußersten

Aus der gemessenen Ablenkung  $n$  ergibt sich die Anziehung jeder der Kugeln  $A$  oder  $B$  nach der vorhin abgeleiteten Gleichung

$$f = \frac{1}{2} \cdot \frac{F' n \alpha}{l},$$

und aus dieser die Dichtigkeit der Erde in folgender Weise.

Ist die Kugel  $M$  in der Entfernung  $e$  von dem Mittelpunkte der Kugel  $A$ , wenn sie in ihrer Ruhelage war, aufgestellt, so ist die Entfernung der beiden Kugelmittelpunkte nach der Ablenkung  $e_1 = e - n\alpha$ . Ist  $p$  die Masse bzw. das Gewicht der Kugel  $A$ ,  $P$  dasjenige der Kugel  $M$ , so ist

$$f = A \frac{pP}{e_1^2}.$$

Ist  $E$  die Masse und  $R$  der Radius der Erde, so ist der Zug, den die Kugel vom Gewichte  $p$  gegen die Erde hin erfährt, gleich  $gp$ , gleich der Anziehung, welche die Masse  $E$  im Abstände  $R$  auf die Kugel ausübt, also

$$gp = A \frac{pE}{R^2},$$

wenn  $A$  die Anziehung der Masseneinheiten bedeutet, welche sie in der Einheit der Entfernung aufeinander ausüben.

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\frac{f}{gp} = \frac{PR^2}{Ee_1^2}.$$

Bezeichnen wir die mittlere Dichtigkeit der Erde mit  $d$ , so ist

$$E = \frac{4}{3} \pi R^3 d,$$

$$\frac{f}{gp} = \frac{3P}{\pi R d e_1^2}.$$

$$d = \frac{3P \cdot gp}{\pi R e_1^2 f}.$$

Cavendish wandte zu seinen Versuchen zwei Drähte mit sehr verschiedenen Massen von  $F$  an; die Schwingungsdauer  $t$  des ersten betrug 14 Minuten, die Anzahl  $n$  der Teilstriche, um welche die Kugel abgelenkt wurde, war 16; die Schwingungsdauer des zweiten Drahtes war  $t = 7$  Minuten,  $n = 32$ . Mit beiden Drähten erhielt er für  $d$  denselben Wert

$$d = 5,48.$$

Die mittlere Dichtigkeit der Erde ist darnach  $5\frac{1}{2}$  mal größer als jene des Wassers.

In späterer Zeit wurden die Versuche zunächst von Reich in Freiberg im Jahre 1837 wiederholt. Derselbe fand in der letzten Berechnung dieser Versuche im Jahre 1851 denselben Wert wie Cavendish  $d = 5,49$ . Später unternahm Baily zu London im Auftrage der königlichen Astronomischen Gesellschaft eine große Reihe von Versuchen und erhielt nach Korrektur aller Fehler als Mittel aus mehr als 2000 Versuchen  $d = 5,67$ , also

etwas größer wie Cavendish. Darauf bestimmte Reich 1852 nochmals Wert von  $d$  und fand ihn gleich 5,5832. Cornu und Baille erhielten nach derselben Methode bei zwei Versuchsreihen einmal den Wert 5 das andere Mal 5,55.

Boys<sup>1)</sup> wandte als Aufhängefaden einen feinen Quarzfaden an, er kurz vor seinen Versuchen über die Dichte der Erde darzustellen lehrte.<sup>2)</sup> Bei der geringen Torsionskraft eines solchen Quarzfadens konnte er die Dimensionen seines Apparates erheblich verkleinern trotzdem eine große Ablenkung des die kleinen Kugeln tragenden Hebel erhalten. Als Resultat erhielt er  $d = 5,527$ .

C. Braun<sup>3)</sup> brachte Draht und Hebel, um von Luftströmungen möglichst wenig gestört zu sein, in einen sehr stark luftverdünnten Raum. Er beobachtete einmal wie Cavendish die Ablenkung, welche der Hebel durch die seitlich angebrachten Kugeln  $M$  und  $N$  (Fig. 52) erhielt, und auch die Veränderung der Schwingungsdauer, wenn die Kugeln  $M$  und  $N$  in die Verlängerung von  $AB$  gebracht wurden. Da in dieser Lage die Kugeln  $M$  und  $N$  den Kugeln  $A$  und  $B$  einen Antrieb gegen die Gleichgewichtslage gab, so mußte die Schwingungsdauer verkleinert werden. Als definitives Resultat seiner Versuche erhält Braun  $d = 5,527$ .

Jolly<sup>4)</sup> hat das Verfahren von Cavendish in der Weise modifiziert, daß er direkt die Wage benutzte, um die Anziehung einer großen Masse auf eine andere zu messen. Unter der einen Wagschale der in § 40 beschriebenen Wage, auf dem Boden des Turmes wurde aus passend geformtem Bleibarren eine Bleikugel von 1<sup>m</sup> Durchmesser aufgebaut, so daß der Mittelpunkt der Kugel vertikal unter dem Aufhänge Draht der Wagschale sich befand. Es wurde dann genau wie § 40 verfahren, es wurde eine mit Quecksilber gefüllte Glaskugel oben abgewogen, dann die Kugel nach unten gebracht, so daß sich ihr Mittelpunkt vertikal über dem Mittelpunkt der Bleikugel befand, und nun das Zulagegewicht bestimmt, welches erforderlich war, um die Wage wieder ins Gleichgewicht zu bringen. Dieses Zulagegewicht war größer als in dem § 40 betrachteten Falle, weil jetzt außer der Vermehrung der Schwere die Anziehung der Bleikugel auf das Quecksilber zur Wirksamkeit kam. Ist  $r$  der Radius der Bleikugel,  $\delta$  die Dichtigkeit,  $e$  der Abstand des Mittelpunktes des Quecksilbers von dem Mittelpunkt der Bleikugel, so ist die Beschleunigung, welche das Quecksilber gegen den Mittelpunkt der Bleikugel erfährt,

$$g_1 = A \frac{4}{3} \pi r^3 \delta \frac{1}{e^2}.$$

Für die Beschleunigung, welche das Quecksilber von der Erde erfährt, erhielten wir § 40

$$g' = A \frac{4}{3} \pi d R \left( 1 - 2 \frac{h}{R} + \frac{3 \sigma' h}{2 d R} \right),$$

1) Boys, Nature 1. p. 330. 366. 417. 571. 1894.

2) Boys, Phil. mag. 23. (5). p. 489. 1887.

3) Carl Braun, Denkschr. der mathem.-naturw. Klasse der Wiener Akad. 64. p. 187. 1896.

4) Jolly, Abhandlungen der Münchener Akademie 14. II. Abt. — V. Annalen 14. p. 331. 1881.

wenn wir jetzt entsprechend der in diesem Paragraphen gewählten Bezeichnung die mittlere Dichtigkeit der Erde mit  $d$  bezeichnen. Wie wir sahen, ist der in der Klammer stehende Ausdruck, wenn wir  $\sigma' = 0,5d$  setzen, gleich  $0,99989$ . wir können dafür ohne weiteres 1 setzen, da in den hier zu berechnenden Dezimalen der Unterschied ganz ohne Einfluß ist. Dann wird

$$\frac{\gamma_1}{g'} = \frac{r^3 \delta}{R d e^3} = \frac{q}{Q},$$

wenn wir mit  $q$  das nach Anbringen der Bleikugel erforderliche Zulagegewicht, mit  $Q$  das Gewicht des Quecksilbers bezeichnen. Damit wird

$$d = \delta \frac{r^3 Q}{R e^3 q}.$$

Die Versuche ergaben, daß nach Anbringen der Bleikugel zur Herstellung des Gleichgewichtes  $0,589^{\text{mg}}$  mehr erforderlich waren als ohne dieselbe, es ist somit

$$q = 0,589^{\text{mg}}.$$

Wie wir § 40 bereits angaben, war

$$Q = 5009450^{\text{mg}}$$

$$R = 6365722^{\text{m}}.$$

Den Durchmesser der Bleikugel ergaben direkte Messungen zu  $0,995^{\text{m}}$ , somit ist

$$r = 0,4975.$$

Der Abstand  $e$  des Mittelpunktes der Quecksilberkugel von dem Mittelpunkte der Bleikugel ist gleich  $r$  plus dem Halbmesser der Quecksilberkugel plus dem Abstände der beiden Oberflächen. Ersterer war  $0,0445^{\text{m}}$ , letzterer  $0,0266^{\text{m}}$ ; es ist somit

$$e = 0,5686^{\text{m}}.$$

Zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit  $\delta$  der Bleikugel wurde das Gewicht der aus 115 Stücken zusammengesetzten Kugel bestimmt und durch das Volumen der Kugel dividiert. Es ergab sich in dieser Weise

$$\delta = 11,186.$$

Bei Einsetzen dieser Zahlenwerte ergibt sich

$$d = 5,692$$

mit einer Unsicherheit von  $\pm 0,068$ , so daß nach diesen Versuchen die mittlere Dichtigkeit der Erde mindestens,  $5,624$  und höchstens  $5,760$  wäre. Der von Jolly erhaltene Wert ist dem von Baily erhaltenen fast gleich.

In ähnlicher Weise wie Jolly hat Poynting<sup>1)</sup> die Anziehung zweier Massen gemessen und daraus die Dichtigkeit der Erde abgeleitet. Poynting erhält in zwei Beobachtungsreihen das eine Mal den Wert  $5,46$ , das andere Mal den Wert  $5,52$ , im Mittel  $5,4934$ , also einen Wert, der fast genau dem von Reich gefundenen entspricht.

1) Poynting, Proceedings of Royal Society 28 1878. Philosophical Transactions for the year 1891 Gratz, Physikalische Revue. 1 p. 457, 561, 700

Die gleiche Methode wandten Richarz und Krigar-Menzel<sup>1)</sup> an mit dem Unterschiede, daß sie an jeden Arm der Wage eine Bleikugel hingen, deren eine über, deren andere unter einem nahezu würfelförmigen Bleiklotze von fast 100000<sup>kg</sup> sich befand; die Anziehung des Bleis kam dadurch doppelt zur Wirkung, indem die Kugel am einen Ende des Wagebalkens nach oben, am andern Ende nach unten gezogen wurde. Wegen der Anordnung des Apparates im einzelnen müssen wir auf die Abhandlung selbst verweisen. Als Resultat der Beobachtungen ergab sich  $d = 5,505$ .

Wilsing<sup>2)</sup> vertauschte die Wage mit einem Pendel, einem hohlen Messingrohr von etwa 1<sup>m</sup> Länge, das oben und unten, wie es Fig. 41 (S. 141) angedeutet ist, eine Kugel trug. Die Schneide, mit welcher das Pendel auflag und um welche es schwingen konnte, befand sich nahe der Mitte, so daß der Schwerpunkt des Pendels nahe unter der Achse war. Zwei Eisenzyylinder an den Enden eines Drahtseiles, das über eine Rolle lief, je 350<sup>kg</sup> schwer, konnten so gestellt werden, daß der eine oben rechts und der andere unten links von der betreffenden Pendelkugel hing, oder so, daß der letztere oben links, der erstere unten rechts sich befand. Es wurde die Ablenkung des Pendels aus der Gleichgewichtslage beobachtet, aus der sich das Drehungsmoment ergab, das die anziehenden Massen dem Pendel erteilten, welches dann mit dem von der Erde dem Pendel erteilten verglichen wurde. Als schließliches Resultat erhielt Wilsing  $d = 5,579$ .

Auf zwei Dezimalen abgerundet ergibt sich aus den besprochenen Messungen, indem wir allen gleiches Gewicht beilegen  $d = 5,53$ .

### § 43.

**Versuche von Maskelyne.** Die ersten Versuche zur Messung der Dichtigkeit der Erde rühren von Maskelyne her; die von ihm angewandte Methode benutzt die Beobachtung der Ablenkung des Lotes durch große Gebirgsmassen. Die Beobachtungen Maskelynes wurden an der Bergkette Shehallien in Portshire in Schottland ausgeführt. Der Shehallien ist ein isolierter von West nach Ost sich erstreckender Gebirgszug, dessen geognostische Zusammensetzung bekannt ist, und der eine einfache Form hat. Man konnte daher sein Volumen, sein Gewicht und die Lage seines Schwerpunktes berechnen. Maskelyne wählte zwei Stationen *A* und *B* (Fig. 53), die nördlich und südlich von dem Berge in einer durch den Schwerpunkt desselben gehenden Ebene und auf demselben Meridiane lagen. Zunächst wurde die Polhöhe beider Orte bestimmt. Wenn der Gebirgszug nicht vorhanden gewesen wäre, so hätten die beiden Lote *AP* und *BP* einen Winkel miteinander gebildet, der gleich der Breitendifferenz der beiden Orte ist. Die Anziehung der zwischen beiden Orten liegenden Gebirgsmassen bewirkt, daß die Richtung der Lote *AQ* und *BQ'* wird, oder daß die Richtung der Horizontalen gegen den Berg hin sich erhebt und die Polhöhe in *B* vermehrt, in *A* vermindert ist. Man mißt daher die

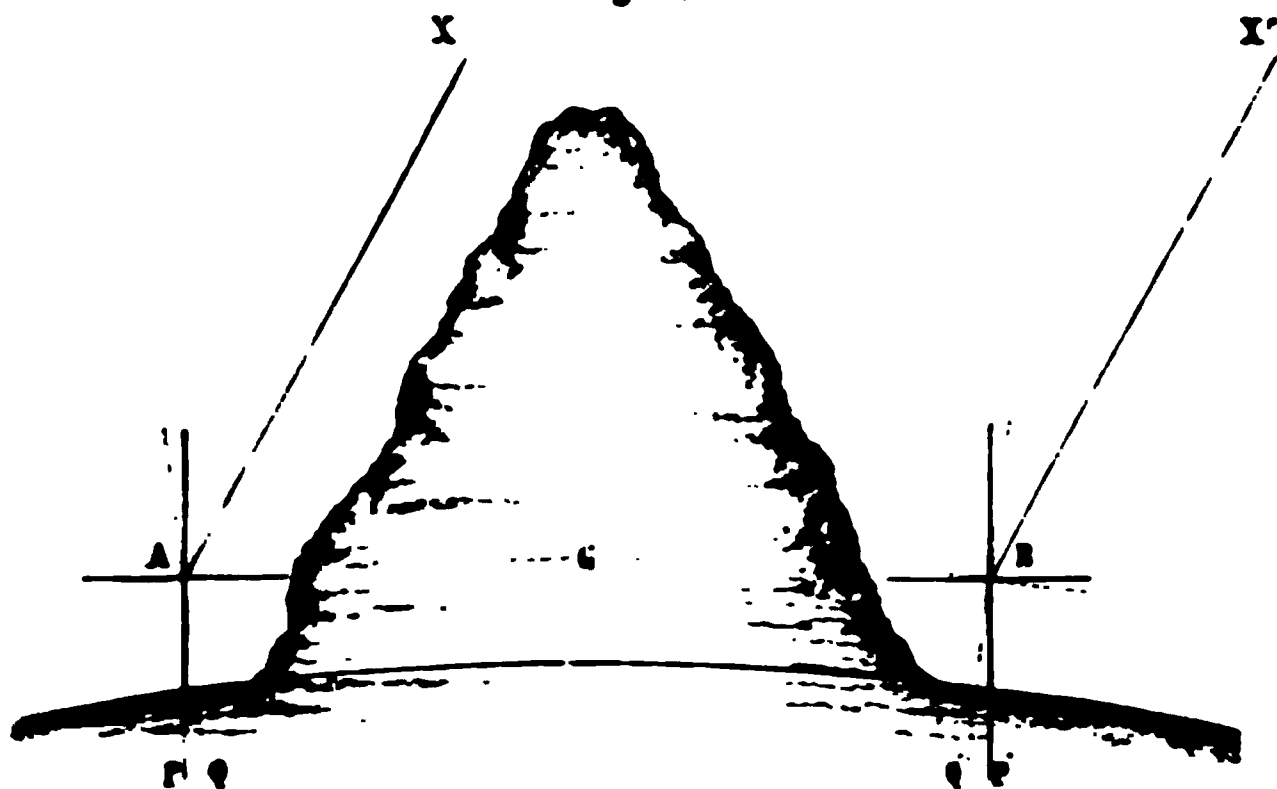
1) *Richarz und Krigar-Menzel*, Wiedem. Ann. 64. p. 177. 1898.

2) *Wilsing*, Publik. d. astrophysikal. Observatoriums zu Potsdam. 6. p. und 129.



Polhöhe und leitet daraus für jede Station die Ablenkung des Lotes her, indem man von dem Unterschiede der Polhöhen die vorher bestimmte Breitendifferenz abzieht.

Fig. 53.



Wirkt an einer der Stationen (Fig. 54) z. B. A die Anziehung der Erde nach A() auf das Lot vom Gewichte  $p$  mit einer Kraft gleich  $A \frac{Pp}{R^2}$ , so wirkt daneben die Anziehung des Berges in der Richtung AG, die wir als horizontal voraussetzen, mit einer Kraft gleich  $A \frac{P'p}{D^2}$ , wenn wir mit  $P'$  das Gewicht des Berges und mit  $D$  den Abstand seines Schwerpunktes vom Orte A bezeichnen. Das Lot ist demnach von zwei aufeinander senkrechten Kräften angegriffen, es wird sich in die Richtung der Resultierenden AC stellen und mit OA einen Winkel  $\alpha$  bilden, der gleich ist der beobachteten Ablenkung des Lotes. Man hat daher

$$A \frac{Pp}{R^2} : A \frac{P'p}{D^2} = AB : CB, \quad \frac{CB}{AB} = \tan \alpha$$

und daher

$$\tan \alpha = \frac{P'}{P} \frac{D^2}{R^2} = \frac{P' R^2}{P D^2}$$

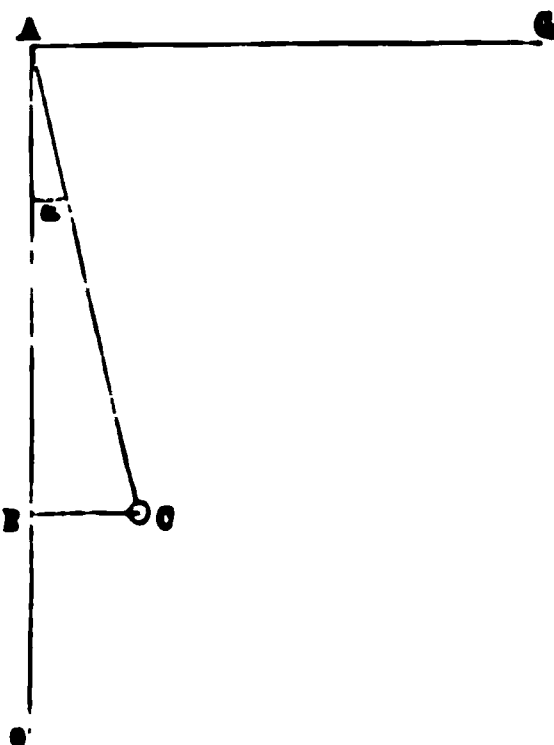
Setzen wir wieder

$$P = \frac{4}{3} R^3 \pi d,$$

so wird

$$d = \frac{0,75 P'}{\pi R \cdot D^2 \cdot \tan \alpha}$$

Fig. 54.



Maskelyne erhielt aus dem von Hutton bestimmten Gewicht  $P'$  des Berges und dem Abstände  $D$  des Schwerpunktes vom Pendel für  $d$  eine Zahl, die nahe gleich 5 war, ein Resultat, welches mit den im vorigen Paragraph besprochenen Versuchen hinreichend übereinstimmt, da auf diese Weise leicht die Genauigkeit erreicht werden kann, wie nach der vorigen Methode.

## § 44.

**Methode von Airy.** Eine interessante Anordnung traf Airy, um den Nachweis der Massenanziehung an den einzelnen Teilen der Erde zu liefern und die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen. Dieselbe beruht darauf, daß der Wert der Beschleunigung ein anderer wird, wenn man unter die Erdoberfläche hinabsteigt. Um zu übersehen, in welcher Weise diese Veränderung von  $g$  stattfindet, denken wir uns die Erde zerlegt in eine Kugelschale von der Dicke  $x$ , der Tiefe der durchsunkenen Schicht, und eine Kugel vom Radius  $R_1 = R - x$ .

Auf einen an der Oberfläche befindlichen Körper wirkt sowohl die Anziehung der innern Kugel als auch der Kugelschale gerade so, als wäre die Masse beider im Mittelpunkte vereinigt, also so, als befände sich die Masse  $M_1$  der innern Kugel und die Masse  $M_2$  der Schale im Abstände  $R$  von dem angezogenen Körper.

Anders jedoch, wenn wir uns auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius  $R_1$  begeben, also die Schicht  $x$  hinabsteigen. Die Kugel mit dem Radius  $R_1$  wirkt nach dem Anziehungsgesetz, da der Körper sich außerhalb derselben befindet, so, als wäre ihre

ganze Masse  $M_1$  im Mittelpunkte, also in der Entfernung  $R_1$  vom angezogenen Körper vereinigt. Die Anziehung der Kugelschale  $x$  muß aber eine andere sein, da der Körper sich im Innern derselben befindet. Wir können leicht nachweisen, daß eine Hohlkugel auf einen in ihrem Innern befindlichen Körper gar keine Anziehung ausübt, wenn die Schale aus homogenen konzentrischen Schichten besteht; und daraus folgt dann, daß in der Tiefe  $x$  unter der Erdoberfläche auf den Körper nur die Masse der innern Kugel aus der ihrem Radius

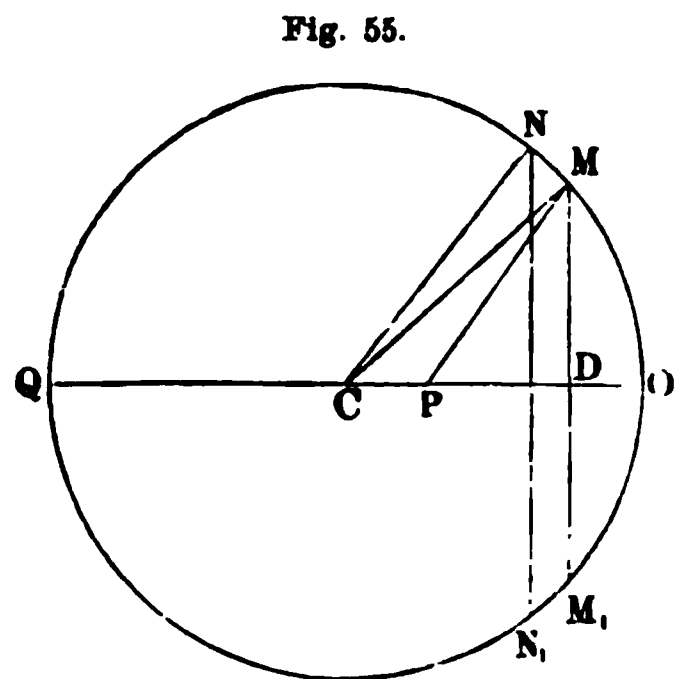


Fig. 55.

gleichen Entfernung  $R_1$  einwirkt.

Stelle, um diesen Nachweis zu führen, der Kreis (Fig. 55) einen Durchschnitt durch eine dünne Schicht der Kugelschale vor, und der Punkt  $P$  liege im Innern derselben, im Abstände  $a$  vom Mittelpunkte. Legen wir gerade wie in § 40 durch die Kugelschale zwei zu  $CP$  senkrechte unendlich nahe Schnitte  $MM_1$  und  $NN_1$ , so erhalten wir für die Anziehung dieser Kugelzone auf den Punkt  $P$ , indem wir genau dieselbe Entwicklung wie in § 40 anwenden, auch identisch denselben Ausdruck, nämlich unter Benutzung derselben Zeichen,

$$A \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a^2} \left( 1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2} \right) de.$$

Um die Anziehung der ganzen Kugelschale zu erhalten, müssen wir auch in diesem Ausdrucke für  $e$  alle möglichen Werte einsetzen und die Summe aller einzelnen Ausdrücke bilden. Die äußersten Werte, welche  $e$  annehmen kann, sind aber hier nicht  $a - r$  und  $a + r$ , sondern  $PO = r - a$

nd  $PQ = r + a$ . Summieren wir nun genau so wie im § 40, so wird mit der Summe jetzt

$$\int_{-a}^{+a} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{r^3}\right) de = (r + a) - (r - a) + \left(\frac{a^2 - r^2}{r - a} - \frac{a^2 - r^2}{r + a}\right) = 0.$$

Da diese Summe gleich Null ist, so folgt also, daß eine solche Schicht auf einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar keine Anziehung ausübt, und damit, daß überhaupt eine aus konzentrischen homogenen Schichten bestehende Kugelschale einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar nicht anzieht.

Es folgt somit, daß der in der Tiefe  $x$  unter der Erdoberfläche befindliche Körper nur von der innern Kugel, deren Radius  $R_1 = R - x$  ist, angezogen wird. Suchen wir zunächst, wie sich die Beschleunigungen in der Tiefe und an der Erdoberfläche verhalten müssen.

Die Beschleunigung, welche die innere Kugel an ihrer Oberfläche erteilt, sei  $g_1$ . Die Beschleunigung an der Erdoberfläche ist dann gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die innere Kugel an der Erdoberfläche, also im Abstände  $R$  von dem anziehenden Mittelpunkte erteilt, und welche die Kugelschale von der Dicke  $x = R - R_1$  an ihrer Oberfläche erteilt.

Die Beschleunigung  $g_1'$ , welche die innere Kugel an der Erdoberfläche erteilt, ist nach dem Anziehungsgesetz

$$g_1' = g_1 \cdot \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Bezeichnen wir die Beschleunigung an der Erdoberfläche wie immer mit  $g$ , so gibt uns die Differenz

$$g - g_1'$$

die Anziehung, welche die äußere Schale allein auf einen an ihrer äußern Oberfläche befindlichen Körper ausübt.

Die Anziehungen der äußern Schale sowohl als des innern Kernes gehen so, als wären die ganzen Massen in ihrem Mittelpunkt vereinigt; sie sind daher proportional diesen Massen selbst oder den Produkten aus dem Volumen  $V$  und  $V_1$  und ihren Dichtigkeiten  $D$  und  $D_1$ . Wir haben hiernach

$$g - g_1' : g_1' = VD : V_1 D_1$$

indem wir für  $g_1'$  seinen Wert einsetzen,

$$\frac{g - g_1 \frac{R_1^2}{R^2}}{g_1 \frac{R_1^2}{R^2}} = \frac{VD}{V_1 D_1} = \frac{\frac{4}{3} R^3 - R_1^3}{\frac{4}{3} R_1^3} \pi D = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1}$$

$$\frac{g R^2 - g_1 R_1^2}{g_1 R_1^2} = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1},$$

ausdruck, den man leicht auf die Form

$$\frac{g}{g_1} = \frac{R_1^2}{R^2} + \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 R_1^2} \cdot \frac{D}{D_1} = \frac{R_1^2}{R^2} \left[ 1 + \left( \frac{R^3}{R_1^3} - 1 \right) \frac{D}{D_1} \right]$$

bringen kann, und der zu erkennen gibt, daß das Verhältniß der Beschleunigung an der Oberfläche und in der Tiefe abhängig ist von dem Verhältniß der Dichten der äußeren Schale und in der Tiefe. Derselbe zeigt aber gleichzeitig, daß wenn man  $g_1$ ,  $R_1$  und  $D$  beobachtet,  $D_1$  sich berechnen läßt.

Hierauf gestützt, stellte Airy zwei Pendel auf, eines an der Erdoberfläche, eines auf dem Boden des Bergwerkes von Harton in einer Tiefe von 383 Meter. Jedes war, wie bei den Bordaschen Versuchen, vor einer astronomischen Uhr aufgehängt. Man beobachtete die Oszillationen mittels der Methode der Koinzidenzen und bestimmte ihre Dauer durch die Angaben der Uhr. Wenn nun aber die Veränderung der Schwere die Dauer einer Oszillation des Pendels verändert, so ist klar, daß sie auch den Gang der Uhr ändert. Es war deshalb notwendig, den Gang der untern Uhr mit dem der obern zu vergleichen; das geschah mittels elektrischer Signale, welche sich in einer nicht meßbaren kleinen Zeit von der obern zur untern Station fortpflanzten, und durch die man die Zeitangabe der untern Uhr korrigierte.

Die Beobachtung ergab, daß die Beschleunigung durch die Schwere auf dem Boden des Bergwerkes  $\frac{1}{19\,190}$  größer war, oder daß

$$\frac{g_1}{g} = 1,000052$$

war, ein Resultat, aus welchem sich ergibt, daß  $D_1$  bedeutend größer sein muß als  $D$ . Denn wäre das nicht der Fall, so müßte die Schwere in der Tiefe kleiner werden, wäre etwa  $D = D_1$ , so ergibt sich

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R_1}{R};$$

die Schwere müßte in demselben Verhältnisse abnehmen, als der Radius der innern Kugel kleiner ist wie der Radius der Erde.

Indem man den Inhalt des Bodens über dem Schachte untersucht, erhält man die mittlere Dichtigkeit der Schale in der Nähe des Ortes, wo die Versuche angestellt wurden. Dieselbe ergab sich zu 2,75. Airy setzte diese Dichtigkeit als die mittlere Dichtigkeit der Kugelschale ein, indem er davon ausging, daß, wenn auch die Kugelschale nicht vollständig homogen ist, doch die nähern Massen vorwiegend einwirken. Die Bestimmungen Airys ergaben ferner, daß, die Tiefe des Hartoner Schachtes gleich 1 gesetzt,

$$R = 16\,621,7 \text{ und deshalb } R_1 = 16\,620,7,$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung für  $D_1$  ein, so erhält man

$$D_1 = 6,566,$$

so daß also die Dichtigkeit des innern Kernes, oder da die Masse der obern Schale gegen die des innern Kernes verschwindend klein ist, die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr 6,5mal so groß als die des Wassers wäre.

Gegen die Berechnung Airys hat Haughton den Einwurf gemacht, daß Airy die Dichtigkeit der Erdrinde erheblich zu hoch genom-

habe, da der größere Teil des Harton-Schachtes unter dem Niveau des Meeres liege, er leitet deshalb als mittlere zur Berechnung in betracht zu ziehende Dichtigkeit der Erdrinde die Zahl 2,059 ab. Mit dieser Zahl ergibt sich

$$D_1 = 5,480,$$

also dem mit der Drehwage und dem von Poynting gefundenen Werte sehr nahe gleich.

Nehmen wir für die Dichtigkeit der Erde das Mittel aus den gefundenen Zahlen oder rund 5,53, so sind wir dadurch schließlich imstande, die Anziehungen zu berechnen, welche zwei der Einheit gleiche Massen aufeinander aus der Einheit der Entfernung ausüben. Bezeichnen wir die Masse der Erde mit  $M$ , so gibt uns das Anziehungsgesetz für die Zahl  $g$  die Gleichung

$$g = A \frac{M}{R^2},$$

wonin  $A$  wie früher die Anziehung der beiden Masseneinheiten aus der Entfernungseinheit bedeutet; demnach ist

$$A = g \frac{R^2}{M},$$

oder, indem wir für  $M$  seinen Wert setzen,

$$A = g \cdot \frac{R^2}{\frac{4}{3} R^2 \pi \cdot d} = 0,75 \cdot g \cdot \frac{1}{R \pi d}.$$

Beziehen wir die hier vorkommenden Größen, auf Gramm, Zentimeter, Sekunde, so ist  $d$  die Masse des Kubikzentimeters gleich 5,53, da wir 5,53 als das Mittel sämtlicher Beobachtungen für die mittlere Dichtigkeit der Erde einsetzen.  $R\pi$  ist der halbe Umfang der Erde, also in Zentimetern 20000000000. Für  $g$  setzen wir den der Breite von  $45^\circ$  entsprechenden Wert, vermehrt um den Wert der Zentrifugalbeschleunigung, also  $g = 982,236$ . Mit diesen Werten wird  $A$

$$A = \frac{0,75 \cdot 982,236}{5,53 \cdot 20000000000} = 6,661 \cdot 10^{-8}.$$

Zwei Massen, jede ein Gramm, ziehen sich also im Abstände ein Zentimeter mit einer solchen Kraft an, daß, wenn wir uns die eine festgelegt denken, die andere gegen die erste die Beschleunigung  $6,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$  erhält. oder die Anziehung ist  $6,6 \cdot 10^{-8}$  unserer Krafteinheit, welche der Masse Gramm in der Sekunde die Beschleunigung  $1 \text{ cm}$  erteilt.

Die Dimension der als Gravitationskonstante bezeichneten Größe  $A$  ergibt sich aus der Gleichung für  $A$ , die dasselbe als Produkt einer Beschleunigung  $g$ , dem Quadrate einer Länge und dem reziproken Werte der Masse erscheinen läßt, es ist

$$A = z [\mu^{-1} \text{ l}^3 \tau^{-2}].$$

## § 45.

**Ebbe und Flut.** Eine wichtige Erscheinung an unserer Erdoberfläche, hervorgehend aus der allgemeinen Massenanziehung und zwar aus

der Anziehung des Mondes und der Sonne, ist das täglich zweimalige Steigen und Fallen des Wassers in den großen Meeren. Wir müssen uns hier begnügen, die Erscheinung in ihren Grundzügen zu erklären.

Die Anziehung, welche der Mond auf die verschiedenen Punkte der Erde ausübt, ist verschieden, da dieselben von dem Monde verschieden entfernt sind. Ziehen wir z. B. durch den Mittelpunkt der Erde eine gerade Linie gegen den Mond, so ist der Mittelpunkt der Erde von dem des Mondes um 60, der Punkt, in welchem die dem Monde zugewandte Erdhälfte von der Geraden getroffen wird, um 59, der entsprechende Punkt auf der abgewandten Erdhälfte 61 Erdradien entfernt. Nennen wir die Anziehung des Mondes auf die Masseneinheit in der Entfernungseinheit  $f$ , den Abstand des Erdmittelpunktes vom Monde  $d$  und den Radius der Erde  $R$ , so erhalten wir für die Anziehung auf jene drei Punkte respektive

$$\frac{f}{d^2} \cdot \frac{f}{(d-R)^2} \cdot \frac{f}{(d+R)^2}$$

und als die Differenzen zwischen den beiden letzten und der ersten Größe

$$\pm \frac{2f \cdot R}{d^3},$$

wenn wir die Glieder der Differenzen, in denen höhere Potenzen von  $d$  als die dritte vorkommen, vernachlässigen. Um diese Größe wird also der dem Monde zugewandte Punkt der Erdoberfläche stärker, der vom Monde abgewandte Punkt schwächer angezogen als der Mittelpunkt der Erde.

Wäre die ganze Erde fest, kein Punkt derselben gegen die anderen verschiebbar, so würden diese Differenzen durch die festen Verbindungen so übertragen werden, daß dadurch nur ein Zug auf den Mittelpunkt der Erde entstände. Nun ist aber ein großer Teil der Erde mit Wasser bedeckt, dessen einzelne Teile gegeneinander und gegen die festen Teile der Erde frei beweglich sind. Das Wasser wird daher infolge dieser verschiedenen Anziehungen eine Bewegung annehmen müssen, und zwar wird es, wenn jene Linie zum Beispiel die Erdoberfläche an beiden Punkten im Meere schneidet, sich an beiden Punkten erheben und dafür an den zwischenliegenden fallen müssen. Da nämlich an der dem Monde zugewandten Seite das Wasser stärker, an der vom Monde abgewandten Seite schwächer angezogen wird als der Mittelpunkt der Erde, so ist das gerade so, als wenn an beiden Punkten eine der Schwere entgegengesetzte Kraft von der Größe jener Differenz angebracht wäre, wie sich leicht durch folgende Betrachtung anschaulich machen läßt.

Man habe drei Punkte  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ; die Punkte  $A$  und  $B$  werden jeder durch eine Kraft gleich 10, um ein Zahlenbeispiel zu wählen, gegen  $C$  hingezogen. Nun seien ferner an den drei Punkten nach gleicher Richtung, z. B. nach rechts hin, folgende Kräfte angebracht; an  $B$  die Kraft 3, an  $C$  die Kraft 2 und an  $A$  die Kraft 1. Diese Punkte befinden sich gewissermaßen in denselben Verhältnissen wie unsere vorhin betrachteten Punkte auf der Erde. In dem Verhältnis der drei Punkte zueinander wird nun nichts geändert, wenn wir von jedem derselben die nach rechts hin ziehende Kraft 2 fortnehmen. Dadurch ist der Punkt  $C$  wieder wie Anfangs von keiner Kraft affiziert. Am Punkte  $B$  bleibt aber die Kraft nach rechts hin, also vom Punkte  $C$  fortziehend übrig. An  $A$  zog

unglich die Kraft 10 gegen  $C$  nach rechts, es trat dann noch die Kraft 1 zu. später aber nahmen wir die Kraft 2 wieder fort, es bleibt also nur Kraft 9 nach  $C$  hinziehend übrig, oder da wir uns statt der Kraft 9 Kraft 10 nach  $C$  hin und die Kraft 1 von  $C$  fortziehend denken, so ist, daß durch Anbringen jener Kräfte auch bei  $A$  gleichsam eine von  $C$  fortziehende Kraft entsteht, welche gleich ist der Differenz der von  $C$  und  $A$  nach rechts hin wirkenden Kräfte.

So also auch bei der Erde. Durch Anziehung des Mondes entsteht den unter dem Monde und den ihm gegenüber an der andern Seite der Erde liegenden Punkten gleichsam eine das Wasser vom Mittelpunkte der Erde fortziehende Kraft.

Das Wasser muß also dort steigen und dafür an den mitten zwischen den liegenden Punkten der Erde fallen. Dadurch müssen also zwei, an diametral gegenüberliegenden Stellen der Erde sich bildende Flutwellen entstehen, deren jede, da die Erde sich in 24 Stunden von Westen nach Osten um ihre Achse dreht, die Erde in 24 Stunden von Osten nach Westen umkreisen muß.

In den Meeren muß also täglich zweimal Flut und Ebbe entstehen, da sie jeden Tag den Mond einmal im Zenith, einmal im Nadir haben. Wegen der Eigenbewegung des Mondes in seiner Bahn jedoch, wodurch der Durchgang durch einen bestimmten Meridian täglich um 50 Minuten verzögert wird, verzögert sich auch der Eintritt von Ebbe und Flut jeden Tag um ebensoviel.

Ebenso wie der Mond erzeugt auch die Sonne Ebbe und Flut, jedoch viel schwächer, wie man sofort erkennt, wenn man in unsern Ausdruck  $\frac{2fR}{d^3}$ , worin  $d$  die Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde zum Mittelpunkte der Sonne angibt, die von dem Mittelpunkte fortziehende Kraft der Sonne entsprechenden Größen einsetzt. Bezeichnet  $M$  die Masse der Sonne und  $m$  die Masse des Mondes, so haben wir statt  $f$  der Anziehung des Mondes  $f \cdot \frac{M}{m}$  zu setzen, und anstatt  $d$  die Entfernung der Sonne von der Erde  $d' = 400d$ , da die Sonne 400mal weiter von uns entfernt ist als der Mond. Die Masse der Sonne  $M$  ist 355000mal größer als die der Erde und die der Erde gleich  $88m$ , also 88mal größer als die des Mondes. Wir haben demnach für die Differenz der Sonnenanziehung

$$\frac{2fR \cdot 355000 \cdot 88}{d'^3 \cdot 400^3} = 0,488 \frac{2fR}{d^3},$$

also ungefähr die Hälfte des Unterschiedes der Mondanziehung auf die entsprechenden Punkte der Erde. Die Sonnenflut wird daher auch nur die Hälfte der Höhe der Mondflut haben. Durch die vereinte Wirkung von Sonne und Mond wird nun die Fluthöhe entweder vergrößert oder verkleinert. Wenn Sonne und Mond an der gleichen Seite der Erde zur Zeit des Neumondes, oder an der entgegengesetzten, zur Zeit des Vollmondes, so verstärken sie die Fluten, es treten die sogenannten Springfluten ein. Zur Zeit der Quadraturen, also des ersten und letzten Viertels tritt Sonnenflut zu Mondflut an der gleichen Stelle auf und umgekehrt; die Fluten sind dann als Nippfluten die kleinsten.

Durch die verschiedenen Tiefen des Meeres und die Konfiguration des Meeres wird der Verlauf der Fluten sowie das Gesetz ihrer Änderung



ein äußerst verwickeltes, welches jedoch La Place in großer Vollständigkeit gelöst hat. Wir müssen uns hier begnügen, darauf hingewiesen zu haben.

### Literatur des ersten Abschnittes.

Die bisher vorgetragenen Lehren sind größtenteils so vielfach behandelt und in vortrefflichen Werken zusammengestellt, daß eine Angabe der Originalquellen teils zu weit führen würde, teils nur ein geschichtliches Interesse hat. Wir verweisen daher in betreff der genauern Kenntnis der einzelnen Lehren auf die vielen vorzüglichen Lehrbücher der Mechanik, von denen wir folgende namhaft machen

- 1 *Brix, A. F.*, Lehrbuch der Statik fester Körper Berlin 1849
- 2 *Broch, O. J.*, Lehrbuch der Mechanik Berlin und Christiania 1854
- 3 *Burg, A.*, Kompendium der populären Mechanik und Maschinenlehre 2. A. Wien 1849
- 4 *Delaunay, Ch.*, Cours de Mécanique rationelle 2. éd Paris 1857
- 5 *Duhamel*, Lehrbuch der analytischen Mechanik Deutsch von Dr O Schlo-milch 2 A Leipzig 1858
- 6 *C. G. J. Jacobi*, Vorlesungen üb Dynamik. Herausg v. Clebsch. Berlin 1866
- 7 *Jolly, Ph.*, Prinzipien der Mechanik Stuttgart 1852
- 8 *Möbius, A. F.*, Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837.
- 9 *Poinsot, J.*, Eléments de statique 9 éd Paris 1848
- 10 *Poisson, S. D.*, Traité de Mécanique. 2 éd Paris 1833
- 11 *Redtenbacher*, Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaues Mann-heim 1852
- 12 *Jullien, M.*, Problèmes de Mécanique rationelle Paris 1855.
- 13 *Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte Leipzig 1870
- 14 *Vonnt, W.*, Elementare Mechanik als Einleitung in das Studium der theo-retischen Physik Leipzig 1889

Des geschichtlichen Interesses wegen sei es jedoch gestattet, die Autoren und Quellen vorzuführen, von denen die verschiedenen wichtigsten Lehren zuerst vorgetragen sind. Daran schließen wir dann eine Angabe der Literatur der neueren Gegenstände, besonders der Lehren über Erhaltung der Rotation und Schwingungsebene, die in neuerer Zeit durch den *Foucault'schen Versuch* die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben, sowie über die Bestimmungen von  $g$  und der Dichtigkeit der Erde.

Zum ersten Kapitel bemerken wir, daß die Fallgesetze von *Galilei* erkannt und in seinen:

„Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica ed i movimenti locali Leiden 1638“ vollständig vorgetragen sind

Die allgemeinen Folgerungen aus diesen Gesetzen zog zuerst *Isaak Newton*. Er legte sie in seinem Werke:

„Philosophiae naturalis principia mathematica. Lond 1687“ der Behandlung der Lehre von den Bewegungen und Kräften zugrunde. In drei Prinzipien, welche er anwandte, sind

- 1 das Prinzip der Trägheit, nur äußere Kräfte ändern den Bewegungszustand eines Körpers;
- 2 daß die Änderung der Bewegung proportional sei der wirkenden Kraft
- 3 das von uns § 11 erläuterte Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung

Unsere im § 11 aus der Gleichung für die Bewegung einer konstant wirkenden Kraft abgeleiteten Gleichungen  $Mr = Pt$  und  $\frac{1}{2} Mr^2 = Ps$ , wurden die erstere von *Cartesius* in seinen *Principis philosophiae* abgeleitet und dabei das Produkt  $Mr$  als das Maß der bewegenden Kraft aufgestellt; die zweite entwickelte *Leibnitz* und glaubte seinerseits das Produkt  $Mr^2$  als Maß der bewegenden Kraft dem *Cartesischen* gegenüberstellen zu müssen

„Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum Acta eruditorum Leipzig 1686, März“

Daran knüpfte sich ein langer Streit, der vorzugsweise in den Actis eruditi geführt wurde.

*D'Alembert* wies dann 1748 in seinem *Traité de dynamique* nach, wie der Streit nur ein Wortstreit sei und durch eine präzisere Begriffsfassung erledigt werde.

Die im zweiten Kapitel vorgetragenen Sätze über die statischen Momente und den Schwerpunkt rühren ursprünglich schon von Archimedes her:

Archimedes von Syracus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen versehen von *Ernst Nisse* Stralsund 1824.“

Theoretische Beweise für das Hebelgesetz gaben zuerst *Cartesius* und *Newton*, ersterer im *Tractatus de mechanica* in den *opusculis postumis* Amstello. 1711. Letzterer in den *Principiis* liber I. *Leges motus*, lex III.

Die Gesetze der Zentripetalkraft entwickelte zuerst *Huyghens* in seinem erste: *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris 1673; ausführlicher finden sie sich mit Beweisen in der *opusculis postumis*. Leiden 1703 in der Abhandlung *de vi centrifuga* p. 401 u. f.

Die Theorie der Wage wurde zuerst vollständig entwickelt von *Leonhard Euler* in den Kommentarien der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Petersburg. Tom. X.

Die Pendelgesetze wurden zum Teil schon von *Galilei* entwickelt, nämlich, daß Pendel von gleicher Länge in gleichen Zeiten ihre Schwingungen vollenden, auch wenn die Gewichte ungleich sind, und daß bei ungleich langen Pendellängen sich die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten.

*Huyghens* baute dann in seinem soeben genannten Werke die Theorie weiter aus und fügte die Sätze hinzu, daß nur unendlich kleine Schwingungen genau isochron sind, und daß die Dauer eines Hin- und Herganges des Pendels sich zur Dauer des freien Falles durch die doppelte Pendellänge verhalte wie die Peripherie eines Kreises zu seinem Durchmesser, also

$$t : 2 \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi : 1,$$

sonach dann die Zeitdauer einer Schwingung, wie wir sie gefaßt haben, die einzige Zurücklegung des Bogens hervorgeht.

Von *Huyghens* rührt die Unterscheidung des einfachen und zusammengesetzten Pendels und die Zurückführung des letztern auf das erstere her, wie wir sie vorzutragen haben.

Die erste Bestimmung von *g* mittels des Pendels machte *Huyghens*, er fand *g* = 15 Fuß und 1 Zoll.

Die von uns mitgeteilte Methode von *Borda* befindet sich in *Essai du Systeme Métrique etc.*, rédigée par M. Delambre. Tome III. p. 337. Paris 1810“

2. mit Berücksichtigung des Gewichtes des Fadens

*Biot et Arago*: *Recueil d'observations géodésiques astronomiques et physiques exécutées par Ordre du Bureau des Longitudes*. Paris 1821.“

Die zweite Methode wurde vorgeschlagen von *Bohnenberger* in seiner *Astronomie*. Tübingen 1811.

Die Ausführung von Kapt. *Kater* ist beschrieben *Philosophical transactions of the Royal Society of London for the year 1818*, p. 33 ff.“

Auf die Erhaltung der Rotationsebene machte *Bohnenberger* bei Bekanntmachung seines Apparates aufmerksam. *Gilbert, Annalen* 60, p. 60. 1818.

In neuerer Zeit ist die Literatur über diesen Gegenstand sehr bedeutend angeschwollen, seit *Foucault* diese Eigenschaft der rotierenden Körper zum Beweise der Achsendrehung der Erde vorschlug. Man sehe unter andern außer in 2 Werken über Mechanik, über die freien Achsen

*Poisson*, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. Liouville Journal de mathématiques 1861 (*Poisson*, Neue Theorie der Drehung der Körper, übersetzt von *Schellbach* Berlin 1861.)

*L. Foucault*, Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la terre fondée sur la fixeté du plan de rotation Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 35 p 421 Paris 1852.  
Ferner C R 35 p 424, p. 602.

*Person*, L'appareil de *Bohnenberger* peut servir à constater la rotation de la terre C R 35 p 417, 649 und 753 1852

*J. Plucker*, Über die Fesselsche Rotationsmaschine, Poggend Ann 90 1853

*J. C Poggendorff*, Noch ein Wort über die Fesselsche Rotationsmaschine. Poggend Ann 90 p 348 1853 (Die von uns mitgeteilte Erklärung)

*G. Magnus*, Verbesserte Konstruktion eines Apparates zur Erläuterung verschiedener Erscheinungen bei rotierenden Körpern. Poggend Ann 91 1854.  
Der Foucaultsche Pendelversuch wurde zuerst mitgeteilt in der Abhandlung von *Foucault*.

*L. Foucault*, Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule C R. 32 p 135 1851, auch Poggend Ann 82 1851

Seitdem sind eine Menge von Mitteilungen erschienen, welche teils Wiederholungen des Versuches darstellen, teils dazu dienen, das Gesetz, nach welchem sich die Dauer der Drehung unter verschiedenen Breiten ändert, zu bestimmen

Eine vollständige Zusammenstellung der Literatur über diesen und den vorigen Gegenstand findet sich in den Berichten über die Fortschritte der Physik, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin in den Jahren 1850, 1851, Berlin 1855; 1852, Berlin 1855; 1853, Berlin 1856 usf., in dem Abschnitt über Mechanik, Foucaultsche Versuche

Die im dritten Kapitel vorgetragenen Lehren über die allgemeine Attraktion hat *Newton* in dem bereits erwähnten Werke Principia etc. entwickelt

Die drei *Kepplerschen* Gesetze, auf welche *Newton* seine Entwicklungen stützte, teilte *Keppler* mit, die beiden ersten 1609 in seiner Astronomia nova aetioloyntos, sive physica coelestis tradita commentariis de motu stellae Martis, Pragae 1609; das dritte, welches er am 15 Mai 1618 auffand, in Epitome astronomiae Copernicanae, Lincii 1618

Die Verschiedenheit von  $g$  an verschiedenen Orten der Erde behauptete *Newton* zuerst, und der französische Astronom *Richer* zeigte 1670, daß das Sekundenpendel in Cayenne unter  $5^{\circ}$  n Br 1,25 Linien kürzer sei als in Paris

Die ältern Messungen von  $g$  sind zusammengestellt in *Gehlers* physikalischem Wörterbuch, 2 Aufl von *Brandes*, *Munk*, *Pfaff*, *Littrow*, *Gmelin*, *Horn* Bd 3 Artikel Erde p 891 ff Neuere Messungen unter andern von *Peters* findet man in den astronomischen Nachrichten Jahrg 1880, von *Brühns* in den Publikationen des königl preußischen geodätischen Instituts, Arbeiten im Jahre 1870 Leipzig bei Engelmann 1871 Man sehe auch die Besprechung der neuern Pendelmessungen von *Helmert* in der Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft 11, Heft 1 und ebenso die schon zitierte Abhandlung von *Helmert* in den Berichten der Berliner Akademie 1901 Nr 14

*Cavendish*, Versuche über die Dichtigkeit der Erde sind mitgeteilt in den Philosophical Transactions 88, auch Gilbert Annalen 2 1799

*Reich*, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mit der Drehwaage Freiberg 1838

*Baily*, Experiments with the Torsion Rod for determining the mean density of the Earth Vol XIV of the Mem of the Royal Astron Society London 1843 Unter demselben Titel auch besonders erschienen

*Reich*, Abhandlungen der mathematisch-physik Klasse der königl sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1 1852

*Cornu* und *Buile*, C R 76 p 954 1897

*Maskelyne* und *Hutton*, Philosoph Transact 1775 und 1778.

*Airy*, Philosoph Transact 146 1856

Die Zitate betreffs der neuern Versuche sind schon bei der Besprechung der Versuche mitgeteilt.

Die Erklärung von Ebbe und Flut gab zuerst *Newton* in seinen Principia phil. nat lib 1 prop 66 und lib III prop 24 36 37

Vollständig ausgeführt ist sie von *Laplace*, Mécanique céleste livre IV u XI. Man sehe *Gehlers* Physik Wörterbuch 2. Aufl 3 Artikel „Ebbe und Flut“

## **Zweiter Abschnitt.**

### **Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Teilen.**

#### **Erstes Kapitel.**

#### **Von den festen Körpern.**

##### **§ 46.**

**Beschaffenheit der Materie.** Bei unsern bisherigen Untersuchungen über die Wirkung von Kräften auf die Körper haben wir die letztern als absolut starr angesehen, indem wir nur die Bewegungen ins Auge gefaßt haben, welche die Körper als solche unter der Wirkung der Kräfte annehmen. Untersuchen wir die Einwirkung der Kräfte auf die Körper aber genauer, so finden wir auch dann, wenn die Körper keine Bewegung annehmen, daß dieselben durch die auf sie einwirkenden Kräfte Veränderungen erfahren. Wir sehen, daß die festen Körper verlängert oder verkürzt und gebogen werden können, wir sehen Bewegungen in einer Flüssigkeitsmasse eintreten, kurz wir sehen, daß die einzelnen Teile eines Körpers gegeneinander verschiebbar sind.

Die Erscheinungen dieser Art, das übersieht man unmittelbar, werden außer von den äußern wirksamen Kräften wesentlich bedingt sein von der innern Struktur der Körper, oder was dasselbe ist, von der innern Struktur dessen, was die Körper bildet, der Materie. Ehe wir deshalb zur Untersuchung dieser Erscheinungen übergehen, wird es vorteilhaft sein zu untersuchen, ob wir nicht schon von anderer Seite her über diese Struktur der Materie einigen Aufschluß erhalten können, der uns die Untersuchung der an den Körpern beobachteten physikalischen Erscheinungen erleichtert.

Die erste Erfahrung, welche wir in betreff der Struktur der Körper machen, ist die Teilbarkeit derselben; es gibt keinen Körper, der nicht in Teile zerlegt, der nicht zerstückt werden kann. Diese Teilbarkeit geht so weit, daß es nicht möglich ist, eine Grenze derselben zu erreichen oder zu bestimmen. Um sich davon zu überzeugen, genügt es an ein Beispiel zu erinnern: ein wenig Moschus verbreitet in dem Raume, in dem es aufbewahrt wird, einen sehr starken Geruch, weil es fortdauernd in demselben einen Teil seiner Substanz zerstreut; dennoch kann es lange Zeit in dem Raume gelassen werden, ohne daß sich sein Gewicht an einer selbst sehr



empfindlichen Wage meßbar vermindert. Erst Salvioni<sup>1)</sup> ist es gelungen, den Gewichtsverlust des Moschus nachzuweisen, indem er als Wage einen feinen Glasfaden verwandte, der an seinem einen Ende eingeklemmt war, so daß der Faden horizontal war. Wird das andere Ende des Fadens belastet, so biegt sich der Faden, das belastete Ende sinkt herab, umso mehr, je größer die Belastung ist und je feiner der Glasfaden ist, wie wir bei Besprechung der Biegung sehen werden. Wie Salvioni angibt, kann man an solchen Glasfäden von hinreichender Feinheit noch Gewichte von  $0,001^{\text{mg}}$  erkennen. Mit Hilfe eines solchen als Wage dienenden Glasfadens konnte Salvioni erkennen, daß ein Stückchen Moschus stetig, und zwar der Zeit proportional an Gewicht abnahm.

Bei dieser großen Teilbarkeit kann man zwei Annahmen über die Konstitution der Materie machen; man kann entweder annehmen, die Materie sei bis ins Unendliche teilbar, oder man komme bei fortgesetzter Teilung schließlich auf Teilchen, welche nicht weiter geteilt werden können, auf Atome. Macht man die letztere Annahme, so muß die Materie aus diesen kleinsten Teilchen aufgebaut sein, die im Innern als solche existieren, sie muß ein Aggregat dieser einzelnen Teile, dieser Atome sein, die in mehr oder weniger großen Abständen nebeneinander gelagert sind, ohne sich zu berühren, die sich anziehen oder abstoßen können, welche sich einander festhalten, wie in den festen Körpern, oder gegen einander beweglich bleiben, wie in den flüssigen oder gasförmigen Körpern.

Macht man dagegen die erstere Annahme, ist die Materie, wenn auch nur ideell, bis ins Unendliche teilbar, so können in der Materie keine diskreten Teilchen als solche existieren, sondern jedes Teilchen ist nur ein Teil des Ganzen. Daraus folgt dann, daß nach dieser Anschauungsweise die Materie den Raum eines Körpers kontinuierlich erfüllen muß, natürliche Spalten und Poren in demselben ausgenommen. Denn sobald man innerhalb der Materie eine Diskontinuität zugibt, hat eben das für sich bestehende Teilchen eine selbständige Existenz, es ist der Baustein, aus welchem die Materie zusammengesetzt ist.

Schon die hierin gegebene Fragestellung beweist, daß es sich hier um die Wahl einer von zwei möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie handelt, somit auch, daß wir bei der Entscheidung der Frage mit aller der Vorsicht verfahren müssen, welche bei der Bildung von Hypothesen angewandt werden muß. Wir haben nach den in der Einleitung aufgestellten Prinzipien die Hypothese zu wählen, welche die von der Struktur der Materie abhängigen Erscheinungen am einfachsten und ohne weitere Hilfhypothesen verständlich macht; die Erfahrungen der Chemie sind es, welche wir zunächst ins Auge zu fassen haben.

Wir können diese Erfahrungen in folgenden wenigen Sätzen zusammenfassen:

1. Zwei verschiedene Materien können sich zu einer dritten neuen, deren Eigenschaften von denen ihrer Bestandteile wesentlich verschieden sind, verbinden; so der brennbare Wasserstoff und der die Verbrennung unterhaltende Sauerstoff zu dem nicht brennbaren Wasser, das magnetische

1) Salvioni, Journal de phys. théor. et appliquée 10 (3) p. 761. 1901

**Metall Eisen und der brennbare Schwefel zu dem nicht magnetischen, nicht metallischen Schwefeleisen.**

Bei dem Ubergange des Gemenges zweier Materien in die Verbindung findet stets eine Änderung des Wärmezustandes, in den meisten Fällen eine Wärmeentwicklung statt. Wasserstoff und Sauerstoff verbinden sich in passenden Verhältnissen gemischt unter heftiger Explosion, und die Flamme des so mit Sauerstoff gemischten Wasserstoffs, des Knallgases, erzeugt eine der höchsten erreichbaren Temperaturen. Bei der Herstellung des Schwefeleisens kommt die ganze Masse in ein lebhaftes Glühen.

Die Mengenverhältnisse der einzelnen Materien, welche in eine Verbindung eingehen, sind immer dieselben. Wasserstoff und Sauerstoff treten zu Wasser immer nur in dem Verhältnis zusammen, daß auf je ein Gewichtsteil Wasserstoff acht Gewichtsteile Sauerstoff kommen, Schwefel und Eisen zu Schwefeleisen nur so, daß zu je einem Gewichtsteil Schwefel 1,75 Gewichtsteil Eisen treten, und so in allen Fällen.

4. Zwei Materien können sich in verschiedenen Verhältnissen zu neuen Materien verbinden; so kann Wasserstoff mit Sauerstoff außer zu Wasser noch zu einem zweiten Körper zusammentreten, zu Wasserstoffdioxid; die Menge des Sauerstoffs, die dann zum Wasserstoff tritt, ist gerade die doppelte der im Wasser vorhandenen, auf je ein Gewichtsteil Wasserstoff kommen 16 Gewichtsteile Sauerstoff. Eine zahlreiche Reihe von Verbindungen bildet z. B. der Stickstoff mit dem Sauerstoff, die Verbindungen sind Stickoxydul, Stickoxyd, Salpetrigsäureanhydrid, Stickstoftetroxyd und Salpetersäureanhydrid. Die Gewichtsmengen Sauerstoff, welche zu je einem Gewicht Stickstoff getreten, verhalten sich in diesen Verbindungen der Reihe nach wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Im Stickoxydul tritt zur Gewichtseinheit Stickstoff  $\frac{8}{14}$  Gewicht Sauerstoff, in den folgenden das Doppelte, Dreifache und so fort. Ähnlich ist es bei anderen Körpern; so liefert das Metall Mangan eine Reihe von Verbindungen, dieselben enthalten:

1	Manganoxydul . . .	auf 1 Gewichtsteil Mangan	$\frac{8}{27,5}$	Sauerstoff
2	Mangansuperoxyd . .	1 " "	2 $\cdot \frac{8}{27,5}$	"
3	Mangansesquioxyd . .	2 Gewichtsteile " "	3 $\cdot \frac{8}{27,5}$	"
4	Überrangansäure . .	2 " "	7 $\cdot \frac{8}{27,5}$	"
5	Manganoxyduloxyd . .	3 " "	4 $\cdot \frac{8}{27,5}$	"

Diese und eine Menge ähnlicher Erfahrungen faßt die Chemie unter dem Gesetze der multiplen Proportionen zusammen, wonach verschiedene Verbindungen je zweier Materien dadurch entstehen, daß die einzelnen Bestandteile nach bestimmten Gewichtsmengen oder nach einfachen Vielfachen dieser Gewichtsmengen zusammentreten.

Bezeichnen wir, um die Sauerstoffmengen und die Manganmengen, welche in den verschiedenen Verbindungen zusammentreten, durch die kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken, 55 Gewichtseinheiten Mangan mit  $Mn$ , und 16 Gewichtseinheiten Sauerstoff mit  $O$ , so können wir die sämtlichen Manganverbindungen darstellen durch

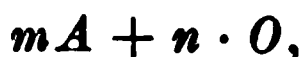


Ebenso können wir auch die Verbindungen des Stickstoffs mit dem Sauerstoff darstellen; bezeichnen wir die Gewichtsmenge 14 des Stickstoffs mit  $N$ , so sind die fünf Stickstoffverbindungen



worin auch hier das Zeichen  $O$  die Gewichtsmenge 16 Sauerstoff bezeichnet. Schließlich lassen sich ebenso die Wasserstoffverbindungen als  $H_2O$  und  $H_2O_2$  bezeichnen, wenn die Gewichtsmenge 1 Wasserstoff mit  $H$  bezeichnet wird.

Bezeichnen wir ganz allgemein jene Gewichtsmenge irgend einer Materie, welche selbst oder von der ein Vielfaches mit 16 Gewichtsteilen Sauerstoff oder mit einem Vielfachen derselben zusammentritt, mit  $A$ , so können wir jede Sauerstoffverbindung darstellen durch die Formel



worin  $m$  und  $n$  stets ganze und zwar nicht große Zahlen sind.

Diese Gewichtsmengen  $A$  sind die Mischungsgewichte der einzelnen Materien in bezug auf Sauerstoff; die Chemie bezeichnet dieselben durch die Anfangsbuchstaben der lateinischen Namen der Elemente.

5. Die so bestimmten Mischungsgewichte haben aber noch eine weitere Bedeutung. Die verschiedenen Materien verbinden sich nicht nur mit dem Sauerstoff, sondern auch untereinander nach den beiden angegebenen Gesetzen, dem Gesetze der festen Verhältnisse und dem der multiplen Proportionen. Die Untersuchung der Gewichtsmengen, nach welchen die verschiedenen Materien zusammentreten, zeigt dann, daß dieselben Zahlen, welche die Mischungsgewichte für die Sauerstoffverbindungen angeben, auch gelten für die Verbindung der Körper untereinander. Bedeutet  $S$  die Gewichtsmenge 32 Schwefel, so sind die Verbindungen des Schwefels mit Sauerstoff wieder  $mS + nO$ . Die Verbindungen des Schwefels mit Wasserstoff sind dann  $mS + nH$ , mit Mangan  $mS + nMn$ . Bedeutet das Zeichen  $Cl$  die Gewichtsmenge 35,5 Chlor, so sind die Sauerstoffverbindungen des Chlors gegeben durch  $mCl + nO$ . Die Verbindung des Chlors mit dem Wasserstoff ist dann  $HCl$ , die Verbindungen des Chlors mit Schwefel wieder  $mCl + nS$ , die des Chlors mit Mangan  $mCl + nMn$ , wo immer  $m$  und  $n$  ganze nicht große Zahlen sind. Kurz, sind  $A$  und  $B$  die Mischungsgewichte irgend zweier Materien für die Sauerstoffverbindungen, so sind immer mit derselben Bedeutung von  $m$  und  $n$ ,  $mA + nB$  die Verbindungen dieser beiden Körper. Auch dann, wenn 3, 4 und mehr Elemente zusammentreten, bleibt immer dieselbe Beziehung bestehen. Sind  $A, B, C, D$  die Mischungsgewichte von vier Materien, so sind alle ihre Verbindungen dargestellt durch



$$mA + nB + pC + qD,$$

worin  $m, n, p, q$  ganze nicht große Zahlen sind.

Gehen wir dazu über, diese Erfahrungen der Chemie mit den beiden gleichen Hypothesen über die Struktur der Materie zusammenzustellen. Von derselben haben wir als die für uns wahrscheinliche zu wählen, welche oben experimentell gefundenen Gesetze am ungezwungensten aus sich entwickeln läßt, welche, einmal aufgestellt, dieselben als notwendige Folgerungen erkennen läßt.

Die Wahl kann uns in diesem Falle nicht schwer fallen. Ist die Materie etwas den Raum stetig Erfüllendes und nicht ein Aggregat selbständig existierender in gewissen Abständen nebeneinander gelagerter Atome, ist der Vorgang der Verbindung selbst ein höchst dunkler. Die einzige Möglichkeit ist dann, daß die Materien sich gegenseitig durchdringen; nehmen wir das aber an, warum durchdringen sich die Materien nur in ganz bestimmten unveränderlichen Verhältnissen? Wir sehen z. B., daß die Gewichtsmenge 14 Stickstoff mit 8, 16, 24 . . . Sauerstoff sich verbinden kann, daß also diese Menge Stickstoff mehr wie 8 Sauerstoff aufnehmen kann, warum nun gerade nur die doppelte, dreifache usw. Menge? Besonders aber warum durchdringen sich die verschiedenen Materien gerade in dem Verhältnis, in welchem sie mit dem Sauerstoff zusammentreten? Alle diese Gesetze folgen aus dieser Hypothese über die Konstitution der Materie nicht, jedes derselben verlangt, um, mit derselben in Einklang gebracht zu werden, eine neue der Materie beizulegende Eigenschaft; so die Eigenschaft, daß eine Materie in die andere eindringen kann, die Eigenschaft durch eine ganz bestimmte Menge eingedrungener Materie, aber auch durch die doppelte, dreifache Menge gesättigt zu werden usf.; kurz man sieht, jede dieser Tatsachen bedarf zu ihrem Verständnis eine besondere Eigenschaft der Materie, die wir ihr aber lediglich infolge der beobachteten Tatsache beilegen. Das ist aber gerade das Charakteristische der schlechten Hypothese, daß sie allein nicht hinreicht, die mit ihr in Verbindung stehenden Tatsachen zu erklären, daß jede neue Tatsache eine neue Hypothese verlangt.

Wie anders zeigt sich dagegen die zweite Hypothese: nehmen wir an, daß die Materie aus Atomen bestehe, so ergeben sich die beobachteten Tatsachen und die aus ihnen abgeleiteten Sätze als so unmittelbare Folgen, daß man sofort diese Erscheinungen als im Wesen der Materie begründet erkennt.

Zunächst ergibt sich unmittelbar, worin die Verbindung zweier Körper besteht und worin sie sich von dem Gemenge unterscheidet. In dem Gemenge sind die einzelnen Materien ungeändert, jede mit ihren charakteristischen Eigenschaften enthalten, die atomistische Hypothese sagt uns, daß der Grund der ist, daß in einem solchen Gemenge die Atome der einzelnen Materien nebeneinander, jedes für sich existierend, bestehen. Verwandelt sich das Gemenge in eine Verbindung, so treten die Atome der einzelnen Materien zusammen, sie lagern sich fest aneinander und existieren nur mehr als verbundene Moleküle. Im Wasser existiert nicht mehr das Wasserstoffatom oder das Sauerstoffatom, sondern jedes Sauerstoffatom ist mit zwei Wasserstoffatomen unauflöslich verbunden, und die Verbindung dieser Atome bildet das Molekül Wasser.

1) Im Augenblicke, wo diese Atome zusammentreten, muß jedenfalls eine sehr lebhafte Bewegung derselben eintreten, indem Atom an Atom anprallt und nun die Atome als Atomgruppen oder Moleküle weiter existieren; wir sehen die lebhafte Bewegung in den Wärmeerscheinungen, welche jede chemische Verbindung begleitet.

2) Da in der Verbindung die Atome der einzelnen Materien nicht mehr als solche existieren, so müssen die Eigenschaften der Verbindungen ganz andere sein als diejenigen der Materien, aus welchen sie sich bilden. Denn da die Materie aus den Atomen aufgebaut ist, sind auch die Atome die Träger der Eigenschaften, die wir an der Materie wahrnehmen; die Moleküle der Verbindung sind aber ganz andere als jene der getrennten Materien, es müssen deshalb auch ihre Eigenschaften und somit auch die der Verbindung ganz andere sein als die der Bestandteile.

3) Die Atome der einzelnen Materien haben eine unveränderliche Größe und ein festbestimmtes Gewicht, welches für die verschiedenen Materien verschieden ist. Wenn nun in einer Verbindung je ein Atom der einen Materie sich an je ein Atom der andern anlegt, oder wenn sich je  $m$  Atome der einen an je  $n$  Atome der andern anlegen, so ist damit auch das Verhältnis der Gewichte, in welchem die Materien in eine Verbindung eingehen, ein ganz festes und bestimmtes; es muß entweder das Verhältnis der Gewichte der einzelnen Atome selbst, oder das Verhältnis der Gewichte von  $m$  Atomen der einen zu  $n$  Atomen der andern Materie sein. Das experimentell bewiesene Gesetz der Verbindung nach festen Verhältnissen ist der tatsächliche Ausdruck dieser aus der Struktur der Materie gezogenen Folgerungen.

4) Ebenso folgt unmittelbar das Gesetz der multiplen Proportionen. In einer Verbindung können die Materien Atom für Atom zusammentreten, es können aber auch mit je einem Atome der einen 2, 3, 4  $\dots$   $n$  Atome der andern zusammentreten oder auch 2, 3  $\dots$   $m$  Atome der einen mit  $n$  Atomen der andern, wo aber  $m$  und  $n$ , da die Atome nicht teilbar sind, immer ganze Zahlen sein müssen. Das ist aber das Gesetz der multiplen Proportionen, nach dem jede Verbindung zweier Materien nach Vielfachen der Mischungsgewichte derselben erfolgt.

5) Sind aber die Mengenverhältnisse, in welchen die Materien zusammentreten, die Gewichtsverhältnisse ihrer Atome, so folgt schließend auch, daß dieselben Verhältniszahlen, die für die Verbindungen einer Gruppe maßgebend sind, es für alle sein müssen. Denn sind  $A$  und  $B$  die Gewichtsmengen zweier Materien, welche sich mit der Menge  $C$  einer dritten zu den Verbindungen  $AC$  und  $BC$  verbinden, so können, da  $A$  und  $B$  uns die Gewichte der Atome dieser beiden Materien repräsentieren, sie selbst auch nur in den Verhältnissen  $mA$  und  $nB$  zusammentreten. Das fünfte der vorhin abgeleiteten Gesetze zeigt, daß es in der Tat so verhält.

Schon diese Erfahrungen zeigen also die bedeutende Überlegenheit der atomistischen Hypothese; sie zeigen, daß dieselbe jene Eigenschaften besitzt, welche wir von einer Hypothese fordern, wenn wir sie in den Naturwissenschaften zulassen, nämlich daß sie einen einfachen obersten Grundsatz bilde, aus welchem die mit ihr verknüpften Tatsachen unmittelbar folgen.

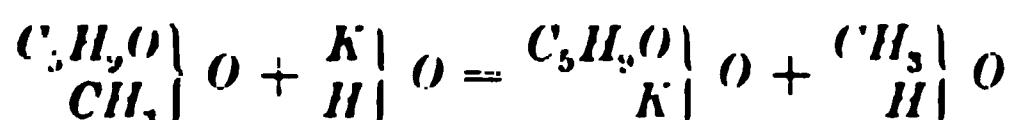
Die Erscheinungen der chemischen Verbindung sind indes immer noch einseitiges Gebiet, und es genügt nicht, um eine Hypothese zuzulassen, welche eine so allgemeine Bedeutung hat, daß sie sich auf einem solchen rühre, sie muß sich auch auf anderen Gebieten, die von der Beschaffenheit der Materie bedingt sind, als ebenso stichhaltig bewähren. Wenden wir uns zu solchen, und zwar zunächst zu den Erscheinungen der chemischen Zersetzung.

Wenn wir einen zusammengesetzten Körper, z. B. Wasser, chemisch zerlegen, so erhalten wir aus ihm immer die Bestandteile, welche wir zu seiner Zusammensetzung verwandten, also immer Sauerstoff und Wasserstoff nach in den zur Zusammensetzung des Wassers erforderlichen Gewichtsverhältnissen, immer auf einen Gewichtsteil Wasserstoff acht Gewichtsteile Sauerstoff. Diese Tatsache ist nur verständlich, wenn wir das Wasser nicht als einen Körper betrachten, aus welchem unter gewissen Umständen Sauerstoff und Sauerstoff entstehen kann, sondern wenn wir annehmen, daß diese Bestandteile wirklich als solche und zwar in den angegebenen Gewichtsverhältnissen im Wasser vorhanden sind. Dann aber müssen diese beiden Stoffe, wenn auch noch so innig verbunden, so doch räumlich getrennt sein. Wenn wir nun die Teilung des Wassers immer weiter fortgesetzt denken, so müssen wir schließlich auf Wasserteilchen kommen, deren nochmalige Teilung die Bestandteile des Wassers voneinander trennt, deren nochmalige Zerlegung also bewirkt, daß die geteilte Substanz aufhört, als solche, wie sie war, zu existieren. Diese letzten Teilchen sind die, die wir Atome nennen.

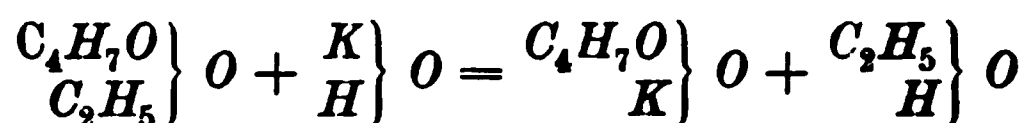
Man sieht, daß wir den Gesetzen der chemischen Zerlegung zufolge auf das Dasein der Atome geführt wurden, durch den aus jenen Gesetzen gezogenen Schluß, daß in den Verbindungen die Bestandteile, wenn auch nicht mehr isoliert, so doch noch als solche existieren. Dieser Schluß, der vielleicht auf den ersten Blick nicht ganz exakt erscheinen mag, wird durch einige andere chemische Tatsachen zur unabweisbaren Notwendigkeit.

Die organische Chemie lehrt uns verschiedene Körper kennen, welche bei genau gleicher Zusammensetzung sich doch ganz verschieden verhalten, es sind die sogenannten isomeren Körper im weitesten Sinne des Wortes. Unter diesen isomeren Körpern gibt es eine Gruppe, die metameren, welche bei ganz identischer elementarer Zusammensetzung unter ganz gleicher Behandlungsweise dennoch ganz verschiedene Zersetzungsprodukte liefern.

So gibt es z. B. zwei Verbindungen, welche nach der Formel  $C_5H_{12}O_2$  zusammengesetzt sind, das valeriansaure Methyl, welches aus der Einwirkung von Valeriansäure auf Holzgeist entsteht, und das buttersaure Methyl, entstanden aus der Einwirkung von Buttersäure auf Weingeist; in beiden sind mit 72 Gewichtsteilen Kohlenstoff 12 Gewichtsteile Wasserstoff und 32 Gewichtsteile Sauerstoff verbunden. Beim Einwirken von Kalium auf diese beiden, genau aus den gleichen Elementen bestehenden Substanzen ist das Resultat aber sehr verschieden; die eine liefert nach dem Schema



valeriansaures Kali und Methylalkohol, die andere nach dem Schema



buttersaures Kali und Äthylalkohol.

Aus einem Körper von genau gleicher Zusammensetzung treten also bei genau gleicher Behandlung ganz verschiedene Körper hervor. Diese Tatsache ist unbegreiflich, wenn wir nicht annehmen, daß in der auf verschiedenen Wegen dargestellten Verbindung  $C_6H_{12}O_2$  bereits die Bestandteile der Körper, in die sie zerfallen können, also einmal die Atomgruppen  $C_5H_9O$  und  $CH_3$ , das andere Mal die Atomgruppen  $C_4H_7O$  und  $C_2H_5$ , wirklich als solche vorhanden sind. Dann aber müssen sie räumlich getrennt sein; und eine fortgesetzte Teilung muß auf Elemente führen, deren weitere Zerteilung die Substanz in ihre Bestandteile auflöst, auf Atome.

Diese Deduktion<sup>1)</sup> aus den Gesetzen der Zerlegung der Körper bezieht sich allerdings zunächst nur auf die zusammengesetzten Körper, wir werden sie aber auf die sogenannten einfachen Körper ausdehnen müssen. Denn zunächst sind wir nicht berechtigt, diese Körper, welche uns zu zerlegen noch nicht gelungen ist, wirklich als einfache Körper zu betrachten, dann aber besteht zwischen ihnen und den nachweisbar zusammengesetzten Substanzen nicht ein solcher Unterschied, daß wir annehmen dürfen, sie seien von wesentlich verschiedener Natur. Zudem aber lehrt uns auch über diese die Chemie Tatsachen kennen, welche nicht zu verstehen sind ohne die Annahme von Atomen.

Die Chemie zeigt uns nämlich eine Reihe von einfachen Körpern in verschiedenen, den sogenannten allotropen Modifikationen, in denen dieselben Körper ganz verschiedene Eigenschaften haben, ohne daß zu ihnen etwas hinzugetreten oder etwas von ihnen fortgenommen wäre. So kommt die Kohle kristallinisch in zwei ganz verschiedenen Formen vor, als Diamant und als Graphit; beide Formen sind reiner Kohlenstoff, denn die Verbrennung gleicher Gewichtsmengen beider liefert genau die gleiche Menge Kohlensäure. Trotzdem sind die beiden Körper ganz und gar verschieden. Der Diamant ist ein klarer durchsichtiger Körper, härter wie irgend ein anderer, der Graphit schwarz undurchsichtig und so weich, daß er auf dem Papiere abfärbt; er ist das Material unserer Bleistifte. Der Schwefel ist in einer ganzen Reihe verschiedener Formen bekannt<sup>2)</sup>, er kommt vor als Rhombenoktaeder kristallisiert, und in klinorhombischen Prismen, bald ist er hart, bald weich wie Kautschuk, bald ist er in Schwefelkohlenstoff löslich, bald unlöslich, der eine ist hellgelb, der andere durchsichtig und braun. Es ist in allen Formen nichts als Schwefel, denn verbrennen wir ihn, in welcher Form es sei, wir bekommen aus allen Formen nichts als schweflige Säure, und bei Verbrennung gleicher Gewichte immer die selbe Menge.

Ähnliches gilt vom Selen, welches als metallisches und als glasartiges, vom Arsen, welches als metallisches und graphitartiges vorkommt, vom Phosphor usf.

1) Kopp, Lehrbuch der physikalischen und theoretischen Chemie, als 1. l des Lehrb. d. Chemie v. Graham-Otto. 2. Aufl.

2) Man sehe über diese verschiedenen Modifikationen: Graham-Otto, Leit der Chemie. 2.

In der Natur findet sich der Schwefel in Rhombenoktaedern kristallin und in diese Form lassen sich alle übrigen durch gewisse Manipulationen zurückführen. Bei dieser Überführung zeigt sich aber dann im Augenblicke der Verwandlung eine plötzliche spontane Erwärmung, wie Bunsen gezeigt hat<sup>1)</sup>. Aus dem metallischen Selen erhält man das amorphe glasartige, indem man es schmilzt und dann tropfenweise in kaltes Wasser fallen läßt oder auf einem kalten Bleche ausgießt, überhaupt es abkühlt. Erwärmt man dann das amorphe Selen auf 94° C., so verwandelt es sich plötzlich in metallisches über. Dabei zeigt es dann eine sehr beträchtliche Wärmeentwicklung, die, wie Hittorf<sup>2)</sup> zuerst gezeigt hat, Selen auf eine Temperatur von über 200° erwärmt. Gleichzeitig tritt eine ganz beträchtliche Verdichtung ein, indem das spezifische Gewicht von 4,28 auf 4,80 steigt<sup>3)</sup>.

Diese Tatsachen führen uns unabweislich darauf, auch für die einatomigen Körper die atomistische Hypothese zu wählen; denn ist die Materie ein Continuum, so können wir es absolut nicht verstehen, wie ein und dieselbe Materie sich verschieden verhalten kann; besteht sie aber aus Atomen, sind die verschiedenen Zustände leicht erklärlich. Die Atome müssen in den Körpern eine gewisse Gruppierung haben, und die physikalischen Eigenschaften, Durchsichtigkeit, Härte, Dichtigkeit werden nicht nur von der Beschaffenheit, sondern auch von der Gruppierung der Atome abhängen. Die allotropen Zustände sind dann nichts als verschiedene Lagerungen der Atome.

Werden die Substanzen aus einer Modifikation in die andere übergeführt, so muß eine Bewegung der Atome eintreten, wir haben sie wahrnehmen können in den Wärmeerscheinungen, welche bei dieser Überführung zu sehen sind.

Wir erhalten somit von der Chemie eine ganze Reihe von Tatsachen, die von den beiden möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie eine als durchaus unzulässig erkennen lassen. Wir sind dadurch jedenfall berechtigt, unseren Untersuchungen über die an der Materie beobachteten physikalischen Erscheinungen die atomistische Hypothese zugrunde zu legen. Dabei wird die Fruchtbarkeit dieser Hypothese erst recht hervortreten, wenn wir sehen, daß die verwickeltsten Erscheinungen im Lichte der Hypothese sich einfach und ungezwungen erklären lassen. Ja wir werden eine ganze Reihe von Erscheinungen finden, die sich ebenso wie Isomerie und die Allotropie überhaupt nur verstehen lassen unter der Annahme, daß die Materie ein Aggregat diskreter Teilchen ist, welche in bestimmten Abständen voneinander befinden, die mit gewissen genau meßbaren Größen, der Länge der Lichtwellen vergleichbar sind.

Es ist nun zur Besprechung der einzelnen Erscheinungen überzugehen, denen wir noch die Frage zu beantworten haben, wie wir uns die Atome

1) Berzelius, *Annales de chim. et de phys.* 1. 3. 1841

2) Hittorf, *Poggend. Ann.* 84. 1851.

3) Lehmann hat auch für eine große Anzahl zusammengesetzter Körper gezeigt, daß sie ohne ihren chemischen Charakter zu ändern in verschiedenen Modifikationen vorkommen können. Die von Lehmann und andern zum Teil früher gemachten Beobachtungen siehe man *Lehmann, Molekularphysik* 2. Aufl. 1899. Leipzig 1898.



denn eigentlich zu denken haben. Die Erfahrung gibt uns darüber doch nichts an; bei der Besprechung dieser Frage begeben wir uns ganz auf das Gebiet der Spekulation, welche nur den Zweck haben kann, den scheinbaren Widerspruch, daß eine gegebene Menge Materie, das Atom unteilbar sein soll, zurückzuweisen.

Für die zusammengesetzten Körper konnten wir vorhin bereits den Begriff des Atomes feststellen, wir nannten die Atome solcher Körper jene Teilchen, welche als die letzten dieser Substanz anzusehen sind, deren weitere Teilung die Substanz in ihre Elemente zerfallen läßt. Für diese ist somit das Atom nicht etwas absolut Unteilbares, sondern nur etwas relativ Unteilbares, es ist also noch ein Teilchen, das eine, wenn auch äußerst kleine, so doch immerhin noch ideell meßbare Ausdehnung hat, da in demselben die Atome der Bestandteile räumlich getrennt sind.

Für die einfachen Körper, für jene, die wir chemisch nicht zerlegen können, liegt der Begriff des Atoms nicht so unmittelbar vor; indes dürfen wir aufgrund der Erfahrungen über Isomerie und Allotropie ihn doch wohl ähnlich fassen. Wir werden nämlich vermuten dürfen, daß die chemisch verschiedenen Elemente in der Tat nicht ebenso viele verschiedene Materien sind, daß es vielmehr überhaupt nur eine Materie gibt, und daß die verschiedenen Stoffe nur Modifikationen dieser Materie sind. Das physikalische Atom, mit dem wir es überhaupt zu tun haben, ist dann auch für die einfachen Körper nicht etwas absolut Unteilbares, sondern es ist auch noch der Teilung fähig, es ist indes das letzte Teilchen, auf welches wir bei der Teilung eines Stoffes gelangen, dessen weitere Teilung diesen Stoff nicht mehr existieren läßt. Aus solchen einzelnen Teilchen müssen wir die unserer Untersuchung unterworfenen Stoffe aufgebaut annehmen, zwischen diesen sind die Kräfte tätig, deren Wirkungen wir beobachten. Das hiernach definierte kleinste Teilchen der Materie ist also das letzte, welches wir eine selbständige Existenz zuschreiben; die Chemie bezeichnet dasselbe als Molekül, um anzudeuten, daß sie diese Teilchen noch wohl für teilbar hält. Eine solche Teilung nimmt die Chemie für die Moleküle der einfachen Stoffe noch an, wenn dieselben mit anderen Stoffen in Verbindung treten. So besteht nach den jetzigen Anschauungen das Molekül, z. B. des Wasserstoffs aus zwei Atomen, ebenso das Molekül Chlor. Verbinden sich die beiden, so spalten sich ihre Moleküle, und die Elemente treten Atom für Atom aneinander. Treten wir dieser Auffassung des Atoms bei, so gilt natürlich auch für dieses unsere vorige Definition des Atoms ganz ebenso, nur daß damit dem einzelnen Atom als solchem nicht immer mehr eine selbständige Existenz zukommt, daß auch bei einfachen Stoffen dieselben ebenso zu zwei oder mehr verbunden sein können, wie bei zusammengesetzten.

Von den so definierten Atomen und chemischen Molekülen können wir noch das physikalische Molekül unterscheiden, welches aus einer Zusammenlagerung mehrerer chemischer Moleküle bestehen kann, welches sich also zum chemischen Molekül verhält, wie dieses zum Atom. Diese physikalischen Moleküle würden dann die näheren Bestandteile der einzelnen Körper bilden. Zu dieser Annahme führen uns hauptsächlich die allotropen Modifikationen der einfachen Körper; denn auf diese Weise können wir uns am besten die vorhin erwähnte verschiedene Lagerung der Atome denken.

liche die Verschiedenheit in den Eigenschaften der allotropen Modifikationen bedingt. Das Atom und das chemische Molekül des Graphits ist dasselbe sein wie des Diamants, da wir in beiden chemisch denselben Körper haben: das physikalische Molekül des Graphits unterscheidet sich nur von dem des Diamants, indem bei der einen dieser Formen der Kohle eine größere oder geringere Zahl von Atomen zu einem Molekül vereinigt und in diesem Molekül dann verschieden gelagert sind.

Physikalisch sind wir hiermit an der Grenze angelangt, zu der wir auch induktorische Schlüsse kommen können, philosophisch ist der Begriff des Atoms und somit derjenige der Materie noch nicht erfaßt. Denn dazu bleibt die Frage noch zu erledigen: Wie ist denn nun das physikalische Atom weiter beschaffen, was entsteht, wenn wir es weiter zerlegen? Daß das Atom nach dem Vorigen selbst wieder, wenn ich so sagen darf, atomistisch gefaßt werden muß, leuchtet ein; denn nur dann ist die Verschiedenheit der physikalischen Atome faßbar, wenn wir sie als Modifikation der Materie ansehen. Ob aber dann die Grundlage der physikalischen Atome, das philosophische Atom, als etwas Ausgedehntes, oder ob es als einfacher, materieller Punkt aufzufassen ist, das ist eine Frage, welche lediglich der Spekulation angehört, die zu besprechen deshalb hier nicht der Ort ist<sup>1)</sup>.

Wir können indes die Frage nach der Beschaffenheit der Atome nicht verlassen ohne darauf aufmerksam zu machen, daß man in neuester Zeit in dem Bestreben die Naturerscheinungen zu erklären, ohne eine unmittelbare Wirkung in die Ferne zwischen getrennten Teilen der Materie, also auch zwischen den Molekülen annehmen zu müssen, den Versuch gemacht hat, die atomistische Auffassung mit der Annahme einer stetig den Raum erfüllenden Materie zu vereinigen. Diese Auffassung, welche besonders William Thomson (jetzt Lord Kelvin) mehrfach durchzuführen versucht hat<sup>2)</sup>, nimmt an, daß der ganze Weltenraum mit einer feinen Materie erfüllt sei: das, was wir als körperliches Molekül, als Molekül der Aetherischen Materie bezeichnen, ist ein abgegrenzter, durch einen ganz bestimmten Bewegungszustand charakterisierter Teil dieser Materie, ein Helmholtz'scher Wirbelring.

Allen Rauchern und auch den Nichtrauchern sind die Rauchringe bekannt, ringförmige Gebilde von Tabakrauch, welche manche Raucher mit einer Geschicklichkeit durch eine passende Form der Mundöffnung und kräftiges Ausstoßen des Rauches erzeugen können. Wer nicht imstande ist solche Rauchringe mit dem Munde hervorzubringen, kann sie leicht erhalten.

<sup>1)</sup> Man sehe über die Frage nach der Beschaffenheit der Atome: *Fechner*, *Monatsschr.* 2. Aufl. Leipzig 1864. Fechner entscheidet sich dort für die Einheitlichkeit des philosophischen Atoms: seine Deduktion scheint mir indes nicht gegen allen Widerspruch sicher zu sein. Außerdem sehe man die philosophische Einleitung in die *Enzyklopädie der Physik* (herausgegeben von *G. Karsten*) von Bern, in welcher man die verschiedenen Anschauungen von dem Wesen der Atome zusammengestellt findet. So interessant es auch wäre, so verbieten doch die Grenzen dieses Werkes, auf die verschiedenen Theorien einzugehen: ich habe deshalb oben die dynamische Anschauung nicht einmal erwähnt.

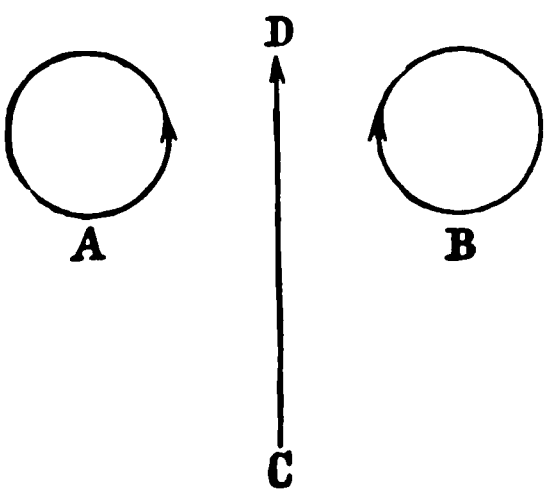
<sup>2)</sup> *W. Thomson*, *Phil. mag.* 34. (4. 1867 u. 37. 4. 1869; *Nature* 30 p. 417. 34. *Kirchhoff*, *Repert. d. Phys.* 21. 1885. *Lectures in Molecular dynamics*. London: 1885.



indem er sich einen Hohlwürfel von ganz dünnem Karton, etwa Spi karten, herstellt, und eine Seite mit einem kreisförmigen Loche von et 1<sup>cm</sup> Durchmesser versieht, wie das Reusch<sup>1)</sup> zuerst gezeigt hat. M füllt durch diese Öffnung den Hohlwürfel mit Tabakrauch; wenn man da auf eine der andern Seitenflächen des Würfels sanft mit dem Finger k klopft, so entweicht bei jedem Schlage mit dem Finger aus der Öffnu ein schöner Rauchring. Anstatt des Tabakrauches kann man auch, w Rogers<sup>2)</sup> gezeigt hat, Chlorammoniumdämpfe verwenden, die man erhält indem man auf den Boden eines Glasgefäßes Salzsäure gießt und dar in das Gefäß Baumwollfäden hängt, welche mit Ammoniak getränkt sind. Bringt man an einer Seitenwand des Gefäßes in passender Höhe über de Niveau der Salzsäure eine kreisförmige Öffnung an und bedeckt das Ge fäß mit einer dasselbe dicht schließenden elastischen Membran, so liefert jeder leichte Schlag auf die Membran einen Rauchring.

Wie ebenfalls schon Reusch gezeigt hat, kann man solche Ring auch im Wasser hervorbringen. In die Endwand eines ziemlich lange nicht zu breiten Gefäßes, dessen Seitenwände passend durch Glasplatte gebildet werden, bringt man eine kreisförmige Öffnung an, welche durch einen Schieber verschlossen werden kann. Vor diese Endwand, und zw so, daß dieselbe die eine Seite desselben bildet, bringt man einen Kasten an, der, wenn das lange Gefäß etwa 1<sup>m</sup> lang, 2<sup>dec</sup> breit und vielleicht 3<sup>dec</sup> hoch ist, bei gleichem Querschnitt etwa 1<sup>dec</sup> tief ist, und dessen d Öffnung gegenüberliegende Wand aus einer elastischen Metallplatte besteht. Man füllt, während die Öffnung durch den Schieber geschlossen ist, in d lange Gefäß reines, in den Kasten etwa mit Lakmus gefärbtes Wasser b zu gleicher Höhe, so daß bei Aufziehen des Schiebers keine Strömung vom Kasten in das Gefäß oder umgekehrt stattfindet. Schlägt man m kräftig mit kurzem Schlage gegen die Metallwand des Kastens, so fñht bei jedem Schlage aus der Öffnung ein d Rauchringen ganz entsprechender Ring gefärbt. Wassers in das lange Gefäß hinein.

Fig. 56.



Diese Ringe sind eigentümliche dynamische Gebilde; sie bestehen aus einzelnen um die kreisförmige Achse des Ringkörpers rotierenden Theilen, während der Ring als ganzes in einer Ringebene senkrechten Richtung fortschreitet. Die Richtung, in welcher der Ring als ganzes fortschreitet, ist jene, nach welcher sich die kreisförmigen Theilchen auf der innern Seite des Ringkörpers bewegen. Ist also A und B (Fig. 56).

Durchschnitt des Ringes, parallel einem Durchmesser desselben, und rotiren die Theilchen von einem Punkte vor der Ebene der Zeichnung angesehen in die Richtung der Pfeilstriche, also in A entgegengesetzt, in B im Sinne wie Bewegung des Uhrzeigers, so schreitet der Ring in der Richtung von C nach D vor. Die Ringe bestehen nur so lange, wie die wirbelnde Bew

1) Reusch, Poggend. Ann. 110. p. 209. 1860.

2) Rogers, American Journal of science (Silliman Journal). 26. (2). 1857.

er Teilchen und die fortschreitende Bewegung des Ringes dauert. Beide Bewegungen eines Rauch- oder Wasserringes werden wegen der Reibung, welche die bewegten Teile in der Umgebung erfahren, allmählich langsamer; mit der Verlangsamung wird der Durchmesser des Ringes größer, und ist der Ring zur Ruhe gekommen, so zerfließt er, wobei der Rauch in oft eigentümlich geformten Wolken auseinander geht. Eben weil der Ring nur besteht, so lange die Bewegungen dauern, nannten wir ihn ein dynamisches Gebilde.

v. Helmholtz<sup>1)</sup> hat gezeigt, daß in einer unbegrenzten Flüssigkeit, in welcher die Bewegungen ohne jegliche Reibung stattfinden, derartige Wirbelringe von molekularen Dimensionen vorhanden sein können; sind sie vorhanden, so können sie niemals zerstört werden, ebenso müssen sie entweder von jeher vorhanden gewesen, oder durch einen Schöpfungsakt erzeugt sein. Eine Zerstörung der Wirbelringe würde nur durch eine von außen her auf die Flüssigkeit wirkende Gewalt möglich sein, es müßte, wie der schottische Physiker Tait irgendwo sagt, ein Schnitt durch die ganze flüssige Masse geführt werden, die von diesem Schnitte betroffenen Wirbelringe würden zerstört. Die Rechnungen von Helmholtz ergeben aber, daß Flüssigkeitsteilchen, welche nicht einem Wirbel angehören, niemals in eine solche Wirbelbewegung geraten können. Bilden Flüssigkeitsteilchen einen solchen Wirbelring, so bilden sie denselben in einer reibungslosen Flüssigkeit immer, so daß also auch ein und derselbe Wirbel immer aus genau denselben Teilchen besteht.

Diese Wirbelringe müssen nicht kreisförmig sein, sie können vielmehr die mannigfaltigsten Gestalten haben, es müssen nur in sich geschlossene Arten sein.

Nehmen wir also an, daß unsere Welt von einer äußerst feinen Flüssigkeit ausgefüllt ist, daß etwa der Äther, auf dessen Existenz im Welttraume uns die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme und Elektrizität deuten, diese Flüssigkeit sei, so bilden derartige Wirbelringe in ihm für sich bestehende unzerstörbare Individuen, wie es die in der atomistischen Auffassung angenommenen Atome oder Moleküle sind, und insoweit hat es etwas sehr verführerisches, unsere Atome durch diese Wirbelringe zu ersetzen. Die Mannigfachheit der Form könnte die chemische oder physikalische Verschiedenheit der uns bekannten Materie bedingen. Indes könnte auch diese Auffassung der Atome nur dann als einen Fortschritt gegenüber der bisher gegebenen Darlegung ansehen, wenn sich aus dieser Auffassung die Gesetze der chemischen Verbindungen und die Wechselwirkung zwischen Atomen ableiten ließen. In welcher Weise sich zwei oder mehrere Wirbelringe zu einem neuen, also zu einer chemischen Verbindung zusammensetzen könnten, läßt sich noch gar nicht erkennen; das naheliegendste, eine kettenartige Verknüpfung verschiedener Wirbelringe, ist ausgeschlossen, da die Bewegung eines Wirbelringes um einen andern nach Art eines Kettenringes vorzunehmen unmöglich ist, und wenn sie möglich wäre, sofort die Zerstörung des Wirbelringes zur Folge haben würde. Ob überhaupt mehrere

<sup>1) v. Helmholtz, Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen. *Crelle, Journal*. 55 p. 25. 1858. Mehr elegante Darstellungen sehe man von *Lang*, Einleitung in die theoretische Physik. 1891. Braunschweig. *Voigt*, *Mechanik* p. 371</sup>

Wirbelringe zu einem stabilen Komplex zusammenzutreten können, ist durchaus fraglich.

Ebenso läßt sich noch gar nicht erkennen, wie Wechselwirkung zwischen zwei Wirbelringen durch Vermittelung der zwischen ihnen befindlichen Flüssigkeit zustande kommen sollen, da ausdrückliche Voraussetzung ihres Bestehens ist, daß die Flüssigkeit reibungslos sei, daß also ein Wirbelring nichts von seiner Bewegung an die Umgebung abgebe.

Wir werden deshalb diese Auffassung der Atome nicht weiter verfolgen.

Da das physikalische Atom eine bestimmte Quantität Materie enthält, so besitzt es ein bestimmtes Gewicht; es ist nicht möglich, das Gewicht desselben für die verschiedenen Stoffe in Grammen anzugeben, sein relatives Gewicht, das heißt das Verhältnis zwischen den Gewichten der einzelnen Atome läßt sich bestimmen. Nennen wir das Gewicht des Atoms Wasserstoff eins, so werden wir nach dieser Einheit das des Chlors, das des Stickstoffs usw. messen können. Eine Verbindung des Chlors und Wasserstoff wird sich dann, wenn wir das Gewicht der beiden Atome mit  $cl$  und  $h$  bezeichnen, darstellen lassen durch  $m \cdot h + n \cdot cl$  oder, wenn wir  $h$  gleich 1 setzen durch  $m + n \cdot cl$ , wo  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind und die Anzahl der Atome geben, die bei dieser Verbindung zusammentreten. Das Verhältnis der Atomgewichte des Wasserstoffs und Chlors wird dann sein  $m : n \cdot cl$  oder  $1 : \frac{n}{m} \cdot cl$ . Die chemische Analyse, welche uns das Mischungsgewicht des Chlors, jene Menge, welche sich mit einem Gewichtsteil Wasserstoff verbindet, liefert, bestimmt somit die Größe  $\frac{n}{m} \cdot cl$  oder das Atomgewicht multipliziert mit dem Quotienten  $\frac{n}{m}$ .

Wären uns daher die Zahlen  $m$  und  $n$  bekannt, so lieferte uns dieselbe Analyse, welche das Mischungsgewicht des Chlors ergibt, auch das Atomgewicht desselben. Man hat aber kein direktes Mittel, diese Zahlen zu bestimmen; denn man weiß niemals, wieviel Atome bei einer Verbindung zu einem zusammentreten. In welcher Weise die Chemie, durch gewisse Erscheinungen geführt, die Atomgewichte aus den Äquivalenten ableitet, das zu besprechen würde hier zuviel Raum einnehmen; wir weisen deshalb auf die Lehrbücher der Chemie<sup>1)</sup> und begnügen uns hier mit den von der Chemie jetzt angenommenen Atomgewichte bezogen auf Sauerstoff gleich 16 mitzuteilen, da wir die Zahlen an mehreren Stellen benutzen müssen.

Tabelle der Atomgewichte der einfachen Körper,<sup>2)</sup>  
bezogen auf O = 16.

Aluminium . . . . .	$Al = 27,1$	Baryum . . . . .	$Ba = 137$
Antimon . . . . .	$Sb = 120,2$	Beryllium . . . . .	$Be = 9$
Argon . . . . .	$A = 39,9$	Blei . . . . .	$Pb = 207$
Arsen . . . . .	$As = 75,5$	Bor . . . . .	$B = 10,8$

1) Man sehe: *Lothar Meyer*, Die modernen Theorien der Chemie. Br. 1864. *Kekulé*, Lehrbuch der Chemie. 1. 1859.

2) Chem. Ber. 39. p. 6. 1906. Bericht des internationalen Atomgewichtsausschusses.

<i>Br</i> = 79,96	Platin . . . . . <i>Pt</i> = 194,8
<i>Cd</i> = 112,4	Praseodym . . . . . <i>Pr</i> = 140,5
<i>Cs</i> = 132,9	Quecksilber . . . . . <i>Hg</i> = 200,0
<i>Ca</i> = 40,1	Radium . . . . . <i>Ra</i> = 225
<i>Ce</i> = 140,25	Rhodium . . . . . <i>Rh</i> = 103,0
<i>Cl</i> = 35,45	Rubidium . . . . . <i>Rb</i> = 85,5
<i>Fe</i> = 55,9	Ruthenium . . . . . <i>Ru</i> = 101,7
<i>Er</i> = 166	Samarium . . . . . <i>Sa</i> = 150,3
<i>F</i> = 19	Sauerstoff . . . . . <i>O</i> = 16,00
<i>Gd</i> = 156	Scandium . . . . . <i>Sc</i> = 44,1
<i>Ga</i> = 70	Schwefel . . . . . <i>S</i> = 32,06
<i>Ge</i> = 72,5	Selen . . . . . <i>Se</i> = 79,2
<i>Au</i> = 197,2	Silber . . . . . <i>Ag</i> = 107,93
<i>He</i> = 4	Silizium . . . . . <i>Si</i> = 28,40
<i>In</i> = 115	Stickstoff . . . . . <i>N</i> = 14,04
<i>Ir</i> = 193,0	Strontium . . . . . <i>Sr</i> = 87,6
<i>J</i> = 126,97	Tantal . . . . . <i>Ta</i> = 183
<i>K</i> = 39,15	Tellur . . . . . <i>Te</i> = 127,6
<i>Co</i> = 59,0	Terbium . . . . . <i>Tb</i> = 160
<i>C</i> = 12,00	Thallium . . . . . <i>Tl</i> = 204,1
<i>Kr</i> = 81,8	Thorium . . . . . <i>Th</i> = 232,5
<i>Cu</i> = 63,6	Thulium . . . . . <i>Tu</i> = 171
<i>La</i> = 138,9	Titan . . . . . <i>Ti</i> = 48,1
<i>Li</i> = 7,03	Uran . . . . . <i>U</i> = 238,5
<i>Mg</i> = 24,36	Vanadium . . . . . <i>V</i> = 51,2
<i>Mn</i> = 55,0	Wasserstoff . . . . . <i>H</i> = 1,008
<i>Mo</i> = 96,0	Wismuth . . . . . <i>Bi</i> = 208,5
<i>Na</i> = 23,05	Wolfram . . . . . <i>W</i> = 184,0
<i>Nd</i> = 143,6	Xenon . . . . . <i>X</i> = 128
<i>Ne</i> = 20	Ytterbium . . . . . <i>Yb</i> = 173,0
<i>Ni</i> = 58,7	Yttrium . . . . . <i>Y</i> = 89,0
<i>Nb</i> = 94	Zink . . . . . <i>Zn</i> = 65,4
<i>Os</i> = 191	Zinn . . . . . <i>Sn</i> = 119,0
<i>Pd</i> = 106,5	Zirkonium . . . . . <i>Zr</i> = 90,6
<i>P</i> = 31,0	

## § 47.

**Aggregatzustände.** Die in dem letzten Paragraphen mitgeteilten Annahmen berechtigen uns, jeden Körper als ein Aggregat nebeneinander angeordneter Moleküle zu betrachten, welche einen äußerst kleinen Raum einnehmen, daß wir sie als mit ihrem Schwerpunkt zusammenfallend annehmen. In welcher Weise diese Moleküle gruppiert sind, das wissen wir nicht, das aber mußten wir annehmen, daß sich die einzelnen Moleküle nicht berühren, daß sie in gewissen, wenn auch sehr kleinen, aber doch abgrenzbaren in der Physik vorkommenden Größen vergleichbaren Abständen voneinander abstehen, welche sich bei einer Ausdehnung des Körpers vergrößern, bei einer Volumverminderung verkleinern.

Da alle materiellen Körper einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft unterworfen sind, welche sie einander zu nähern sucht, wie auch ihr Abstand und innere Beschaffenheit sein mag, so müssen wir annehmen, daß auch die Moleküle einer jeden Substanz mit einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft gegeneinander getrieben werden, welche wegen der sehr kleinen Abstände der Moleküle sehr groß sein muß. Wir bezeichnen diese Kraft als eine Anziehung der Moleküle gerade so, wie wir die zwischen den Weltkörpern tätigen Kräfte als eine Anziehung der Massen bezeichnet haben. Diese anziehende Kraft muß das Bestreben haben, die Moleküle einander zu nähern, und zwar um so mehr, je kleiner die Abstände derselben sind. Daraus würde nun aber folgen, daß die Körper in ihrem Innern nur dann im Gleichgewicht sein könnten, wenn die einzelnen Teile sich berühren, daß also die Körper einer Verminderung des von ihnen eingenommenen Raumes nicht fähig sein könnten. Dem widerspricht die Erfahrung, da alle Körper durch Zusammenpressen oder durch Abkühlung auf einen kleinern Raum gebracht werden können. Es muß deshalb zwischen den Molekülen noch eine andere Kraft tätig sein, welche verhindert, daß sie sich bis zur Berührung annähern, welche wir also als eine die Moleküle gegenseitig abstoßende bezeichnen müssen, und welche zunimmt, wenn der Abstand der einzelnen Teile abnimmt, so zwar, daß unter Wirkung dieser beiden einander entgegengesetzten Kräfte die Moleküle bereits in einem gewissen Abstände voneinander in den Zustand des stabilen Gleichgewichts eintreten.

Wir haben zunächst aus der allgemeinen Massenanziehung den Schluß gezogen, daß die Moleküle sich anziehen müssen, und aus der Zusammendrückbarkeit, daß zwischen denselben auch abstoßende Kräfte tätig sein müssen. Würden wir die letztern analog den ersteren betrachten, so müßten wir schließen, daß die Größe dieser abstoßenden wie die der anziehenden nur von dem Abstände der Moleküle und ihrer Masse, nicht von der Natur derselben abhängig sei. Dieser Ansicht von der Natur der zwischen den Molekülen tätigen Kräfte widerspricht aber eine Reihe bekannter Erfahrungen. Die Masse eines Körpers ist nämlich seinem Gewichte gleich, diejenige eines gegebenen Volumens demnach um so größer, je größer das Gewicht desselben ist. Da die Körper nun aus Molekülen bestehen, so müssen in einem gegebenen Volumen um so mehr Moleküle oder Moleküle von um so größerer Masse sein, je dichter der Körper ist. Unter beiden Annahmen müßte aber der dichtere Körper zugleich der festere sein, das heißt, es müßten seine Moleküle um so stärker zusammenhalten, da sowohl mit der größeren Annäherung der Moleküle als auch mit ihrer größeren Masse die anziehenden Kräfte größer werden. Man weiß aber, daß das nicht der Fall ist; die Teile aller flüssigen Körper stellen einem Versuche, sie zu trennen, einen weit geringern Widerstand entgegen als die der festen Körper; viele feste Körper sind aber weniger dicht als flüssige, wie z. B. das Wasser dichter ist als die meisten Holzarten, das Quecksilber dichter als die meisten Metalle. Man könnte dagegen behaupten, daß mit der größeren Annäherung der Moleküle auch die abstoßenden Kräfte wachsen müssen, daß somit je nach dem Gesetze, nach welchem diese Kräfte mit der Entfernung oder der Masse ändern, die dichteren Körper nicht gerade die festeren sein müßten. Würde aber die Größe der Moleküle

on der Entfernung und Masse der Moleküle abhängig sein, so Körper gleicher Dichtigkeit auch dieselbe Festigkeit zeigen, die einzelnen Moleküle wenigstens nicht sehr verschiedene Abstände haben können. Aber auch dem widerspricht die Erfahrung, wir feste Körper herstellen können, welche genau dieselbe Dichtigkeit haben wie Flüssigkeiten.

Wir lassen deshalb schließen, daß die Kräfte zwischen den Molekülen nicht lediglich von der Masse und den Abständen der Moleküle, sondern auch von der Natur derselben abhängig sind. Ob diese Kräfte von der Beschaffenheit der Moleküle den anziehenden Kräften oder dann nicht mit denen der allgemeinen Gravitation zusammenhängen, oder den abstoßenden Kräften, oder beiden, das läßt sich nicht entscheiden. Indem man das unentschieden läßt, spricht man nur von der Natur sich zeigenden Tatsachen aus, wenn man den einzelnen Körper je nach ihrer Natur eine verschiedene Kohäsion beilegt, ganz unbestimmt jene Kräfte, welche den Zusammenhalt der Körper bewirken, unter dem Namen der Kohäsion oder der Kohäsionskraft faßt.

**Fester Körper.** Bei der verschiedenen Kohäsion der einzelnen Körperteilchen unterscheiden wir drei Aggregatzustände und zwar den festen Körper. Dieselben haben ein selbständiges Volumen und eine bestimmte Gestalt; ihre einzelnen Teilchen verschieben sich nicht gegeneinander, sondern es bedarf einer mehr oder weniger bedeutenden Kraft, diese zu verschieben oder zu trennen; einmal getrennt, lassen sie sich nicht wieder durch Zusammenlegen vereinigen.

**Flüssigen Körper.** Sie haben ein selbständiges Volumen ohne bestimmte Gestalt. Die geringste äußere auf sie einwirkende Kraft bewirkt Verschiebung und selbst eine Trennung derselben bewirken. Eine Trennung fügt sie aber ein einfaches Zusammenbringen wieder her.

**Gasförmigen Körper.** Sie haben weder eine selbständige Gestalt noch ein selbständiges Volumen, sie verbreiten sich durch jeden ihnen darbietenden Raum, bis sich ein äußeres Hindernis ihnen entgegenstellt. Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit den festen Körpern.

### § 18.

**Kohäsion.** Unter Wirkung der Kohäsion, unter der wir die sämtlichen Teile des Körpers zusammenhaltenden Kräfte, anziehende Kräfte, zusammenfassen, sind die einzelnen Teile der Körper im Gleichgewicht, wenn sie in ihrem natürlichen Zustande sich selbst halten. Wirken äußere Kräfte auf den Körper ein, so muß der Gleichgewichtszustand der Moleküle gestört werden.

Wir setzen wir z. B. einen auf einer unveränderlich festen horizontalen Unterlage ruhenden Zylinder (Fig. 57). Wir können ihn als zusammengehörig aus einer Reihe übereinander lagernder horizontaler Schichten  $AB, A'B'$  von Molekülen, die durch sehr kleine Zwischenräume getrennt sind, betrachten. Legen wir auf  $AB$  ein Gewicht, so wird dieses die Schicht  $A'B'$  treiben, den Abstand der Schichten verändern und da-



durch notwendig das Gleichgewicht stören. Die abstoßende Kraft dann die anziehende der Schichten übersteigen und zunehmen, bis Differenz beider gleich ist dem Drucke des Gewichtes  $P$ . Diese zwischen den Schichten  $AB$  und  $A'B'$  von unten nach oben, um dem Gewicht das Gleichgewicht zu halten, und von oben nach unten auf die Schicht



Fig. 57

$A'B'$ , welche sich dadurch in denselben Zuständen befindet, als stände das Gewicht unmittelbar auf ihr. Die Schicht  $A'B'$  nähert sich dadurch der folgenden Schicht und übt auf diese einen ebenso großen Druck aus wie  $AB$  auf  $A'B'$ ; gleiches gilt für alle folgenden Schichten und die letzte drückt dadurch auf die Unterste, ebenso, als wenn das Gewicht unmittelbar auf ihr stände.

Es hat demnach eine gleiche Annäherung aller einzelnen Schichten stattgefunden und folglich eine Verkürzung des Zylinders, die proportional ist der Anzahl der Schichten, d. h. der Länge des Zylinders; diese Annäherung aber gleichzeitig zwischen je zwei Schichten  $CD$ ,  $C'D'$  eine abstoßende Kraft hervorgerufen, welche gleich ist dem Drucke des Gewichtes.

Hätte man, anstatt auf den Zylinder einen Druck auszuüben, denselben an seinem obern Ende befestigt und an seinem untern ein Gewicht wild lassen, so würden sich die einzelnen Schichten voneinander entfernen, gleichzeitig aber auch infolge der größeren Entfernung einander angezogen werden; das Gleichgewicht tritt in dem Falle ein, wenn der Überschuss der anziehenden über die abstoßenden Kräfte gleich dem am untern Ende des Zylinders wirkenden Zuge geworden ist.

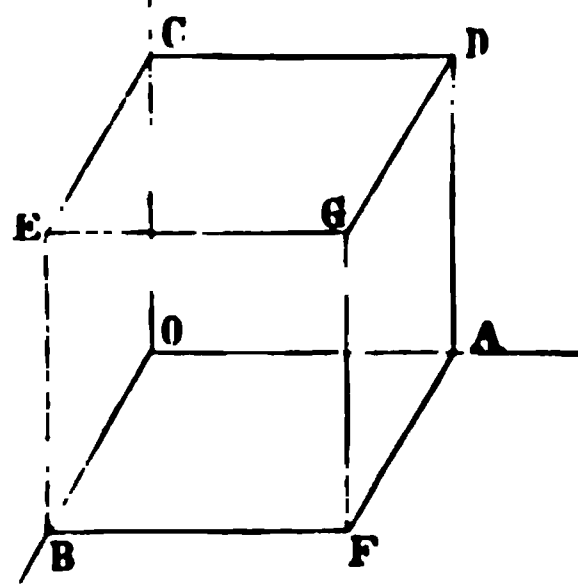
Daß in der That in den beiden eben besprochenen Fällen zwischen benachbarten oder entfernten Molekülschichten abstoßende oder anziehende Kräfte wirksam sind, das läßt sich erkennen, wenn wir die äußeren Kräfte aufhören lassen zu wirken, denn wir nehmen sofort eine Bewegung der Molekülschichten gegen ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage hin wahr; der komprimierte Zylinder dehnt sich wieder aus, der ausgedehnte Zylinder zieht sich wieder zusammen. Diese Eigenschaft der Körper, das Bestreben, ihre ursprüngliche Gestalt und das ursprüngliche Volumen wieder anzunehmen, wenn die Kraft, welche kleine Formänderungen an ihnen hervorgerufen hat, aufhört zu wirken, bezeichnet man mit dem Namen der Elastizität.

Die Existenz dieser Eigenschaft gibt uns einen weitern Aufschluß über die Natur der zwischen den Molekülen tätigen Kräfte; sie zeigt, daß die abstoßenden Kräfte mit zunehmender Entfernung der Moleküle weit rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte. Denn wenn die Moleküle in der Gleichgewichtslage sind, sind die anziehenden und abstoßenden Kräfte einander gleich. Mit Änderung der Abstände müssen sich nun sowohl die anziehenden als auch die abstoßenden Kräfte in demselben Sinne ändern. Da nun aber eine größere Annäherung Abstoßung, eine größere Entfernung Anziehung hervortreten läßt, so folgt, daß bei Verringerung des Abstandes die abstoßenden Kräfte rascher wachsen, bei Vergrößerung des Abstandes rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte.



Die im Innern eines Körpers durch Annäherung oder Entfernung der Moleküle geweckten Kräfte können je nach der Richtung, in welcher die Moleküle verschoben werden, verschieden sein. Denken wir uns aus einem ausgedehnten Körper einen Würfel (Fig. 58) herausgeschnitten. Üben wir auf die Fläche  $CEGD$  einen Druck aus, indem wir etwa ein die ganze Fläche bedeckendes Gewicht  $P$  auf dieselbe setzen, so tritt in der eben betrachteten Weise eine Annäherung der Molekülschichten ein, bis der elastische Gegendruck dem äußern Drucke  $P$  gleich geworden ist. Die Summe der Annäherungen der Molekülschichten liefert eine gewisse Verkürzung des Würfels in der Richtung  $OC$ .

Fig. 58.



Drehen wir den Würfel so, daß die Seite  $UBEC$  oben ist und wiederholen den Versuch, so nähern sich auch dann die Molekülschichten so weit, bis der elastische Gegendruck dem Drucke des Gewichtes  $P$  gleich geworden ist; es kann indes hierzu die Annäherung der Molekülschichten, also auch die Summe derselben, die Verkürzung der Seite  $OA$  jetzt eine andere sein als vorher, oder auch dieselbe.

Ebenso wird durch den Druck des Gewichtes  $P$  auf die Seite  $OADC$  der Würfel parallel  $OB$  soweit verkürzt, bis der elastische Gegendruck gleich  $P$  geworden ist, und es kann die zur Erzeugung dieses elastischen Gegendruckes erforderliche Verkürzung ebenfalls den beiden andern gleich oder auch verschieden sein.

Sind die zur Hervorrufung desselben Gegendruckes  $P$  erforderlichen Verkürzungen nach den drei und damit nach allen Richtungen im Innern des Körpers die gleichen, was den einfachsten elastischen Verhältnissen entspricht, so nennt man den Körper einen isotropen, ist das nicht der Fall, sind die zur Erweckung des gleichen Gegendruckes erforderlichen Verkürzungen nach den verschiedenen Richtungen verschieden, so nennt man den Körper anisotrop oder in neuerer Zeit aeolotrop.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen setzen wir die den Versuchen unterworfenen Körper als isotrop voraus; diejenigen Körper, welche nicht wie die Kristalle eine bestimmte Struktur haben, Metalle, Glas, können wir als isotrop ansehen.

Die besprochenen beiden Fälle sind nicht die einzigen, bei denen sich die Elastizität der festen Körper zeigt, sie zeigt sich ebenso, wenn wir einen Stab biegen oder ihn um eine in ihm befindliche Achse zu drehen suchen. Wenn ein eines Ende festgehalten wird, wenn wir ihn tordieren. Wir werden indes sehen, daß wir die elastischen Kräfte in diesen Fällen auf die zuerst besprochenen zurückführen können.

Die Untersuchung der Elastizität fester Körper ist eine der schwierigsten auf dem ganzen Gebiete der Physik; um die Gesetze derselben vollständig zu überschauen, bedarf es der kompliziertesten mathematischen Entwicklungen und der feinsten Versuche. Wir müssen uns deshalb hier darauf beschränken, die Resultate der Untersuchungen vorzuführen, indem wir

gleichzeitig, so weit es möglich ist, den innern Zusammenhang derselben darlegen<sup>1)</sup>).

### § 49.

**Elastizität beim Zuge.** Der einfachste Fall aller Probleme über Elastizität ist der, daß man einen dünnen soliden Stab, der an seinem einen Ende befestigt ist, durch einen Zug oder Druck in seiner Längsrichtung ausdehnt oder zusammendrückt. So lange die Veränderungen, welche die wirksame Kraft hervorbringt, klein genug sind, muß die durch ein gegebenes Gewicht beim Zusammendrücken hervorgebrachte Verkürzung gleich sein der durch die Ausdehnung bewirkten Verlängerung; es genügt daher, den Fall der Ausdehnung zu betrachten und die Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen der Belastung und der eintretenden Verlängerung stattfinden. Die einfachste Methode der Untersuchung ist die von Wertheim angewandte. Derselbe befestigte an einer festen Mauer ein Kniestück von sehr starkem Eisen *B* (Fig. 59). Dasselbe endigt in einer ebenen vertikalen Fläche von gehärtetem Stahl, gestreift wie eine Feile, gegen welche eine Platte ebenfalls von Stahl und an der einen Seite ebenso gestreift, paßt und mittels Schrauben *C* angedrückt werden kann. Diese beiden Stücke dienen als Backen eines starken Schraubstocks, und zwischen ihnen wird der Draht, dessen Elastizität man untersuchen will, durch einen sehr starken Druck befestigt.

An dem untern Ende des Drahtes wird mittels einer gleichen schraubstockartigen Vorrichtung ein Haken befestigt und an diesen eine Wagschale *E* angehängt, welche die ziehenden Gewichte aufnimmt. Sind die Gewichte hinreichend schwer, so dehnt sich der Draht merklich aus, verkürzt sich aber wieder zu seiner früheren Länge, wenn man die Gewichte fortnimmt. Zur Messung der Verlängerung bedarf es gewisser Vorsichtsmaßregeln.

Wenn man die Gewichte in die Wagschale sehr rasch einsetzt, so erteilt man dem Apparat Stöße, durch welche man den Draht zerreißen kann. Um dieses zu vermeiden ist die Wagschale mit drei langen Fußstellschrauben *HH* versehen, welche man vor Beginn des Versuches so weit hinabschraubt, daß sie den Boden berühren und somit die Wagschale tragen; dann wird die Schale belastet, und dann erst hebt man die Schrauben sehr langsam, um allmählich das Gewicht seine ziehende Wirkung

1) Die wichtigsten allgemeinen Untersuchungen über Elastizität finden sich in *Poisson*, Mémoire sur les mouvements des corps élastiques. Mémoires de l'Académie des sciences. Paris. 8. 1828.

*Cauchy*, Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre d'un corps solide. Exercices des Mathématiques 2 und 3.

*Lamé*, außer einer Reihe von Abhandlungen besonders in seinen *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. II. édit. Paris 1860.

*Kirchhoff*, Abhandlungen über Elastizität. Crelles Journal. 40. 1850 und 56. 1859; Vorlesungen über mathematische Physik (Mechanik). Leipzig 1876.

*Clebsch*, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862.

*Beer*, Einleitung in die Theorie d. Elastizität und Kapillarität. Leipzig 18

*F. Neumann*, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität usw., herausgegeben von O. E. Meyer. Leipzig 1885.

*Voigt*, Elementare Mechanik. Leipzig 1889.

zu lassen. Dabei hat man keine Stöße zu befürchten. Bei der  
ung hat man sich dann noch vor einem leicht zu begehenden  
zu schützen. Wählt man nämlich feine Drähte, so sind diese  
vielen Stellen gebogen und gekrümmt. Ein Anhängen der Ge-  
wirkt nun zunächst ein Gerade-  
und dadurch scheinbar ein Verlän-  
Drabtes. Um diese Täuschungen

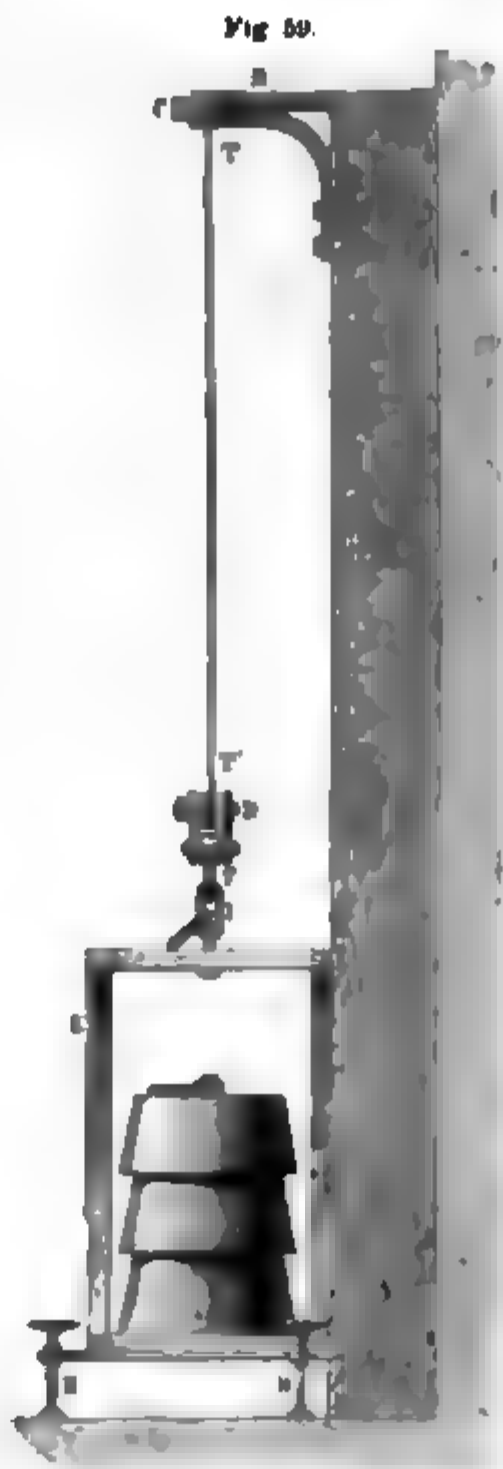
den, ist es notwendig, anfänglich  
s Gewicht in die Schale zu legen,  
einreicht, den Draht gerade zu  
ad dann erst allmählich die Schale  
a belasten. Von da an zählt man  
a erst die Gewichte.

Verlängerungen des Drahtes, wel-  
sehr klein sind, mißt man mit dem  
eter: man stellt daselbe dem Drahte  
demal fest gegenüber und visiert  
Fernrohr desselben auf zwei feine  
Enden des Drahtes angebrachte  
T und T'. Der Unterschied der  
teilungen des Kathetometers liefert  
fällen die Länge des Drahtes, so-  
als nach der Belastung; die Differ-  
enzen den beobachteten Längen vor  
der Belastung gibt dann die infolge  
ung eintretende Verlängerung. Mit  
er Methode hat Wertheim<sup>1)</sup> zu-  
schon früher von Hooke<sup>2)</sup>,  
sande<sup>3)</sup>, Th. Young<sup>4)</sup> u. a. auf-  
Gesetze der Elastizität bestätigt  
sind:

1) Verlängerungen eines Drahtes  
denselben angehangen Gewicht der  
Drahtes proportional. Um das Ge-  
weisen, hat man auf dem Drahte  
re Marken in gleicher Distanz zu  
an undet dann nach der Belastung,  
Abstand der verschiedenen Marken  
a viel vergrößert hat. Da nun die

ing des ganzen Drahtes gleich der Summe der Ausdehnungen  
reinen Teile ist, so folgt, daß dieselbe der Länge des Drahtes  
proportional ist.

2) Verlängerung eines gegebenen Drahtes ist der Größe des span-  
gewichtes direkt proportional. Aus diesem Satze folgt, daß die



<sup>1)</sup> Wertheim, Annales de chim. et de phys. 12. 3. 1841. Poggend. Ann.  
band 2. 1-4.

<sup>2)</sup> Hooke, Philosophical tracts and Collections, London 1678.

<sup>3)</sup> Lavoisier, Physique elementaire mathematique 1.

<sup>4)</sup> Young, Course of lectures on natural Philosophy, London 1807.

durch kleine Verschiebungen der Moleküle hervorgerufenen elastischen Kräften den Verschiebungen selbst proportional sind. Denn wenn unter Wirkung des spannenden Gewichtes Gleichgewicht eingetreten ist, so beweist das, daß die voneinander entfernten Molekülschichten sich mit der dem spannenden Gewichte gleichen Kraft anziehen. Da nun die Verschiebungen der Moleküle dem spannenden Gewichte proportional sind, so folgt auch, daß die elastischen Kräfte den Verschiebungen proportional sind.

3) Die Verlängerung verschieden dicker Drähte ist bei gleichen spannenden Gewichten dem Querschnitt der Drähte umgekehrt proportional, von der Gestalt des Querschnittes aber unabhängig. Dieser Satz folgt schon unmittelbar aus der Überlegung, daß wir einen Stab  $n$ -facher Dicke als aus  $n$  Stäben einfacher Dicke bestehend ansehen können; damit deshalb ein solcher Stab dieselbe Verlängerung erhalte, bedarf er ein  $n$ mal so großes Gewicht als der einfache Stab.

4) Schließlich ist die Verlängerung abhängig von der Natur des Drahtes, den wir belasten.

Fassen wir diese vier Sätze in einen Ausdruck zusammen, so können wir die Verlängerung  $v$ , welche ein Draht von der Länge  $l$  und dem Querschnitte  $q$  durch ein Gewicht  $p$  erhält, darstellen durch die Gleichung

$$v = C \cdot \frac{p \cdot l}{q},$$

worin  $C$  eine für jede Substanz besondere Konstante ist, welche die Verlängerung bedeutet, welche ein aus ihr gefertigter Stab durch die Zugheit erhält, wenn seine Länge und sein Querschnitt der Einheit gleich sind. Dividieren wir beide Seiten unserer Gleichung durch  $l$ , so wird

$$\frac{v}{l} = \delta = C \frac{p}{q},$$

so daß wir die Konstante  $C$  auch definieren können als die in Bruchteilen der ursprünglichen Länge ausgedrückte Verlängerung, welche ein Stab oder Draht erhält, wenn auf die Flächeneinheit des Querschnittes die Einheit des Zuges wirkt. Die Größe  $C$  heißt der lineare Verlängerungskoeffizient der betreffenden Substanz, aus welcher der Stab oder Draht besteht.

Die Größe  $p$ , welche die Verlängerung  $\delta$  hervorgebracht hat, gibt nach 2) gleichzeitig die durch diese Verlängerung  $\delta$  zwischen den Molekülschichten geweckte elastische Kraft; dieselbe ist

$$p = \frac{1}{C} \cdot \delta \cdot q.$$

Die geweckte elastische Kraft ist der Verlängerung des Stabes, diese gemessen in Bruchteilen der ursprünglichen Länge proportional; da die Verlängerung gleich der Summe der Vergrößerung der Abstände der einzelnen Molekülschichten, die ursprüngliche Länge gleich der Summe der Abstände der Molekülschichten im ungedehnten Zustande ist, so folgt, daß die zwischen zwei Molekülschichten geweckte elastische Kraft proportional ist der Vergrößerung des Molekularabstandes, dieselbe gemessen nach dem ursprünglichen im ungedehnten Zustande vorhandenen Abstand.

Die für die Flächeneinheit des Querschnittes geweckte elastische Kraft  $p_0$  ist

$$p_0 = \frac{p}{q} = \frac{1}{C} \delta = E \delta,$$

man wir den reziproken Wert des Koeffizienten  $C$  mit  $E$  bezeichnen. Diesen Koeffizienten  $E$  nennt man den Elastizitätskoeffizienten oder Elastizitätsmodulus, zuweilen auch, da er von Thomas Young zuerst eingeführt wurde, den Youngschen Modul. Wir erhalten somit die durch Längsdehnung in einem Stabe pro Querschnittseinheit geweckte elastische Kraft, wenn wir die Verlängerung  $\delta$  mit dem Elastizitätskoeffizienten multiplizieren.

Der Elastizitätsmodul einer Substanz ist der reziproke Wert des linearen Verlängerungskoeffizienten, und in dieser Weise wird er auch in der Regel bestimmt, man beobachtet die Verlängerung eines Stabes von bestimmter Länge und bekanntem Querschnitt durch ein bestimmtes Gewicht  $p$  und erhält  $E$  durch Ausrechnung der Gleichung

$$E = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{p}{q}.$$

Man kann den Elastizitätskoeffizienten auch anders definieren; das Produkt  $E\delta$  gibt die pro Flächeneinheit geweckte elastische Kraft oder auch den pro Flächeneinheit erforderlichen Zug, damit  $\delta$  gleich eins wird, damit also der Stab auf die doppelte Länge gebracht, bzw. der Abstand der Molekülschichten voneinander verdoppelt würde, unter Voraussetzung, daß das für kleine Änderungen gültige Gesetz auch noch für solche Werte der Dehnung Geltung hätte. Deshalb wird der Elastizitätskoeffizient auch ähnlich in Zugeinheiten angegeben. Dabei ist aber wohl zu beachten, daß der Elastizitätskoeffizient selbst nicht ein Zug oder eine Kraft ist, daß vielmehr der Quotient aus einer Kraft und einer Fläche ist. Seine Dimensionen sind daher nicht die einer Kraft, sondern, da die Fläche das Quadrat einer Länge ist,

$$E = z[\mu \lambda \tau^{-2} \cdot \lambda^{-2}] = z[\mu \lambda^{-1} \tau^{-2}].$$

nach der Masse von der ersten, nach der Länge von der minus ersten, nach der Zeit von der minus zweiten Potenz. Man bezeichnet vielfach auch diesen Dimensionen als diejenige eines Druckes, indem man dann wiederum den Druck als jenen pro Flächeneinheit nimmt; in diesem Falle wird die Bezeichnung Druck stets bei flüssigen und gasförmigen Körpern benutzt.

Der Vollständigkeit wegen sei hinzugefügt, daß zuweilen auch der Elastizitätsmodul als eine Länge definiert wird. Man geht von der Gleichung

$$p_0 = E \frac{r}{l}$$

aus. Setzt man in dieser Gleichung  $p_0 = 1$  und setzt die Länge  $l$  des Stabes gleich  $E$ , so daß der pro Flächeneinheit wirkende Zug die Längenzunahme der Längeneinheit macht, also  $r = 1$ , so wird

$$E = l.$$

Der Elastizitätsmodul ist demnach jene Länge eines Drahtes, welche durch pro Flächeneinheit wirkende Einheit des Zuges die der Längeneinheit entsprechende Längenzunahme erhält.

Da indes der Elastizitätskoeffizient multipliziert mit dem Quotie zweier Längen, also mit einer reinen Zahl, uns einen Druck pro Fläc einheit liefert, so ist seine Definition als die eines Druckes vorzuziehe

Die Einheiten, welche bei den experimentellen Untersuchungen in Regel der Messung der Elastizitätskoeffizienten zugrunde gelegt wu sind ganz willkürliche, man nahm als Querschnittseinheit das Quadratn meter und als Zugeinheit das Kilogramm. Da durch Einführung des Qua millimeters als Flächeneinheit das Millimeter hierbei als Längeneinheit tritt, müssen wir um den Zug nach unserer Definition als Masse Beschleunigung festzuhalten und die Elastizitätskoeffizienten in den l ventionellen Zahlen auszudrücken, jene Masse als Einheit setzen, we durch den Zug eines Kilogramm die Beschleunigung 1<sup>mm</sup> erhält. Da Größe *g* gleich 9810<sup>mm</sup> ist, ist das eine Masse von 9810<sup>kg</sup>; in den l ventionellen Einheiten ausgedrückt ist also

$$E = z [(9810^{kg}) \text{ mm}^{-1} \text{ sec}^{-2}].$$

Im Gramm-, Zentimeter-, Sekundensystem ist demnach

$$E = z \left[ 9810 \cdot 1000 \cdot \text{gr} \left( \frac{\text{cm}}{10} \right)^{-1} \text{ sec}^{-2} \right] = 981 \cdot 10^5 z [\text{gr cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}].$$

Um die im konventionellen System angegebenen Elastizitätskoeffizienten das von uns angenommene absolute Maßsystem zu übersetzen, haben wir an die Zahlen des konventionellen Systems mit 981 · 10<sup>5</sup> zu multiplizier

In der nachfolgenden Tabelle geben wir eine Anzahl von Elastizität koeffizienten, welche von Wertheim<sup>1)</sup> nach der oben beschriebenen Meth erhalten sind; wir behalten dabei die von Wertheim benutzten konv tionellen Einheiten bei.

**Tabelle der Elastizitätskoeffizienten verschiedener Metalle bei verschiedenen Temperaturen.**

Metalle	Koeffizienten bei			Koeffizienten aus d Longitudinalversuch bestimmt
	15°—20° C.	100° C.	200° C.	
Blei gezogen . . . . .	1803			2278
„ angelassen . . . . .	1727	1630	—	2146
Gold gezogen . . . . .	8131			8599
„ angelassen . . . . .	5584	5408	5482	6372
Silber gezogen . . . . .	7357			7576
„ angelassen . . . . .	7140	7274	6374	7242
Zink gezogen . . . . .	8734			9555
Kupfer gezogen . . . . .	12449			12536
„ angelassen . . . . .	10519	9827	7862	12540
Platin gezogen . . . . .	17044			17165
„ angelassen . . . . .	15518	14178	12964	15611
Eisen gezogen . . . . .	20869			19903
„ angelassen . . . . .	20794	21877	17700	19925
Gußstahl gezogen . . . . .	19549			19823
„ angelassen . . . . .	19561	19014	17926	19828
Engl. Stahl gezogen . . . . .	18809			19445
„ „ angelassen . . . . .	17278	21292	19278	19200

1) Wertheim, Poggend. Ann. Ergänzungsband 2. 1848.

Die Zahlen der letzten Kolumne gelten ebenfalls für die Temperatur  $15-20^{\circ}\text{C}$ ., die Methode, nach welcher sie erhalten wurden, werden wir später besprechen.

Obige Zahlen zeigen, daß die Elastizitätskoeffizienten nicht nur für verschiedene Metalle, sondern auch für ein und dasselbe Metall verschieden sein können, je nachdem dasselbe als gezogener Draht oder nach vorhergegangnem Erhitzen untersucht wird.

Die Richtigkeit der durch diese und die frühern Versuche gegebenen Gesetze der Zugelastizität wurde einige Zeit nachher von Hodgkinson<sup>1)</sup> bezweifelt, der aus seinen Versuchen schloß, daß eine elastische Ausdehnung in dem vorhin angegebenen Sinn, die also nach dem Aufhören des Zuges wieder vollständig rückgängig wird, niemals vorhanden wäre, sondern daß immer gleichzeitig eine bleibende Dehnung eintrete. Er gelangte weiterhin zu dem Schlusse, daß die geweckte elastische Kraft nicht der Verlängerung proportional sei, daß dieselbe vielmehr dargestellt werde durch

$$p_0 = a\delta - b\delta^2,$$

daß also die elastische Kraft langsamer zunehme als die Verlängerung. Demgegenüber kam Morin<sup>2)</sup> zu dem Resultate, daß bei kleinen Verlängerungen die von Hodgkinson beobachtete bleibende Verlängerung nur eine scheinbare sei. Morin wandte zu seinen Versuchen 22—24<sup>m</sup> lange Drähte an, auf denen in einer Entfernung von 20<sup>m</sup> zwei Marken angebracht waren. Da die Drähte vor dem Versuche auf Rollen von 60—70<sup>cm</sup> Durchmesser aufgerollt waren, wurden sie zunächst möglichst vollkommen gerade gemacht; indes blieben immer einige schwache Krümmungen zurück, als deren Folge sich bei längerer Belastung eine scheinbare kleine Verlängerung ergab, welche Morin dem durch das längere Aushängen des Drahtes bewirkten mehr und mehr Geradewerden des Drahtes zuschrieb. Diese seine Ansicht begründete er dadurch, daß bei einer zweiten und dritten Belastung mit demselben Gewichte ganz erheblich kleinere Verlängerungen sich zeigten. Die Messungen der elastischen Verlängerungen führten ihn zu dem Resultate, daß die Verlängerungen den spannenden Gewichten proportional seien. Für Eisen erhielt Morin den Elastizitätskoeffizienten 19643, also einen dem von Wertheim gefundenen sehr nahen Wert; an zwei Kupferdrähten erhielt er 6850 und 7339, also erheblich kleinere Werte als Wertheim. Morin fand für seine Kupferdrähte ein kleineres spezifisches Gewicht als Wertheim und schreibt diesem Umstande es zu, daß er den Elastizitätskoeffizienten so erheblich kleiner findet.

Auch Pisati<sup>3)</sup> und Miller<sup>4)</sup> finden keine Abweichung von der Proportionalität zwischen Dehnung und Zug. Pisati erhielt für Eisen bei  $20^{\circ}\text{C}$  den Elastizitätskoeffizienten 21441, Miller bei derselben Temperatur 20969.

Zu den von den frühern ganz abweichenden Resultaten gelangte vor kurzem

1) *Hodgkinson*, Fortschritte der Physik, darg. von der Physikal. Gesellschaft Leipzig 9 p. 120 1853.

2) *Morin*, Comptes Rendus 54. p. 235. 1862.

3) *Pisati*, Beiblätter zu Poggendorff's Annalen. 1. p. 305. 1877.

4) *Miller*, Berichte der Münchener Akademie. Jahrg. 1882 p. 377.



bei einer erneuerten Untersuchung der Verlängerung von Drähten Thompson<sup>1)</sup>, er fand, daß die elastische Dehnung von den kleinsten Gewichten an rascher zunimmt als die spannenden Gewichte. Thompson beobachtete wie Morin die Verlängerung an Drähten von etwa 23<sup>m</sup> Länge, welche in einem Turme des physikalischen Laboratoriums zu Straßburg aufgehängt waren. Die Drähte hatten zwei Marken; die obere Marke wurde mit einem Mikroskope beobachtet, um zu konstatieren, daß sie bei der Belastung nicht hinabsank oder um eine etwa eintretende kleine Senkung zu messen. Die untere Marke wurde mit einem Kathetometer beobachtet, an welchem die Senkung derselben gemessen wurde. Die Temperatur in dem Beobachtungsraume war eine sehr konstante; um etwaige Änderungen derselben in Rechnung ziehen zu können, war neben dem zur Beobachtung der elastischen Ausdehnung dienenden Drahte ein ebenso langer Messingdraht mit konstanter Belastung aufgehängt; eine Verlängerung oder Verkürzung dieses Drahtes ließ die Temperaturänderungen desselben und damit auch die des Versuchsdrahtes genau bestimmen. Vor den Dehnungsmessungen waren die Drähte so weit belastet, daß sie gerade gerichtet waren; die untersuchten Drähte hatten eine Dicke von 0,1 bis 0,15<sup>mm</sup>. Die nach dem einzelnen Versuche etwa bleibende Verlängerung wurde von der beobachteten Gesamtverlängerung abgezogen und die Differenz als die elastische Dehnung genommen.

Indem wegen der Details der Methode auf die Arbeit von Thompson verwiesen werden mag, geben wir in folgender Tabelle acht Beobachtungsreihen an einem Kupferdraht, dessen Querschnitt 0,0641 mm<sup>2</sup> und auf welchem der Abstand der Marken 22,69<sup>m</sup> war. Die Dichtigkeit des Drahtes war 8,99 und die dem Drahte zur Geraderichtung gegebene konstante Belastung, welche in den acht Beobachtungsreihen die in den folgenden Spalten beobachteten Verlängerungen des Drahtes, dieselben in Millimeter gemessen, hervorbrachten:

<i>p</i> kg								
0,2	5,535	5,535	5,54	5,53	5,53	5,53	5,53	5,53
0,4	11,085	11,08	11,10	11,085	11,09	11,09	11,09	11,09
0,6	16,675	16,675	16,685	16,685	16,68	16,68	16,67	16,68
0,8	22,31	22,305	22,31	22,31	22,30	22,31	22,31	22,31
1,0	27,97	27,94	27,98	27,985	27,95	27,97	27,94	27,94
1,2	33,665	33,65	33,685	33,685	33,67	33,66	33,64	33,63

Diese in der Tat auffallend übereinstimmenden Zahlen zeigen von der kleinsten Dehnung aus eine raschere Zunahme der Länge, als der Zunahme der Belastung entspricht. Die von Thompson an diesem Kupferdrahte beobachteten Zahlen lassen sich darstellen durch die Gleichung

$$x = 27,578 p + 0,3193 p^2 + 0,0538 p^3,$$

wenn  $x$  die beobachtete Verlängerung in Millimeter und  $p$  das ziehen Gewicht in Kilogrammen angibt, welches zu dem Anfangsgewicht 0,197 hinzugefügt wurde.

1) Thompson, Wiedemanns Ann. 44. p. 555. 1891.

Der Ausgangspunkt dieser Beobachtungen war der durch das Gewicht 0,192 bereits verlängerte Draht; um die Längenzunahme des Drahtes vom unbelasteten Zustande aus durch ein Gewicht  $P$  berechnen zu können, verfährt Thompson folgendermaßen. Sei  $X$  die Längenzunahme des Drahtes durch das Gewicht vom unbelasteten Zustande aus gegeben durch den Ausdruck

$$X = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^3,$$

so ist die Verlängerung  $X_0$  durch das Gewicht  $P_0$ , von welcher bei den Versuchen ausgegangen war,

$$X_0 = \alpha P_0 + \beta P_0^2 + \gamma P_0^3.$$

Die beobachtete Verlängerung  $x$  ist  $X - X_0$  durch das Gewicht  $p = P - P_0$ ; lassen wir die Konstanten der empirischen Gleichung für  $x$  jetzt  $a, b, c$ , so haben wir für  $x$  folgende zwei Gleichungen

$$x = X - X_0 = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^3 - \alpha P_0 - \beta P_0^2 - \gamma P_0^3$$

und

$$x = a(P - P_0) + b(P - P_0)^2 + c(P - P_0)^3.$$

Entwickeln wir die Potenzen der letzten Gleichung, so wird

$$x = (a - 2bP_0 + 3cP_0^2)P + (b - 3cP_0)P^2 + cP^3 - aP_0 + bP_0^2 - cP_0^3.$$

Setzen wir

$$\alpha = a - 2bP_0 + 3cP_0^2; \quad \beta = b - 3cP_0; \quad \gamma = c$$

und drücken in den drei letzten Gliedern der letzten Gleichung für  $x$  die Werte  $a, b, c$  durch  $\alpha, \beta, \gamma$  aus, so werden die beiden Gleichungen für  $x$  identisch, so daß wir die Konstanten der Gleichung für  $X$  durch die empirischen Konstanten  $a, b, c$  und den Zug  $P_0$  in dieser Weise berechnen können.

Für Kupfer erhielt Thompson

$$X = 27,461 P + 0,2883 P^2 + 0,0538 P^3.$$

In gleicher Weise fand Thompson für einen Silberdraht von 22,69<sup>m</sup> Länge und 0,0687 mm<sup>2</sup> Querschnitt

$$X = 38,907 P + 0,4462 P^2 - 0,0313 P^3.$$

Messingdraht 22,70<sup>m</sup> lang, 0,0627 mm<sup>2</sup> Querschnitt

$$X = 34,924 P - 0,2386 P^2 + 0,1487 P^3.$$

Stahldraht 22,70<sup>m</sup> lang, 0,03263 mm<sup>2</sup> Querschnitt

$$X = 34,672 P + 0,6498 P^2 - 0,0525 P^3.$$

Als linearen Verlängerungskoeffizienten bezeichneten wir vorher nach Gleichung

$$\frac{x}{l} = c' \frac{P}{q}, \quad c' = \frac{q}{l} \frac{x}{P}$$

den Koeffizienten, mit welchem der pro Flächeneinheit wirkende Zug zu vergrößern ist, um in Bruchteilen der ursprünglichen Länge die Verlängerung des gezogenen Drahtes zu erhalten. Führen wir in die Gleichungen

von Thompson den auf die Flächeneinheit wirkenden Zug ein, und setzen die Länge der Drähte gleich  $L$ , so können wir die Gleichungen schreiben:

$$\frac{X}{L} = \left\{ \frac{\alpha q}{L} + \frac{\beta q P}{L} + \frac{\gamma q P^2}{L} \right\} \frac{P}{q}$$

und

$$C = \frac{q}{L} \frac{X}{P} = \frac{\alpha q}{L} + \frac{\beta q P}{L} + \frac{\gamma q P^2}{L},$$

so daß also der lineare Verlängerungskoeffizient von der Größe des Zuges abhängig ist, er wächst mit wachsendem Zuge. Wenn so der lineare Verlängerungskoeffizient von der Größe des Zuges abhängig ist, so folgt, daß er bei gleichem Zuge auch von der Größe des Querschnittes des gezogenen Drahtes abhängig ist, daß wir für Drähte verschiedenen Querschnittes nur gleiche Koeffizienten bekommen, wenn die Züge sich verhalten wie die Querschnitte, also die Züge pro Flächeneinheit gleich sind.

Diese letztere Folgerung ergibt sich aus der einfachen Überlegung, daß bei dem doppelten Querschnitt die doppelte Kraft wirken muß, um die gleiche Verlängerung wie bei dem einfachen Querschnitt zu erhalten. Da nun die Verlängerung rascher wächst als der Zug, folgt, daß bei doppeltem Querschnitt und einfachem Zuge die Verlängerung weniger beträgt als die Hälfte derjenigen bei doppeltem Zuge, also auch weniger als die Hälfte der Verlängerung, welche der Draht mit dem Querschnitt eins durch den einfachen Zug erfährt. Man muß also bei Anwendung gleicher Züge um so kleinere lineare Verlängerungskoeffizienten finden, je größer der Querschnitt des Drahtes ist, an welchem der Zug wirkt.

Da der Elastizitätskoeffizient der reziproke Wert des Verlängerungskoeffizienten ist, folgt, daß auch dieser von der Größe des Zuges und der Größe des Querschnittes abhängig ist, und zwar nimmt er ab, wenn die Größe des Zuges wächst und wenn bei gleichem Zuge der Querschnitt abnimmt.

Thompson definiert deshalb als Elastizitätskoeffizient denjenigen Wert, den man aus einer durch einen verschwindend kleinen Zug bewirkten verschwindend kleinen Verlängerung erhält. Es ist das der reziproke Wert von  $C$ , wenn man in den dafür gefundenen Gleichungen  $P = 0$  setzt, also

$$C = \frac{q}{L} \cdot \alpha, \quad E = \frac{L}{q} \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

Hiernach werden die Elastizitätskoeffizienten für die von Thompson untersuchten Metalle

Stahl . .	20050,	Messing .	10370,
Kupfer .	12890,	Silber . .	8490.

Der Wert für Messing gilt für die Temperatur  $9^{\circ}$ , für die übrigen Metalle für  $13^{\circ}$ — $14^{\circ}$  C.

Für Aluminium kam G. S. Meyer<sup>1)</sup> zu dem gleichen Resultate wie Thompson, er erhielt für die Längenzunahme eines Drahtes von 18315<sup>mm</sup> Länge

$$\Delta L = 62,863 P + 14,312 P^2$$

und berechnet als Elastizitätskoeffizient  $\frac{7462 \text{ Kilo}}{\text{mm}^2}$ .

1) G. S. Meyer, Wiedem. Ann. 59. p. 668. 1896.

Für Nickel, Gold, Platin fand Meyer keine merkliche Abweichung von der Proportionalität zwischen Zug und Verlängerung. Als Elastizitätskoeffizienten erhielt er für

Nickel 21700, Gold 8630, Platin 16020

Temperaturen nahe an 12° C.

Auf den Einfluß der Temperatur kommen wir später noch zurück.

Wie schon oben erwähnt gelten die für kleine Verlängerungen gültigen Gesetze auch für kleine Verkürzungen durch Druck, und soweit man die Verkürzungen und Verkürzungen der Größe des Zuges oder Druckes proportional setzen kann, gelten für die Verkürzungen die gleichen Konstanten.

C. Bach<sup>1)</sup> gelangte zu ähnlichen Resultaten bei der Untersuchung einer Anzahl von Materialien, Gußeisen, Flußeisen, Kupfer, Bronze, Messing; er wandte Züge von solcher Größe an, daß im allgemeinen die Elastizitätsgrenze (§ 57) schon überschritten war, das heißt, daß nach dem Zuge eine bleibende Verlängerung eintrat. Er maß deshalb die während des Zuges eintretende gesamte Verlängerung und zog von dieser die bleibende Ausdehnung ab. Die Differenz dieser beiden Ausdehnungen, die er als die federnde Ausdehnung bezeichnet, sieht Bach als die elastischen Dehnungen an, für welche man früher annahm, daß sie der Größe des Zuges proportional seien. Für die Abhängigkeit der federnden Verlängerung  $\delta$ , ausgedrückt in Bruchteilen der ursprünglichen Länge, fand er, wenn  $\sigma$  den Zug für die Flächeneinheit und  $\alpha$  und  $m$  zwei Konstanten bedeuten, daß eine Gleichung von der Form

$$\delta = \alpha \sigma^m$$

die beobachteten durch die Spannung  $\sigma$  hervorgerufenen Verlängerungen sehr gut darstellen. Die Konstanten  $\alpha$  und  $m$  hängen von der Natur des Materials ab.

Diese Gleichung enthält auch den speziellen Fall, daß die Dehnungen mit den Spannungen proportional sind, denn setzen wir  $m = 1$ , so wird

$$\delta = \alpha \sigma.$$

Diese Beziehung fand Bach für Flußeisen und Flußstahl bestätigt, und fand Proportionalität zwischen Verlängerung und Spannung bis zu Spannungen, welche bei Flußeisen bis <sup>18,98 Kilo</sup>  $\frac{1}{mm^2}$ , für Flußstahl sogar bis <sup>44 Kilo</sup>  $\frac{1}{mm^2}$  gingen. Für diese Metalle ist somit  $\alpha$  der lineare Verlängerungs-

koeffizient  $\frac{1}{E}$  der Elastizitätskoeffizient. Für zwei Rundstäbe von Flußeisen fand Bach  $E = 20940$  und  $21097$ , für Flußstahl ergab sich  $E = 21330$ . Auch für Bronze und Messing war die Dehnung dem Zuge proportional, und zwar allerdings erst, nachdem sie vorher einem starken Zuge ausgesetzt waren.

Für die übrigen von ihm untersuchten Substanzen fand Bach die Werte von  $m$  von 1 verschieden. Für zwei Gußkörper von Gußeisen fand er das eine Mal  $m = 1,083$ , das andere Mal  $m = 1,1$ , für zwei Kupferstäbe

<sup>1)</sup> C. Bach, Elastizität und Festigkeit. 3. Aufl. Berlin bei Springer 1898.

$m = 1,098$  und  $m = 1,093$ . Für den ersten dieser Stäbe gab eine Wiederholung der Messungen  $m = 1,074$ .

Auch in diesen Fällen darf man die Konstante  $\alpha$  entsprechend der Dehnung für  $\sigma = 1$  als den linearen Dehnungskoeffizienten, also dessen reziproken Wert als den Elastizitätskoeffizienten bezeichnen. Für Gußeisen erhielt Bach so an zwei Gußkörpern  $E = 13380$  und  $11550$ , also Werte, die ganz erheblich kleiner sind als die für Flußeisen oder geschmiedetes Eisen; für Kupfer dagegen fand er ungewöhnlich große Werte, nämlich  $E = 21950$  bzw. bei einer zweiten Beobachtungsreihe an demselben Stab  $18650$  und an dem zweiten Stabe  $E = 20840$ .

Bach hat weiter an den von ihm benutzten Gußeisenkörpern die Verkürzungen durch Druck gemessen. Er fand die Werte von  $m$  in der Gleichung für  $\delta$  erheblich näher an 1; auch die aus den Verkürzungen berechneten Elastizitätskoeffizienten waren nicht gleich denen, die aus den Verlängerungen sich ergaben. Für einen vorher nicht durch Zug beanspruchten Gußkörper ergab sich  $E = 13380$  aus den beobachteten Verlängerungen, dagegen für denselben Körper, wenn er vorher nicht durch Druck beansprucht war, aus den Verkürzungen  $E = 10430$ . Die Werte aus Verlängerung und Verkürzung berechnet rückten sich näher, wenn die Stäbe vorher schon in demselben Sinne durch große Kräfte beansprucht waren. So wurde der Elastizitätskoeffizient bei einem Gußkörper aus den Verlängerungen berechnet  $E = 11500$ , aus den Verkürzungen  $E = 11240$ .

Inwieweit die Verschiedenheit der Konstanten bei Zug und Druck allgemeiner gilt, läßt Bach dahingestellt; man pflegt sonst anzunehmen, daß bei kleinen Verlängerungen und Verkürzungen die gleichen Werte der Konstanten  $E$  in Anwendung kommen.

Die Gleichung von Bach für die Abhängigkeit der elastischen Dehnung vom Zuge können wir nur als eine innerhalb der Versuchsgrenzen gültige empirische Formel ansehen, die besonders für sehr kleine Züge nicht zu gebrauchen ist. Denn für sehr kleine Züge muß, wie wir in der Lehre von den schwingenden Bewegungen und in der Akustik nachweisen werden, der Wert von  $\frac{\delta}{\sigma}$  sich mit abnehmendem  $\sigma$  einem konstanten endlichen Werte nähern.

Würden wir  $\delta$  in seiner Abhängigkeit von  $\sigma$  durch eine Interpolationsformel darstellen, so muß dieselbe jedenfalls ein der Spannung proportionales Glied enthalten, so daß  $\frac{\delta}{\sigma}$  sich für  $\sigma = 0$  auf eine endliche Konstante reduziert. Das ist bei der Bachschen Formel nicht der Fall; ist  $m > 1$ , so nähert sich der Quotient  $\frac{\delta}{\sigma}$  dem Werte null, ist  $m < 1$ , so nähert sich der Wert des Quotienten mit abnehmendem  $\sigma$  dem Werte unendlich.

Kohlrausch und Grüneisen<sup>1)</sup> haben bei ihrer Besprechung der Bachschen Formel an eigenen Versuchen mit Gußeisen und an den Versuchen von Bach gezeigt, daß sich die Beobachtungen sehr gut durch eine Gleichung von der Form

1) Kohlrausch und Grüneisen, Sitzungsberichte d. Berl. Akad. 1901. p. 1084. Man sehe dazu auch die Bemerkung von Bach in der Zeitschrift d. Vereins deutscher Ingenieure 46. p. 25. 1902.

$$\frac{\delta}{\sigma} = A + B\sqrt{\sigma}$$

sen.

niederisen, Messing und Schiefer fanden dieselben  $\delta$  propor-

### § 50.

änderung bei dem Zuge. Wird ein Stab seiner Länge nach zusammengedrückt, so tritt gleichzeitig eine Änderung des ein. Bei Verlängerung eines Stabes tritt eine Verkleinerung dieses ein, wie man durch einen von Wertheim<sup>1)</sup> angestellten Versuch sichtbar machen kann. Derselbe benutzte dazu Eisen (Fig. 60) von ungefähr 300<sup>mm</sup> Länge. Die

die Gestalt von Prismen mit quadratischer Grundlänge einer Seite war zwischen 9 und 47<sup>mm</sup>. An Enden versah er sie mit eisernen Ansätzen A und B,

Kautschukstreifen fest angebracht waren. Die Ansätze, mittels des einen wurde der Kautschukstreifen aufgehängt; an dem andern, B, wurde das ziehende Gewicht angebracht. Da der Kautschuk sich äußerst leicht ausdehnte, verlängerte sich der Streifen sehr bedeutend; die Verlängerung wurde gemessen. Da der Querschnitt des Streifens groß war, so konnte man ihn mittels eines Zirkels so die Veränderungen des Querschnittes bestimmen,

die Verlängerung der Streifen entstanden. Man bemerkte vorauszu sehen war, daß der Querschnitt des Kautschukstreifens kleiner wurde.

Nehmen wir die ursprüngliche Länge eines Drahtes mit  $L$ , die Einwirkung irgend eines Gewichtes diese Länge übergehen, wo  $\delta$  wieder die Verlängerung der Längenangezeigt und gleich  $\frac{P_0}{E}$  ist. Der Querschnitt des Stabes,

B, dessen Dicke  $D$  war, wird nach der Belastung  $P = D(1 - \mu\delta)^2$ , wenn wir die Verkürzung des Querschnittes des Stabes, die jedenfalls der Verlängerung des proportional sein muß, mit  $\mu\delta$  bezeichnen. Entwickeln wir den Querschnitt nach der Belastung, so können wir, da  $\delta$  sehr klein ist,  $\mu^2\delta^2$  vernachlässigen und erhalten dann für den Querschnitt des Stabes

$$BD(1 - 2\mu\delta)$$

Volumen desselben nach dem Zuge

$$LBD(1 + \delta)(1 - 2\mu\delta),$$

wenn wir das sehr kleine Glied  $2\mu\delta^2$  wieder außer acht lassen

$$LBD(1 + \delta - 2\mu\delta).$$

Wertheim, Annales de chim et de phys. 32. (3.) 1851. Poggend. Ann. 159. 1876.

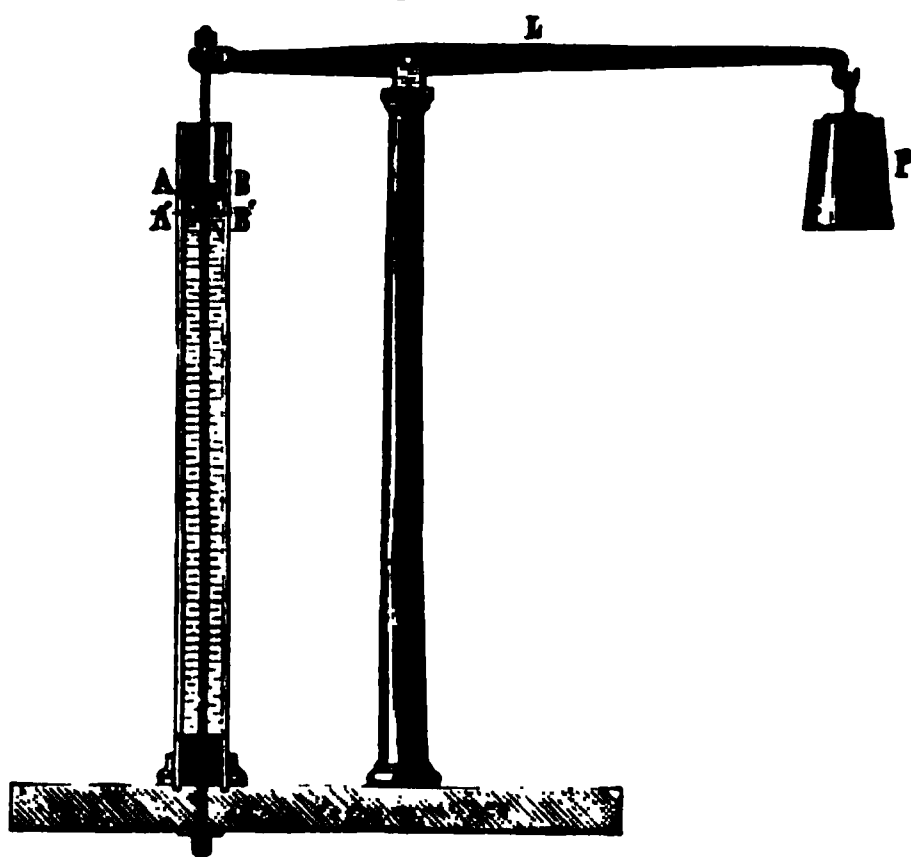
Fig. 60.



Je nach dem Werte von  $\mu$  kann deshalb eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Volumens eintreten. Es hat sich nun aus sämtlichen in der Richtung angestellten Versuchen ergeben, daß in der Tat eine Vergrößerung des Volumens eintritt, somit daß  $2\mu\delta < \delta$  oder daß  $\mu < 0,5$ , aber größer als Null ist.

Welches indes der wirkliche Wert von  $\mu$  innerhalb dieser Grenzen ist, darüber herrscht wegen der großen Schwierigkeit, diese Größe zu bestimmen, noch einige Unsicherheit. Navier<sup>1)</sup>, Poisson<sup>2)</sup>, Lamé und Clapeyron<sup>3)</sup> gelangen in ihren theoretischen Untersuchungen über Elastizität zu dem Resultate, daß  $\mu = \frac{1}{4}$  sei, ein Resultat, welches Poisson<sup>4)</sup> durch Versuche von Cagniard Latour bestätigt fand. Derselbe befestigte auf einem festen Fußbrett (Fig. 61) einen Metalldraht, so daß derselbe senkrecht aufstieg; das obere Ende des Drahtes wurde an einem Arme eines ungleicharmigen Hebels  $L$  befestigt, dessen anderer Arm mit einem Gewichte  $P$  beschwert

Fig. 61.



wurde. Die Länge des unbelasteten Drahtes, sie betrug  $2^m$ , war genau bestimmt, und es wurde dann die Verlängerung beobachtet, welche durch die Belastung des Hebels eintrat. Die letztere wurde so weit gesteigert, daß die Verlängerung des Drahtes  $6^{mm}$  betrug. Der Draht war, wie die Figur zeigt, von einer engen, unten geschlossenen und mit Wasser gefüllten Röhre umgeben, der Durchmesser der Röhre und des Drahtes waren genau gemessen. Im Augenblicke nun, in dem sich der Draht durch den Zug zu verlängern begann, sah man das Niveau des Wassers in der Röhre von  $AB$  bis  $A'B'$  sin-

ken; ein Beweis, daß in der Tat bei der Verlängerung des Drahtes eine Verminderung des Querschnittes eintritt. Die Niveaudifferenz vor und nach dem Zuge wurde genau gemessen. Darauf wurde der Draht unter am Fußbrett gelöst, in die mit Wasser gefüllte Röhre eingesetzt, so daß sein unteres Ende den Boden der Röhre gerade berührte, und das Niveau des Wassers wieder beobachtet. Darauf wurde der Draht so weit emporgezogen, daß das obere Ende  $6^{mm}$  aus dem Wasser emporragte, daß also ein ebenso großes Stück des Drahtes aus dem Wasser emporragte als bei dem vorigen Versuche. Da dann das Volumen des in das Wasser tauchenden Drahtes um das herausgezogene Stück kleiner war, so mußte das Niveau des Wassers wieder sinken, und es ergab sich, daß es jetzt doppelt so tief sank als bei dem vorigen Versuch, somit daß die

1) Navier, Mémoires de l'Académie des sciences. 7. 1827.

2) Poisson, Mémoires de l'Académie des sciences. 8. 1829.

3) Lamé und Clapeyron, Crelles Journal für Mathematik. 7. 1831.

4) Poisson teilt diesen Versuch mit in Annales de chim. et de phys. 1827. Poggend. Ann. 12. 1828.



lumenverminderung des jetzt noch in das Wasser tauchenden Drahtes spielt so groß war als bei der Verlängerung des Drahtes. Der Wert  $\mu$  ergibt sich daraus auf folgende Weise: bezeichnen wir den Radius des zylindrischen Drahtes mit  $r$ , so nimmt, wenn wir die Verlängerung um Längeneinheit mit  $\delta$  bezeichnen, bei der Ausdehnung des Drahtes das in das Wasser tauchende Stück des Drahtes das Volumen

$$l r^2 \pi (1 - 2 \mu \delta)$$

da wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, voraussetzen dürfen, daß die Länge des eintauchenden Stückes nicht geändert ist. Das Volumen des Stückes ist dann nur kleiner geworden, weil der Querschnitt des Drahtes im Verhältnis  $1 : 1 - 2 \mu \delta$  verkleinert ist.

Das Volumen des in das Wasser eintauchenden Drahtes ist nach dem zweiten Versuch dasselbe, wenn der Draht ohne Dehnung um die Hälfte der Verlängerung aus dem Wasser hervorgezogen wird. Das Volumen des nun noch im Wasser befindlichen Drahtstückes ist  $l r^2 \pi (1 - \frac{1}{2} \delta)$ ; somit ist

$$l r^2 \pi (1 - 2 \mu \delta) = l r^2 \pi (1 - \frac{1}{2} \delta)$$

oder

$$2 \mu = \frac{1}{2}; \quad \mu = \frac{1}{4}.$$

Man kann indes dem Versuche von Cagniard Latour nicht eine hinreichende Beweiskraft beilegen, daß der Querkontraktionskoeffizient diesen der Poissonschen Theorie entsprechenden Wert hat, da die Methode mehrere Fehlerquellen enthält, welche dem Resultate eine große Unsicherheit geben. ganz abgesehen davon, daß wegen der Kleinheit der zu messenden Größen die unvermeidlichen Beobachtungsfehler allein schon das Resultat unsicher machen. Die Benetzung der Röhrenwand ist nie eine ganz gleichmäßige, bei dem Herabsinken des Wasserniveaus bleibt an der Röhrenwand Wasser haften, ebenso haftet Wasser an dem herausgezogenen Drahte, alles Fehlerquellen, welche man nicht sicher in Rechnung legen kann.

Cardani<sup>1)</sup> hat dann auch nach der gleichen Methode ganz andere Werte erhalten wie Cagniard Latour, er erhielt bei Eisen 0,325, bei Stahl 0,372, Aluminium 0,233.

Daß die theoretischen Schlußfolgerungen Poissons nicht strenge sind, ist zuerst wohl Stokes gezeigt<sup>2)</sup>, sie beruhen auf speziellen, nicht notwendigen Voraussetzungen; die Untersuchungen von Cauchy<sup>3)</sup>, Lamé<sup>4)</sup>, Kirchhoff<sup>5)</sup>, W. Thomson<sup>6)</sup> und anderen haben vielmehr ergeben, daß die Theorie der Elastizität nur zu dem bereits vorhin angegebenen Resultate führt, daß der Wert von  $\mu$  zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$  liegt, daß der Versuch in jedem Falle über den Wert von  $\mu$  innerhalb dieser Grenzen entscheiden muß

<sup>1)</sup> Cardani, Physik. Zeitschr. 4. p. 144. 449. 1902.

<sup>2)</sup> Stokes. Man sehe Thomson und Tait, Theoretische Physik. § 684. (Übersetzung von Wertheim 2. Teil. Braunschweig 1874.)

<sup>3)</sup> Cauchy, Exercices de Mathématiques. 3. p. 182 u. p. 205 ff.

<sup>4)</sup> Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. 2. p. 45 ff.

<sup>5)</sup> Kirchhoff, Crelles Journal 40. 1855. 56. 1857.

<sup>6)</sup> W. Thomson. Theoretische Physik von Thomson und Tait. § 684 ff.

Um den Zusammenhang der Querkontraktion mit den durch den Zug oder Druck geweckten elastischen Kräften zu erkennen, denken wir uns ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den drei Seitenpaaren  $a, b, c$ . Auf das Seitenpaar  $a$  wirke ein solcher Zug, daß derselbe pro Flächeneinheit gleich  $p_1$  sei, ebenso sei der Zug pro Flächeneinheit des Seitenpaares  $b$  gleich  $p_2$ , des Seitenpaares  $c$  gleich  $p_3$ .

Durch den Zug  $p_1$  erfährt das Parallelepiped in der Richtung dieses Zuges, wir wollen sie als Längsrichtung bezeichnen, die Verlängerung  $\delta_1 = Cp_1$ ; der Zug senkrecht zu  $b$ , er sei als Zug nach der Breite bezeichnet, bewirkt in der Längsrichtung eine Verkürzung infolge der Querkontraktion. Ist die Zunahme der Breite als Bruchteil der ursprünglichen Breite  $\delta_2 = Cp_2$ , so ist die infolge derselben eintretende Verkürzung der Länge gleich  $\mu\delta_2 = \mu Cp_2$ . Der nach der dritten, der Dickenrichtung wirkende Zug  $p_3$  bewirkt nach der Dickenrichtung die Vergrößerung  $\delta_3 = Cp_3$  nach der Richtung der Länge die Verkürzung  $\mu\delta_3 = \mu Cp_3$ . Wirken alle Drucke gleichzeitig, so wird die Verlängerung des Parallepipedes gleich  $\delta_1 - \mu\delta_2 - \mu\delta_3 = \varepsilon_1$ , da dann die oben betrachteten Änderungen der Länge gleichzeitig eintreten. Es ist demnach

$$\varepsilon_1 = C(p_1 - \mu(p_2 + p_3)).$$

In ganz gleicher Weise erhalten wir für die Änderung der Breitendimension  $\varepsilon_2$  und der Dickendimension  $\varepsilon_3$  durch die drei gleichzeitigen Züge

$$\varepsilon_2 = C(p_2 - \mu(p_1 + p_3))$$

$$\varepsilon_3 = C(p_3 - \mu(p_1 + p_2)).$$

Ist die Länge des Parallepipedes vor dem Zuge  $L$ , die Breite  $B$ , die Dicke  $D$ , so ist das Volumen  $V$  vor dem Zuge gleich  $LBD$ ; nach dem Zuge ist dasselbe

$$V_1 = L(1 + \varepsilon_1) B(1 + \varepsilon_2) D(1 + \varepsilon_3) = V(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3).$$

Wegen der Kleinheit der Änderungen  $\varepsilon$  können wir dasselbe setzen

$$V_1 = V(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

und erhalten daraus für die Volumänderung

$$v = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Beachten wir dies und gleichzeitig, daß der lineare Verlängerungskoeffizient  $C$  der reziproke Wert des Elastizitätskoeffizienten  $E$  ist, so erhalten wir leicht für die durch die Deformation geweckten, diesen Zügen gleichen elastischen Kräfte, dieselben ausgedrückt durch die Deformation

$$p_1 = \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_1 + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} v.$$

Setzen wir

$$\frac{E}{1 + \mu} = 2k \quad \text{und} \quad \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = K,$$

so wird

$$p_1 = 2k\varepsilon_1 + Kv$$

und ganz ebenso

$$p_2 = 2k\varepsilon_2 + Kv; \quad p_3 = 2k\varepsilon_3 + Kv.$$

Diese Gleichungen gelten ganz allgemein, welches auch die Züge  $p_1$ ,  $p_2$  sind; sie gelten auch für den Fall, daß zwei der Züge, etwa  $p_2$  und  $p_3$  gleich Null sind, also für den einfachen Longitudinalzug. Denn ist  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$ , so wird  $\varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_1$  und ebenso  $\varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1$ ; wird dann  $\varepsilon_1 (1 - 2\mu)$ . Setzen wir diese Werte in die beiden letzten Gleichungen ein, indem wir für  $k$  und  $K$  ihre in  $E$  und  $\mu$  gegebenen Werte setzen, so werden  $p_2 = 0$  und  $p_3 = 0$ .

Die in einem Parallelepiped geweckte elastische Kraft besteht also aus zwei Teilen, der eine ist der durch die stattgehabten Einwirkungen getretenen Volumänderung proportional, man nennt deshalb auch wohl den Koeffizienten der Volumelastizität; der andere ist der Änderung der Dimension parallel der Richtung, nach welcher die elastische Kraft wirkt, proportional. Den Koeffizienten  $k$  dieses Gliedes nennt man wohl den Koeffizienten der Formelastizität oder auch den Starrheitskoeffizienten. Welche gibt uns nämlich die lediglich durch eine Verschiebung der Molekülschichten gegeneinander geweckte elastische Kraft, wie man aus folgender von Clebsch<sup>1)</sup> herrührenden Betrachtungsweise erkennt.

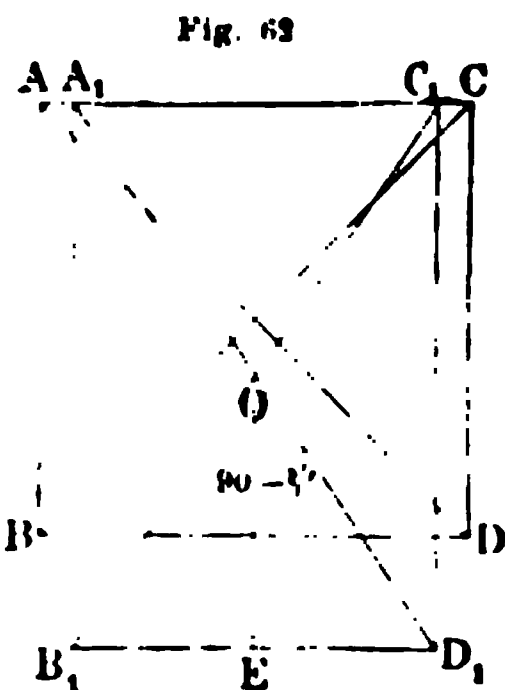
Wir betrachten einen Würfel aus isotropem Material, dessen Durchschnitt mit der Ebene der Zeichnung  $ABCD$  sei. Derselbe sei mit der linken Fläche befestigt und erhalte an der gegenüberliegenden Seite  $BD$  einen parallel  $AB$  gerichteten Zug, der für die Flächeneinheit gleich  $P$  sei. Durch den Zug geht der Würfel in ein Parallelepiped über  $A_1B_1D_1C_1$ , indem die der Zugrichtung parallele Kante  $a$  in  $a(1 + \delta)$  übergeht, oder wenn wir den Elastizitätskoeffizienten  $E$  in dem Ausdrucke benutzen in  $a(1 + \frac{P}{E})$  übergeht, die beiden andern Kanten

aber zu  $a(1 - \mu\delta) = a(1 - \mu \frac{P}{E})$  verkürzt.

Die der Zugrichtung parallelen Seitenkanten des Würfels  $ABCD$  werden dadurch in Rechtecke  $A_1B_1C_1D_1$ ; während die Diagonalen des Quadrates vorher zueinander senkrecht waren,

so sind die Diagonalen der Rechtecke  $A_1D_1$  und  $C_1B_1$  jetzt einen Winkel  $\alpha$  miteinander.

Aus dieser Neigung der Diagonalen gegeneinander folgt, daß die Molekülschichten durch den Zug nicht nur voneinander entfernt, sondern auch gegeneinander verschoben sind. Vor dem Zuge liegen die Mittelpunkte aller zur Diagonale  $BC$  parallelen Schichten auf einer durch den Mittelpunkt des Würfels gehenden, der Diagonale  $AD$  parallelen Geraden; diese Gerade ist normal zur Ebenenschar. Nach dem Zuge ist die Lage dieser Schar von Ebenen parallel der Diagonale des Rechteckes  $B_1C_1$  geworden; die Mittelpunkte aller dieser Ebenen liegen auch jetzt auf der durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds gehenden, zur Diagonale  $A_1D_1$  parallelen Linie. Bedeutet unsere Figur einen Schnitt durch den Mittelpunkt des Würfels bzw. Parallelepipeds, so daß  $O$  der Mittelpunkt des-



<sup>1)</sup> Clebsch, Theorie der Elastizität p. 8 Leipzig 1862.

selben ist, so liegen alle Mittelpunkte der zu  $B_1 C_1$  parallelen Schnitte auf  $A_1 D_1$ , und man sieht sofort, daß der Winkel den die Richtung  $A_1 D_1$  mit der zu der Ebenenschar senkrechten Richtung bildet, jener Winkel ist, welcher den Winkel  $90^\circ - \psi$  zu  $90^\circ$  ergänzt, also der Winkel  $\psi$  ist. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier benachbarter Schichten, welche vor dem Zuge zu den Schichten senkrecht war, hat sich also durch die Verschiebung der Schichten gegeneinander um den Winkel  $\psi$  gedreht. Dasselbe gilt für irgend zwei entsprechend liegende Punkte zweier benachbarter Schichten. Denn legen wir irgendwo durch den Würfel eine Linie senkrecht zu  $BC$ , also parallel  $AD$ , so liegen alle von dieser Linie getroffenen Moleküle nach dem Zuge auf einer zu  $A_1 D_1$  parallelen Linie. Solche durch eine zur Verschiebungsebene normale Richtung bestimmte Punkte benachbarter Schichten nennen wir entsprechende Punkte, die Verbindungslinien aller entsprechenden Punkte zweier benachbarter Schichten haben sich somit um denselben Winkel gedreht.

Diesen Winkel nennt Clebsch den Verschiebungswinkel und setzt denselben als Maß der Verschiebung zweier gegeneinander verschobener Schichten. Die durch diese Verschiebung geweckte Elastizität bedingt die Starrheit des Körpers, denn sie gibt den Widerstand, den der Körper einer Verschiebung der Molekülschichten entgegensetzt, welche nicht mit einer Entfernung derselben voneinander verbunden ist. Das Maß der Starrheit ist jener Koeffizient, mit welchem wir die Größe der Verschiebung, also den Verschiebungswinkel zu multiplizieren haben, um die in der Flächeneinheit geweckte elastische Kraft zu erhalten. Wir setzen hierbei, wie bei allen elastischen Änderungen, die wir betrachten, voraus, daß die durch die Verschiebung geweckte elastische Kraft der Verschiebung proportional ist, sehen also von den etwa aus Thompsons Versuchen sich ergebenden Abweichungen ab. Ist demnach die durch einen Verschiebungswinkel  $\psi$  pro Flächeneinheit geweckte elastische Kraft gleich  $R$ , so setzen wir

$$R = k\psi,$$

so daß  $k$  das Maß der Starrheit ist. Daß dieser Koeffizient  $k$  den vorhin angegebenen Wert hat, ergibt sich, indem wir in dem durch den Zug  $P$  gezogenen Parallelepipied den Winkel  $\psi$  und die elastische Kraft  $R$  bestimmen.

Ziehen wir von dem Punkte  $O$  (Fig. 62), in dem die Diagonalen sich schneiden, eine Senkrechte  $OE$  auf die zur Zugrichtung senkrechte Seite  $B_1 D_1$ , so erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Winkel  $EO D_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right)$  ist. Die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete ist gleich  $\frac{1}{2} a (1 - \mu \delta)$ , die anliegende Kathete ist  $\frac{1}{2} a (1 + \delta)$ . Demnach haben wir zur Bestimmung von  $\psi$

$$\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) = \frac{\operatorname{tang} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tang} \frac{\psi}{2}}{1 + \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\psi}{2}} = \frac{\frac{1}{2} a \left( 1 - \mu \frac{P}{E} \right)}{\frac{1}{2} a \left( 1 + \frac{P}{E} \right)}$$

und da  $\operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = 1$  und  $\psi$  immer ein kleiner Winkel ist

$$\frac{1 - \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{\psi}{2}} = \frac{1 - \mu \frac{P}{E}}{1 + \frac{P}{E}}$$

ließlich mit Vernachlässigung selbst gegen  $\psi$  sehr kleiner Größen

$$\psi = \frac{P}{E} (1 + \mu).$$

Größe  $R$  ergibt sich aus der Überlegung, daß die durch die Spannung in der ganzen Diagonalfäche des Parallelepipedes geweckte Kraft nach Herstellung des Gleichgewichtszustandes der der Fläche parallelen Komponente des auf die Endfläche  $BD$  wirkenden gleich sein muß. Ist  $F$  die Größe der diagonalen Fläche,  $f$  die der Grundfläche  $B_1 D_1$  und der Winkel  $C_1 B_1 D_1 = \alpha$ , so muß

$$RF = Pf \cos \alpha$$

da ist  $f = F \cos \alpha$ , somit  $RF = PF \cos^2 \alpha$  und da der Winkel  $\alpha$  eine verschwindende Größe von  $45^\circ$  abweicht

$$R = \frac{P}{2}.$$

und

$$R = k\psi = \frac{P}{2} = k \frac{P}{E} (1 + \mu)$$

es

$$k = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

so vorhin eingesetzt haben.

beiden Konstanten, der Koeffizient der Starrheit und der Volumelastizität, welche das ganze elastische Verhalten isotroper Körper

bestimmen.

haben vorhin die beiden Koeffizienten  $k$  und  $K$  durch  $E$  und  $\mu$  ausgedrückt. Wir können aber ebenso  $E$  und  $\mu$  durch diese Konstanten ausdrücken. Es wird, wie man leicht erhält

$$\mu = \frac{K}{2k + K}, \quad E = \frac{3K + 2k}{k + 1}.$$

aus der Gleichung für  $\mu$  erkennt man, daß der Schluß von Poisson, nach dem  $\mu$  für alle Körper denselben Wert und zwar den Wert  $\frac{1}{2}$  annimmt, in der That nicht richtig ist, da er führt, daß für alle Körper der Koeffizient der Starrheit und der Volumelastizität einander stets gleich sind. Denn  $\mu = 0,25$  führt auf  $k = K$ . Gerade darauf machte Stokes aufmerksam, daß der Schluß der Erfahrung durchaus widerspreche, daß wir Körper der verschiedensten Grade der Starrheit haben, deren Kompressibilität aber einander verschieden ist. So ist für Kautschuk die Starrheit sehr klein, während sein Koeffizient der Volumelastizität, wie wir gesehen haben, erheblich ist.

Der gleiche Einwurf ist gegen den von Wertheim<sup>1)</sup> aus seinen Versuchen gezogenen Schluß zu erheben, daß  $\mu$  zwar nicht gleich  $\frac{1}{2}$  aber doch für alle Körper denselben Wert nämlich  $\frac{1}{2}$  habe. Wertheim schloß dieses Resultat daraus, daß er für Kautschuk und Glas und ebenso annähernd für Messing diesen Wert fand. Die Methode, welche Wertheim für Kautschuk anwandte, haben wir im Anfange dieses Paragraphen angegeben, aber schon Röntgen<sup>2)</sup> hat nach einer erheblich verbesserten, im Prinzip gleichen Methode gezeigt, daß für Kautschuk der Wert von  $\mu$  nahe gleich 0,5 ist, so lange man den Kautschukstreifen nicht mehr als 0,05 seiner Länge ausdehne. Röntgen zeichnete auf die Seitenflächen des Kautschukstabes, wenn derselbe durch ein angehängtes Gewicht verlängert war, einen Kreis, indem er ein kreisförmiges Messingrohr als Stempel benutzte, dadurch, daß der kreisförmige Rand der einen Endfläche geschwärzt und darauf vorsichtig gegen die Seitenfläche des gedehnten Kautschuks gedrückt wurde. Wurde der Stab entlastet, so verwandelte sich infolge der stärkern Zusammenziehung des der Länge parallelen Durchmessers der Kreis in eine Ellipse. Ist  $d$  der Durchmesser des Kreises, so wird der der Längsrichtung des Stabes parallele Durchmesser nach der Entlastung  $d(1 - \delta)$ , der der Breite parallele Durchmesser wird aber  $d(1 + \mu\delta)$ , man sieht, wie sich daraus unmittelbar  $\mu$  ergibt.

Röntgen macht bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam, daß der Wert von  $\mu$  nur so lange konstant sein könne, als die Verlängerung einen so kleinen Wert habe, daß man  $\delta^2$  gegen  $\delta$  vernachlässigen dürfe. Man erkennt das leicht als richtig an. Für die einer Verlängerung  $\delta$  entsprechende Volumänderung erhielten wir strenge  $V(1 + \delta)(1 - \mu\delta)^2 - V$ . Soll etwa  $\mu$  eine solche Größe haben, daß keine Volumänderung eintritt, so wird die Gleichung zwischen  $\mu$  und  $\delta$

$$(1 + \delta)(1 - \mu\delta)^2 = 1; \quad 1 - \mu\delta = \sqrt{\frac{1}{1 + \delta}}$$

und dieselbe wird nach  $\mu$  aufgelöst

$$\mu = \frac{1}{\delta} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \delta}} \right).$$

Danach würde für

$\delta = 0,001$	0,01	0,1	0,5
$\mu = 0,4998$	0,4953	0,4654	0,367,

also schon, wenn der Kautschukstab um seine halbe Länge gedehnt wird, würde der Querkontraktionskoeffizient 0,367 werden, im Falle im Kautschuk durch longitudinalen Zug überhaupt gar keine Änderung des Volumens eintrete.

Wertheim hat bei seinen Versuchen Dehnungen des Kautschuk gewandt, bei welchen  $\delta = \frac{1}{2}$  und mehr wurde. Da er bei diesen Wert  $\mu = \frac{1}{2}$  fand, würde auch aus Wertheims Versuchen folgen, daß kleine Verlängerungen für Kautschuk  $\mu$  sehr nahe gleich  $\frac{1}{2}$  ist.

1) Wertheim, Annales de chim. et de phys. 23. (3.) 1848. Poggend. 78. p. 386. 1848

2) Röntgen, Poggend. Ann. 159. p. 601. 1876.

in nächsten Paragraphen zu besprechenden Versuche Amagats  
auch mit aller Schärfe gezeigt, daß bei Kautschuk  $\mu$  nur  
 $\frac{1}{2}$  verschieden ist.

Wertheim bei Kautschuk, so hat Gray<sup>1)</sup> für Stahl und einige  
direkt die Verlängerungen  $\delta$  und die Querkontraktionen  $\mu\delta$   
Er findet für Stahl  $\mu = 0,288$  bis  $0,295$ .

hat Morrow<sup>2)</sup> die Verlängerung von Stäben und deren Quer-  
mit Fühlhebeln direkt gemessen; er erhielt für weichen

0,271 bis 0,281, Schmiedeeisen 0,270 bis 0,289, Gußeisen  
0,270, Kupfer 0,310 bis 0,340, Messing 0,320 bis 0,351.

Meyer<sup>3)</sup> und Benton<sup>4)</sup> maßen die Verlängerung  $\delta$  und  
die Querkontraktion  $\mu\delta$  durch Verschiebung von Inter-

nen. Wir werden diese von Fizeau zuerst zur Mes-  
Ausdehnungskoeffizienten benutzten Methode in der

besprechen. Beide Beobachter erhielten für verschie-  
de und Legierungen erheblich verschiedene Werte

Benton erhielt für einige Metalle folgende Werte für  
Elastizitätskoeffizienten  $E$  und für  $\mu$ ; die Drähte waren ge-

Fig. 63.



Stahl	Eisen	Kupfer	Nickel
$E = 22235$	20700	11940	21320
$\mu = 0,2755$	0,288	0,341	0,375

dickern Nickeldraht erhielt Benton denselben Wert  
wegen für  $\mu$  den Wert 0,271.

In seinen Versuchen wandte Wertheim auf einen Vor-  
Regnault ohne Naht gezogene Röhren von Messing

Röhren  $A$  (Fig. 63) an, welche mit ihren Enden an  
zwei, im lichten gleich weite aber sehr dickwandige

$B'$  befestigt waren. Die untere der letztern war unten  
geschlossen, die obere an beiden Enden offen und an ihrem oberen

in einer Fassung versehen, durch welche eine sehr enge  
Röhre in  $B$  eingeführt war. Diese so vorgerichtete Röhre

mit Wasser gefüllt, so daß dasselbe in der engen  
Röhre bis zur Marke  $F$  reichte. Die Röhre  $B$  wurde an ihrem

fest aufgehängt, so daß der Apparat vertikal herab-  
hängte. Der Haken der untern Röhre  $B'$  mit einem Gewichte  $p$

Die Röhre  $A$  dehnte sich dann gerade so aus, wie ein  
stab.

man die Verlängerung der Röhre  $A$ , indem man auf  
zwei den Enden der Röhre  $A$  möglichst nahe Marken

und die Abstandszunahme der Marken beobachtet, so hat  
man den Quotienten der Abstandszunahme und des ursprüng-

standes die Verlängerung  $\delta$ ; infolge der durch den Zug  
bedingten Volumvergrößerung sinkt das Wasser in dem kapillaren Rohre

v. Fortschritte der Physik im Jahre 1902. Teil I p. 361

Phil. mag. 6 6 p. 417 1903

Meyer, Proc. of Royal Soc. 55 p. 373. 1894

Ann. der Physik. 3 p. 482. 1900



und die Senkung  $s$  des Wasserniveaus multipliziert mit dem Querschnitt  $q$  des Rohres  $F'$  gibt die Vermehrung des Volumens des gezogenen Teiles. Geht die Länge  $L$  durch den Zug in  $L + \Delta L$  über, so ist

$$\delta = \frac{\Delta L}{L}.$$

Geht das Volumen  $V$  in  $V + \Delta V$  über, so ist

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu) \delta = (1 - 2\mu) \frac{\Delta L}{L}$$

somit

$$1 - 2\mu = \frac{L \cdot \Delta V}{\Delta L \cdot V},$$

woraus sich  $\mu$  unmittelbar ergibt.

Für drei Messingröhren erhielt Wertheim so für  $\mu$  die Werte 0,338, 0,346, 0,342, Mittel 0,342, für vier Glasröhren die Werte 0,320, 0,351, 0,313, 0,337, Mittel 0,330. Die Werte sind also in der Tat nahe  $\frac{1}{3}$ .

Der von Wertheim für Glas gefundene Wert von  $\mu$  ist durch spätere Bestimmungen nicht bestätigt worden. Cornu<sup>1)</sup> fand nach einer im § 54 zu besprechenden Methode an sechs verschiedenen Glasstreifen für  $\mu$  Werte zwischen 0,224 und 0,257; er schließt, daß für Glas der Wert gleich 0,25, also gleich dem von der Poissonschen Theorie verlangten Werte sei. Indem Cornu glaubt, daß Glas am nächsten ein wirklich isotroper Körper sei, schließt er weiter, daß für wirklich isotrope Körper  $\mu$  in der Tat der von Poisson verlangten Wert habe. Straubel<sup>2)</sup> hat nach der Methode von Cornu 30 Gläser des Jenaer Glaswerks untersucht und erhielt Werte von  $\mu$ , die zwischen 0,297 und 0,316 lagen, ein Beweis, daß auch bei Gläsern die Werte von  $\mu$  erheblich verschieden sein können. Voigt fand nach einer ebenfalls im § 54 zu besprechenden Methode für Gläser, deren Isotropie er direkt prüfte, erheblich kleinere Werte als 0,25. Er ließ Stäbchen aus verschiedenen Spiegelglasplatten herstellen. Die ersten neun Stäbchen waren aus einer grünlich gefärbten Platte von 50<sup>mm</sup> Durchmesser an verschiedenen Stellen und in verschiedener Tiefe herausgeschritten; Länge der Stäbchen betrug zwischen 60 und 70<sup>mm</sup>, die Breite war rund etwa 2 und 3<sup>mm</sup> und die Dicke etwa 0,5 bis 2<sup>mm</sup>. Bei einigen Stäbchen war die Rückwandebene der ursprünglichen Begrenzungsflächen der Platte parallel, bei anderen zu denselben senkrecht. Für jede Platte wurde der Elastizitätskoeffizient und der Koeffizient der Querkontraktion gemessen. Der Elastizitätskoeffizient von diesen Stäbchen, vermessen in Längsrichtung, war der ursprünglichen Begrenzungsflächen der Platten parallel, war also gleich dem Elastizitätskoeffizienten der Platte. Die Koeffizienten der Querkontraktion waren gleich dem Elastizitätskoeffizienten der Platte. Die Werte waren: für die Stäbchen mit der ursprünglichen Begrenzungsflächen der Platte parallel  $\mu = 0,25$ , für die Stäbchen mit der ursprünglichen Begrenzungsflächen der Platte senkrecht  $\mu = 0,25$ . Aus diesen Werten folgt

$$1 - 2\mu = 1 - 2 \cdot 0,25 = 0,5. \quad \mu = 0,25$$

<sup>1)</sup> Ann. Chem. Phys. [3] 18, 1860.  
<sup>2)</sup> Ann. Chem. Phys. [3] 18, 1860.  
<sup>3)</sup> Ann. Chem. Phys. [3] 18, 1860.

Für das Glas einer zweiten Spiegelglasplatte erhielt Voigt

$$E = 7358; \quad k = 3044; \quad \mu = 0,208.$$

Für beide Glassorten, deren Isotropie nicht zu bezweifeln ist, ergibt sich somit  $\mu$  erheblich kleiner als  $\frac{1}{4}$ .

Nach im Prinzip gleicher Methode hat Voigt<sup>1)</sup> auch für eine große Anzahl Metalle und einige Legierungen die Werte  $E$  und  $\mu$  bestimmt. Wir geben hierunter die gefundenen Werte; die Metalle sind mit ihren chemischen Zeichen bezeichnet.

Metalle	$E$	$\mu$	Metalle	$E$	$\mu$
Al	6570	0,274	Ni	20300	0,300
Cd	7070	0,447	Ag	7790	0,317
Fe	12800	0,228	Stahl	20400	0,264
Au	7580	0,330	Bi	3190	0,288
Cu	10850	0,133	Zn	10300	0,329
Mg	4206	0,246	Sn	5400	0,568

Auffallend ist der kleine Wert von  $E$  für Eisen, von  $\mu$  für Kupfer, vom wo man nimmt Voigt an, daß es krystallinisch gewesen sei.

Einen nicht viel von dem Voigtschen verschiedenen Wert, nämlich  $\mu = 0,226$ , fand später für Glas nach der gleichen Methode Kowalski<sup>2)</sup>. Cantone<sup>3)</sup> und später Amagat<sup>4)</sup> fanden nach im nächsten Paragraphen besprechenden Methoden für Glas wieder nahezu 0,25. Cantone untersuchte vier Glasröhren und erhielt Werte zwischen 0,246 und 0,264,

Mittel 0,257. Amagat untersuchte Röhren aus gewöhnlichem Glas und Kristallglas und erhielt für ersteres  $\mu = 0,2451$  und für letzteres 0,499.

Kirchhoff<sup>5)</sup> maß, wie es später Voigt getan hat, für einige Metalle die Elastizitätskoeffizienten und den Starrheitskoeffizienten; für drei Stäbe aus glashartem Stahl fand er als Werte von  $\mu$

$$0,293, \quad 0,295, \quad 0,294, \quad \text{Mittel } 0,294.$$

Für einen hartgezogenen Messingstab erhielt er den Wert  $\mu = 0,387$ , man sieht zwei Werte, die erheblich voneinander verschieden sind, daß sie zu dem Schlusse führen, daß für die verschiedenen Metalle der Wert von  $\mu$  ebenfalls verschieden ist.

Später nach der Kirchhoffschen Methode von Okatow<sup>6)</sup> an verschiedenen Stahlstäben durchgeführte Versuche ergaben, daß der Wert des Querkontraktionskoeffizienten sowohl für verschiedene Stahlsorten in gleichem Grade der Härtung als für dieselbe Stahlsorte in verschiedenem Zustande der Härtung verschieden ist. Er erhielt z. B. folgende Werte

<sup>1)</sup> Voigt, Wiedem. Ann. 48. p. 674. 1893.

<sup>2)</sup> von Kowalski, Wiedem. Ann. 36. 1889.

<sup>3)</sup> Cantone, Rendic. della Reale Accad. dei Lincei. 4. p. 220 u. 292. 1888.

<sup>4)</sup> Amagat, Ann. de chim. et de phys. 22. 6. p. 95. 1889.

<sup>5)</sup> Kirchhoff, Poggend. Ann. 108. p. 369. 1859.

<sup>6)</sup> Okatow, Poggend. Ann. 119. 1863.

	Stricknadel- stäbchen.	Glatter runder eng- lischer Stahl.
a) ursprünglicher Zustand . . . . .	$\mu = 0,2750$	$\mu = 0,2989$
b) in Öl gehärtet . . . . .	0,2969	0,3280
c) ausgeglüht und langsam abgekühlt.	0,3037	0,3281

Die für den glatten runden englischen Stahl angegebenen Werte wurden fast ganz übereinstimmend an Drähten verschiedener Dimensionen gefunden, die Dicken waren etwa 4, 5 und 6<sup>mm</sup>. Okatow glaubt, daß der vollkommen weiche Stahl ein nahezu vollkommen isotroper Körper sei, da sich auch in diesem Zustande für verschiedene Stahlsorten verschiedene Werte von  $\mu$  finden, so muß man schließen, daß der Querkontraktionskoeffizient in der Tat für verschiedene Körper auch bei voller Isotropie verschieden ist.

Fast gleiche Werte wie Okatow erhielt Schneeбели<sup>1)</sup> für eine Anzahl von Stäben aus glattem runden Stahl, deren Länge bis zu 1<sup>m</sup>, deren Durchmesser bis zu 2<sup>cm</sup> betrug; auch Schneeбели maß die beiden Koeffizienten der Elastizität und Starrheit nach einer im dritten Abschnitt zu besprechenden Methode. Er erhielt für die Stäbe im federharten Zustande  $\mu = 0,296$  und im ganz weichen Zustande  $\mu = 0,303$ .

Amagat<sup>2)</sup> hat für eine Reihe von Metallen die Querkontraktion einmal nach der indes in den Einzelheiten der Durchführung erheblich verbesserten Methode von Wertheim und dann durch dieselbe Methode wie für Glas gemessen. Er bestimmte also an denselben Metallröhren die Elastizitätskoeffizienten und die Volumenänderungen mit der größten Sorgfalt. Die von ihm erhaltenen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Werte von $\mu$		Elastizitätskoeffizienten	
	I. Methode	II. Methode	I. Methode	II. Methode
Stahl . . . . .	0,2694	0,2679	20 333	20 457
Kupfer . . . . .	0,3288	0,3252	11 979	12 312
Messing . . . . .	0,3305	0,3236	10 680	11 022
Deltametall . . . . .	0,3330	0,3468	12 054	11 334
Blei . . . . .	0,4252	0,4313	1626	1493

Nach allen diesen Untersuchungen kommen wir zu dem Resultate, daß der Koeffizient der Querkontraktion, also auch das Verhältnis zwischen dem Koeffizienten der Starrheit und dem der Volumelastizität für verschiedenen Substanzen, auch bei voller Isotropie erheblich verschieden ist; die Versuche von Voigt führen zu dem Schlusse, daß der Wert 0,2 nicht ein Grenzwert ist, wie manche anzunehmen geneigt sind, da die Querkontraktion für absolut isotrope und elastische Körper sich nähert, denn Voigt fand für ganz isotrope Gläser nahezu 0,2.

1) Schneeбели, Poggend. Ann. 140. 1870.

2) Amagat, Ann. de chim. et de phys. 22. (6.) 1891.

## § 51.

**Kubischer Kompressionskoeffizient.** Die im vorigen Paragraphen angeführten beiden elastischen Konstanten der Starrheit und Volumelastizität bzw. die experimentell zu bestimmenden Elastizitätskoeffizienten und Querkontraktionskoeffizienten bestimmen bei isotropen Körpern alle Äußerungen der Elastizität. Je zwei verschiedene elastische Erscheinungen miteinander kombiniert, gestatten uns deshalb diese Konstanten abzuleiten. Die Übereinstimmung der aus den verschiedenen so kombinierten Erscheinungen sich ergebenden Werte der Konstanten ist infolgedessen eine gute Prüfung für die Theorie. Wir wollen die Hauptformen der elastischen Erscheinungen im folgenden betrachten. Wir beginnen mit der Kompression eines durch allseitig gleichen Druck deformierten massiven oder Hohlkörpers.

Sind die Drucke  $p_1, p_2, p_3$ , welche wir auf die Seitenflächen eines Parallelepipeds ausüben, einander gleich, so werden auch die Verkürzungen  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , welche die Seiten des Parallelepipeds erfahren, einander gleich und die dem Drucke  $p$  entsprechende Volumverminderung  $v$  wird gleich  $3\epsilon$ . Die im vorigen Paragraphen für die Drucke  $p$  gefundenen Ausdrücke gehen dann in den einzigen über, da  $\epsilon = \frac{1}{3}v$  ist

$$p = \frac{2}{3}kv + Kv = (\frac{2}{3}k + K)v.$$

Der Koeffizient der kubischen Kompression ist jene Zahl, mit welcher der pro Flächeneinheit wirkende Druck zu multiplizieren ist, um die in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens gegebene Volumverminderung zu erhalten. Da die letztere Gleichung nach  $v$  aufgelöst uns diese Volumverminderung gibt

$$v = \frac{3}{2k + 3K} p,$$

es folgt, daß der Koeffizient von  $p$  der kubische Kompressionskoeffizient ist. Drücken wir  $k$  und  $K$  durch den Elastizitätskoeffizienten  $E$  und den Querkontraktionskoeffizienten  $\mu$  aus

$$k = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad K = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)},$$

so wird der kubische Kompressionskoeffizient  $C_k$

$$C_k = \frac{3}{E} (1 - 2\mu) = 3C(1 - 2\mu).$$

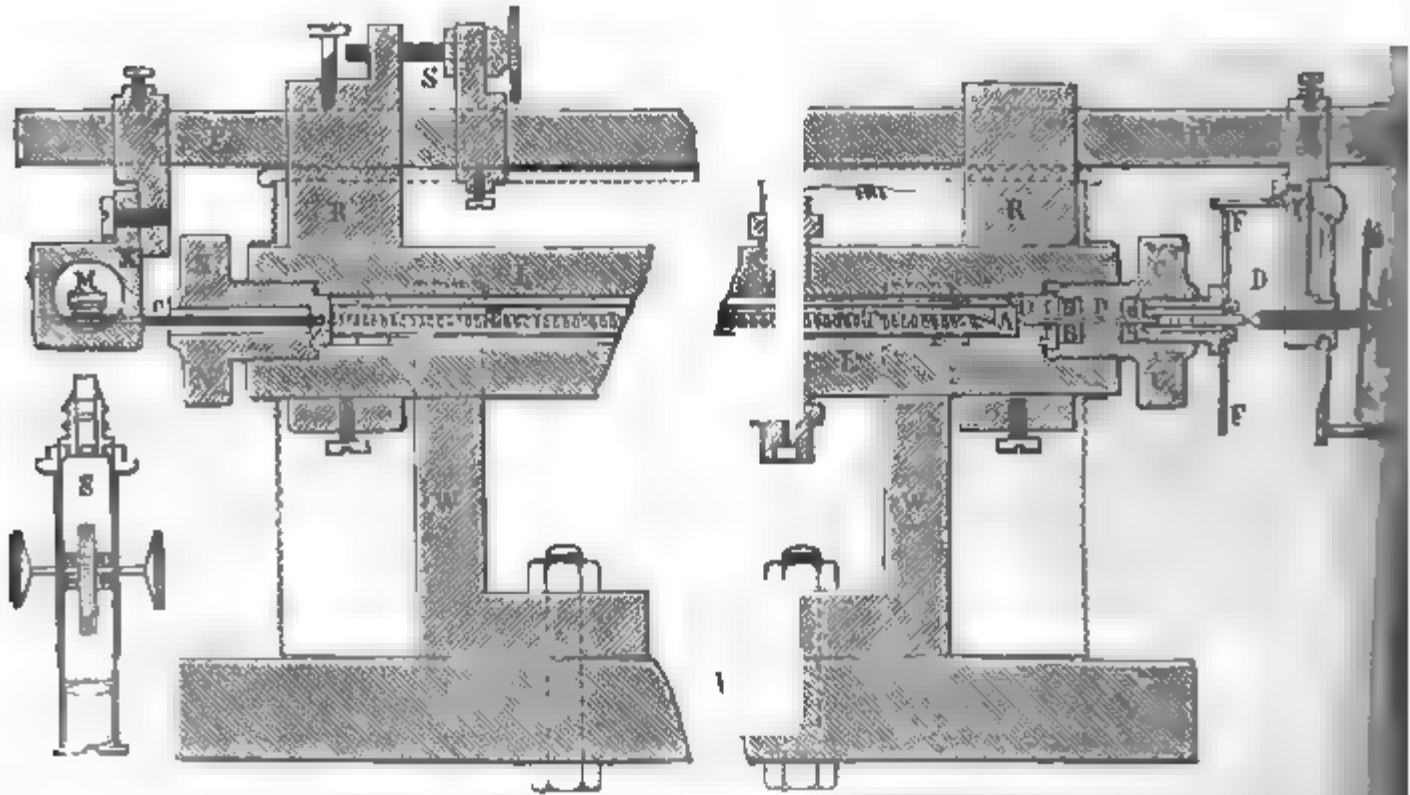
Wenn wir wie vorhin die linearen Verlängerungs- beziehungsweise Verkürzungskoeffizienten mit  $C$  bezeichnen. Das Verhältnis zwischen den beiden Koeffizienten hängt demnach, wie es ja auch nicht anders sein kann, wesentlich von dem Werte von  $\mu$  ab.

Die direkte Messung der kubischen Kompression ist wegen ihrer geringen Größe mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft, sie ist von Amagat<sup>1)</sup> für zwei verschiedene Glassorten durchgeführt. Amagat kompri-

1) Amagat, Ann. de chim. et de phys. 22. 6. p. 121. 1889.

mierte in einem hohlen sehr dickwandigen Stahlzylinder Glasröhren und maß deren Verkürzung, welche, da die Änderung der Dimensionen bei gleichmäßiger Kompression nach allen Richtungen die gleiche ist, gleich einem Drittel der kubischen Kompression ist. Die von Amagat getroffene Anordnung zeigt Fig. 64. Die zu untersuchende Glasröhre von 1<sup>m</sup> Länge befindet sich in dem dickwandigen Stahlzylinder *LL* und wird durch eine im Innern der Röhre befindliche lange Feder *TT* mit ihrem einen Ende gegen den Verschuß *NN* des Stahlzylinders gedrückt; zu dem Zwecke ist die Feder mit ihrem einen Ende an den Boden *NN* des Zylinders angelötet, während das andere Ende der Feder an einem kleineren in die Stahlplatte *A* eingeschraubten Haken befestigt wird. Durch die Feder wird

Fig. 64.



die Stahlplatte *A* gegen das andere Ende der Glasröhre gezogen und dieser Zug bewirkt gleichzeitig, daß das untere Ende der Glasröhre fest gegen den Boden des Stahlzylinders gestemmt wird. Die Feder ist an einer Stelle zerschnitten und die Stücke sind durch ein den elektrischen Strom nicht leitendes Zwischenstück wieder verbunden.

Mit der Platte *A* kann ein kleiner Stahlkolben *DD* zur Berührung gebracht werden, der in der Achse des obern Verschlusses *CC* des Stahlzylinders sich hin und her bewegt und durch eine Stopfbüchse *BB* geführt ist, welche das Innere des Stahlzylinders vollständig abdichtet. Der Kolben ist durch zwei Nasen an eine hohle Schraubenspindel befestigt, durch deren Durchbohrung die Verlängerung des kleinen Kolbens hindurchgeht, so daß dessen Ende in der Ebene *D'* aus der Schraube hervorragt. Die Schraubenspindel hat ihre Mutter in dem Verschußstück *CC* und kann durch die geränderte und mit einer Teilung versehene Trommel *I* gedreht werden.

Mit der Ebene *D'* kann die Spitze einer Mikrometerschraube in Berührung gebracht werden, deren Mutter durch das Stück *Y* an den m

einen Stahlzylinder  $PP$  befestigt ist, welcher selbst durch die Stücke  $R$  fest mit dem Zylinder  $LL$  verbunden ist. Die an der Mikrometerschraube befestigte Kreisscheibe  $GG$  ist an ihrem Rande geteilt, und mit Hilfe dieser Teilung kann man die Verschiebung der Mikrometerschraube, deren Rand an der unter  $GG$  angedeuteten Skala vorübergeht, in tausendsteln eines Millimeters messen.

Um die in das Rohr  $LL$  gebrachten Röhren dem gewünschten Drucke auszusetzen, wird durch die Durchbohrung des seitlichen Ansatzstückes  $K$  Wasser in das Innere des Rohres  $LL$  gepumpt. Um die Verkürzung der Röhren zu erkennen und zu messen, wird der elektrische Strom benutzt. Zu dem Zwecke ist der eine Pol einer Batterie durch einen Draht, der isoliert durch das dem Ansatzstück  $K$  gegenüber angebrachte Stück  $H$  hindurchgeführt und in demselben eingekittet ist, mit der gegen das Röhrenende gedrückten Stahlplatte  $A$  verbunden; andererseits ist die Metallmasse des Apparates, also auch der die Stange  $DD'$  tragende metallische Verschlusskolben, mit dem andern Pole der Batterie verbunden. Der Strom ist demnach geschlossen, wenn die Stange  $D$  die Platte  $A$  berührt. Zur Erkennung des Stromes ist in den Stromkreis ein empfindliches Galvanometer eingeschaltet.

Zum Beginne des Versuches wird dieser Strom geschlossen, also die Stange  $D$  durch Drehung der Trommel  $F'$  mit der Platte  $A$  zur Berührung gebracht. Gleichzeitig wird die Mikrometerschraube durch Drehung der Scheibe  $GG$  mit der Fläche  $D'$  der Stange zur Berührung gebracht, was ebenfalls dadurch erkannt wird, daß durch diese Berührung ein zweites empfindliches Galvanometer enthaltender Stromkreis geschlossen wird. Die Stellung der Mikrometerschraube wird beobachtet.

Wird jetzt durch Einpumpen von Wasser im Innern des Rohres  $LL$  der Druck verstärkt, so wird die Röhre verkürzt, und da die Platte  $A$  stets durch die Feder gegen das Ende der Röhre gedrückt wird, diese Platte von der Stange  $D$  entfernt und damit der erste Strom unterbrochen. Durch Drehung der Trommel  $F'$  wird die Stange  $D$  dann soweit vorgeschoben, bis wieder die Berührung von  $D$  und  $A$  hergestellt und damit der Strom geschlossen wird. Das Wiederentstehen des Stromes beweist, daß die Berührung von  $D$  und  $A$  wiederhergestellt ist.

Durch das Verschieben der Ebene  $D'$  ist aber auch der durch die Berührung der Spitze der Mikrometerschraube mit  $D'$  geschlossene Strom unterbrochen, und die Mikrometerschraube muß um genau die Strecke verschoben werden, um welche  $D'$  und somit das Röhrenende infolge des Druckes sich verschoben hat. Die zur Wiederherstellung des durch den Kontakt der Mikrometerschraube hergestellten Stromschlusses erforderliche Umdrehung der Mikrometerschraube ist also genau gleich der Strecke, um welche das Röhrenende durch den Druck zurückgegangen ist.

Diese an der Mikrometerschraube gemessene Strecke würde somit nur die Verkürzung der Röhre durch den Druck sein, wenn nicht noch eine andere Ursache des Rückganges des Röhrenendes vorhanden wäre. Diese Ursache ist die Verlängerung der Röhre  $LL$  infolge des im Innern vorhandenen Druckes. Denn da die Glasröhre durch die Feder stets gegen die Verschlussplatte der Röhre  $LL$  gedrückt wird, muß die Röhre einer Verschiebung der Bodenplatte folgen. Die Verkürzung der

Der gleiche Einwurf ist gegen den von Wertheim<sup>1)</sup> aus seinen Versuchen gezogenen Schluß zu erheben, daß  $\mu$  zwar nicht gleich  $\frac{1}{2}$  aber doch für alle Körper denselben Wert nämlich  $\frac{1}{2}$  habe. Wertheim schloß dieses Resultat daraus, daß er für Kautschuk und Glas und ebenso annähernd für Messing diesen Wert fand. Die Methode, welche Wertheim für Kautschuk anwandte, haben wir im Anfange dieses Paragraphen angegeben, aber schon Röntgen<sup>2)</sup> hat nach einer erheblich verbesserten, im Prinzip gleichen Methode gezeigt, daß für Kautschuk der Wert von  $\mu$  nahe gleich 0,5 ist, so lange man den Kautschukstreifen nicht mehr als 0,05 seiner Länge ausdehne. Röntgen zeichnete auf die Seitenflächen des Kautschukstabes, wenn derselbe durch ein angehängtes Gewicht verlängert war, einen Kreis, indem er ein kreisförmiges Messingrohr als Stempel benutzte, dadurch, daß der kreisförmige Rand der einen Endfläche geschwärzt und darauf vorsichtig gegen die Seitenfläche des gedehnten Kautschuks gedrückt wurde. Wurde der Stab entlastet, so verwandelte sich infolge der stärkern Zusammenziehung des der Länge parallelen Durchmessers der Kreis in eine Ellipse. Ist  $d$  der Durchmesser des Kreises, so wird der der Längsrichtung des Stabes parallele Durchmesser nach der Entlastung  $d(1 - \delta)$ , der der Breite parallele Durchmesser wird aber  $d(1 + \mu\delta)$ , man sieht, wie sich daraus unmittelbar  $\mu$  ergibt.

Röntgen macht bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam, daß der Wert von  $\mu$  nur so lange konstant sein könne, als die Verlängerung einen so kleinen Wert habe, daß man  $\delta^2$  gegen  $\delta$  vernachlässigen dürfe. Man erkennt das leicht als richtig an. Für die einer Verlängerung  $\delta$  entsprechende Volumänderung erhielten wir strenge  $V(1 + \delta)(1 - \mu\delta)^2 - V$ . Soll etwa  $\mu$  eine solche Größe haben, daß keine Volumänderung eintritt, so wird die Gleichung zwischen  $\mu$  und  $\delta$

$$(1 + \delta)(1 - \mu\delta)^2 = 1; \quad 1 - \mu\delta = \sqrt{\frac{1}{1 + \delta}}$$

und dieselbe wird nach  $\mu$  aufgelöst

$$\mu = \frac{1}{\delta} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \delta}} \right).$$

Danach würde für

$\delta = 0,001$	0,01	0,1	0,5
$\mu = 0,4998$	0,4953	0,4654	0,367,

also schon, wenn der Kautschukstab um seine halbe Länge gedehnt wird, würde der Querkontraktionskoeffizient 0,367 werden, im Falle im Kautschuk durch longitudinalen Zug überhaupt gar keine Änderung des Volumens eintrete.

Wertheim hat bei seinen Versuchen Dehnungen des Kautschuk angewandt, bei welchen  $\delta = \frac{1}{2}$  und mehr wurde. Da er bei diesen den Wert  $\mu = \frac{1}{2}$  fand, würde auch aus Wertheims Versuchen folgen, daß für kleine Verlängerungen für Kautschuk  $\mu$  sehr nahe gleich  $\frac{1}{2}$  ist.

1) Wertheim, Annales de chim. et de phys. 23. (3.) 1848. Poggend. A 78. p. 386. 1848

2) Röntgen, Poggend. Ann. 159. p. 601. 1876.



in nächsten Paragraphen zu besprechenden Versuche Amagats  
auch mit aller Schärfe gezeigt, daß bei Kautschuk  $\mu$  nur  
 $\frac{1}{2}$  verschieden ist.

Wertheim bei Kautschuk, so hat Gray<sup>1)</sup> für Stahl und einige  
direkt die Verlängerungen  $\delta$  und die Querkontraktionen  $\mu\delta$   
Er findet für Stahl  $\mu = 0,288$  bis  $0,295$ .

hat Morrow<sup>2)</sup> die Verlängerung von Stäben und deren Quer-  
mit Fühlhebeln direkt gemessen; er erhielt für weichen  
.271 bis  $0,281$ , Schmiedeeisen  $0,270$  bis  $0,289$ , Gußeisen  
.270, Kupfer  $0,310$  bis  $0,340$ , Messing  $0,320$  bis  $0,351$ .

Meyer<sup>3)</sup> und Benton<sup>4)</sup> maßen die Verlängerung  $\delta$  und  
die Querkontraktion  $\mu\delta$  durch Verschiebung von Inter-  
n. Wir werden diese von Fizeau zuerst zur Mes-  
Ausdehnungskoeffizienten benutzten Methode in der  
besprechen. Beide Beobachter erhielten für verschie-  
le und Legierungen erheblich verschiedene Werte  
nton erhielt für einige Metalle folgende Werte für  
itätskoeffizienten  $E$  und für  $\mu$ ; die Drähte waren ge-

Fig. 63.



Stahl	Eisen	Kupfer	Nickel
$E = 22235$	$20700$	$11940$	$21320$
$\mu = 0,2755$	$0,288$	$0,341$	$0,375$

dickern Nickeldraht erhielt Benton denselben Wert  
egen für  $\mu$  den Wert  $0,271$ .

den Versuchen wandte Wertheim auf einen Vor-  
Regnault ohne Naht gezogene Röhren von Messing  
hren  $A$  (Fig. 63) an, welche mit ihren Enden an  
ze, im lichten gleich weite aber sehr dickwandige  
 $B'$  befestigt waren. Die untere der letztern war unten  
, die obere an beiden Enden offen und an ihrem oberen  
einer Fassung versehen, durch welche eine sehr enge  
in  $B$  eingeführt war. Diese so vorgerichtete Röhre  
mit Wasser gefüllt, so daß dasselbe in der engen  
zur Marke  $F$  reichte. Die Röhre  $B$  wurde an ihrem  
fest aufgehängt, so daß der Apparat vertikal herab-  
der Haken der untern Röhre  $B'$  mit einem Gewichte  $p$   
Die Röhre  $A$  dehnte sich dann gerade so aus, wie ein  
ab

man die Verlängerung der Röhre  $A$ , indem man auf  
wei den Enden der Röhre  $A$  möglichst nahe Marken  
d die Abstandszunahme der Marken beobachtet, so hat  
a Quotienten der Abstandszunahme und des ursprüng-  
andes die Verlängerung  $\delta$ ; infolge der durch den Zug

Volumvergrößerung sinkt das Wasser in dem kapillaren Rohre

v. Fortschritte der Physik im Jahre 1902. Teil I p. 361  
row, Phil. mag. 6 6. p. 417. 1903  
meyer, Proc. of Royal Soc. 55. p. 373. 1894  
ton, Ann. der Physik. 8 p. 482. 1900.

und die Senkung  $s$  des Wasserniveaus multipliziert mit dem Querschnitt  $q$  des Rohres  $F$  gibt die Vermehrung des Volumens des gezogenen Teiles. Geht die Länge  $L$  durch den Zug in  $L + \Delta L$  über, so ist

$$\delta = -\frac{\Delta L}{L}.$$

Geht das Volumen  $V$  in  $V + \Delta V$  über, so ist

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu) \delta = (1 - 2\mu) \frac{\Delta L}{L}$$

somit

$$1 - 2\mu = \frac{L \cdot \Delta V}{\Delta L \cdot V},$$

woraus sich  $\mu$  unmittelbar ergibt.

Für drei Messingröhren erhielt Wertheim so für  $\mu$  die Werte 0,338, 0,346, 0,342, Mittel 0,342, für vier Glasröhren die Werte 0,320, 0,351, 0,313, 0,337, Mittel 0,330. Die Werte sind also in der Tat nahe  $\frac{1}{3}$ .

Der von Wertheim für Glas gefundene Wert von  $\mu$  ist durch spätere Bestimmungen nicht bestätigt worden. Cornu<sup>1)</sup> fand nach einer im § 54 zu besprechenden Methode an sechs verschiedenen Glasstreifen für  $\mu$  Werte zwischen 0,224 und 0,257; er schließt, daß für Glas der Wert gleich 0,25, also gleich dem von der Poissonschen Theorie verlangten Werte sei. Indem Cornu glaubt, daß Glas am nächsten ein wirklich isotroper Körper sei, schließt er weiter, daß für wirklich isotrope Körper  $\mu$  in der Tat den von Poisson verlangten Wert habe. Straubel<sup>2)</sup> hat nach der Methode von Cornu 30 Gläser des Jenaer Glaswerks untersucht und erhielt Werte von  $\mu$ , die zwischen 0,297 und 0,316 lagen, ein Beweis, daß auch für Gläser die Werte von  $\mu$  erheblich verschieden sein können. Voigt<sup>3)</sup> fand nach einer ebenfalls im § 54 zu besprechenden Methode für Glas, dessen Isotropie er direkt prüfte, erheblich kleinere Werte als 0,25. Er ließ Stäbchen aus verschiedenen Spiegelglasplatten herstellen. Die ersten neun Stäbchen waren aus einer grünlich gefärbten Platte von 50<sup>mm</sup> Dicke an verschiedenen Stellen und in verschiedener Tiefe herausgeschnitten; die Länge der Stäbchen betrug zwischen 60 und 70<sup>mm</sup>, die Breite war zwischen etwa 2 und 5<sup>mm</sup> und die Dicke etwa 0,5 bis 2<sup>mm</sup>. Bei einigen Stäbchen war die Breitendimension den ursprünglichen Begrenzungsflächen der Platte parallel, bei andern zu denselben senkrecht. Für jede Platte wurde durch den Elastizitätskoeffizient und der Koeffizient der Starrheit gemessen. Für den Elastizitätskoeffizienten von sieben Stäbchen, welche in hinreichender Entfernung von den ursprünglichen Begrenzungsflächen der Platten genommen waren, erhielt er in Kilogramm pro Quadratmillimeter 6480 für den Starrheitskoeffizienten  $k = 2671$ . Aus beiden Werten folgt

$$1 + \mu = \frac{6480}{2 \cdot 2671} = 1,213; \quad \mu = 0,213.$$

1) Cornu, Comptes Rendus. 69. p. 333. 1869.

2) Straubel, Wiedem. Ann. 68. p. 369. 1899.

3) Voigt, Wiedem. Ann. 15. p. 497. 1882.

Für das Glas einer zweiten Spiegelglasplatte erhielt Voigt

$$E = 7358; \quad k = 3044; \quad \mu = 0,208.$$

Für beide Glassorten, deren Isotropie nicht zu bezweifeln ist, ergibt sich somit  $\mu$  erheblich kleiner als  $\frac{1}{4}$ .

Nach im Prinzip gleicher Methode hat Voigt<sup>1)</sup> auch für eine große Anzahl Metalle und einige Legierungen die Werte  $E$  und  $\mu$  bestimmt. Wir geben hierunter die gefundenen Werte; die Metalle sind mit ihren chemischen Zeichen bezeichnet.

Metalle	$E$	$\mu$	Metalle	$E$	$\mu$
Al	6570	0,274	Ni	20300	0,300
Ad	7070	0,447	Ag	7790	0,317
Fe	12800	0,228	Stahl	20400	0,264
Au	7580	0,330	Bi	3190	0,288
Cu	10850	0,133	Zn	10300	0,329
Mg	4206	0,246	Sn	5400	0,568

Auffallend ist der kleine Wert von  $E$  für Eisen, von  $\mu$  für Kupfer, vom Eisen nimmt Voigt an, daß es krystallinisch gewesen sei.

Einen nicht viel von dem Voigtschen verschiedenen Wert, nämlich  $\mu = 0,226$ , fand später für Glas nach der gleichen Methode Kowalski<sup>2)</sup>. Cantone<sup>3)</sup> und später Amagat<sup>4)</sup> fanden nach im nächsten Paragraphen beschreibenden Methoden für Glas wieder nahezu 0,25. Cantone untersuchte vier Glasröhren und erhielt Werte zwischen 0,246 und 0,264, ein Mittel 0,257, Amagat untersuchte Röhren aus gewöhnlichem Glas und Kristallglas und erhielt für ersteres  $\mu = 0,2451$  und für letzteres 0,2499.

Kirchhoff<sup>5)</sup> maß, wie es später Voigt getan hat, für einige Metalle die Elastizitätskoeffizienten und den Starrheitskoeffizienten; für drei Stäbe aus glashartem Stahl fand er als Werte von  $\mu$

$$0,293, \quad 0,295, \quad 0,294, \quad \text{Mittel } 0,294.$$

Für einen hartgezogenen Messingstab erhielt er den Wert  $\mu = 0,387$ , man sieht zwei Werte, die erheblich voneinander verschieden sind, daß sie zu dem Schlusse führen, daß für die verschiedenen Metalle der Wert von  $\mu$  ebenfalls verschieden ist.

Später nach der Kirchhoffschen Methode von Okatow<sup>6)</sup> an verschiedenen Stahlstäben durchgeführte Versuche ergaben, daß der Wert des Querkontraktionskoeffizienten sowohl für verschiedene Stahlsorten in gleichem Grade der Härtung als für dieselbe Stahlsorte in verschiedenem Zustande der Härtung verschieden ist. Er erhielt z. B. folgende Werte

1) Voigt, Wiedem. Ann. 48. p. 674. 1893.

2) von Kowalski, Wiedem. Ann. 86. 1889.

Cantone, Rendic. della Reale Accad. dei Lincei. 4. p. 220 u. 292. 1888.

4) Amagat, Ann. de chim. et de phys. 22. 6. p. 95. 1889.

Kirchhoff, Poggend. Ann. 108. p. 369. 1859.

6) Okatow, Poggend. Ann. 119. 1868.

	Stricknadel- stäbchen.	Glatter runder engl Stahl.
a) ursprünglicher Zustand . . . . .	$\mu = 0,2750$	$\mu = 0,2989$
b) in Öl gehärtet . . . . .	0,2969	0,3280
c) ausgeglüht und langsam abgekühlt.	0,3037	0,3281

Die für den glatten runden englischen Stahl angegebenen Wert wurden fast ganz übereinstimmend an Drähten verschiedener Dimensionen gefunden, die Dicken waren etwa 4, 5 und 6<sup>mm</sup>. Okatow glaubt, daß der vollkommen weiche Stahl ein nahezu vollkommen isotroper Körper sei da sich auch in diesem Zustande für verschiedene Stahlsorten verschiedene Werte von  $\mu$  finden, so muß man schließen, daß der Querkontraktionskoeffizient in der Tat für verschiedene Körper auch bei voller Isotropie verschieden ist.

Fast gleiche Werte wie Okatow erhielt Schneebeli<sup>1)</sup> für eine Anzahl von Stäben aus glattem runden Stahl, deren Länge bis zu 1<sup>m</sup>, deren Durchmesser bis zu 2<sup>cm</sup> betrug; auch Schneebeli maß die beiden Koeffizienten der Elastizität und Starrheit nach einer im dritten Abschnitt zu besprechenden Methode. Er erhielt für die Stäbe im federharten Zustande  $\mu = 0,296$  und im ganz weichen Zustande  $\mu = 0,303$ .

Amagat<sup>2)</sup> hat für eine Reihe von Metallen die Querkontraktion einmal nach der indes in den Einzelheiten der Durchführung erheblich verbesserten Methode von Wertheim und dann durch dieselbe Methode wie für Glas gemessen. Er bestimmte also an denselben Metallröhren die Elastizitätskoeffizienten und die Volumenänderungen mit der größten Sorgfalt. Die von ihm erhaltenen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Werte von $\mu$			Elastizitätskoeffizienten	
	I. Methode	II. Methode	I. Methode	II. Methode
Stahl . . . . .	0,2694	0,2679	20 333	20 457
Kupfer . . . . .	0,3288	0,3252	11 979	12 312
Messing . . . . .	0,3305	0,3236	10 680	11 072
Deltametall . . . . .	0,3330	0,3468	12 054	11 334
Blei . . . . .	0,4252	0,4313	1626	1493

Nach allen diesen Untersuchungen kommen wir zu dem Resultate, daß der Koeffizient der Querkontraktion, also auch das Verhältnis zwischen dem Koeffizienten der Starrheit und dem der Volumelastizität für verschiedenen Substanzen, auch bei voller Isotropie erheblich verschieden ist; die Versuche von Voigt führen zu dem Schlusse, daß der Wert 0,2 auch nicht ein Grenzwert ist, wie manche anzunehmen geneigt sind, da die Querkontraktion für absolut isotrope und elastische Körper sich nähert, denn Voigt fand für ganz isotrope Gläser nahezu 0,2.

1) Schneebeli, Poggend. Ann. 140. 1870.  
2) Amagat, Ann. de chim. et de phys. 22. (6.) 1891.

## § 51.

**Kubischer Kompressionskoeffizient.** Die im vorigen Paragraphen an beiden elastischen Konstanten der Starrheit und Volumelastizität die experimentell zu bestimmenden Elastizitätskoeffizienten und Kompressionskoeffizienten bestimmen bei isotropen Körpern alle Äußerungen der Elastizität. Je zwei verschiedene elastische Erscheinungen mit- und kombiniert, gestatten uns deshalb diese Konstanten abzuleiten. Die Übereinstimmung der aus den verschiedenen so kombinierten Erscheinungen ergebenden Werte der Konstanten ist infolgedessen eine gute Prüfung für die Theorie. Wir wollen die Hauptformen der elastischen Erscheinungen im folgenden betrachten. Wir beginnen mit der Kompression eines Körpers, der allseitig gleichem Druck deformierten massiven oder Hohl-

eines Körpers, der allseitig gleichem Druck  $p_1, p_2, p_3$ , welche wir auf die Seitenflächen eines Parallelepipedes ausüben, einander gleich, so werden auch die Verkürzungen, welche die Seiten des Parallelepipedes erfahren, einander gleich sein. Wenn der Druck  $p$  entsprechende Volumverminderung  $v$  wird gleich  $3\varepsilon$ . In dem vorigen Paragraphen für die Drucke  $p$  gefundenen Ausdrücke gehen wir nun auf die Verkürzungen über, da  $\varepsilon = \frac{1}{3}v$  ist

$$p = \frac{2}{3}kv + Kv = (\frac{2}{3}k + K)v.$$

Der Koeffizient der kubischen Kompression ist jene Zahl, mit welcher die allseitig wirkende Druck zu multiplizieren ist, um die in der Einheit des ursprünglichen Volumens gegebene Volumverminderung zu erhalten. Da die letztere Gleichung nach  $v$  aufgelöst uns diese Volumverminderung gibt

$$v = \frac{3}{2k + 3K} p,$$

so daß der Koeffizient von  $p$  der kubische Kompressionskoeffizient ist. Wir drücken  $k$  und  $K$  durch den Elastizitätskoeffizienten  $E$  und den Querkontraktionskoeffizienten  $\mu$  aus

$$k = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad K = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)},$$

so daß der kubische Kompressionskoeffizient  $C_k$

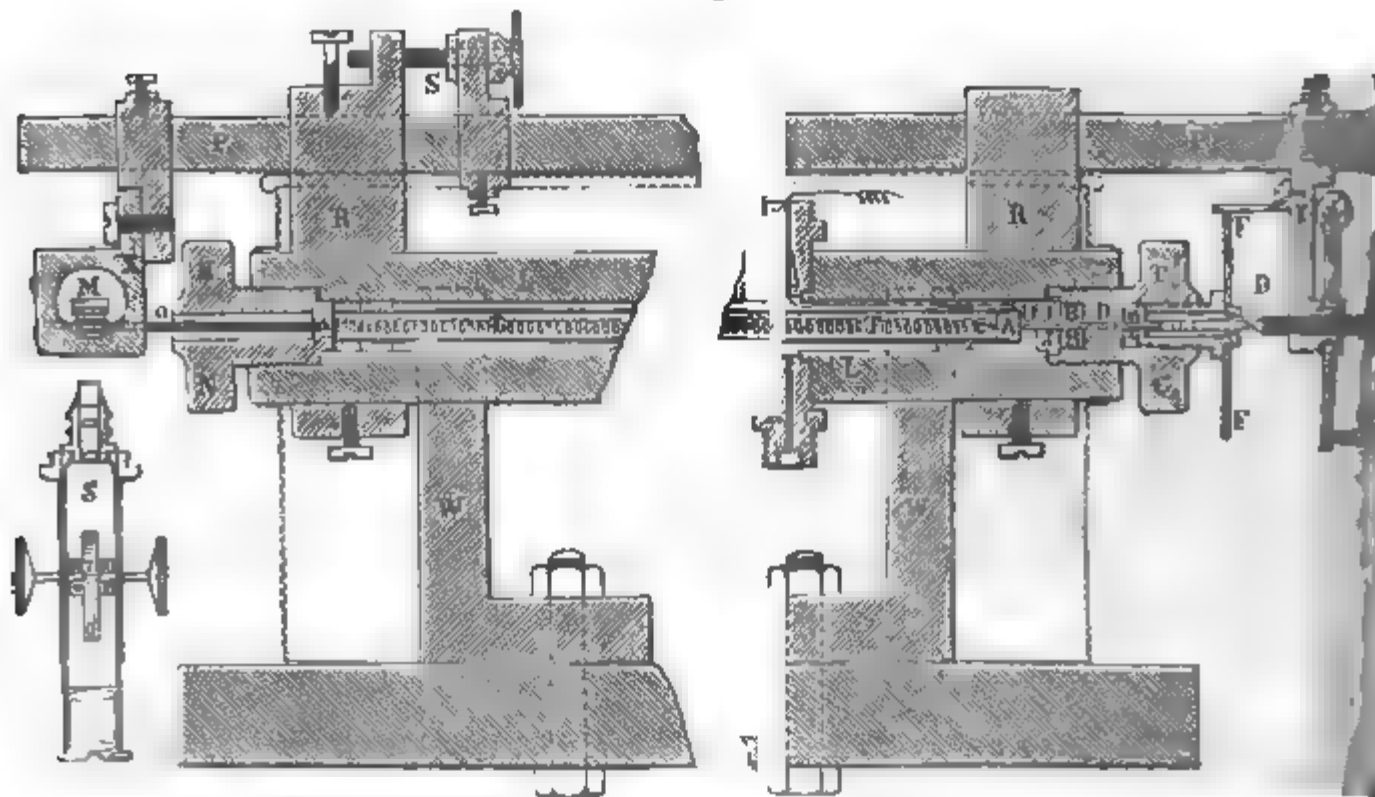
$$C_k = \frac{3}{E}(1 - 2\mu) = 3C(1 - 2\mu).$$

wie vorhin die linearen Verlängerungs- beziehungsweise Verkürzungskoeffizienten mit  $C$  bezeichnen. Das Verhältnis zwischen den beiden Koeffizienten hängt demnach, wie es ja auch nicht anders sein kann, wesentlich von dem Werte von  $\mu$  ab.

Die direkte Messung der kubischen Kompression ist wegen ihrer geringen Größe mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft, sie ist von Amagat mit zwei verschiedene Glassorten durchgeführt. Amagat komprimiert

mierte in einem hohlen sehr dickwandigen Stahlzylinder Glasröhren um maß deren Verkürzung, welche, da die Änderung der Dimensionen bei gleichmäßiger Kompression nach allen Richtungen die gleiche ist, gleich einem Drittel der kubischen Kompression ist. Die von Amagat getroffene Anordnung zeigt Fig. 64. Die zu untersuchende Glasröhre von 1<sup>m</sup> Länge befindet sich in dem dickwandigen Stahlzylinder *LL* und wird durch eine im Innern der Röhre befindliche lange Feder *TT* mit ihrem einen Ende gegen den Verschuß *NN* des Stahlzylinders gedrückt; zu dem Zwecke ist die Feder mit ihrem einen Ende an den Boden *NN* des Zylinders angelötet, während das andere Ende der Feder an einem kleineren in die Stahlplatte *A* eingeschraubten Haken befestigt wird. Durch die Feder wird

Fig. 64.



die Stahlplatte *A* gegen das andere Ende der Glasröhre gezogen und durch Zug bewirkt gleichzeitig, daß das untere Ende der Glasröhre fest gegen den Boden des Stahlzylinders gestemmt wird. Die Feder ist an einer Stelle zerschnitten und die Stücke sind durch ein den elektrischen Strom nicht leitendes Zwischenstück wieder verbunden.

Mit der Platte *A* kann ein kleiner Stahlkolben *DD* zur Berührung gebracht werden, der in der Achse des obren Verschlusses *CC* des Stahlzylinders sich hin und her bewegt und durch eine Stopfbüchse *BB* geführt ist, welche das Innere des Stahlzylinders vollständig abdichtet. Der Kolben ist durch zwei Nasen an eine hohle Schraubenspindel befestigt, durch deren Durchbohrung die Verlängerung des kleinen Kolbens hindurchgeht, so daß dessen Ende in der Ebene *D'* aus der Schraube hervorsticht. Die Schraubenspindel hat ihre Mutter in dem Verschußstück *CC* und kann durch die geränderte und mit einer Teilung versehene Trommel gedreht werden.

Mit der Ebene *D'* kann die Spitze einer Mikrometerschraube in Berührung gebracht werden, deren Mutter durch das Stück *Y* an den

an Stahlzylinder  $PP$  befestigt ist, welcher selbst durch die Stücke  $R$  mit dem Zylinder  $LL$  verbunden ist. Die an der Mikrometerschraube befestigte Kreisscheibe  $GG$  ist an ihrem Rande geteilt, und mit Hilfe dieser Teilung kann man die Verschiebung der Mikrometerschraube, deren Rand an der unter  $GG$  angedeuteten Skala vorübergeht, in tausendstel des Millimeters messen.

Um die in das Rohr  $LL$  gebrachten Röhren dem gewünschten Drucke aussetzen, wird durch die Durchbohrung des seitlichen Ansatzstückes  $K$  Wasser in das Innere des Rohres  $LL$  gepumpt. Um die Verkürzung der Röhren zu erkennen und zu messen, wird der elektrische Strom benutzt. Zu dem Zwecke ist der eine Pol einer Batterie durch einen Draht, der durch das dem Ansatzstück  $K$  gegenüber angebrachte Stück  $H$  hindurchgeführt und in demselben eingekittet ist, mit der gegen das Röhrenende gedrückten Stahlplatte  $A$  verbunden; andererseits ist die Metallmasse des Apparates, also auch der die Stange  $DD'$  tragende metallische Verschlusskolben, mit dem andern Pole der Batterie verbunden. Der Strom ist demnach geschlossen, wenn die Stange  $D$  die Platte  $A$  berührt. Zur Erkennung des Stromes ist in den Stromkreis ein empfindliches Galvanometer eingeschaltet.

Zum Beginne des Versuches wird dieser Strom geschlossen, also die Stange  $D$  durch Drehung der Trommel  $F'$  mit der Platte  $A$  zur Berührung gebracht. Gleichzeitig wird die Mikrometerschraube durch Drehung der Scheibe  $GG$  mit der Fläche  $D'$  der Stange zur Berührung gebracht, was ebenfalls dadurch erkannt wird, daß durch diese Berührung ein zweites empfindliches Galvanometer enthaltender Stromkreis geschlossen wird. Die Stellung der Mikrometerschraube wird beobachtet.

Wird jetzt durch Einpumpen von Wasser im Innern des Rohres  $LL$  der Druck verstärkt, so wird die Röhre verkürzt, und da die Platte  $A$  durch die Feder gegen das Ende der Röhre gedrückt wird, diese Platte von der Stange  $D$  entfernt und damit der erste Strom unterbrochen. Durch Drehung der Trommel  $F'F$  wird die Stange  $D$  dann soweit vorgeschoben, bis wieder die Berührung von  $D$  und  $A$  hergestellt und damit der Strom geschlossen wird. Das Wiederauftreten des Stromes beweist, daß die Berührung von  $D$  und  $A$  wiederhergestellt ist.

Durch das Verschieben der Ebene  $D'$  ist aber auch der durch die Berührung der Spitze der Mikrometerschraube mit  $D'$  geschlossene Strom unterbrochen, und die Mikrometerschraube muß um genau die Strecke verschraubt werden, um welche  $D'$  und somit das Röhrenende infolge des Druckes sich verschoben hat. Die zur Wiederherstellung des durch den Kontakt der Mikrometerschraube hergestellten Stromschlusses erforderliche Verschraubung der Mikrometerschraube ist also genau gleich der Strecke, um welche das Röhrenende durch den Druck zurückgegangen ist.

Diese an der Mikrometerschraube gemessene Strecke würde somit mit der Verkürzung der Röhre durch den Druck sein, wenn nicht noch eine andere Ursache des Rückganges des Röhrenendes vorhanden wäre. Diese Ursache ist die Verlängerung der Röhre  $LL$  infolge des im Innern vorhandenen Druckes. Denn da die Glasröhre durch die Feder gegen die Verschlussplatte der Röhre  $LL$  gedrückt wird, muß die Röhre einer Verschiebung der Bodenplatte folgen. Die Verkürzung der



Röhre ist somit gleich der an der Mikrometerschraube gemessenen Länge vermindert um die Strecke, um welche die ganze Röhre infolge der Verschiebung der Bodenplatte zurückgegangen ist.

Um diese letztere zu messen, ist an die den Verschluß der Röhre bildende Platte des Verschlußbolzens *N* eine Stahlstange *O* angeschraubt, welche an ihrem Ende einen auf Glas in 0,01<sup>mm</sup> geteilten kleinen Maßstab trägt, auf welchen das in der Figur eigens gezeichnete in dem Ringe *X* bei der Beobachtung befestigte Mikroskop *S* eingestellt ist. Das Mikroskop mißt die Verschiebung des Maßstabes und damit diejenige der Röhre infolge der Verlängerung des Rohres *L L*.

Betreffs der weiteren Einzelheiten der Versuche und der bei denselben angewandten Vorsichtsmaßregeln verweisen wir auf die Abhandlung von Amagat.

Die Drucke wurden von Amagat in Atmosphären gemessen, deren jede einem Drucke von 0,01033<sup>kg</sup> auf das Quadratmillimeter entspricht.

Nachfolgende Tabelle enthält die Beobachtungen an drei Röhren gewöhnlichen Glases und in der letzten Spalte die für Röhren von Kristallglas gefundenen kubischen Kompressionskoeffizienten für die Druckeinheit einer Atmosphäre.

Grenzen des Druckes in Atmosphären	Verkürzung der Röhren von 1 <sup>m</sup> Länge für den Druck einer Atmosphäre in 0,001 mm.				Kubischer Kompressionskoeffizient des	
	1. Reihe	2. Reihe	3. Reihe	Mittel	Glases	Kristallglases
1— 500	0,747	0,752	0,751	0,750	0,000 002 250	0,000 002 454
1—1000	0,743	0,751	0,746	0,747	0,000 002 241	0,000 002 424
1—1500	0,743	0,748	0,745	0,745	0,000 002 235	0,000 002 415
1—2000	0,741	0,748	0,743	0,744	0,000 002 232	0,000 002 406

Als kubischer Kompressionskoeffizient für den Druck von 1<sup>kg</sup> pro Quadratmillimeter würde sich zwischen 1—500 Atmosphären daraus ergeben

für Glas . .  $\frac{0,000\,00225}{0,01033} = 0,000\,2177;$

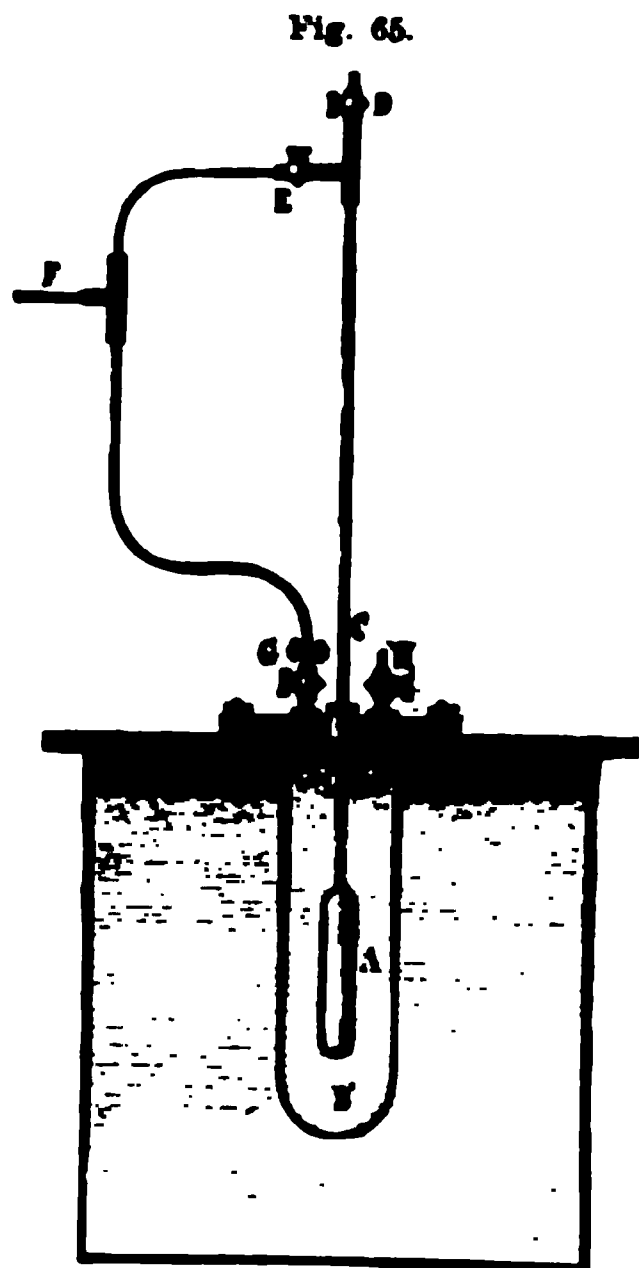
für Kristall  $\frac{0,000\,002454}{0,01033} = 0,000\,2375.$

Die Zahlen deuten auf eine sehr geringe Abnahme des Kompressionskoeffizienten mit wachsendem Drucke hin, indes liegt die Abnahme doch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, wie sich aus der Vergleichung der einzelnen Beobachtungen der Verkürzungen ergibt. Außerdem werden wir gleich sehen, daß Amagat aus andern Beobachtungen für kleinere Drucke kleinere Werte findet als diejenigen, die hier den größten Drucken entsprechen. Für Glas gelangen wir daher zu dem Schlusse, daß eine Abnahme des Elastizitätskoeffizienten mit der Verlängerung bzw. eine Zunahme mit der Verkürzung, wie sie Thompson aus seinen Versuchen für Metalle folgert, nicht mit Sicherheit erkennbar ist.

andere Versuche über die Kompression beziehen sich stets auf die Änderung von Hohlräumen, wenn auf die Wandungen derselben von ein ganz gleichmäßiger Druck wirkt.

Ähnliche Messungen hat zuerst Regnault bei Gelegenheit seiner Untersuchung über die Kompression der Flüssigkeiten angestellt<sup>1)</sup>. Er benutzte zu diesen Versuchen Gefäße, deren Form und Substanz genau bekannt waren, entweder Kugeln von Kupfer oder Messing, deren innerer Durchmesser mit größter Genauigkeit gemessen war, und mit denselben eine lange Glasröhre in Verbindung stand; oder er nahm ein Gefäß *A* (Fig. 65), dessen innere Kapazität und dessen äußeres Volumen mit größter Sorgfalt bestimmt war.

Das Gefäß füllte er mit Wasser bis zu einer Marke *C*, welche sich auf der Glasröhre *CD* befindet. Darauf senkte er das Gefäß in einen ringsum fest geschlossen und mit Wasser gefüllten Behälter *BB'* und wirkte auf das Wasser des Behälters einen Druck aus, indem er aus einem Behälter durch eine Rohrleitung *FG* bei geschlossenem Hahn die Oberfläche des Wassers in *B* komprimierte. Auf diese Weise wirkte die Luft in *B* auf die Oberfläche des Wassers in *B* und drückte das Gefäß *A* von allen Seiten ganz gleichmäßig zusammen, das Volumen desselben verminderte sich um eine dem Druck proportionale Größe, und man sah das Wasser in der Röhre über *C* hinaufsteigen; die Steighöhe des Wassers an einer auf dem Rohre angebrachten Skala. Man kann die durch den äußern Druck hervorgebrachte Volumverminderung aus der Steighöhe des Wassers ableiten, wenn man die Kapazität der Röhre im Verhältnis zum Volumen des ganzen Gefäßes kennt. Die Kompression wurde durch Wägung genau bestimmt.



Aus den Beobachtungen der Volumverminderung von Hohlräumen kann nicht unmittelbar auf den kubischen Kompressionskoeffizienten des Materials schließen, aus welchem die Wandung des Hohlraumes besteht, da die Volumverminderung des Hohlraumes eine andere sein kann als jene eines massiven Körpers, welche den Hohlraum ausfüllen.

Daß das der Fall sein muß, ergibt sich aus der einfachen Überlegung, daß, wenn der Hohlraum mit demselben Material angefüllt ist, die Kompression im Innern desselben eine Spannung entstehen muß, welche den komprimierenden Kräften entgegenwirkt, welche Spannung nicht, wenn der innere Raum leer ist oder eine Flüssigkeit enthält, wie bei den Versuchen von Regnault aus dem Hohlraum infolge der Volumverminderung austritt. Die Theorie der Elastizität ge-

stattet aber auch in diesem Falle, die durch die Kompression eintretende Volumverminderung zu berechnen.

Durch den auf die äußere Kugelfläche wirkenden Druck werden die Radien der Kugel verkleinert; bezeichnen wir den Radius der inneren Kugelfläche vor der Kompression mit  $R_0$ , so wird derselbe nach der Kompression  $R_0(1 - \varphi_0)$ , wenn wir mit  $\varphi_0$  einen sehr kleinen gleich zu bestimmenden Bruch bezeichnen. Der Hohlraum der Kugel, welcher vor der Kompression  $\frac{4}{3} R_0^3 \pi$  war, wird deshalb nach der Kompression  $\frac{4}{3} R_0^3 (1 - \varphi_0)^3 \pi$  oder, da  $\varphi_0$  nur sehr klein ist,  $\frac{4}{3} R_0^3 (1 - 3\varphi_0) \pi$ . Die stattgefundene Volumverminderung ist deshalb

$$\Delta V = \frac{4}{3} R_0^3 \pi - \frac{4}{3} R_0^3 \pi (1 - 3\varphi_0) = \frac{4}{3} R_0^3 \pi \cdot 3\varphi_0$$

oder in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens  $V$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varphi_0.$$

Die Theorie der Elastizität ergibt nun<sup>1)</sup>, daß bei einer Hohlkugel, welche auf ihrer äußeren Fläche gleichmäßig zusammengepreßt wird, die Verkürzung  $\varphi$  der Radien einer in der Kugelschale liegenden Kugelfläche vom Radius  $r$  gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = c + \frac{b}{r^3},$$

worin  $c$  und  $b$  zwei Größen sind, welche nicht von  $r$ , sondern von dem Drucke abhängig sind, den die Kugel auf ihrer äußeren und inneren Fläche erfährt und von den Radien der äußeren und inneren Fläche der Hohlkugel. Sind diese beiden Radien  $R_1$  und  $R_0$  und ist der Druck, der auf die Flächeneinheit der äußeren Fläche wirksam ist, gleich  $P_1$ , der auf die Flächeneinheit der inneren Fläche wirkende gleich  $P_0$ , so erhält man für diese beiden Größen die Werte

$$c = \frac{1}{3K + 2k} \cdot \frac{P_1 R_1^3 - P_0 R_0^3}{R_1^3 - R_0^3}; \quad b = \frac{1}{4k} \frac{R_0^3 R_1^3 (P_1 - P_0)}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varphi = 3 \left\{ \frac{1}{3K + 2k} \cdot \frac{P_1 R_1^3 - P_0 R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{1}{4k} \frac{R_0^3 R_1^3 (P_1 - P_0)}{r^3 (R_1^3 - R_0^3)} \right\} \quad (A)$$

Die Volumverminderung des inneren Hohlraums erhalten wir hieraus, wenn wir  $r = R_0$  setzen.

Ist nun bei dem vorhin beschriebenen Versuche von Regnault  $P_0 = 0$  gemacht, so wird die Verminderung dieses Hohlraumes

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = 3 \left\{ \frac{1}{3K + 2k} + \frac{1}{4k} \right\} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Drücken wir hier  $K$  und  $k$  durch  $E$  und  $\mu$  aus, so wird

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{9}{2} \frac{1 - \mu}{E} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Die Gleichungen gestatten uns auch die Volumvergrößerung der äußeren Kugelfläche zu bestimmen, wenn man auf das Gefäß im Innern einen Druck

1) Man sehe *Lamé*, Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides p. 211 ff. — *Clebsch*, Theorie der Elastizität der festen Körper. § 18.

Ist, wie es bei der Anordnung von Regnault möglich ist, indem Hähne  $G$  und  $D$  schließt, die Hähne  $E$  und  $H$  öffnet. Nimmt Volumen des Gefäßes  $B$  sehr klein, setzt statt des Hahnes  $H$  kalibrierte Glasröhre ein und sorgt gleichzeitig, daß das Gefäß  $B$  frei ist, und daß das Wasser bis in die enge Röhre reicht, so diese Volumvergrößerung auch messen. Unsere Gleichung liefert indem wir  $r = R_1$  und  $P_1 = 0$  setzen,

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = -3 \left\{ \frac{1}{3K + 2k} + \frac{1}{4k} \right\} R_1^3 - R_0^3 \frac{1}{P_0} \dots \dots (2)$$

die Volumverminderung als positive Größe eingeführt haben, so die Volumvergrößerung als negative Größe erscheinen. Für Verhältniß der Volumänderungen ergibt sich

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} : \frac{\Delta V_1}{V_1} = R_1^3 P_1 : R_0^3 P_0.$$

Wir  $P_1 = P_0$ , so wird

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} \cdot \frac{V_1}{V_0} = \frac{R_1^3}{R_0^3}.$$

$$V_1 : V_0 = R_1^3 : R_0^3,$$

$$\Delta V_0 = \Delta V_1.$$

Veränderungen sind ihrem absoluten Werte nach gleich.

Kompression einer massiven Kugel erhalten wir, indem wir in der Gleichung  $R_0 = 0$  setzen, es wird

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{3K + 2k} P_1 = \frac{1 - 2\mu}{E} P_1;$$

so, daß wir die Kompression der massiven Kugel gleich berechnen aus dem kubischen Kompressionskoeffizienten und dem proportional wirkenden Druck finden, daß indes die Volumänderungen des Gefäßes andere sind. Um aus der Kompression einer Hohlkugel ihren Kompressionskoeffizienten abzuleiten, bedarf es demnach der Bestimmung von  $E$  oder  $\mu$ , oder noch einer Beobachtung, welche uns eine Beziehung zwischen  $E$  und  $\mu$  liefert, so daß wir aus den beiden gegebenen  $E$  und  $\mu$  ableiten können.

Es gilt für einen Hohlzylinder mit ebenen oder halbkugelförmigen Endflächen

Volumänderungen eines hohlen Zylinders mit ebenen Endflächen erhalten wir in folgender Weise. Es sei  $H$  die Höhe des Zylinders,  $R_1$  der Radius der Außenfläche,  $R_0$  der Radius der Innenfläche, ferner sei  $r$  ein beliebiger Wert zwischen  $R_1$  und  $R_0$  liegt. Vor der Kompression ist das Volumen des Zylinders vom Radius  $r$

$$V = r^2 \pi H$$

auf der äußeren Oberfläche der Druck  $P_1$ , auf der inneren Fläche der Druck  $P_0$  ausgeübt. Durch diesen Druck gehe die Höhe über  $H$  in  $H(1 - \delta)$ , der Radius in  $r(1 - \varphi)$ , somit das Volumen in

$$V - \Delta V = \pi r^2 (1 - \varphi)^2 H (1 - \delta) = \pi r^2 H (1 - \delta - 2\varphi)$$

und daraus

$$\frac{\Delta V}{V} = \delta + 2\varphi.$$

Für die Verkürzung des Zylinders liefert die Theorie der Elastizität

$$\delta = \frac{1}{3K + 2k} \cdot \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Für die Verkürzung des Zylinderradius  $\varphi$  erhält man ganz analog wie der Kugel

$$\varphi = c + \frac{b}{r^2},$$

worin die beiden Größen  $c$  und  $b$  die Werte haben

$$c = \frac{1}{3K + 2k} \cdot \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2}; \quad b = \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^2 R_1^2 (P_1 - P_0)}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{3K + 2k} \cdot \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2} + \frac{1}{k} \cdot \frac{R_0^2 R_1^2 (P_1 - P_0)}{r^2 (R_1^2 - R_0^2)}.$$

Die Volumveränderung des innern Hohlraums für den Fall, daß  $P_0$  ist, erhalten wir, wenn wir  $r = R_0$  setzen,

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \left\{ \frac{3}{3K + 2k} + \frac{1}{k} \right\} \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

Die Vergrößerung des äußern Volumens wird, wenn  $P_1 = 0$  und auf Innere des Hohlzylinders pro Flächeneinheit der Druck  $P_0$  wirkt, in wir  $r = R_1$  setzen,

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = - \left\{ \frac{3}{3K + 2k} + \frac{1}{k} \right\} \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_0$$

und man erkennt, daß auch jetzt wieder  $\Delta V_0 = \Delta V_1$  ist, wenn die Drücke  $P_1$  bei Ausübung des Druckes von außen, und  $P_0$  bei Ausübung des Druckes von innen gleich sind.

Durch den Elastizitätskoeffizienten  $E$  und den Querkontraktionskoeffizienten  $\mu$  ausgedrückt wird

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{5 - 4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

ist der Zylinder nicht mit ebenen, sondern mit halbkugelförmigen Endflächen versehen, deren innerer Radius  $R_0$ , deren äußerer  $R_1$  ist, so ist sich die Kompression dieses Gefäßes, indem wir dasselbe in zwei Teile vorstellen, in den Zylinder mit ebenen Endflächen und die aus den beiden Halbkugeln zusammengesetzte Kugel. Wird jeder dieser Teile unter denselben Umständen für sich einem Drucke unterworfen, so ist die Summe der sich so ergebenden Volumänderungen gleich der Volumänderung des Zylinders mit halbkugelförmigen Endflächen. Es folgt das aus der Überlegung, daß der Druck auf die zur Längsachse des Zylinders senkrechten Endflächen desselben durch Vermittlung der Halbkugeln gerade so wirkt

wie wenn er direkt auf die Endflächen wirken würde, da diese Endflächen größte Kreise der aus den Halbkugeln gebildeten Kugel sind.

Für die Verminderung des Hohlraumes  $V'$  der aus den Halbkugeln gebildeten Kugel fanden wir, wenn  $P_0 = 0$

$$\frac{\Delta V'}{V'} = \frac{9}{2} \frac{1-\mu}{E} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1$$

Die Volumverminderung des ganzen Hohlraumes ist  $\Delta V_0 + \Delta V'$ , sie wird

$$\Delta V_0 + \Delta V' = \left\{ \frac{5-4\mu}{E} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} V_0 + \frac{9}{2} \frac{1-\mu}{E} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot V' \right\} P_1.$$

Es bedarf demnach stets außer der Beobachtung der Volumänderung eines Hohlraumes entweder der Kenntnis von  $E$  oder  $\mu$  oder noch einer andern Beobachtung um die kubischen Kompressionskoeffizienten zu erhalten.

Die Versuche von Regnault sind deshalb zu dieser Bestimmung nicht ausreichend. Regnault glaubte nämlich aufgrund älterer Formeln von Lamé, in welche die obigen Formeln übergehen, wenn man  $\mu = 0,25$  setzt, irrtümlich, daß man direkt aus der Kompression eines solchen Hohlraumes den kubischen Kompressionskoeffizienten erhalten könne, er hat es deshalb unterlassen, für die Metalle und Gläser, welche er bei seinen Messungen benutzte, noch eine zweite Beobachtung zu machen. Die Verwendung etwa der von Wertheim bei seinen Untersuchungen erhaltenen Elastizitätskoeffizienten bietet aber eine zu große Unsicherheit, da wir ja fanden, daß diese Größe sehr von dem physikalischen Zustande des Materials, bei dem Glase auch von dessen Zusammensetzung abhängig ist; man kann also nicht wissen, ob die von Wertheim gefundenen Werte für das Material der Regnaultschen Gefäße Gültigkeit haben.

Neuerdings haben Cantone<sup>1)</sup> und besonders Amagat<sup>2)</sup> Beobachtungen über Volumänderung durch Druck gemacht, deren Resultate wir zum Teil schon im vorigen Paragraphen mitgeteilt haben.

Amagat benutzte zu allen seinen Versuchen lange Hohlzylinder mit ebenen Endflächen; der von ihm verwandte Kompressionsapparat war der Regnaultsche mit geringen Änderungen, deren wesentlichste die ist, daß er auch die Änderung des äußern Volumens der von ihm verwandten Zylinder scharf messen konnte, wenn dieselben einem innern Drucke ausgesetzt wurden.

Zur Prüfung der von der Theorie der Elastizität gelieferten Gleichungen ließ Amagat eine Anzahl Stahlzylinder und ebenso ein paar Bronzestylinder anfertigen, welche gleichen innern aber verschiedenen äußern Durchmesser hatten und verglich bei denselben die Volumänderung des innern Hohlraumes durch äußern und die Änderung des äußern Volumens durch innern Druck; er zeigte, daß stets bei Gleichheit der Drucke die Volumzunahme des innern Hohlraums gleich der Zunahme des äußern Volumens ist, und ebenso, daß die Volumänderungen der Zylinder verschiedener Dimensionen in dem von der Theorie verlangten Verhältnisse stehen.

Eine weitere Prüfung der Theorie gab ihm die Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten und der Querkontraktion von gewöhnlichem Glase

<sup>1)</sup> Cantone, Beiblätter zu den Annalen der Physik. 12. p. 359. 1888.

<sup>2)</sup> Amagat, Ann. de chim. et de physique. 22. (6.) 1889

und von Kristallglas durch Messung der Volumänderung des inneren Hohlraums bei Kompression und bei einfachem longitudinalen Zuge und Vergleichung der aus diesen Messungen sich ergebenden Werte der kubischen Kompression mit den vorhin angegebenen direkt gemessenen Werten derselben. In folgender Tabelle geben wir die von Amagat an drei Röhren von gewöhnlichem Glase und vier Röhren von Kristallglas gefundenen Werte des Querkontraktionskoeffizienten  $\mu$ , des linearen Verlängerungskoeffizienten  $C$  und des kubischen Kompressionskoeffizienten  $C_k$  für den Druck einer Atmosphäre.

Röhren	$\mu$	$C$	$C_k$
Glas Nr. 1. . . . .	0,2476	0,000 001 434	0,000 002 202
„ Nr. 2. . . . .	0,2450	0,000 001 437	0,000 002 200
„ Nr. 3. . . . .	0,2428	0,000 001 419	0,000 002 190
Mittel . . . . .	0,2451	0,000 001 480	0,000 002 197
Kristallglas Nr. 1.	0,2538	0,000,001 604	0,000 002 370
„ Nr. 2.	0,2481	0,000,001 603	0,000 002 423
„ Nr. 3.	0,2534	0,000 001 624	0,000 002 403
„ Nr. 4.	0,2443	0,000 001 580	0,000 002 424
Mittel . . . . .	0,2499	0,000 001 602	0,000 002 405

Der Druck, den Amagat bei diesen Versuchen anwandte, war 64 Atmosphären; das hier sich ergebende Mittel für  $C_k$  ist bei gewöhnlichem Glase noch etwas kleiner, bei Kristallglas gleich dem durch die direkte Messung unter 2000 Atmosphären gefundenen Werte.

Die im vorigen Paragraphen als nach der zweiten Methode gefunden angegebenen Werte von  $\mu$  für die Metalle sind nach derselben Methode wie die soeben für Glas gegebenen erhalten, es wurde die Volumvergrößerung des Hohlraumes durch innern Druck auf die Zylinderwand und die Volumänderung bei longitudinalem Zuge gemessen.

Der im vorigen Paragraphen erwähnte Versuch, durch welchen Amagat den sicheren Nachweis führte, daß für Kautschuk der Wert von  $\mu$  sehr nahe gleich 0,5 ist, bestand in der Vergleichung der Kompression zweier in ihren Abmessungen ganz gleicher Hohlkugeln, deren eine aus Bronze, die andere aus Kautschuk hergestellt war. Die Kugeln wurden einem gleichen innern und äußern Druck ausgesetzt, und die Veränderung des inneren Hohlraumes gemessen. Die Änderung des Hohlraumes in diesem Falle erhalten wir aus der Gleichung A, Seite 246, welche allgemein für eine Hohlkugel gilt, indem wir  $P_0 = P_1$  setzen; es wird

$$\Delta V = \frac{3}{3K + 2k} V P_1 = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} V P_1.$$

Die Volumverminderung des inneren Hohlraumes ist bei dieser Anordnung also genau dieselbe wie wenn derselbe mit dem gleichen Materiale ausgefüllt wäre, aus welchem die Wandung besteht, beziehungsweise Hohlraum wird genau so komprimiert wie der gleiche Raum in einer massiven Kugel.



um  $E_1$  der Elastizitätskoeffizient der Bronze,  $E_2$  der des Kautschuks sind  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Querkontraktionskoeffizienten der beiden, so müssen sich die Volumänderungen der beiden Hohlräume  $\Delta V_1$  bei gleichem Drucke  $P_1$ , und da für beide  $V$  denselben verhalten

$$\Delta V_1 : \Delta V_2 = \frac{1 - 2\mu_1}{E_1} : \frac{1 - 2\mu_2}{E_2} = \frac{1 - 2\mu_1}{1 - 2\mu_2} \cdot \frac{E_2}{E_1}.$$

Elastizitätskoeffizient  $E_2$  des Kautschuks ist ganz erheblich kleiner als der der Bronze, es muß deshalb  $\Delta V_2$  erheblich größer sein als  $\Delta V_1$ , nicht  $\mu_2$  nahezu gleich 0,5 ist

Volumverminderung wird durch das Aufsteigen der Flüssigkeit in capillaren Rohre  $C$ , Fig. 65, beobachtet. Die hier beobachtete Volumverminderung ist in der Tat nicht die gesuchte  $\Delta V_1$  oder  $\Delta V_2$ , sondern nur, da durch den innern Druck, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, die Flüssigkeit komprimiert wird. Da indes in beiden Fällen das gleiche Volumen derselben Flüssigkeit ist, ist die Kompression in beiden die gleiche, sie ist, wenn wir mit  $k$  den Kompressionskoeffizienten der Flüssigkeit bezeichnen, gleich  $kVP_1$ . Ist  $\Delta V'$  die an der Bronzekugel,  $\Delta V''$  die an der Kautschukugel beobachtete Volumverminderung, so ist

$$\Delta V_1 = \Delta V' + kVP_1; \quad \Delta V_2 = \Delta V'' + kVP_1,$$

$$\frac{\Delta V' + kVP_1}{\Delta V'' + kVP_1} = \frac{E_2(1 - 2\mu_1)}{E_1(1 - 2\mu_2)}.$$

Versuch ergab, daß die beobachteten Volumänderungen  $\Delta V'$  bei dem von Amagat angewandten Kautschuk nur sehr wenig von den entsprechenden  $\Delta V_1$  verschieden waren, woraus folgt, daß auch  $\Delta V_2$  sehr nahe  $\Delta V_1$  ist, oder daß die kubische Kompressibilität des Kautschuks nur wenig verschieden von derjenigen der Bronze ist. Daraus folgt, daß das Verhältnis  $1 - 2\mu_2$  zu  $1 - 2\mu_1$  außerordentlich klein sein muß, und daß entsprechend den Versuchen von Röntgen  $\mu_2$  sehr nahe 0,5 ist.

Zug auf das Verhältnis des Wertes des kubischen Kompressionskoeffizienten  $C_k$  zu dem linearen Verlängerungskoeffizienten  $C$ , bemerken wir, daß dasselbe nach der Gleichung

$$C_k = 3(1 - 2\mu)C$$

von dem Werte von  $\mu$  ein sehr verschiedenes sein kann. Für alle Werte, für welche  $\mu < \frac{1}{3}$  ist, ist  $C_k > C$ , für jene, für welche  $\mu$  größer als  $\frac{1}{3}$  ist, ist  $C_k < C$ . So ist nach den Versuchen von Amagat  $C_k = 0,0006$  dagegen  $C = 0,00027$ , während für Glas der kubische Kompressionskoeffizient gleich dem 1,5fachen linearen ist.

## § 52.

**Torsionselastizität.** Bei den bisher betrachteten elastischen Änderungen der Körper ließen wir die Kräfte stets normal zu den Ober-

flächen wirken, derartig, daß sie nur einen Zug oder Druck auf den Körper ausübten, durch welche eine Dimensionsänderung in der Zugrichtung, also eine Veränderung des Abstandes der Molekülschichten bewirkt wird. Bei Betrachtung der Querkontraktion kamen wir schon zu dem Resultate, daß elastische Kräfte auch lediglich durch eine Verschiebung der Molekülschichten gegeneinander, welche ohne Vergrößerung ihres Abstandes eintritt, geweckt werden. Eine solche Verschiebung der Schichten erhalten wir, wenn wir auf einen Körper zu seiner Oberfläche tangentiale Kräfte wirken lassen; wodurch wir den einzelnen Schichten eine Drehung gegeneinander erteilen. Die so in dem Körper hervorgebrachte Deformation bezeichnet man als Torsion oder Drillung.

Bei der Untersuchung der durch die Drillung geweckten Elastizität beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, jene von Drähten oder Stäben mit kreisförmigem Querschnitt und begnügen uns wesentlich mit der experimentellen Untersuchung, indem wir nur soweit auf die Theorie eingehen, daß wir den Zusammenhang der verschiedenen elastischen Änderungen erkennen können.

Die Torsion eines Stabes erhalten wir auf die einfachste Weise, wenn wir einen Stab oder einen Draht an seinem einen Ende befestigen, an seinem andern Ende einen zur Längsrichtung des Stabes senkrechten Hebelarm anbringen und an dem Hebel eine Kraft wirken lassen, welche den Stab um seine Längsachse dreht. Es entwickelt sich dann in dem Stabe, durch die Verschiebung der dem untern Ende näher liegenden Schichten gegen die entfernteren eine der Drehung entgegenwirkende Kraft, welche wächst mit dem Winkel, um welchen man das untere Ende des Stabes gedreht hat.

Nennen wir das Drehungsmoment des Gewichtes  $P$ , welches wir angebracht haben,  $p$ , so dreht sich der Stab so lange, bis zu einem solchen Winkel  $\omega$ , daß das Drehungsmoment, welches die Gegenwirkung des Stabes ausübt, um ihn zurückzudrehen, gleich ist dem Drehungsmoment  $p$ . Es treten demnach bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes immer zwei Drehungsmomente auf, welche, unter sich gleich, sich das Gleichgewicht halten. Das rückwirkende Drehungsmoment des Drahtes bezeichnet man mit dem Namen der Torsionskraft; es ist unsere Aufgabe, zu untersuchen, welche Beziehung zwischen dieser und dem Drehungswinkel besteht.

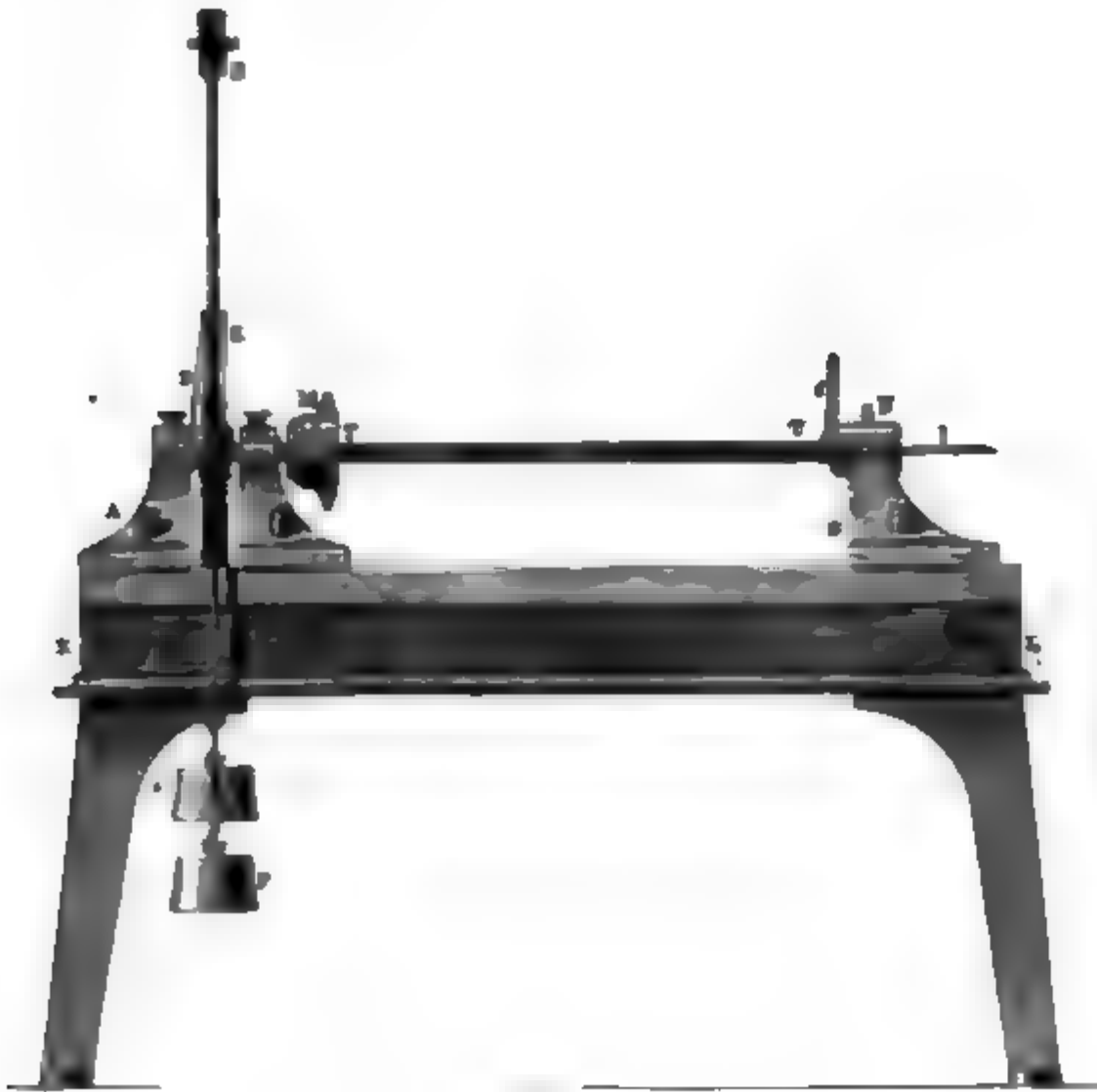
Sehr ausgedehnte Versuche zur Beantwortung dieser Frage hat Wertheim<sup>1)</sup> angestellt; er bediente sich dazu des Apparates Fig. 66. Derselbe besteht aus einer schweren eisernen Bank, auf welcher sich zwei Aufsätze befinden, ähnlich denen einer Drehbank. Der erstere,  $B$  ist beweglich, er dient dazu, das eine Ende des Stabes  $U$ , den man untersuchen will, festzuhalten. Zu dem Ende trägt er ein durchbohrtes Stück, durch welches der Stab hindurchgesteckt wird, und in welchem er mittels einer Druckschraube  $N$  festgeklemmt wird.

Es ist notwendig, daß dieses Ende  $U$  des Stabes während der Versuche ganz fest ist; um sich davon zu überzeugen, ist an ihm ein Zeiger angebracht, dessen Ende immerfort auf eine am Apparat angebrachte Marke hinzeigen muß.

1) Wertheim, Annales de chim. et de phys. 50. (3.) p. 202 ff. 1857.

Das vordere Ende  $T$  des Stabes ist in gleicher Weise in die hohle Achse  $M$  eingesteckt und dort festgeklemmt. Diese Achse kann sich in horizontalen Lagern drehen; sie trägt eine Rolle  $E$ , um welche zwei Seile gelegt sind. Die erste ist an dem Haken bei  $E$  befestigt und trägt das Gewicht  $P$ , die zweite ist an der andern Seite der Rolle befestigt, steigt von dort zur Rolle  $R$  auf, ist um diese herumgelegt und trägt an ihrem andern Ende ein Gewicht  $S$ , welches gleich  $P$  ist. Beide Gewichte suchen die Rolle  $D$  in gleichem Sinne zu drehen und somit dem Stab eine Torsion zu erteilen.

Fig. 66



Um die erteilte Drehung zu messen, ist die eine Seite der Rolle  $E$  einem geteilten Kreise versehen, auf den ein unbeweglicher Zeiger  $D$  gestellt ist. Man bemerkt die Stellung des Kreises vor der Drehung. Allerdings, wenn die Gewichte wirken: die gemessene Drehung des Kreises ist gleich dem Torsionswinkel  $\omega$ . Wir haben zu untersuchen, welche Beziehung zwischen dem Winkel  $\omega$  und der Wirkung der beiden Gewichte  $P$  besteht.

Das Drehungsmoment der beiden Gewichte,  $2P\rho$ , wenn wir den Radius der Rolle gleich  $\rho$  setzen, sei gleich  $F$ .

Untersucht man zunächst die Abhängigkeit des Torsionswinkels von der Größe des Drehungsmomentes  $F$ , so zeigt sich, daß, wenn wir  $F$  im Verhältnis von 1, 2, 3, 4  $\dots$  ändern, die Torsionswinkel in demselben

Verhältnis  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$  . . . werden. Da, wie wir sahen, die gegenwirkende Torsionskraft gleich dem drehenden Momente  $F$  ist, so folgt der wichtige Satz, daß die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist.

II. Wenden wir Stäbe derselben Substanz, aber verschiedener Länge an, so daß die Längen im Verhältnis 1, 2, 3, 4 . . . stehen, so findet man bei Anwendung derselben Kraft, daß die Torsionswinkel  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$  sind. Die Torsionswinkel sind demnach bei gleicher tordierender Kraft der Länge der tordierten Stäbe direkt proportional.

III. Wendet man zylindrische Stäbe an, deren Radien sich verhalten wie 1, 2, 3, 4, so werden bei Anwendung derselben Kraft die Torsionswinkel bei zunehmendem Radius kleiner, und zwar findet man sie  $\omega$ ,  $\frac{\omega}{16}$ ,  $\frac{\omega}{81}$ ,  $\frac{\omega}{256}$ . Es sind also, da 1, 16, 81, 256 gleich sind  $1^4$ ,  $2^4$ ,  $3^4$ ,  $4^4$ , bei Anwendung derselben drehenden Kraft die Torsionswinkel umgekehrt proportional den vierten Potenzen der Radien der Stäbe.

IV. Wenn man bei gleichen Dimensionen und gleichen Kräften verschiedene Substanzen anwendet, so findet man die Torsionswinkel verschieden. Um deshalb aus den beobachteten Dimensionen des Stabes und den drehenden Kräften die Torsionswinkel zu erhalten, bedarf es eines gewissen für die verschiedenen Substanzen verschiedenen Koeffizienten  $\frac{1}{D}$ .

Wir erhalten demnach für den Torsionswinkel den Ausdruck

$$\omega = \frac{1}{D} \cdot \frac{Fl}{r^4}.$$

Die Torsionskraft des Stabes ist gleich der Kraft, welche dem Stab die Torsion erteilt, denn der Stab dreht sich so lange, bis die gegenwirkende Kraft desselben gleich ist der drehenden Kraft. Wir erhalten daher die Torsionskraft, welche der Stab bei einer Drehung um den Winkel  $\omega$  entwickelt, wenn wir die soeben erhaltene Gleichung nach  $F$  auflösen. Wir erhalten

$$F = \omega D \frac{r^4}{l},$$

oder die Torsionskraft ist proportional dem Torsionswinkel, der vierten Potenz des Radius des tordierten Stabes und umgekehrt proportional der Länge desselben, außerdem für jede Substanz noch proportional einem besondern Koeffizienten. Die physikalische Bedeutung dieses Koeffizienten ist leicht zu erhalten, Setzen wir  $r = 1$  und  $l = 1$ , so wird für einen Draht von der Einheit des Radius,  $1^{\text{mm}}$ , und der Einheit der Länge,  $1^{\text{m}}$ , welche wir, um im Zähler und Nenner des Ausdruckes für  $F$  die gleichen Längeneinheiten zu haben, auch  $1^{\text{mm}}$  einsetzen,

$$F = \omega D.$$

Nun wird der Torsionskraft das Gleichgewicht gehalten durch eine am Hebelarm  $\varrho$  angreifende Kraft  $P$ , so daß wir setzen können

$$F = P\varrho = \omega D,$$

woraus

$$P \frac{\varrho}{\omega} = D.$$

d machen wir schließlich  $\varphi = \omega$ , so wird

$$P = D.$$

Der Koeffizient  $D$  gibt uns also die Kraft an, welche am Ende eines Stabes von der Länge  $1^{\text{m}}$  und dem Radius  $1^{\text{m}}$  verbundenen eines von der Länge  $\varphi$  wirken muß, um der Torsionskraft das Gleichgewicht zu halten, wenn wir den untersten Querschnitt um einen Winkel  $\omega$  haben, so daß der von dem Ende des Hebelarms durchlaufene Bogen die Länge des Radius erreicht hat; oder er ist, wenn wir  $\varphi$  gleich dem Radius des Stabes, gleich  $1^{\text{m}}$  setzen, gleich jener Kraft, welche, an demselben Orte des Stabes wirkend, den Stab so stark tordiert, daß der äußerste Punkt des Radius im untersten Querschnitt seinen ursprünglichen Ort gegen von  $1^{\text{m}}$  zurücklegt.

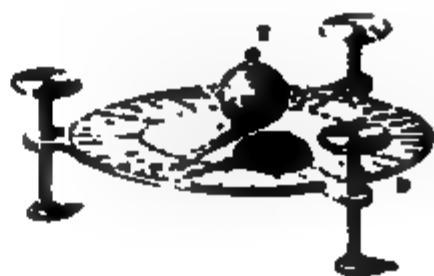
Die Dimension des Koeffizienten  $D$  ist die Dimension des Elastizitätskoeffizienten der Querschnitte einer Kraft und einer Fläche. Man findet das sofort, wenn wir die Gleichung für  $D$  auflösen

$$D = \frac{F \cdot l}{r^2 \cdot \omega r}.$$

$l$  eine Länge ist und ebenso  $\omega r$ , so ist der Quotient beider eine reine Zahl.  $F$  ist das Drehungsmoment, Kraft mal Länge und durch die dritte Potenz einer Länge dividiert. Der Quotient einer Kraft und des Quadrats einer Länge.

Die oben beschriebene Methode von Coulomb eignet sich besonders zur Untersuchung der Torsion an Stäben von großen Dimensionen. Um die wegen ihrer vielen Anwendungen weit wichtigeren Gesetze der Torsion an Fäden oder Drähten zu untersuchen, hat Coulomb eine andere Methode an<sup>1)</sup>, die er die Methode der Oszillationen nannte. Wir hängen einen Faden mit seinem oberen Ende an einen festen Haken  $A$  (Fig. 67) und hängen an sein unteres Ende einen schweren Körper, z. B. eine Metallkugel. Läßt man die Kugel vertikal herab, so dreht man dieselbe um die vertikale Achse in einen beliebigen Winkel und überläßt sie dann sich selbst. Infolge der durch die Drehung entstandenen Torsionskraft wird der Faden allmählich wieder aufgedreht und dabei die Kugel um die vertikale Achse mit einer bestimmten Geschwindigkeit rotieren machen, da die Torsionskraft kontinuierlich wirkt. Nach einiger Zeit wird sich der Faden in der Lage befinden, welche er einnahm, bevor er tordiert war. Aber in diesem Augenblicke ist auch die Rotationsgeschwindigkeit am größten geworden, und die Bewegung wird wegen der erlangten Geschwindigkeit fort dauern und

Fig. 67.



<sup>1)</sup> Coulomb, Memoires de l'Acad. des Sciences Paris 1784

der Faden eine entgegengesetzte Torsion erhalten. Dadurch wird  $n$  und nach die Bewegung verzögert, und sie wird gleich Null, wenn Winkel der entgegengesetzten Torsion gleich dem ursprünglichen Torsionswinkel geworden ist. Dann wird sich die Bewegung umkehren, wie über die Gleichgewichtslage hinausgehen usf., so daß sie dieselben Änderungen zeigt wie das Pendel; es wird eine hin- und herdrehende Bewegung eintreten mit abnehmender Amplitude, weil Reibung, Widerstand der Luft und die unvollkommene Elastizität des Drahtes eine ungeheure Fortdauer verhindern.

Wenn die Torsionskraft des Fadens wirklich proportional ist dem Torsionswinkel, so müssen die Oszillationen dieselbe Zeit dauern, welche auch ihre Ausdehnung sei, ob sie mehrere ganze Umdrehungen umfassen oder nur wenige Bruchteile eines Grades. Denn dann wird in demselben Verhältnisse, als die Drehung aus der Gleichgewichtslage größer wird, auch die Drehungsgeschwindigkeit größer, welche die Torsionskraft dem Faden erteilt; wenn aber die Geschwindigkeit immer der Drehung proportional ist, der doppelten Drehung die doppelte, der dreifachen die dreifache Geschwindigkeit entspricht, so müssen alle Drehungen, alle Oszillationen in gleichen Zeiten zurückgelegt werden.

Ebenso folgt aber, daß, wenn dieser Isochronismus der Oszillationen stattfindet, daß dann auch die Proportionalität zwischen Torsionskraft und Torsionswinkel besteht. Es genügt daher, um das erste der aufgestellten Gesetze für diesen Fall zu beweisen, zu zeigen, daß die Oszillationen isochron sind.

Um diese Beobachtung mit der notwendigen Genauigkeit zu machen, verfährt man in ganz ähnlicher Weise wie bei Pendelbeobachtungen. Man hängt den Faden an einem Widerhalt  $A$  auf (Fig. 67), befestigt unter der Kugel  $B$  einen möglichst leichten Zeiger  $C$  und stellt zur Messung der Oszillationsweiten einen geteilten Kreis darunter, so daß dessen Mittelpunkt von dem verlängerten Faden getroffen wird. Der Beobachter stellt sich in einer gewissen Entfernung mit einem Fernrohr so auf, daß er den Zeiger visieren und eine Sekundenuhr beobachten kann, die er zu arretieren und loszulassen imstande ist. Im Augenblick, in welchem der Zeiger das Gesichtsfeld des Fernrohrs passiert, setzt er die Uhr in Gang. Nach Zählen von  $n$  Oszillationen mit der Amplitude  $A$  bestimmt er die verflossene Zeit. Dieselbe Beobachtung wird mit kleineren oder größeren Oszillationsweiten gemacht; der Versuch zeigt die Gleichheit der Oszillationsdauer auch bei großen Oszillationen, welche bei Glasfäden selbst mehr als eine ganze Umdrehung betragen dürfen. Es folgt also, daß die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist. Bei einigen Metallen ist jedoch nach Versuchen von Warburg<sup>1)</sup> diese Proportionalität nur bei kleinen Drehungen vorhanden; er fand nämlich, daß die Schwingungsdauer eines Kupferdrahtes bei einer Amplitude von  $7^\circ$  schon im Verhältnis von 1,0023 : 1 größer als bei ganz kleinen Amplituden war.

Bezeichnet man nun mit  $f$  die Torsionskraft für die Einheit der Drehung, oder die Kraft, welche, an einem Hebelarme von der Länge

1) Warburg, Berichte der naturwissenschaftl. Gesellschaft zu Freiburg. 7. 1880. Wied. Ann. 10. 1880.

Millimeters angebracht, der Torsion des Fadens das Gleichgewicht hält, wenn die Drehung so groß war, daß das Ende des Hebels einen Bogen von 1<sup>mm</sup> Länge zurücklegte — man könnte sie als den Torsionskoeffizienten dieses bestimmten Drahtes bezeichnen —, so hat man für die Kraft  $F$ , welche eine Drehung um einen Bogen  $\omega$  bewirkt,

$$F = f \cdot \omega.$$

Da die Torsionskraft ihren Sitz nur in dem Faden selbst hat, so hängt sie nicht von der Natur und dem Gewicht der Kugel  $B$  ab. Indes, da es die Torsionskraft ist, welche die Kugel in Bewegung setzt, so wird die derselben erteilte Geschwindigkeit und die Oszillationsdauer von der Masse der Kugel abhängig sein. Es ist nicht schwierig, diese Abhängigkeit zu erhalten.

Der Torsionskraft hält bei der Drehung um einen Bogen  $\omega$  die im Abstände 1 von der Fadenachse angebrachte Kraft  $f\omega$  das Gleichgewicht, die Bewegung erfolgt also gerade so, als wenn der Faden keine Drehungskraft hätte, sondern im Abstände 1 von der Drehungsachse eine Kraft  $f\omega$  dem System eine Drehung in demselben Sinne erteilen würde, wie es die Torsionskraft tut. Diese Kraft folgt ganz denselben Gesetzen, wie jene, welche die Bewegung des Pendels veranlaßte. Denn beim Pendel hatten wir, wenn das Gewicht des schweren Punktes am Ende des Pendels  $m$  war, für einen Ausschlagswinkel  $\alpha$  als bewegende Kraft den Wert  $gml \sin \alpha$ , oder da für die kleinen Schwingungen, für welche unser Ausdruck für die Schwingungsdauer galt,  $\sin \alpha = \alpha$  gesetzt werden kann, für die bewegende Kraft  $gml\alpha$ ; also auch eine bewegende Kraft, welche dem Ausschlagswinkel proportional ist. Wie wir beim Pendel als Ausdruck für die Schwingungsdauer hatten,

$$t = \pi \sqrt{\frac{ml^2}{gml}}.$$

Es folgt, daß, wenn im Abstände 1 von unserem Faden ein schwerer Punkt vom Gewichte  $m$  wäre, der Ausdruck für die Schwingungsdauer sein würde

$$t = \pi \sqrt{\frac{m}{f}}.$$

Anstatt des Punktes von der Masse  $m$  im Abstände 1 haben wir aber den um den Faden verteilte Masse  $M$  der schweren Kugel und des Zeigers. Bezeichnen wir mit  $Mk^2$  das Trägheitsmoment der Masse  $M$  in bezug auf die vertikale Drehungsachse so ist dieses gleich der Masse  $m$ , welche im Abstände 1 von der Drehungsachse, die rings verteilt liegenden Massenbeulen ersetzt. Wir erhalten demnach für die Schwingungsdauer in diesem Falle

$$t = \pi \sqrt{\frac{Mk^2}{f}}.$$

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der schwingenden Masse kann man hier die § 34 besprochene Methode anwenden, bei welcher wir eine jetztigen ähnliche Anordnung des Versuches vorausgesetzt haben. Man hätte nur als Zeiger an der Kugel der Fig. 67 einen leichten Stab zu



wählen, der in seiner Mitte unten an der Kugel befestigt ist, und diesen in der § 34 angegebenen Weise zu belasten. Am besten versieht man dazu den Stab in genau gemessenen und an beiden Seiten gleichen Abständen  $r_1, r_2$  mit Spitzen, welche nach oben hervorstehen, und hängt auf diese an kleinen Ringen die Gewichte. Die Rechnungen sind dann genau so zu führen, wie es § 34 angegeben ist.

Ist aber die Masse des Drahtes gegenüber derjenigen der Kugel sehr klein, und benutzt man als Zeiger einfach eine auf der Kugel gezogene Marke, so kann für das Trägheitsmoment der schwingenden Masse einfach das der Kugel eingesetzt werden. Ist der Radius der Kugel gleich  $a$ , so ist das Trägheitsmoment derselben bezogen auf die mit einem vertikalen Durchmesser der Kugel zusammenfallende Rotationsachse nach § 19

$$Mk^2 = \frac{2}{5} \cdot Ma^2;$$

somit erhalten wir für die Dauer einer Oszillation unserer Kugel infolge der Torsionskraft des Fadens

$$t = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}.$$

Will man nun zwei Fäden verschiedener Länge, verschiedener Dicke und verschiedener Substanz miteinander vergleichen, so hängt man sie nacheinander an demselben Punkte  $A$  auf und befestigt an ihnen dieselbe Kugel. Ist ihre Oszillationsdauer verschieden, gleich  $t$  und  $t'$ , so kann das nur daher rühren, daß ihre Torsionskräfte verschieden sind. Wären dieselben  $f$  und  $f'$  so hat man

$$t = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}, \quad t' = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f'}},$$

und daraus

$$\frac{f}{f'} = \frac{t'^2}{t^2}.$$

Man sieht, daß die Werte für die Torsionskraft umgekehrt proportional sind den Quadraten der Schwingungsdauern. Mißt man<sup>1)</sup> nun diese Zeiten, so findet man unsere früheren Gesetze, nämlich 1)  $f$  ist direkt proportional der vierten Potenz des Radius des Drahtes, 2)  $f$  ist umgekehrt proportional der Länge des Drahtes, 3)  $f$  ist direkt proportional einem für die verschiedenen Substanzen verschiedenen Koeffizienten; es ist somit

$$f = D \frac{r^4}{l} \quad \text{oder} \quad F = f\omega = D \frac{r^4}{l} \omega,$$

wie wir vorher ableiteten.

Wir haben vorher bemerkt, daß die Torsionskraft des Fadens unabhängig ist von dem Gewichte der Kugel; Coulomb hat das bei seinen Versuchen für Metalldrähte direkt nachgewiesen und Warburg<sup>2)</sup> hat es bestätigt. Für zusammengesetzte Seidenfäden gilt das nach den Beobach-

1) Man sehe die Prüfung dieser Sätze durch *Baumeister*, Wiedem. Ann. 18. 1883. Derselbe hat eine Anzahl Drähte verschiedenen Durchmessers von Eisen, Kupfer, Messing untersucht; die für verschiedene Drähte desselben Materials gefundenen Torsionskoeffizienten schwanken erheblich, lassen aber keine gesetzmäßige Änderung mit dem Durchmesser oder dem am Drahte hängenden Gewichte erkennen.

2) *Warburg* a. a. O., man sehe auch *Baumeister* a. a. O.

gen von Gauß<sup>1)</sup>) indes nicht, für diese nimmt die Torsionskraft mit anwachsendem Gewichte zu.

### § 53.

**Beziehung zwischen dem Torsions- und Elastizitätskoeffizienten.**  
Bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes auftretende elastische Kraft ist nur abhängig von der Starrheit des Körpers, so daß wir in der Torsion, wie ein näheres Eingehen auf die molekularen Vorgänge bei der Torsion nicht, das Maß der Starrheit erhalten.

Denken wir uns einen vertikalen Zylinder, den wir durch eine an dem untern Ende angebrachte Kraft tordieren, so wird dadurch jeder Querschnitt des Zylinders um seinen Mittelpunkt gedreht, und zwar um so mehr, je näher derselbe dem untern Ende des Zylinders liegt. Die Verbindungslinie zweier Punkte in untereinander liegenden Querschnitten, welche vor der Torsion vertikal war, bildet daher jetzt mit ihrer früheren Richtung den Winkel  $\varphi$ , oder eine vor der Torsion mit der Achse parallele Faser des Zylinders bildet nach der Torsion eine Schraubenlinie, welche überall um den Winkel  $\varphi$  gegen die Vertikale geneigt ist. Die Größe dieses Winkels, der die Verschiebung der Moleküle gegeneinander mißt, und den wir schon im § 50 deshalb den Verschiebungswinkel nannten, kann man aus der Größe des Torsionswinkels ableiten. Ist nämlich der oberste Querschnitt um den Winkel  $\omega$  gedreht, so wird beim Abwickeln auf dem Zylinder die erwähnte Schraubenlinie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Länge  $l$  des Zylinders, dessen andere Kathete der von dem untern Ende der Schraubenlinie beschriebene Bogen, also, wenn wir den Abstand der Faser von der Achse des Zylinders mit  $r$  bezeichnen, gleich  $r\omega$  ist. Der Winkel  $\varphi$  ist der in diesem Dreieck der Seite  $r\omega$  gegenüberliegende Winkel. Zur Bestimmung von  $\varphi$  setzen wir daher

$$\text{tang } \varphi = \frac{r\omega}{l}.$$

Da  $\varphi$  immer nur ein sehr kleiner Winkel ist,

$$\varphi = \frac{r\omega}{l}.$$

Der Verschiebungswinkel ist demnach der Größe der Torsion proportional; da nun die Torsionselastizität der Größe der Torsion proportional ist, so ist sie auch diesem Verschiebungswinkel proportional. Nennen wir nun der Flächeneinheit des untersten Querschnittes durch einen der Einheitlichen Verschiebungswinkel erzeugte Torsionskraft  $C'$ , so können wir auf dem Flächenelement des untersten Querschnittes  $\Delta q$ , dessen Größe gleich dem Querschnitte der betrachteten Faser ist, durch die Torsion erzeugte Kraft deshalb setzen

$$P = C' \varphi \Delta q;$$

Da die einzelnen Punkte dieses Flächenelements sind gegen die Punkte

<sup>1) Gauß, Intensitas vis magneticae terrestria. Göttingen 1833. Poggend. Ann. p. 241 1833.</sup>

des darüber liegenden Querschnittes alle um denselben Winkel  $\varphi$  ver. Die letzte Gleichung zeigt, daß die Konstante  $C$  nichts anderes ist als Koeffizient, mit welchem wir den Verschiebungswinkel zu multiplizieren haben, um die durch diese Verschiebung pro Flächeneinheit erweckte elastische Kraft zu erhalten. Demnach ist  $C$  nichts anderes als der Koeffizient der Starrheit, wie wir § 50 fanden,

$$C = k = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Diesen Wert von  $C$  haben wir in den Ausdruck für  $P$  einzusetzen. Derselbe wird damit

$$P = \frac{E}{2(1 + \mu)} \varphi \Delta q = \frac{E}{2(1 + \mu)} \frac{r\omega}{l} \Delta q.$$

Um aus diesem Werte den Koeffizienten  $D$  abzuleiten, haben wir hieraus zunächst das Drehungsmoment zu berechnen, welches der Stab infolge der Torsion um  $\omega$  erhält. Der Wert von  $P$  ist die Tangentialkraft in dem Flächenelemente  $\Delta q$  des untersten Querschnitts, welches im Abstände  $r$  von der Achse liegt. Das daraus hervorgehende Drehmoment ist

$$Pr = f = \frac{E}{2(1 + \mu)} \frac{\omega}{l} r \Delta q.$$

Um hieraus das Drehungsmoment des ganzen untersten Querschnitts zu erhalten, haben wir für alle Flächenelemente desselben das Drehmoment  $f$  in der angegebenen Weise zu bilden und alle diese Drehmomente zu summieren. Zu dem Zwecke können wir uns vorstellen, daß für das Flächenelement  $\Delta q$  den unendlich schmalen Ring  $2\pi r dr$  an der Stelle  $r$  von der Achse befindet, da für alle Elemente dieses Ringes das Drehungsmoment denselben Wert hat, und haben die Summe für alle Ringe zu bilden, deren Radius zwischen 0 und  $\varrho$  variiert, wenn  $\varrho$  der Radius des Zylinders ist. Damit wird

$$F = \frac{E}{2(1 + \mu)} \frac{\omega}{l} \int_0^{\varrho} 2\pi r^3 dr$$

und dieses Integral ist nach E 1 und E VIII:

$$F = \frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega \cdot \varrho^4}{l};$$

ein Ausdruck, der sich von dem im vorigen Paragraphen experimentell erhaltenen nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle des dort benutzten Koeffizienten  $D$  hier der Wert desselben durch den Elastizitätskoeffizienten  $E$  und durch den Kontraktionskoeffizienten  $\mu$  gegeben ist; den Koeffizienten  $D$  erhalten wir somit

$$D = \frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Diese Berechnung des Koeffizienten  $D$ , darauf möge nochmals ausdrücklich hingewiesen werden, gilt nur für zylindrische Stäbe, nicht nur weil wir hier das Drehungsmoment für den Kreis berechnet haben, sondern weil nur für kreisförmige Querschnitte

ichung zugrunde liegende Satz gilt, daß lediglich eine Verschiebung der zueinander liegenden Querschnitte stattgefunden habe. Bei nicht zylindrischen Querschnitten werden auch die einzelnen Moleküle eines und desselben Querschnittes gegeneinander verschoben, und die vor der Torsion ebenen Schichten bleiben nicht eben. De Saint Venant hat die Torsion verschiedener geformter Stäbe ausführlich untersucht<sup>1)</sup>; wir begnügen uns hier auf die Arbeit hinzuweisen.

Einen angenäherten Ausdruck für das Torsionsmoment erhalten wir, wenn wir beachten, daß

$$\int r^2 \Delta q = M$$

das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in bezug auf die Achse des Stabes ist, denn der Ausdruck bedeutet die Summe aller Flächenelemente  $\Delta q$  des untersten Querschnittes jedes multipliziert mit dem Quadrate des Abstandes von der Achse des Stabes. Wird demnach die Veränderung der einzelnen Querschnitte außer acht gelassen, so erhält man

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{M}{l} \omega.$$

Für sehr kleine Torsionen kann man diese Gleichung ohne merklichen Fehler verwenden.

Den nur von dem Material abhängigen Koeffizienten

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

zeichnet man als den Torsionskoeffizienten des betreffenden Materials.

Hiernach erhalten wir aus der Beobachtung der Torsion und noch einer andern Äußerung der elastischen Kraft ebenfalls ein Mittel, um  $E$  und  $\mu$  abzuleiten, wie man andererseits aus den bekannten Werten von  $E$  und  $\mu$  den Torsionskoeffizienten berechnen kann. Die im § 50 behandelten Werte von  $\mu$  sind meist auf diese Weise bestimmt worden.

Kohlrausch und Loomis<sup>2)</sup> fanden bei ihren Versuchen, welche den Zweck hatten, die Abhängigkeit des Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur zu bestimmen, und bei denen sie nach der Coulombschen Methode die Schwingungsdauer dünner Drähte bei verschiedenen Temperaturen betrachteten, die Werte von

$$\frac{E}{2(1+\mu)}$$

für Eisen gleich 6940

„ Kupfer „ 3900

„ Messing „ 3200

Die Werte von  $E$  erhielten sie aus Bestimmungen der Schwingungsdauer der Longitudinaltöne

für Eisen  $E = 20310$

„ Kupfer „ = 12140

„ Messing „ = 9810.

<sup>1)</sup> De Saint Venant, Mémoire sur la torsion des prismes. Mémoires des sciences et belles-lettres 14. p. 233–560. Paris 1856.

<sup>2)</sup> Kohlrausch und Loomis, Poggend. Ann. 141. 1870.

Daraus würden sich für  $\mu$  die Werte ergeben, für Eisen 0,45, für Kupfer 0,55, für Messing 0,53, im Mittel also fast genau 0,5, eine Zahl, welche bedeuten würde, daß bei einfachem Zuge gar keine Änderung des Volumens eintrete, die indes gegenüber allen sonstigen Beobachtungen zu groß ist. Worin diese Abweichung von den sonstigen Resultaten ihren Grund hat, haben Kohlrausch und Loomis nicht weiter untersucht. Das benutzte Material waren hartgezogene Drähte, der Eisendraht von 0,1106<sup>mm</sup>, der Kupferdraht von 0,152 und der Messingdraht von 0,123<sup>mm</sup> Radius; es ist wahrscheinlich, daß bei so feinen Drähten das Material nicht mehr isotrop ist, und daß demnach die für dieselben unter Voraussetzung der Isotropie abgeleiteten Sätze keine Gültigkeit mehr haben.

Bei ganz ähnlich durchgeführten Versuchen findet Baumeister<sup>1)</sup> für Drähte gleichen Materials aber verschiedenen Durchmessers sehr schwankende Werte. So erhält er für ein und dasselbe in Drähte verschiedener Dicke ausgezogene Eisen folgende Werte:

Durchmesser mm	$E$	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	$\mu$
1,23	19 800	7420	0,33
1,01	19 400	7880	0,23
0,72	20 800	8280	0,23
0,50	20 400	8220	0,23
0,20	20 100	7540	0,33

Für ein zweites Eisen, aus welchem Drähte zwischen 0,3 und 0,09<sup>mm</sup> Durchmesser gezogen worden, ergab sich für  $\mu$  der Wert 0,31; 0,32; 0,42 und 0,32. Auch hier zeigt sich keine Abhängigkeit von der Dicke, für den feinsten Draht 0,9 fand sich für  $\mu$  derselbe Wert wie für den Draht von 1,28<sup>mm</sup> Durchmesser.

Für Messing fand Baumeister für  $\mu$  Werte zwischen 0,34 und 0,50, letztern für den feinsten von ihm untersuchten Draht von 0,1<sup>mm</sup> Durchmesser.

## § 54.

**Bieungselastizität.** Außer durch Ausdehnung und Torsion kann die elastische Kraft fester Körper noch auf eine dritte Art geweckt werden nämlich durch Biegung. Wenn ein Stab  $AB$  (Fig. 68) mit dem einen Ende in einem Schraubstock festgeklemmt ist, und man hängt an das andere freie Ende  $B$  ein Gewicht  $P$ , so biegt er sich und nimmt die Gestalt einer Kurve an, bis er im Gleichgewicht ist. Dann hält die elastische Kraft des Stabes dem Gewichte  $P$  das Gleichgewicht. Man sieht, daß bei dieser Bewegung die obere horizontale Fläche des Stabes sich ausdehnt, während die untere Seite des Stabes zusammengedrückt wird, und daß durch diese Verschiebung der Moleküle sich Kräfte entwickeln müssen, welche den Stab in seine frühere Lage zurückführen sobald das Gewicht abgenommen ist.

1) Baumeister, Wiedem. Ann. 18. p. 578. 1883.

Um diese Erscheinung zu untersuchen, kann man die Enden  $A$  und oder vielmehr auf diesen gezogene Marken mit dem Kathetometer messen; man legt die zu untersuchenden Stäbe anfänglich horizontal, befestigt sie an ihrem Ende  $C$  mit einem Gewichte  $P$  und mißt dann die Länge  $a$ , um welche die Marke  $C$  nach  $B$  herabsinkt. Dieser Länge  $a$ , welche man den Pfeil der Biegung nennt, ist die immer sehr klein ist, lassen wir den von der Marke beschriebenen Bogen gleich setzen. Eine ähnliche Methode wandte Gerstner in seinen Versuchen an<sup>1)</sup>.

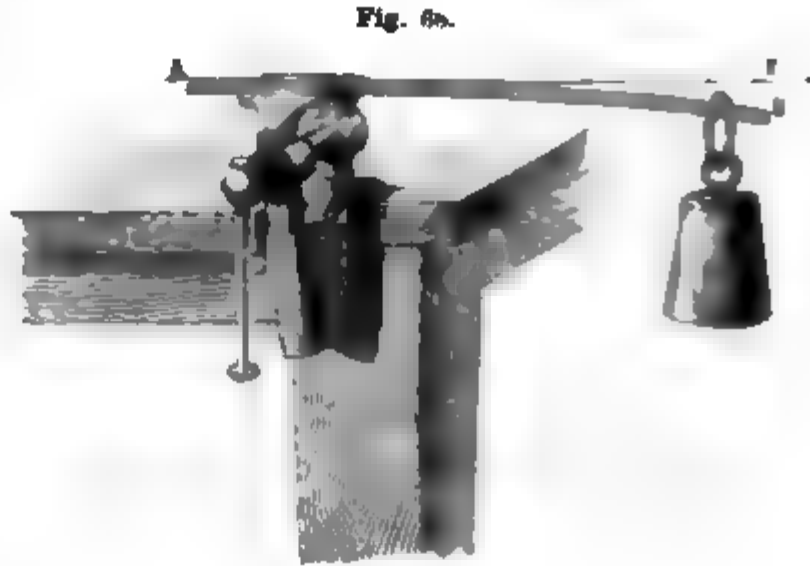


Fig. 68.

Bei einer Durchführung dieser Versuche findet man zunächst, daß der Pfeil der Biegung der Größe des suspendierten Gewichtes proportional, somit auch, daß die bei der Biegung auftretende Elastizität der Biegung proportional ist, wie sie bei der Ausdehnung der Verlängerung proportional ist. Die Größe des Biegungspfeiles hängt aber außerdem von den Dimensionen des Stabes, der Gestalt seines Querschnittes und vom Elastizitätskoeffizienten ab.

Für den einfachsten Fall, den eines rechteckigen Stabes, dessen horizontale Seite gleich  $b$ ,

seiner vertikale gleich  $e$

ist dessen Länge von

dem Punkte der Einklem-

mung bis zur Stelle, wo

das Gewicht hängt, gleich  $l$

sein können wir diese Ab-

weichung aus einer ge-

nauen Betrachtung des

Verlaufs der Biegung

folgender Weise ab-

lesen. Die Biegung kommt

zustande, daß an

der oberen Seite des Sta-

bes die Längsfasern aus-

gedehnt, an der unteren

Seite dagegen zusammenge-

drückt werden; im Innern des Stabes muß es

aber eine Faserschicht geben, welche weder ausgedehnt noch zusammen-

gedrückt wird, und wenn der Stab ganz homogen ist, muß diese Schicht

eben die mittlere Schicht des Stabes sein. Stelle (Fig 69)  $AB$  einen

senkrechten Schnitt durch den gebogenen Stab dar,  $A$  sei der Punkt der

Zusammendrückung,  $B$  der Aufhängepunkt des Gewichtes  $P$  und  $MN$  der

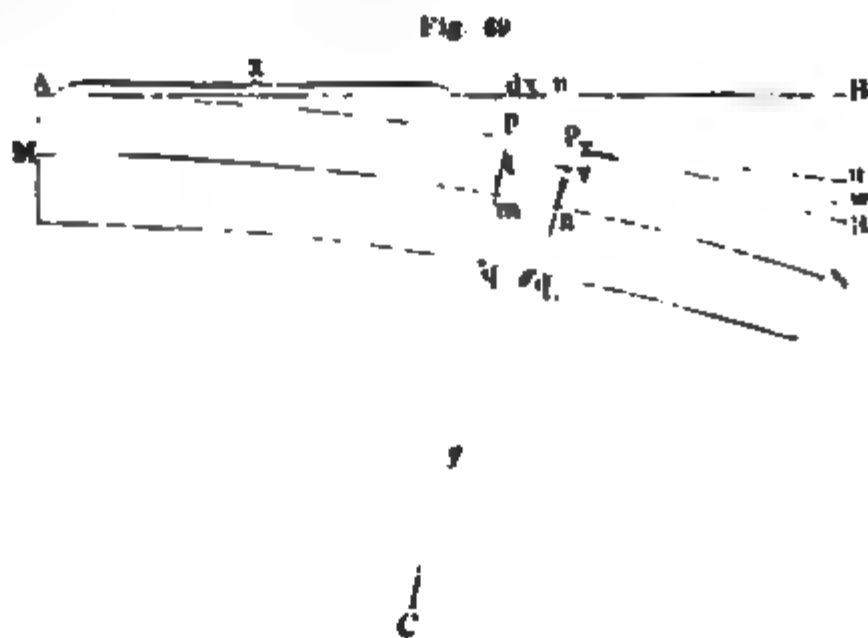


Fig. 69.

<sup>1)</sup> Gerstner, Handbuch der Mechanik. I.

Durchschnitt durch die nicht verlängerte Faserschicht. Nun sei  $pq$  ein Querschnitt des Stabes, der von dem Anfange des Stabes um  $x$  entfernt sei, und  $rs$  ein zweiter von dem ersten um die unendlich kleine Strecke  $dx$  entfernter Querschnitt. Während in der Gleichgewichtslage die beiden Schnitte parallel sind, ist nach der Biegung durch die Verlängerung der über  $mn$  und die Verkürzung der unter  $mn$  liegenden Faser der zweite Querschnitt gegen den ersten um einen Winkel  $\varphi$  gedreht. Lege wir durch den Punkt  $n$ , in welchem  $rs$  die nicht verlängerte Faser schneidet  $p'q' \parallel pq$ , so können wir die Biegung an dieser Stelle als eine Drehung des Querschnittes  $rs$  um die durch  $n$  gelegte Horizontale als Drehungsachse auffassen deren Größe jenem Winkel  $\varphi$  gleich ist. Damit sind wir auch sofort imstande die Gleichgewichtsbedingung für den gebogenen Stab aufzustellen; die Bedingung ist, daß dem gedrehten Querschnitt durch die elastischen Kräfte ein ebenso großes Drehungsmoment nach rückwärts erteilt wird, als ihm durch das Gewicht  $P$  nach entgegengesetzter Richtung gegeben wird. Wir können nun das System  $rsN$  als einen Winkelhebel ansehen, an dessen einem Arm  $nN$  im Punkte  $N$  das Gewicht  $P$  angreift, dessen anderer Arm durch den Querschnitt  $rs$  gegeben ist, an dessen sämtlichen Punkten Kräfte angreifen, welche ihn in seine frühere Lage zurückziehen. Das aus den letztern resultierende Drehungsmoment erhalten wir folgendermaßen. Es sei  $v$  der Durchschnitt durch ein Element des Schnittes  $rs$ , welches um  $y$  von  $n$  entfernt sei, und dessen Höhe  $dy$  sei, so daß sein Querschnitt  $b \cdot dy$  ist. Die dieses Element mit  $pq$  verbindenden Fasern  $tv$  sind um  $tv - mn = y \cdot \varphi$  verlängert. Die Kraft, mit der dieses Element gegen  $t$  infolgedessen gezogen wird, ist, wenn wir mit  $E$  den Elastizitätskoeffizienten des Stabes bezeichnen, und beachten, daß  $mn = dx$  ist,

$$E \frac{y\varphi}{dx} b dy,$$

und das infolgedessen dem Schnitte erteilte Drehungsmoment

$$y E \frac{b\varphi}{dx} y dy = E \frac{b\varphi}{dx} y^2 dy.$$

Ein ebensolches Drehungsmoment enthält der Schnitt für jedes Element  $b dy$ ; die Summe derselben ist das ganze Drehungsmoment des Schnittes. Wir erhalten diese Summe, indem wir in jenem Ausdrucke für  $y$  nach und nach alle Werte setzen für  $y$  von 0 bis  $\frac{e}{2}$  und von 0 bis  $-\frac{e}{2}$  oder kurz von  $-\frac{e}{2}$  bis  $+\frac{e}{2}$ . Die gesuchte Summe ist demnach das bestimmte Integral

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \frac{b\varphi}{dx} y^2 dy = E \frac{b\varphi}{dx} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} y^2 dy.$$

Dasselbe ergibt sich nach E 1 und E VIII

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \frac{b\varphi}{dx} y^2 dy = \frac{E}{12} \frac{b \cdot e^3}{dx} \varphi.$$



Diesem Drehungsmomente hält das der Zugkraft  $P$  des Gewichtes, oder  $n \cdot P$  das Gleichgewicht. Für  $n \cdot B_1$  können wir setzen  $n_1 B_1 = l - (x + dx)$  oder, da  $dx$  gegen  $x$  verschwindend klein ist, gleich  $l - x$ . Damit wird die Gleichgewichtsbedingung des Schnittes

$$\frac{E}{12} \frac{b e^3}{dx} \varphi = P (l - x)$$

$$\frac{E}{12} b e^3 \varphi = P (l - x) dx \dots \dots \dots (1)$$

Den in diesem Ausdrucke auftretenden Winkel  $\varphi$  können wir durch das Element des Biegungspfeiles  $B_1 B$  ausdrücken; legen wir durch  $r$  eine Tangente an den Stab und ziehen durch  $r$  ebenfalls eine Linie parallel der Tangente des Stabes bei  $p$ , so bilden diese beiden Linien den Winkel  $\varphi$  miteinander. Aus dem Biegungspfeil schneiden dieselben dann das Element  $dr$ , und indem wir das als den zu  $\varphi$  gehörigen mit  $n_1 B_1$  oder  $(l - x)$  beschriebenen Bogen ansehen, können wir schreiben

$$\varphi (l - x) = u''; \quad \varphi = \frac{u''}{l - x}.$$

Damit wird die Gleichgewichtsbedingung, wenn wir schließlich das Element  $u''$  des Biegungspfeiles, entsprechend der dem letztern gegebenen Bezeichnung  $\alpha$  mit  $d\alpha$  bezeichnen,

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot e^3 d\alpha = P (l - x)^2 dx.$$

Dieselbe Bedingung gilt für jeden Schnitt, den wir ebenso wie den betrachteten durch den Stab legen; die Gleichgewichtsbedingung des ganzen Stabes erhalten wir demnach, indem wir auf beiden Seiten die Summe der zu jedem einzelnen Querschnitt geltenden Ausdrücke bilden. Auf der linken Seite geschieht das, indem wir die Summe aller Elemente des Biegungspfeiles bilden, also einfach statt  $d\alpha$  schreiben  $\alpha$ , auf der rechten, indem wir nach und nach für  $x$  alle Werte von 0 bis  $l$  einsetzen und wie oben summieren. Diese Summation gibt dann

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot e^3 \alpha = \frac{1}{3} P \cdot l^3$$

$$\alpha = \frac{4 P \cdot l^3}{E \cdot b e^3} \dots \dots \dots (2)$$

daß die durch den Pfeil der Biegung gemessene Biegung ist der dritten Potenz der Länge direkt, jener der Höhe und der ersten Potenz der Breite und dem Elastizitätskoeffizienten umgekehrt proportional.

Ebenso wie den Biegungspfeil  $\alpha$  können wir aus der Gleichung (1) den Winkel  $\Phi$  berechnen, um welchen sich der Querschnitt des Stabes, an welchem das Gewicht  $P$  angreift, gedreht hat. Dieser Winkel  $\Phi$  ist die Summe aller Winkel  $\varphi$ , wenn  $x$  von 0 bis  $l$  wächst. Wir erhalten daher weiteres

$$\frac{E}{12} b \cdot e^3 \Phi = \int_0^l P (l - x) dx = \frac{1}{2} P l^2$$

$$\Phi = \frac{6 P \cdot l^2}{E \cdot b e^3}.$$

Aus dem hier abgeleiteten Satze über die Biegung eines an seinem einen Ende festen, an seinem andern Ende einem biegenden Zuge ausgesetzten Stabes können wir durch eine einfache Überlegung auch die Biegung eines an seinen beiden Enden auf Schneiden gelegten und in seiner Mitte einem biegenden Zuge ausgesetzten Stabes ableiten. Nehme wir an der Stab liege horizontal und er werde in seiner Mitte durch einen Druck  $P$  vertikal nach unten gedrückt. Jede der beiden Schneiden hat dann den halben Druck zu tragen. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung übt demnach auch jede der beiden Schneiden den Druck  $\frac{1}{2}P$  nach oben hin aus. Man erkennt daraus, daß die Biegung des Stabes ganz die gleiche ist, wie wenn der Stab in der Mitte befestigt ist, und an jedem seiner Enden der Zug  $\frac{1}{2}P$  nach oben wirkt. Das heißt der Biegungepfeil eines an seinen Enden aufgelegten und in der Mitte durch einen Zug  $P$  gebogenen Stabes von der Länge  $l$  ist gleich dem Biegungepfeile eines an seinem einen Ende festen Stabes von der Länge  $\frac{l}{2}$ , welcher durch eine Kraft  $\frac{1}{2}P$  gebogen wird. Für den Biegungepfeil, die in der Mitte des Stabes beobachtete Senkung, eines solchen Stabes von der Länge  $l$ , der Breite  $b$ , der Dicke  $e$  erhalten wir demnach

$$\alpha_1 = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}P \left(\frac{1}{2}l\right)^3}{E \cdot b e^3} = \frac{P}{4E} \frac{l^3}{b e^3}$$

und für den Winkel  $\Phi$ , um welchen der auf den Schneiden ruhende Querschnitt infolge der Durchbiegung des Stabes gedreht ist

$$\Phi_1 = \frac{3P}{4E} \cdot \frac{l^2}{b e^3}$$

Es möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß das Produkt  $b e^3$  das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in bezug auf eine durch seinen Mittelpunkt gehende zur Biegungeebene senkrechte, also der Breite parallele Achse multipliziert mit 12 ist, wie man leicht findet, also

$$b e^3 = 12 M.$$

Führen wir dieses Trägheitsmoment ein, so wird

$$\alpha = \frac{P}{3E} \cdot \frac{l^3}{M}; \quad \alpha_1 = \frac{P}{48E} \cdot \frac{l^3}{M}$$

$$\Phi = \frac{P}{2E} \cdot \frac{l^2}{M}; \quad \Phi_1 = \frac{P}{16E} \cdot \frac{l^2}{M}$$

Wir bemerken, daß diese Ausdrücke ihre Gültigkeit behalten, wenn die Stäbe andere als einfach rechteckige Querschnitte haben, wenn  $M$  das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf eine durch den Schwerpunkt der Fläche gehende, in der Fläche liegende, zur Biegungeebene senkrechte Achse bedeutet.<sup>1)</sup>

Die Biegung ist in den betrachteten Fällen und so in allen Fällen der biegenden Kraft proportional, woraus folgt, daß die im Innern des gebogenen Stabes geweckte elastische Kraft der Größe der Biegung

1) Man sehe *Clebsch*, Theorie der Elastizität der festen Körper p. 87 ff. p. 363 ff.

portional ist. Es folgt daraus nach den Gesetzen der Pendelschwingungen, daß der gebogene und dann sich selbst überlassene Stab ebenso isochrone Schwingungen um seine Gleichgewichtslage macht, wie wir es bei der Torsion gefunden haben.

Da man zu Untersuchungen über die Biegung von Körpern mit kleinen Stäben ausreicht, ist in den letzten Jahren vorzugsweise die Biegung in Messungen des Elastizitätskoeffizienten benutzt worden. Man wendet dazu jetzt meistens die Durchbiegung von Stäbchen an, welche an ihren Enden auf Schneiden gelegt und in der Mitte zwischen den Schneiden belastet werden, indem man auf die Mitte des Stabes eine Schneide setzt, welche auf dem Stabe aufsteht, wie die Kante des Prismas eines Wagebalkens.

Zur Bestimmung der Biegung mißt man entweder den Biegunbspfeil, also die Senkung der belasteten Stelle, oder den Winkel  $\Phi$ , um welchen der auf den Schneiden ruhende Querschnitt sich gedreht hat. Die Messung des Biegunbspfeiles geschieht entweder so, daß man durch ein neben den gebogenen Stab gestelltes Mikroskop das Herabsinken eines Punktes des gebogenen Stabes beobachtet, wie es Baumgarten<sup>1)</sup> und in einer größeren Zahl von Untersuchungen Voigt<sup>2)</sup> getan haben, oder man wendet nach dem Vorgange von Koch<sup>3)</sup> eine von Fizeau angegebene, in der Lehre von der Wärme zu besprechende Methode an, durch welche man die Verschiebung von Flächen in Wellenlängen des Natriumlichtes, deren Länge gleich  $0,00059^{mm}$  ist, mißt.

Den Winkel  $\Phi$  mißt man am besten nach der Gauß-Poggendorffschen Methode der Spiegelablesung, durch welche man die Drehung eines Spiegels bzw. eines mit dem Spiegel unabänderlich fest verbundenen Körpers oder Körperteiles sehr scharf und genau messen kann. Wegen der vielfachen Verwendung dieser Methode möge sie hier sofort erläutert werden. Es stelle Fig. 70 *ab* den auf den Schneiden  $S_1 S_2$  liegenden Stab dar, der dort einen in der Mitte  $m$  auszuübenden Zug gebogen werden soll. Oberhalb der Schneide  $S_1$  versieht man den Stab mit einem Spiegel, der fest mit ihm zur Längsachse des Stabes, so daß also die Spiegelebene vertikal aufgestellt ist. In einiger Entfernung von dem Spiegel ist ein Fernrohr  $AO$  aufgestellt, unter, über oder neben welchem ein Maßstab  $CC'$  angebracht ist, so daß derselbe der Spiegelebene, wenn der Spiegel sich in seiner Nulllage befindet und gleichzeitig der Drehungsebene des Spiegels parallel ist. Bei der oben angedeuteten Anordnung würde somit der Maßstab vertikal neben dem Fernrohr aufgestellt, und zwar in solcher Höhe, daß man, wenn der Spiegel  $s$  seine ungedrehte Lage hat, am Fadenkreuz des Fernrohrs den Nullpunkt der Teilung sieht. Der Nullpunkt der Teilung liegt demnach in diesem Falle mit der Achse des Fernrohrs in derselben Horizontalebene. Dreht sich der Spiegel um einen Winkel  $\alpha$ , geht derselbe aus der Lage  $s$ , wenn der Stab gebogen wurde, in die Lage  $s_1$  über, und sieht man im Fernrohr einen andern Teilstrich  $t$  der Skala am Fadenkreuz. Kennt man den Abstand  $os$  des Spiegels von der Skala, so erhält

1) Baumgarten, Poggend. Ann. 152. 1874.

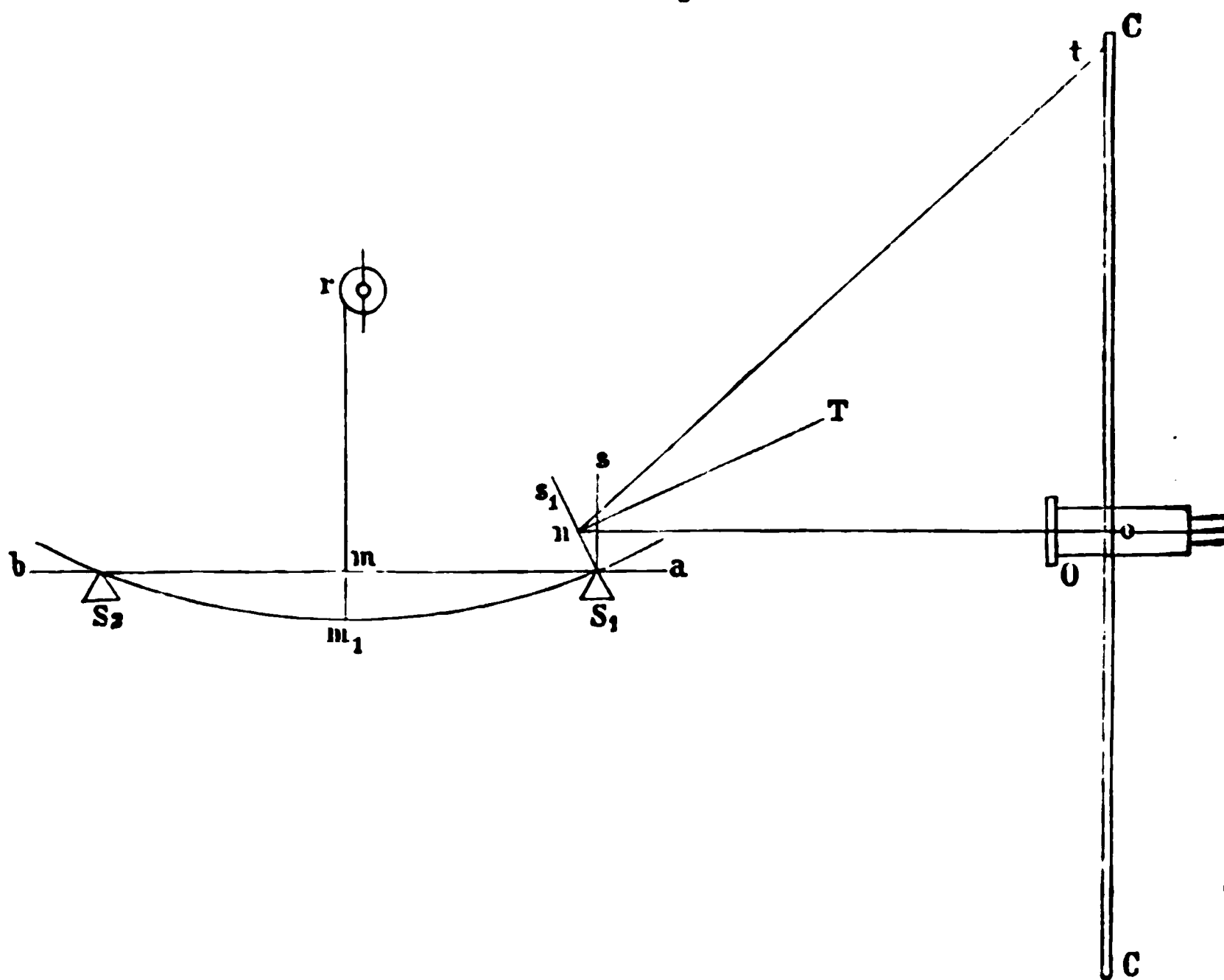
2) Voigt, Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. 1876. Wiedem. Ann. 15. 1882.

3) K. R. Koch, Wiedem. Ann. 5. 1878.

man aus dem Abstände des beobachteten Skalenteils  $t$  vom Mittelpunkt den Winkel  $\alpha$ , um welchen sich der Spiegel gedreht hat, folgendern

Da man in der Ruhelage des Spiegels den am Fernrohr befindlichen Nullpunkt der Teilung erblickt, so folgt, daß die Achse des Fernrohrs recht zur Ebene des Spiegels ist, wenn derselbe in der Ruhelage ist. Richtung  $noA$  ist somit senkrecht zur Spiegelebene in der ungedrehten Lage. Sieht man nach der Drehung des Spiegels in dem Fernrohr den Teilstrich  $t$ , so beweist das, daß der von  $t$  ausgehende Lichtstrahl am Spiegel nach der Richtung  $noA$  reflektiert wird. Nach dem Reflexionsgesetz wird ein einfallender Strahl  $tn$  stets so reflektiert, daß der

Fig. 70.



reflektierte Strahl mit der zum Spiegel senkrechten Richtung  $nT$ , dem Einfallslot, denselben Winkel bildet wie der einfallende Strahl. Halte die Spiegelnormale, das Einfallslot, aus der Lage  $noA$  in die Lage  $noA'$  um den Winkel  $\alpha$  gedreht, so muß demnach der Strahl  $tn$ , der nach Reflexion in das Fernrohr kommt, mit  $nT$  ebenfalls den Winkel  $\alpha$  bilden oder  $tno$  ist gleich dem Winkel  $2\alpha$ . Da in dem rechtwinkligen Dreieck  $ton$  die Kathete  $to$  dem Winkel  $2\alpha$  gegenübersteht, so ist

$$\tan 2\alpha = \frac{to}{on}.$$

Da in dieser Weise immer nur kleine Winkel gemessen werden können, so setzt man

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan 2\alpha = \frac{1}{2} \frac{to}{on}.$$

Eben wegen der Kleinheit des zu messenden Winkels kann man für Tangente auch sofort den Bogen einsetzen, so daß uns bei der Betrachtung der Biegung durch die Bestimmung der Ablenkung  $to$  sofort Winkel  $\Phi'$  gegeben wird.

Die Beobachtungen sind einer großen Genauigkeit fähig, da man den Abstand  $on$  recht groß wählen kann. Nehmen wir den Abstand  $on$  gleich  $5''$  und nehmen als Genauigkeitsgrenze in der Ablesung von  $to$  nur vierten Teil eines Millimeters, so würde die Ablesung die Tangente auf  $0,000025$  geben, was einer Unsicherheit von  $5''$  entsprechen würde.

Man bei guten Fernrohren den Abstand  $on$  noch erheblich größer machen und der Ablesung eine größere Schärfe geben kann, so ist es leicht möglich, die Unsicherheitsgrenze noch erheblich kleiner zu machen.

Bei den im § 50 erwähnten Messungen hat Kirchhoff<sup>1)</sup> in dieser Weise die Biegung und gleichzeitig die Torsion der von ihm untersuchten Stäbe gemessen.

Bei der Messung des Winkels  $\Phi$  ist es nicht gerade erforderlich den Spiegel unmittelbar über der Schneide anzubringen, man darf ihn an einer beliebigen Stelle zwischen der Schneide und dem freien Ende  $a$  des Stabes anbringen; da das Stück des Stabes außerhalb der Schneide geradlinig bleibt, erhält der Spiegel genau die gleiche Drehung, auch wenn man ihn  $a$  vor dem Ende des Stabes befestigt.

Auch zur Bestimmung des Biegunspfeiles hat Voigt<sup>2)</sup> bei seinen früheren Messungen die Poggendorff-Gaußsche Spiegelablesung angewandt. Die zu dem Zwecke getroffene Anordnung ist ebenfalls Fig. 70 skizziert. An der auf die Mitte des Stabes aufgesetzten, die biegenden Lasten tragenden Schneide wurde ein feiner Platindraht befestigt, der über Rolle  $r$  führte und an dieser so angebracht war, daß die Rolle in den geringsten an dem Drahte wirkenden Zug gedreht wurde. An einer Seite der Rolle war ein Spiegel angebracht, dessen Ebene der Rollenebene parallel war. Senkte infolge des biegenden Gewichtes der Stab die Rolle, wurde die Rolle und mit ihr der Spiegel gedreht. Die Drehung wurde mit Fernrohr und Skala beobachtet; wie sich aus ihr und dem bekannten Durchmesser der Rolle die Senkung  $m_1$  ergibt, sieht man unmittelbar.

Bezüglich der genaueren Anordnung verweisen wir auf die unten angeführte zitierte Arbeit von Voigt.

Wenn man neben der Biegung die Torsion ebenfalls mit Spiegel und Fernrohr beobachtet, erhält man neben dem Elastizitätskoeffizienten auch den der Kontraktion; die im § 50 erwähnten Versuche von Kirchhoff, Poggendorff u. Voigt sind in dieser Weise durchgeführt.

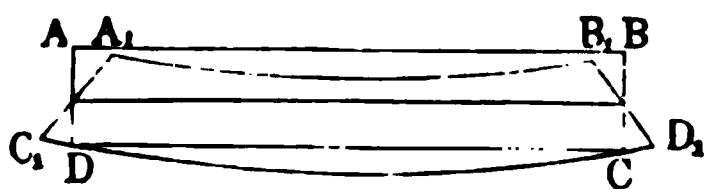
Zu den Messungen der Elastizitätskonstanten  $E$  und  $\mu$ , die wir § 50 erwähnten, hat Voigt Bieguings- und Torsionsschwingungen benutzt, aus denen man wie wir bei Besprechung der Coulombschen Methode zur Bestimmung der Torsionselastizität ableiteten, die die Schwingungen bedingenden Kräfte ebenfalls direkt berechnen kann.

<sup>1)</sup> Kirchhoff, Poggend. Ann. 108, 1859. Eine kleine Modifikation unter Anwendung von zwei Spiegeln gibt A. König, Wiedem. Ann. 28, 1886.

<sup>2)</sup> Voigt, Wiedem. Ann. 31, 1887; 34, 1888; 35, 1888; 39, 1890; 41, 1890; 42 und Voigt, Wied. Ann. 52, 1894.

Man kann an einem gebogenen Stabe auch direkt den Elastizitätskoeffizienten und Querkontraktionskoeffizienten beobachten. Die Biegung eines Stabes nach der Längsachse muß nämlich auch eine Biegung nach der Breitendimension zur Folge haben, so daß, wenn wir voraussetzen, daß der Stab nach unten gebogen ist, die untere Fläche, wie Fig. 71 andeutet, in ihrer Breitendimension nach außen konvex die obere Fläche des Stabes, welche der Längsrichtung nach konvex gebogen ist, nach der Breitendimension konkav werden muß. Ist  $ABCD$  der Querschnitt des ungebogenen Stabes, so wird  $A_1B_1C_1D_1$  der Querschnitt des gebogenen Stabes. Es ergibt sich das aus folgender Überlegung. Wie wir sahen

Fig. 71.



hat die Biegung eine Verlängerung der oberhalb der ungeänderten Faserschicht, eine Verkürzung der unterhalb derselben liegenden Fasern zur Folge. Diese Verlängerung der obern Fasern muß eine Kontraktion nach der Breite zur Folge haben, so daß, wenn die Verlängerung gleich  $\delta$  ist, die Kontraktion gleich  $\mu\delta$  wird. Die Verkürzung der untern Faser hat eine Ausdehnung nach der Breite zur Folge, welche ebenso groß ist, als die Kontraktion oben. Zu diesen Ausdehnungen und Verkürzungen parallel der Breite treten auch solche parallel der Dicke  $AD$ . Oberhalb der ungeänderten Faserschicht wird die Dicke vermindert, unterhalb derselben wird die Dicke ebenso viel vergrößert. Man sieht leicht, daß die vorher ebenen Flächen, welche den Stab oben und unten begrenzen, infolge dieser Kontraktion der obern Stabhälfte und der Ausdehnung der untern Hälfte des Stabes sich krümmen müssen, und zwar so, daß der Stab parallel  $AB$  auf seiner oberen Fläche nach außen konkav, auf seiner unteren nach außen konvex wird<sup>1)</sup>.

Legen wir einen Stab, dessen Länge gegen seinen Querschnitt, besonders gegen seine Dicke beträchtlich ist, auf zwei gleichweit von der Mitte und gleichweit von den Enden entfernte Stützen, und biegen ihn dadurch, daß wir seine beiden über die Stützen herausragenden Enden mit gleichen Gewichten belasten, so ist der der Längsrichtung des gebogenen Stabes parallele Schnitt der obern konvexen Fläche ein Kreisbogen; ein zur Längsrichtung senkrechter, also parallel  $ABCD$  durch die obere Fläche geführter Schnitt ist ebenfalls ein Kreisbogen; die Radien dieser beiden Kreisbogen verhalten sich umgekehrt wie die Längendilatation zur Querkontraktion. Setzen wir also den Radius des der primären Biegungsrichtung parallelen Kreisbogens gleich 1, so wird der Radius des Bogens  $A_1B_1$  gleich

$\frac{1}{\mu}$ . Eine Vergleichung der beiden Krümmungsradien führt also direkt zur Bestimmung des Querkontraktionskoeffizienten  $\mu$ .

Die im § 50 angeführten Versuche von Cornu<sup>2)</sup> beruhen auf diesem Satze. Er maß nach der schon erwähnten Methode von Fizeau, die wir in der Lehre vom Lichte, bei Besprechung der Interferenz des Lichtes mit großem Gangunterschiede kennen lernen werden, die beiden Krümmungen

1) De Saint Venant, Mémoire sur la flexion des prismes etc. Journal de mathématiques pures et appliquées par Liouville. 1. (2.) 1856.

2) Cornu, Comptes Rendus. 69. p. 333. 1869.

Flächen an verschiedenen Glasstreifen und erhielt im Mittel den  $\mu = 0,25$ .

Verwendung der Biegung zur Untersuchung der Elastizitätskoeffizienten bietet den großen Vorzug, daß man auf diesem Wege untersuchen kann, ob ein Körper wirklich isotrop ist oder nicht. Man schneidet aus dem zu untersuchenden Material nach verschiedenen Richtungen Stäbchen. Ist das Material isotrop, so erhält man für alle Stäbchen denselben Elastizitätskoeffizienten; ist es nicht isotrop, so wird der Elastizitätskoeffizient für die verschiedenen Stäbchen verschieden. Die Untersuchung der Elastizitätsverhältnisse der nicht isotropen Kristalle wird deshalb am besten durch Biegung bewirkt; die oben erwähnten Versuche von Baum und Voigt sind vorwiegend der Untersuchung der Elastizitätsverhältnisse der Kristalle gewidmet. Wir müssen uns hier begnügen hinzuweisen.

§ 55.

Abhängigkeit der Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur. Wie schon Wertheim<sup>1)</sup> und Kupfer<sup>2)</sup> erkannt hatten, daß die Temperatur die elastischen Eigenschaften der Körper beeinflußt, haben zuerst Kohlrausch und Loomis<sup>3)</sup> für Kupfer, Eisen und Messing gezeigt, daß der Elastizitätskoeffizient zwischen der gewöhnlichen Temperatur und der des siedenden Wassers stetig abnimmt. Kohlrausch und Loomis ließen einen Draht in der Achse eines doppelwandigen Zylinders liegen, der durch zwischen die beiden Wände des Zylinders fließenden Wasserdampf erhitzt wurde. Der von außen durch dichte Umkleungen sehr gegen Wärmeabgabe geschützte Zylinder und mit ihm an einer Achse hängende Draht kühlte sich dann sehr langsam ab, und man konnte die Schwingungsdauern der sich langsam abkühlenden Drähte

Die Torsionskoeffizienten sind dem Quadrate der Schwingungsdauern umgekehrt proportional.

Versuche ergaben, daß sich der Torsionskoeffizient, somit auch der Elastizitätskoeffizient, mit der Temperatur annimmt, daß der Koeffizient der Querkontraktion von der Temperatur unabhängig ist, auch der Elastizitätskoeffizient in seiner Abhängigkeit von der Temperatur darstellen läßt durch eine Gleichung von der Form

$$E = E_0 (1 - \alpha t - \beta t^2).$$

Wird die Temperatur nach Graden der hunderttheiligen Skala oder der nach Celsius gemessen, so wird für

Eisen . . . .	$\alpha = 0,000483$	$\beta = 0,00000012$
Kupfer . . . .	$0,000572$	$0,00000028$
Messing . . . .	$0,000485$	$0,00000136$

<sup>1)</sup> Wertheim, Poggend. Ann. Erg.-Bd. 2. 1848.  
<sup>2)</sup> Kupfer, Göttinger Nachrichten 1855. p. 219. Mémoires de l'Acad. de Pétersbourg 6 Reihe. 6.  
<sup>3)</sup> Kohlrausch und Loomis, Poggend. Ann. 141 1870.



Es nehmen demnach die Elastizitätskoeffizienten von 0° der Tempe- des gefrierenden Wassers, bis 100° der Temperatur des bei dem norm Barometerstande von 760<sup>mm</sup> siedenden Wassers um 5—6 Prozent ab. Den gleichen Gang für den Torsionskoeffizienten fand Tomlins, jedoch ist die von ihm gefundene Abnahme für Eisen und Kupfer trächtlich kleiner als bei Kohlrausch. Er fand für

	$\alpha$	$\beta$
Silber . . . . .	0,0003769	0,000000169
Platin . . . . .	0,00004456	0,000000299
Aluminium . . .	0,0003555	0,000000547
Zink . . . . .	0,001080	0,000004947
Nickel . . . . .	0,0002267	0,000000347
Eisen . . . . .	0,0002442	0,000000251
Kupfer. . . . .	0,0002472	0,000000449.

Einen erheblich geringern Wert für die Abnahme des Elastizität- koeffizienten von Eisen und Stahl fand Pisati<sup>2)</sup>, welcher direkt die Lin- Verlängerung von Eisen- und Stahldrähten bei verschiedenen Temperatu- maß. Pisati hing seine Drähte ebenfalls in die Achse eines dop wandigen Zylinders; der den innern Zylinder umgebende ringförm Zylinder war mit Öl gefüllt, das durch eine Heizvorrichtung bis auf 3 erwärmt und auf jeder zwischen der gewöhnlichen und jener hohen lie- den Temperatur gehalten werden konnte. Für die Elastizitätskoeffizien- erhielt Pisati nachfolgende Werte in Kilogramm pro Quadratmillim bei den über den Zahlen angegebenen Temperaturen.

$t =$	20	50	100	150	200	300
Eisen . . . . .	21441	21364	21212	20895	20458	19176
Stahl . . . . .	18481	18416	18232	18052	17820	17371

Die Drähte waren vor den Versuchen bis auf schwache Rotglut hitzt und langsam abgekühlt und mehrfach vor den Messungen auf 3 erwärmt, so daß sie in einem konstanten normalen Zustande waren. Bei der Erwärmung von 20° auf 100° nimmt der Elastizitätskoeffizien- des Eisens ziemlich gleichmäßig um etwa 2,7 für den Grad ab, so er bei 100° nahe 1% kleiner ist als bei 20°; sehr viel schneller ist Abnahme in höhern Temperaturen, von 100°—200° ist sie 3,6 und 200°—300° gar 6,2%. Ähnlich ist der Gang bei dem Stahl. Ebenso wie Pisati hat Miller<sup>3)</sup> direkt die Änderung des Elastizität- koeffizienten durch Messung der Verlängerung von Drähten bei verschied- Temperaturen untersucht; er fand abweichend von Kohlrausch, daß Abnahme der Elastizitätskoeffizienten sich durch eine Gleichung

$$E_t = E_0 (1 - \alpha t)$$

darstellen läßt, daß es also eines quadratischen Gliedes der Tempera-

1) Tomlinson, Proceedings of the Royal Society of London. 40. p. 342.  
2) Pisati, Gazetta chim. ital. 6. u. 7. Beiblätter zu den Annalen d. Pfl. 1. p. 305. 1877.  
3) A. Miller, Sitzungsberichte der Münchner Akad. 1882; Denkschriften der Münchner Akademie 1886. p. 707.

cht bedarf. Regelmäßige Werte, die auf einen bestimmten Wert von  $\alpha$  herten, ergaben sich aber erst, als die Drähte auf den sogenannten Normalstand gebracht waren, der entweder durch mehrfaches Erwärmen und darauf folgendes langsames Abkühlen, oder dadurch erreicht wurde, daß die Drähte mehrfach gespannt und wieder abgespannt wurden.

Bei seinen ersten Versuchen, die sich nur auf Eisen bezogen, erhielt Miller

$$E_t = 21150 (1 - 0,0004277 t).$$

In seiner zweiten Abhandlung gibt Miller folgende Werte von  $E_0$  und  $\alpha$

	$E_0$	$\alpha$		$E_0$	$\alpha$
Platin . . . . .	19668	0,0003636	Zink . . . . .	10551	0,0033
Eisen . . . . .	18813	0,0003760	Blei . . . . .	2553	0,0047
Silber . . . . .	7359	0,0007776	Messing . . . .	10670	0,0004728
Kupfer . . . . .	13035	0,0009983	Neusilber . . .	13945	0,0006536

Für Eisen liegt der Wert von Miller zwischen dem von Kohlrausch und Pisati, für Kupfer und Messing sind Millers Werte erheblich größer; von den von Tomlinson gefundenen Werten weichen sie ebenfalls und zwar zum Teil erheblich ab.

Kiewit<sup>1)</sup> hat die Biegung von Stäbchen nach der Methode von Voigt benutzt, um die Änderung der Elastizitätskoeffizienten mit der Temperatur für Kupfer, Zink, Zinn und eine große Zahl deren Legierungen, sowie für ein Glasstäbchen zu untersuchen. Das Kupfer wurde in drei Sorten untersucht, aus deren jedem mehrere Stäbchen hergestellt waren; die erste Sorte war reines gegossenes Kupfer, die zweite ein dickes gewalztes Kupferblech, die dritte war eine dicke galvanoplastisch niedergeschlagene Kupferplatte. Kiewit fand, daß für Zink, Kupfer und Glas, sowie für die meisten Legierungen sich die Abhängigkeit der Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur, wie es auch Miller fand, durch eine lineare Funktion der Temperatur darstellen lasse, für Zinn und einige Legierungen war die Darstellung genauer, wenn noch ein quadratisches Glied hinzugekommen wurde.

Die für die reinen Metalle und das Glas gefundenen Werte von  $E_0$  und  $\alpha$  sind folgende; für die Metalle setzen wir auch die von Kiewit bei jeder Gelegenheit durch Hinzunahme von Torsionsbeobachtungen bei 21,5° C. bestimmten Werte des Querkontraktionskoeffizienten  $\mu$  hinzu.

	$E_0$	$\mu$	$\alpha$	$\beta$
Zink . .	10477	0,331	0,001471	
Cu I . .	10847	0,200	0,000372	---
Cu II . .	12298	0,312	0,00038	---
Cu III .	12306	—	0,000752	—
Zinn . .	4768	0,421	0,00011	0,0000042
Glas . .	7692	—	0,000321	—

Amagat<sup>2)</sup> hat für Glas die Änderung der Kompression eines und des-

1 Kiewit, Wiedem. Ann. 89. 1886.  
2 Amagat, Annales de chim. et de phys. 22. (6.) 1891.  
Williams, Physik I. 6. Aufl

selben Glasgefäßes bei verschiedener Temperatur beobachtet, wenn dasselbe nur einem äußern Drucke ausgesetzt wird. Da die Verhältnisse der innern und äußern Radian sich bei einem solchen zylindrischen Gefäße nicht ändern, verhalten sich die Kompressionen nach § 50 umgekehrt wie die Elastizitätskoeffizienten, vorausgesetzt, daß der Querkontraktionskoeffizient  $\mu$  konstant ist. Amagat fand, daß die Kompression bei Glas von  $0^{\circ}$ — $100^{\circ}$  um 2,95 und 2,71%, für Kristallglas um 4,1% zunahm, für die Zunahme der Temperatur von  $100^{\circ}$ — $200^{\circ}$  waren die Zunahmen der Kompression 3,25; 2,99 für das gewöhnliche, 6,68% für das Kristallglas.

Winkelmann<sup>1)</sup> hat durch Anwendung der Biegung die Elastizitätskoeffizienten einer großen Anzahl von Gläsern und des Platins zwischen  $20^{\circ}$  und etwa  $400^{\circ}$  C. verfolgt. Er findet, daß die Abnahme derselben mit der Temperatur sich im allgemeinen nicht durch eine lineare Funktion der Temperatur darstellen läßt und gelangt zu Gleichungen von der Form

$$E_t = E_{20} (1 - \alpha (t - 20)^{\beta}),$$

wenn  $E_t$  der Elastizitätskoeffizient bei  $t^{\circ}$ ,  $E_{20}$  jener bei  $20^{\circ}$  ist. Für Platin ergab sich

$$\log \beta = 0,00851; \quad \log \alpha = 0,36685 - 4; \quad E_{20} = 18380.$$

Für die verschiedenen Gläser sind, ebenso wie ihre Elastizitätskoeffizienten<sup>2)</sup> die Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  sehr verschieden. Für manche Gläser ist  $\log \beta$  gleich null, für andere hat  $\beta$  einen großen Wert; für ein Glas fand sich  $\log \beta = 0,94544$ ,  $\beta$  also fast gleich 9; für dieses Glas ist  $\log \alpha = 0,49244 - 24$ .

Bei diesen Versuchen ergab sich, daß man die Gläser und das Platin erst mehrfach erwärmen und abkühlen mußte, ehe dieselben einen stationären Zustand annahmen, d. h. daß nach einer Erwärmung und darauf stattfindender Abkühlung der Elastizitätskoeffizient denselben Wert annahm, wie vor der Erwärmung. Es war aber dieser Wert des Elastizitätskoeffizienten größer als der vor aller Erwärmung gefundene. So fand sich für ein Glas vor der ersten Erwärmung  $E = 7540$ , nach mehrfachem Erwärmen 7673, für ein anderes Glas 7971 und 8340, für Platin 16926 und 18380.

Diese Zunahme des Elastizitätskoeffizienten ging bei längerem Erhalten der betreffenden Stäbe auf gewöhnlicher Temperatur wieder zurück, so daß bei den Gläsern nach 11 bis 15 Monaten der Elastizitätskoeffizient wieder der gleiche wurde, der er vor der ersten Erwärmung gewesen war. Bei Platin ging er in 13 Monaten, während deren dasselbe nicht erwärmt war, auf 17508 zurück.

Ähnliche Werte wie Kiewiet erhielt Shakespear<sup>3)</sup>, der die Änderung der Verlängerung bei gleicher Belastung mit der Fizeauschen Interferenzmethode beobachtete. Bei einer Temperaturerhöhung von  $13^{\circ}$  auf  $100^{\circ}$  fand er eine Abnahme von  $E$  für Kupfer von 3,6%, Eisen 1,6%, Stahl 3,2% und hartes Messing 3%.

1) Winkelmann, Wiedem. Ann. 61. p. 105. 1897; 68. p. 117. 1897.

2) Winkelmann und Schott, Wiedem. Ann. 50. p. 697. 1894. Man sehe s. Wüllner und M. Wien, Ann. d. Phys. 9. p. 1253. 1902.

3) Shakespear, Phil. Mag. 47. (5.) p. 539. 1899.

die bisher besprochenen Untersuchungen sich nur auf die der Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur bezogen, haben Untersuchungen sich auch auf die Frage erstreckt, ob auch stische Konstante, die Querkontraktion  $\mu$  von der Temperatur

Zur Beantwortung der Frage muß neben der Änderung des fizienten mit der Temperatur diejenige des Torsionskoeffizien-temperatur beobachtet werden.

Isahn<sup>1)</sup> maß an einer Anzahl von Drähten die Verlängerung de Gewichte und ebenso die Torsionskoeffizienten bei einer schiedenen zwischen Zimmertemperatur und der Temperatur Wassers liegenden Temperaturen. Die Anordnung war wesent- hohlräusch und Loomis angewandte, nur wurde bei jeder ach die Verlängerung des Drahtes mit Spiegel und Skala s ergab sich, daß der Torsionskoeffizient mit steigender Tem- ich rascher abnahm als der Elastizitätskoeffizient, ein Beweis, kontraktion mit steigender Temperatur wächst. Folgende t die Resultate Katzenelsohns, unter  $E$  die Elastizitäts- ei  $0^{\circ}$ , unter  $-\Delta E$  die Abnahme derselben in Prozenten bis die Torsionskoeffizienten bei  $0^{\circ}$ , unter  $-\Delta T$  die Abnahme rozenten bis  $100^{\circ}$ , unter  $\mu$  den nach der Gleichung

$$\mu = \frac{E}{2T} - 1$$

uerkontraktionskoeffizienten bei  $0^{\circ}$ , unter  $\Delta\mu$  die Zunahme rozenten bis  $100^{\circ}$ .

$E$	$-\Delta E$	$T$	$-\Delta T$	$\mu$	$\Delta\mu$
17 187	0,89	6518	1,64	0,319	3,07
19 024	2,33	7505	3,10	0,270	3,805
9800	2,92	3681	3,29	0,330	1,51
11 449	3,24	4320	4,10	0,325	3,33
8944	4,21	3150	5,35	0,420	3,835
7010	3,97	2551	7,10	0,394	12,00

het somit  $\mu$  für eine Temperaturänderung von  $100^{\circ}$  auf 0,441, ' würde der Wert von  $\mu$  gleich 0,5 werden, also das Silber Kompression mehr erhalten.

walski<sup>2)</sup> beobachtete an zwei Glasstäbchen die Biegung nd  $100^{\circ}$  C. und gleichzeitig die Torsion bei Zimmertempera- nd bei  $100^{\circ}$ . Er konnte die beobachteten Koeffizienten durch ingen darstellen, nämlich

$$E = 6770 (1 - 0,00106 t)$$
$$T = 2792 (1 - 0,00151 t).$$

Isahn, Inauguraldissertation. Berlin 1887. Beiblätter zu den Ann. p. 307. In den Beiblättern ist der Torsionskoeffizient des Platin oldes zu 4211 angegeben; die Zahlen sind zweifelsohne falsch, da andern Wert von  $\mu$  geben. Ich habe die Zahlen dafür eingesetzt, denen Wert von  $\mu$  liefern.  
walski, Wiedem. Ann. 39. p. 155. 1890.

Die Temperaturkoeffizienten sind auffallend hoch, der für  $E$  ist dreimal so groß als der von Kiewiet, und mehr als doppelt so groß der größte der von Winkelmann gefundenen Werte.

A. Bock<sup>1)</sup> hat nach der Anordnung von Kirchhoff die Biegung Torsion bis  $120^{\circ}$  bzw.  $150^{\circ}$  für Stäbe von Stahl, Kupfer, Silber und Nickel verfolgt. Die Stäbe befanden sich in einem Heizkasten, der durch regulierbare Gasflammen auf jeder Temperatur zwischen etwa  $20^{\circ}$  und  $120^{\circ}$  gehalten werden konnte. Für einen Stahlstab, wie er im Handel zu haben war, fand Bock  $\mu$  unabhängig von der Temperatur; auch als ein solcher Stab durch mehrfaches Erhitzen bis zu schwacher Rotglut auf den Normzustand gebracht wurde, erhielt Bock bis  $150^{\circ}$  Werte von  $\mu$ , die ich als unabhängig von der Temperatur ansehen kann. Für Kupfer fand er für  $\Delta\mu$  etwa 4% Zunahme, während Katzenelsohn für Messing 3,8% gefunden hatte. Für Silber zeigte sich  $\Delta\mu$  gleich  $10^{\circ}_{0}$ , gegen  $12^{\circ}_{0}$  Katzenelsohn. Für Nickel erhielt Bock  $\Delta\mu = 2,4^{\circ}_{0}$ .

Schäfer<sup>2)</sup> hat die Änderung des Elastizitätskoeffizienten und Torsionskoeffizienten mit Hilfe eines Gemisches von fester Kohlensäure und Äther, dessen Temperatur zwischen  $-60^{\circ}$  und  $-80^{\circ}$  C liegt und flüssige Luft, deren Temperatur gleich  $-186^{\circ}$  ist, bis zu diesen niedrigen Temperaturen verfolgt. Zur Bestimmung der Elastizitätskoeffizienten wurde die Verlängerung von Drähten, deren Länge etwa  $15^{\text{cm}}$  war, durch spannen der Gewichte gemessen, die Torsionskoeffizienten nach der Coulombschen Methode oder auch durch die Beobachtung der Drillung durch ein bekanntes Drehungsmoment bestimmt.

Die Drähte hingen in einer im zweiten Bande zu beschreibenden Dewarschen Flasche, welche für die niedrigen Temperaturen mit der betreffenden Kühlungsflüssigkeit gefüllt war. Wegen der Einzelheiten der Anordnung müssen wir auf die erste der unten genannten Abhandlung verweisen.

Wie die beiden Koeffizienten mit steigender Temperatur abnehmen, so wachsen sie mit sinkender Temperatur; die Änderung beider Koeffizienten konnte Schäfer durch Gleichungen von der Form

$$E = E_{20} (1 - \alpha (t - 20))$$

$$T = T_{20} (1 - \beta (t - 20)),$$

wenn  $E$  und  $T$  die Koeffizienten bei der Temperatur  $t$  bedeuten.

Schäfer findet, wie Katzenelsohn, für sämtliche von ihm untersuchten Metalle  $\beta$  größer wie  $\alpha$ , so daß der Querkontraktionskoeffizient alle mit steigender Temperatur steigt. Zur Vergleichung der von Schäfer und Katzenelsohn gefundenen Werte geben wir die betreffenden Zahlen von Schäfer für diejenigen Metalle, welche beide Beobachter untersucht haben;  $\Delta E$  und  $\Delta T$  geben die Änderung in Prozenten für  $100^{\circ}$  C.

1. A. Bock, Wiedem Ann 52 p 609. 1894

2. Schäfer, Annalen der Phys 6 p 220. 1901; 9 p. 665 1902. Man vgl. auch die Bemerkungen von Sutherland, Ann d. Phys 8 p. 474 und Schäfers Widerlegung. 9 p 674. 1902

Name	$E_{20}$	$-\alpha E$	$T_{20}$	$-\alpha T$	$\mu$
Platin . . . . .	16 029	0,732	6594	1,78	0,215
Eisen . . . . .	18 347	2,250	7337	3,035	0,247
Gold . . . . .	—	—	—	3,014	—
Silber . . . . .	5897	7,65	2467	8,209	0,195

Abweichend von Schäfer findet Benton<sup>1)</sup> die Zunahme des Elastizitätskoeffizienten bei Abkühlung auf  $-186^{\circ}$  für Kupfer und Eisen größer als die des Torsionskoeffizienten, es ist

für hartgezogenes Kupfer  $E_{-186} = E_{24} \cdot 1,180$ ;  $T_{-186} = T_{24} \cdot 1,073$ ,

„ Eisen . . . . .  $E_{-186} = E_{21} \cdot 1,087$ ;  $T_{-186} = T_{20} \cdot 1,079$ .

Qualitativ stimmen die von den verschiedenen Experimentatoren gefundenen Resultate mit wenigen Ausnahmen recht gut überein, in den Werten der Temperaturkoeffizienten ist dagegen nur eine geringe Übereinstimmung, aus welcher zu folgern ist, daß geringe chemische oder physikalische Verschiedenheiten der untersuchten Körper den Wert des Temperaturkoeffizienten erheblich beeinflussen.

## § 56.

**Elastische Nachwirkung.** Bei der bisherigen Besprechung der elastischen Eigenschaften der festen Körper haben wir vorausgesetzt, daß die durch Wirkung äußerer Kräfte hervorgebrachten Änderungen der Körper momentan oder doch in einer für uns unmeßbar kleinen Zeit erfolgen, das heißt also, daß etwa bei einer Dehnung durch Zug die Verlängerung sofort eintritt, wenn das ziehende Gewicht an dem Körper angebracht ist und wir zur Vermeidung von Schwingungen den Körper allmählich in die neue Gleichgewichtslage übergehen lassen. Wir haben dann die so eintretende Verlängerung gemessen und aus dieser den Elastizitätskoeffizienten oder den linearen Dehnungskoeffizienten abgeleitet.

Die eintretenden Änderungen beschränken sich indes nicht immer auf diese momentanen Änderungen, ja in der Regel treten im Laufe der Zeit bei fortdauernd wirkenden äußeren Kräften noch mehr oder weniger große Änderungen in demselben Sinne ein, wie die momentanen. Die erste Beobachtung dieser Art wurde von W. Weber an Seidenfäden gemacht und von demselben als elastische Nachwirkung bezeichnet<sup>2)</sup>. Ein horizontal ausgespannter Seidenfaden wurde durch ein passend angebrachtes Gewicht belastet und seine sofort eingetretene Verlängerung gemessen. Bei fortwährendem Wirken des dehnenden Gewichtes ergab sich dann, daß die Länge des Fadens noch stetig zunahm, und zwar wurde eine mit wachsender Zeit für gleiche Zeitintervalle abnehmende Zunahme bis 2168,79 Minuten, also länger als 36 Stunden nach Vornahme der ersten Dehnung beobachtet.

Ebenso ergab sich, daß ein Faden, der längere Zeit gedehnt gewesen

<sup>1)</sup> Benton, Fortschritte der Physik im Jahre 1903. Abt. I. p. 157.

<sup>2)</sup> W. Weber, Poggend. Ann. 34. 1835; 54. 1841.



war, nach Fortnahme des dehnenden Gewichtes nicht sofort wieder die dem ungedehnten Zustande entsprechende Länge annahm, daß vielmehr ein großer Teil der Verkürzung erst nach und nach eintrat, die Verkürzung wurde 1233 Minuten, also 20,5 Stunden nach Fortnahme des dehnenden Gewichtes beobachtet.

Diese von M. Weber an Seidenfäden beobachtete elastische Nachwirkung fand dann F. Kohlrausch auch an Metalldrähten und Glasfäden; er zeigte gleichzeitig in einer Reihe von Experimentaluntersuchungen<sup>1)</sup>, daß bei allen diesen Substanzen die elastische Nachwirkung wesentlich denselben Gesetzen folgt. Kohlrausch benutzte bei seinen Beobachtungen vorwiegend die Torsion.

Entsprechend der Beobachtung Webers, daß bei konstantem spannenden Gewichte die Verlängerung stetig noch lange Zeit zunimmt, zeigte Kohlrausch bei Glasfäden zunächst, daß das zu einer konstanten Torsion erforderliche Drehungsmoment mit wachsender Zeit abnimmt. Zur Messung des Drehungsmomentes wurde ein Magnet benutzt. An einen sehr feinen etwa 35<sup>mm</sup> langen, in einem drehbaren Gehäuse hängenden Glasfaden wurde ein kleiner Magnet befestigt, so daß derselbe horizontal schwebte. Ein solcher Magnet hat, wie wir im dritten Bande kennen lernen werden, das Bestreben, in einer bestimmten horizontalen Richtung, der Richtung des sogenannten magnetischen Meridians zu verharren. Bringt man ihn um einen Winkel  $\alpha$  aus dieser Lage heraus, so wirkt auf ihn ein Drehungsmoment

$$d = D \sin \alpha,$$

welches ihn in den Meridian zurückzubringen sucht. Es wurde nun durch eine Drehung des Gehäuses dem Faden eine Torsion erteilt; der Magnet folgt dann der Torsion so weit, bis das ihn von der Richtung des Meridians fortziehende Drehungsmoment der Torsion gleich ist dem magnetischen Drehungsmoment, welches ihn in den Meridian zurückzuführen strebt. Durch eine Torsion von drei ganzen Umdrehungen wurde so die Nadel nahezu senkrecht zum magnetischen Meridian gestellt. Es zeigte sich dann, daß die Nadel nicht in dieser Lage verharrte, daß sie vielmehr stetig dem Meridian sich näherte. Daraus folgt, daß das dem Faden durch drei Umdrehungen erteilte Torsionsmoment nicht mehr ausreicht, um die Magnetnadel in der ihr zunächst gegebenen Lage zu halten, daß das magnetische Drehungsmoment größer war. Es wurde nun durch Zurückdrehen des Gehäuses die durch Annäherung des Magnets an den Meridian eintretende Zunahme der Torsion aufgehoben und so der Faden stets um genau drei Umdrehungen tordiert gehalten. Dabei wurde zunächst von Minute zu Minute, später in größeren Zeitintervallen der Stand der Magnetnadel, also der Winkel  $\alpha$  beobachtet. Dem Sinus des so beobachteten Winkels war dann jedesmal das Drehungsmoment proportional, welches zu der betreffenden Zeit dem durch drei Umdrehungen des Fadens bewirkten Torsionsdrehungsmoment das Gleichgewicht hielt. Die so zur Zeit  $t$  Minuten nach Herstellung der Torsion beobachteten Drehungsmomente  $x$  ließen sich durch eine Gleichung folgendermaßen darstellen

1) F. Kohlrausch, Poggend Ann 110 1863; 128. 1866; 158. 1876, 160. 1877.



$$r = x_0 + ce^{-at^m},$$

in  $e$  die Basis des natürlichen Logarithmensystems,  $x_0$ ,  $c$ ,  $a$  und  $m$  aus den Versuchen zu berechnende Konstanten sind,

In folgender Tabelle sind einige der von Kohlrausch in dieser Weise beobachteten und nach jener Gleichung mit den Konstanten

$$x_0 = 0,8970; \quad c = 0,04054; \quad a = 0,35272; \quad m = 0,25$$

rechneten Werte von  $x$  zusammengestellt. Die Drehungsmomente  $x$  sind nach durch den Sinus der beobachteten Ablenkungswinkel  $\alpha$  gegeben.

Zeit Minuten	$x$		Zeit Minuten	$x$	
	Beobachtet	Berechnet		Beobachtet	Berechnet
1,25	0,9247	0,9249	35	0,9145	0,9142
1,92	0,9238	0,9238	50	0,9138	0,9129
2,50	0,9231	0,9230	110	0,9120	0,9099
3,32	0,9218	0,9217	160	0,9079	0,9086
5,25	0,9211	0,9208	206	0,9071	0,9077
7,58	0,9197	0,9196	300	0,9054	0,9063
9,67	0,9188	0,9188	452	0,9051	0,9050
12	0,9181	0,9180	1310	0,9042	0,9019
18	0,9168	0,9166	1780	0,8995	0,9011
25	0,9154	0,9154	2760	0,8995	0,9001

Die Zahlen zeigen, wie gut sich die allmähliche Abnahme des Torsionsdrehungsmomentes durch jene Gleichung darstellen läßt. Nach der Gleichung würde  $x_0$  den Wert des Torsionsdrehungsmomentes bedeuten, welchem sich dasselbe bei konstant erhaltener Torsion von drei Umdrehungen mit wachsender Zeit immer mehr annähert, denn setzt man in der Gleichung die Zeit  $t$  unendlich groß, so wird  $x = x_0$ .

Entsprechend der zweiten Beobachtung Webers zeigte Kohlrausch, daß ein tordierter Draht nicht sofort nach Aufheben der Torsion in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückkehrt, sondern daß er eine nur sehr allmählich sich verlierende Torsion beibehält. Ja, er fand, daß es keineswegs einer lange dauernden Torsion bedarf, damit sich diese Nachwirkung zeige, daß schon eine Torsion von wenigen Sekunden ausreicht, um eine merkliche Nachwirkung hervorzurufen. Bezeichnet man den Winkel, um welchen der Draht zur Zeit  $t$  Minuten nach Aufheben der ihm ursprünglich erteilten Torsion noch aus seiner Gleichgewichtslage gedreht bleibt, mit  $x$ , so läßt sich derselbe allgemein darstellen durch die Gleichung

$$x = C \cdot e^{-\frac{a}{1-n} \cdot t^{1-n}},$$

in  $e$  wie immer die Basis des natürlichen Logarithmensystems,  $C$ ,  $a$  und  $n$  Konstanten bedeuten. Die Konstanten hängen bei gegebener Temperatur von der Größe und Dauer der ursprünglich dem Drahte erteilten Torsion ab. Sind die anfänglich dem Drahte erteilten Torsionen nicht zu groß und übersteigt die Dauer derselben nicht 3 Minuten, so lassen sich der Winkel  $x$  durch die einfachere Gleichung

$$x = c \frac{1}{t^\alpha}$$

darstellen, worin  $c$  von der Größe und Dauer der ursprünglichen Torsion sowie von dem Material und der Temperatur des Drahtes,  $\alpha$  dagegen bis zu Temperaturen von 22° C. nur von dem Material des Drahtes abhängig ist <sup>1)</sup>).

Für einen Silberdraht fand Kohlrausch für die Größe  $c$ , wenn der Draht  $T$  Minuten um den Winkel  $\varphi^0$  tordiert war und die Temperatur des Drahtes  $\tau^0$  C. betrug

$$c = (0,0000219 \varphi + 0,0000000187 \varphi^2) T^{0,59} (\tau + 21,5).$$

Man sieht, die Nachwirkung ändert sich mit der Temperatur sehr stark. Die Konstante  $\alpha$  war für Silber gleich 0,3875. Für einen Messingdraht fand sich  $\alpha = 0,1643$ , für einen Glasfaden berechnete Kohlrausch aus Versuchen Boltzmanns <sup>3)</sup>, wenn die Torsion 180° betrug und nicht länger als  $\frac{1}{2}$  Minute dauerte  $\alpha = 0,968$  und 0,923. Für einen Kautschukfaden ergab sich dagegen  $\alpha$  schon bei kleinen nur  $\frac{1}{2}$  Minute dauernden Torsionen wesentlich von der Größe  $\varphi$  der ursprünglichen Torsion abhängig.

Um ein Bild von der Größe und dem Gange der elastischen Nachwirkung zu geben, sind in folgender Tabelle einige Beobachtungen von Kohlrausch an dem Silberdrahte, an dem obige Konstanten erhalten sind mitgeteilt. Der Silberdraht hatte eine Länge von 125<sup>mm</sup>. Die Torsionen wurden mit Spiegel und Skala beobachtet. Die Ablenkungen  $x$  sind in Skalenteilen angegeben, man erhält den Wert derselben in Bogenminuten durch Multiplikation mit 0,706.

Zeit nach der Torsion $t$ in Minuten	I		II		III	
	$x$		$x$		$x$	
	Beob.	Ber.	Beob.	Ber.	Beob.	Ber.
0,166	38	41,5	—	—	74	74,8
0,33	33,6	34,0	53,5	54,6	65,9	66,7
1,0	24,3	24,2	41,8	40,6	53,4	53,0
2,0	19,3	19,3	33,6	32,8	44,8	44,4
5	13,9	14,0	23,8	23,8	33,7	33,7
10	11,0	10,9	17,9	18,1	26,0	26,2
20	7,9	8,3	13,4	13,4	19,6	19,7
50	—	—	8,9	8,5	12,6	12,5
80	—	—	7,2	6,6	10,5	2,5

Die Größe der bei diesen Beobachtungsreihen stets angewandten primären Torsion betrug 180°, die Dauer bei der ersten Reihe 2, bei der zweiten 5, bei der dritten 10 Minuten.

Die Zahlen zeigen, daß schon bei kurz dauernder Torsion die Nachwirkung

1) *F. Kohlrausch*, Poggend. Ann. 138. p. 418. 1869.

2) *F. Kohlrausch*, Poggend. Ann. 158. 1876. Man sehe auch *Kl. Wiener Berichte*. 78. Juli 1878.

3) *Boltzmann*, Wiener Berichte 70. 1874. Poggend. Ann. Erg.-Bd. V

rkung merklich ist, und wie die Nachwirkung mit der Dauer der Torsion  
chst; bei der Torsionsdauer 10 Minuten ist die Nachwirkung nach einer  
stel Minute schon fast  $1^{\circ}$ . Bei einer Torsionsdauer von 9 Stunden  
d einer Torsion von  $585^{\circ}$  betrug die Nachwirkung gleich nach Auf-  
ben der primären Torsion  $30^{\circ}$ , also fast ein Zwanzigstel des ursprüng-  
ben Torsionswinkels.

Kohlrausch hat ebenfalls die elastische Nachwirkung bei der Dehnung  
nd Biegung näher untersucht; mit Metall- oder Glasstreifen war in den  
llen die Nachwirkung zu gering, um genau verfolgt werden zu können,  
r beobachtete daher die Nachwirkung bei der Dehnung an Kautschuk-  
len und die bei der Biegung an Stäben aus Hartkautschuk (Ebonit)<sup>1)</sup>.  
Er fand in beiden Fällen, daß die Gesetze der elastischen Nachwirkung  
m wesentlichen dieselben waren wie bei der Torsion. Wir verweisen  
wegen des Spezielleren auf die Arbeit von Kohlrausch. Nur sei hier  
noch des merkwürdigen Verhaltens der Körper Erwähnung getan, wenn  
man sie nacheinander verschiedenen Änderungen unterworfen hat. Wie wir  
oben, nimmt die Nachwirkung bei der Torsion, und so ist es bei allen  
tungen, mit der Größe und Dauer der primären Torsion sowohl an Größe  
als Dauer zu, immer aber ist die Annäherung an den Gleichgewichts-  
zustand anfänglich eine erheblich raschere als später. Wenn man nun  
einem Körper zunächst eine starke länger dauernde Torsion in einem Sinne  
erteilt, und dann, während er nach Aufheben derselben sich allmählich  
der Gleichgewichtslage nähert, ihm eine kurz dauernde Torsion im entgegen-  
gesetzten Sinne gibt, so zeigt sich, daß die einzelnen Nachwirkungen sich  
superponieren, das heißt, man findet, daß nach der zweiten kürzern ent-  
gegengesetzten Torsion sich der Draht zunächst der Lage nähert, aus  
welcher man ihn tordiert hatte, dann einen Augenblick zur Ruhe kommt,  
und daß er dann wieder der Nachwirkung von der ersten Torsion folgend  
wieder seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage nähert. So wurde  
ein Kautschukfaden einen Tag lang um drei Umdrehungen tordiert. Los-  
gelassen zeigte derselbe eine sehr starke Nachwirkung und in der ersten  
Sekunde näherte er sich etwa  $10^{\circ}$  in der Sekunde seiner ursprünglichen Gleich-  
gewichtslage. Nach 10 Minuten hatte er sich um mehr als  $180^{\circ}$  derselben  
nähert, und er drehte sich in der Sekunde nur mehr etwa  $\frac{1}{30}^{\circ}$  zurück.  
Man drillte man den Draht während 40 Sekunden nach der entgegen-  
gesetzten Richtung; nach Aufheben dieser Torsion zeigte der Faden zu-  
nächst eine Nachwirkung im Sinne derselben. Der Faden ging nicht sofort  
in die Lage zurück, aus der man ihn das zweite Mal tordiert hatte, sondern  
näherte sich derselben stetig während 3.5 Minuten. Ehe er indes dieselbe  
erreicht hatte, kehrte sich der Sinn der Bewegung um, das heißt der  
Draht näherte sich wieder, wie wenn die zweite Torsion nicht stattge-  
funden hätte, der ursprünglichen Gleichgewichtslage.

Weidmann<sup>2)</sup> hat die quantitativen Verhältnisse der elastischen Nach-  
wirkungen bei Biegung, kubischer Kompressibilität und Torsion für mehrere  
Materien untersucht.

<sup>1)</sup> F. Kohlrausch, Poggend. Ann. 158. 1876. Man sehe auch Klemenčič,  
meiner Berichte. 78. Juli 1878.

<sup>2)</sup> Weidmann, Wiedem. Ann. 29. 1886.

Bei der Biegung wurden Glasstäbchen oder Glasröhren an dem einen Ende eingeklemmt und an dem andern Ende jedesmal 10 Minuten belastet und der Biegungspfeil gemessen; es wurde darauf die nach Fortnahme des spannenden Gewichtes zurückgebliebene Biegung zu bestimmten Zeiten nach dieser Fortnahme ebenfalls gemessen. Zum Zwecke der Messung war an das belastete Ende der gebogenen Stäbchen eine feine Skala angebracht, welche durch ein mit einem Fadenkreuz versehenes Mikroskop beobachtet wurde.

Schon die Versuche von F. Kohlrausch führten zu dem Resultate, daß die bei gleicher Dauer der ursprünglichen Deformationen zu gleichen Zeiten nach Aufhören der letztern gebliebenen Deformationen der ursprünglich gegebenen Deformation proportional sind, vorausgesetzt, daß die ursprüngliche Deformation nicht zu groß ist. Weidmann fand diesen Satz bestätigt; er setzt deshalb als Maß der elastischen Nachwirkung zu einer bestimmten Zeit den Quotienten aus der zu dieser Zeit noch vorhandenen Deformation und der ursprünglichen.

Für die so gemessene Nachwirkung der Biegung gelangt Weidmann zu dem Resultate, daß dieselbe für ein gegebenes Glas unabhängig ist von den Dimensionen des gebogenen Glases. So erhielt Weidmann für eine Röhre aus Jenenser als XVI'' bezeichneten Glase, deren lichte Weite 5,85<sup>mm</sup>, deren Wandstärke 1,64<sup>mm</sup> war, und für eine Kapillare, deren lichte Weite so gering war, daß man sie als Glasstab von 3,1<sup>mm</sup> Dicks ansehen konnte, nach einer 10 Minuten dauernden Biegung die in folgender Tabelle angegebenen Nachwirkungen; die Temperatur bei diesen Versuchen war 11°.

Zeit	Nachwirkung		Zeit	Nachwirkung	
	Röhre	Kapillare		Röhre	Kapillare
10 Sek.	0,0081	—	1 Min.	0,0028	0,0032
20 „	0,0054	0,0058	1,5 „	0,0024	0,0025
30 „	0,0042	0,0047	2 „	0,0019	0,0019
40 „	0,0034	0,0040	3 „	0,0013	0,0013

Ebenso fand er die Nachwirkung für einen gegebenen Stab unabhängig von der Länge des gebogenen Teiles.

Für die von ihm benutzten Gläser fand Weidmann mit steigender Temperatur eine Abnahme der elastischen Nachwirkung, während bei den Metallen nach den Beobachtungen von Kohlrausch und Schröder<sup>1)</sup> die elastische Nachwirkung mit steigender Temperatur erheblich zunimmt.

Mit den bei der Biegung erhaltenen Nachwirkungen verglich Weidmann zunächst die durch Kompression eines Gefäßes entstehenden. Auch zwei auch für die Biegungsversuche benutzten Gläsern, dem oben bereits erwähnten und einem thüringer Glase verfertigte er thermometerartige

1) Kohlrausch a. a. O. Schröder, Wiedem. Ann. 28. p. 369. 1886. Schröder teilt ebenfalls sehr interessante Beobachtungen über den Einfluß mehrfach wiederholter Erwärmungen und Abkühlungen auf die elastische Nachwirkung mit

Hohlkugeln von 30—56<sup>mm</sup> Durchmesser an sehr engen Kapillarangeschmolzen; dieselben wurden mit Quecksilber gefüllt und bei konstant erhaltener Temperatur wurden auf das Innere der Ther 10 Minuten lang Drucke zwischen 1 und 10 Atmosphären aus- Indem man die Kompressibilität des Quecksilbers vernachlässigte, die durch das Niedersinken des Quecksilberfadens in dem Kapillar beobachtete scheinbare Volumvergrößerung als die durch den innern hervorgebrachte Volumvergrößerung angesehen. Nach Fortnehmen uckes wurde das Wiederansteigen des Quecksilbers im kapillaren verfolgt.

schließlich stellte Weidmann aus einigen der von ihm benutzten Glasfäden her, an denen er ganz in der Weise wie Kohlrausch schwirkung bei der Torsion maß. In folgender Tabelle sind die für g, Kompression und Torsion an dem Glase Nr. XVI<sup>'''</sup>, die für Bie und Kompression an einem thüringer Glase gefundenen Werte zu- gestellt.

t	Elastische Nachwirkung bei Glas XVI <sup>'''</sup>			Elastische Nachwirkung bei thüringer Glas	
	Biegung	Kompression	Torsion	Biegung	Kompression
ek.	0,0065	0,0069	—	0,0106	0,0107
lin	45	56	0,0055	95	92
..	33	45	45	84	85
..	25	36	36	75	76
..	19	29	34	66	66
..	13	20	24	57	57
er	7°	0°	0°	1°	0°

denfalls darf aus den Versuchen von Weidmann geschlossen werden, r Gang der elastischen Nachwirkung für eine und dieselbe Substanz iliche Formen derselben der gleiche ist.

a dem gleichen Resultate gelangte Austin<sup>1)</sup>, der die Nachwirkung rston und Verlängerung bei Messing-, Kupfer- und Silber-Drähten ehte; ebenso wie bei Torsion ließen sich die Nachwirkungen bei z durch die Gleichung von Kohlrausch darstellen, die Biegungs- zung ergab sich, wie es schon Klemenčić bei Glas gefunden ets kleiner als die Torsionsnachwirkung.

urch Beobachtung der Volumänderung von Kautschukschläuchen durch ch der Methode von Wertheim hat Pulfrich<sup>2)</sup> den Nachweis ge- daß die Querkontraktion bei der elastischen Nachwirkung genau n Verlauf hat wie die Nachwirkung bei der Verlängerung des bes. Am deutlichsten ergibt sich das aus folgender Art der Be- z des Querkontraktionskoeffizienten. Ist  $r_0$  der Radius der zylind- n Hohlung des Kautschukschlauches im ungespannten Zustande, und bdem der Schlauch eine zeitlang gedehnt und dann sich selbst über-

Austin, Wiedem. Ann. 50. p. 659. 1893  
Pulfrich, Wiedem. Ann. 28. 1886.

lassen war, zur Zeit  $t_1$  die Verkürzung des Radius gleich  $e_1$ , dagegen einer spätern Zeit  $t_2$  gleich  $e_2$ , so hat sich der Radius in dieser Zeit um  $e_1 - e_2$  ausgedehnt; somit in Bruchteilen des Radius, der zur Zeit  $t_1$  vorhanden war, um

$$\frac{e_1 - e_2}{r_0 - e_1} = \epsilon.$$

Ist die ursprüngliche Länge des Schlauches  $L_0$ , die zur Zeit  $t_1$  infolge der elastischen Nachwirkung noch vorhandene Verlängerung gleich  $l_1$ , die zur Zeit  $t_2$  noch vorhandene Verlängerung  $l_2$ , so hat sich der Schlauch um die Länge  $l_1 - l_2$  verkürzt, somit in Bruchteilen seiner Länge zur Zeit

$$\frac{l_1 - l_2}{L_0 + l_1} = \delta.$$

Das Verhältniß der Querkontraktion zur Längenänderung, welche innerhalb der Zeit von  $t_1$  bis  $t_2$  infolge der Nachwirkung gleichzeitig stattfindet, ist somit

$$\mu = \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Pulfrich erhielt für das so berechnete  $\mu$  für jedes Stadium der elastischen Nachwirkung den gleichen Wert, und zwar den Wert 0,456; aus fast genau gleichen Wert, nämlich 0,45 etwa, fand Pulfrich auch für kurzdauernde Dehnungen, so daß also der Koeffizient der Querkontraktion nicht nur für alle Stadien der Nachwirkung der gleiche, sondern auch derselbe ist, wie für die kurz dauernden elastischen Dehnungen.

Die Tatsache, daß die elastischen Änderungen eines Körpers unter Wirkung äußerer Kräfte oder nach Aufhören dieser Wirkungen nicht vollständig sofort, ja daß sie zum Teil sehr langsam erfolgen, beweist, daß die der ganzen Elastizitätslehre zugrunde liegende Annahme, nach welcher die augenblickliche Lage der Moleküle im Innern eines Körpers durch die augenblicklich wirkenden Kräfte bestimmt wird, einer Modifikation bedarf. Es haben allerdings die Moleküle, sobald bestimmte äußere Kräfte auf einen Körper wirken, nur eine Gleichgewichtslage, indessen kann das Eintreten in diese Gleichgewichtslage eine sehr lange Zeit dauern. Wir müssen daraus schließen, daß der Bewegung der Moleküle, sobald sie den augenblicklich wirksamen Kräften folgend in die neue Gleichgewichtslage hinübergehen, ein Widerstand entgegensteht, der ihre Bewegung verlangsamt. Es muß das aber ein Widerstand ganz eigentümlicher Art sein, wie wir ihn sonst bei Bewegungen nicht finden. Bei allen sonstigen Bewegungen können wir den Widerstand in Rechnung ziehen, indem wir einfach von der bewegenden Kraft eine gewisse Größe abziehen, der Quotient aus dieser so berechneten bewegenden Kraft und der zu bewegenden Masse gibt uns die Beschleunigung. Da bei den elastischen Änderungen die Kraft, welche die Moleküle gegen die Gleichgewichtslage treibt, dem Abstände der Moleküle von der Gleichgewichtslage proportional ist, so ist bei gleicher Verschiebung die bewegende Kraft dieselbe; da nun bei gleicher Lagerung der Moleküle auch der Widerstand derselbe sein müßte, so müßte bei gleicher Verschiebung auch die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle von der Gleichgewichtslage nähern, stets dieselbe sein. Das ist aber, wie wir oben



neswegs der Fall. Die vorhin mitgeteilten Beobachtungen von F. Kohlrausch zeigen, daß bei einer Torsion des Silberdrahtes von  $180^\circ$ , welche Minuten dauerte, nach 10 Sekunden die Drillung des Drahtes bis auf  $5'$  verschwunden war und in weitem 20 Minuten auf  $5'$  zurückging. Als selbe Torsion 10 Minuten gedauert hatte, war in 10 Sekunden die Drillung erst bis auf  $52'$  verschwunden, es dauerte 5 Minuten, bis sie auf  $27'$  zurückgegangen war und dann ging sie in 80 Minuten erst auf  $8'$  zurück. Hat man stärkere ursprüngliche Torsionen angewandt und diese stundenlang dauern lassen, so kann die langsame Rückkehr in die Gleichgewichtslage schon beginnen, wenn die Drillung noch viele Grade beträgt; wir erörtern den Versuch von F. Kohlrausch, bei welchem die Nachwirkung noch  $30^\circ$  betrug, erst in 130 Tagen ging sie auf  $27'$  zurück.

Noch rätselhafter wird der Vorgang durch die erwähnte von Kohlrausch gezeigte Superposition der elastischen Nachwirkung und durch Beobachtungen von Braun<sup>1)</sup> über den Einfluß anderweitiger elastischer Änderungen auf eine vorhandene Nachwirkung. Hat man einen Faden tordiert, so daß er Nachwirkung zeigt, so werden nach F. Kohlrausch durch eine entgegengesetzte Torsion die Moleküle nicht in derselben Weise verschoben, wie wenn man dem ungedrillten Faden dieselbe Torsion erteilt, sondern nach Aufhören der neuen Torsion und der von ihr herührenden Nachwirkung tritt die erstere wieder hervor. Man kann also die Nachwirkung nicht etwa aufheben, indem man durch eine äußere Kraft den Faden in die untordierte Lage bringt. Selbst wenn man ihn in dieser Lage nicht zu lange Zeit festhält, geht er aus derselben wieder heraus in die durch die frühere Torsion bedingte Lage, um dann ganz allmählich in die untordierte Lage zurückzukehren.

Nach den Beobachtungen von Braun sind die verschiedenen Formen der elastischen Änderungen, wenn man sie gleichzeitig eintreten läßt, voneinander unabhängig, das heißt z. B. wird ein Stab gleichzeitig durch eine ebene Kraft gebogen und durch ein gewisses Drehungsmoment tordiert, ist die Biegung die gleiche, wie wenn die Torsion nicht vorhanden ist, die Torsion die gleiche, wie wenn nicht gleichzeitig eine Biegung vorhanden wäre; ebenso wird die Torsion eines Drahtes nicht durch einen longitudinalen Zug und die Verlängerung durch einen longitudinalen Zug durch die Torsion geändert<sup>2)</sup>. Hat man dagegen einen Stab tordiert, so daß er nach Fortnahme des tordierenden Momentes elastische Nachwirkung zeigt, so ändert eine Biegung oder ein longitudinaler Zug den Gang der Nachwirkung beträchtlich, und zwar stets in dem Sinne, daß die Änderung beschleunigt wird. Dabei ist die Wirkung der Art nach die gleiche, wenn ein durch Zug gespannter Draht, während er Torsionsnachwirkung zeigt, entlastet wird oder wenn ein nicht durch Zug gespannter Draht einem Zuge ausgesetzt wird. Der Art nach ist die Wirkung ebenfalls die gleiche, ob der Draht unter Wirkung eines tordierenden Momentes die Nachwirkung als Zunahme der Torsion oder ob er nach Fort-

<sup>1)</sup> Braun, Poggend. Ann 159. p. 337. 1876.

<sup>2)</sup> Nach Versuchen von Benton (Ann. d. Physik. 8. p. 471 1900, ist der Poissonkoeffizient doch nicht ganz vom longitudinalen Zuge unabhängig; bei gewissen Metallen wächst derselbe, wenn man einen Draht gleichzeitig einem longitudinalen Zug aussetzt, bei andern nimmt er ab.



nahme des tordierenden Momentes als Nachwirkung noch eine Abnahme der Torsion zeigt. Die Wirkung einer Änderung der longitudinalen Spannung ist stets eine Beschleunigung des Ganges der elastischen Änderung im Sinne der augenblicklichen Bewegung. Während also durch einen longitudinalen Zug keine Torsionsverschiebung und somit selbstverständlich auch keine Torsionsnachwirkung erzeugt wird, hat jede Änderung der longitudinalen Spannung auf eine vorhandene Torsionsnachwirkung einen Einfluß.

Die große Verwicklung der Nachwirkungserscheinungen hat es bisher noch unmöglich gemacht eine Theorie dieser elastischen Erscheinungen zu geben, das heißt sie auf die molekularen Vorgänge im Innern der Körper zurückzuführen. Braun gelangte zu dem Schlusse, daß die elastische Nachwirkung etwas wesentlich anderes ist, als das, was man gewöhnlich elastische Verschiebung nennt <sup>1)</sup>

Schon W. Weber <sup>2)</sup> machte die Annahme, daß die elastischen Nachwirkungen nicht den bei Betrachtung der elastischen Veränderungen besprochenen Verschiebungen der Moleküle gegeneinander zuzuschreiben seien, sondern daß dieselben als Folge einer Drehung der Moleküle um eine in denselben liegende Achse anzusehen seien. Auch F. Kohlrausch <sup>3)</sup> schließt sich dieser Ansicht an, ohne indes ebensowenig wie W. Weber den Versuch zu machen aus dieser Anschauung die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung abzuleiten. Einen Versuch nach dieser Richtung hat Warburg <sup>4)</sup> gemacht und später Michaelis <sup>5)</sup>. Warburg macht darauf aufmerksam, daß die Erklärung der elastischen Nachwirkung aus einer Drehung der Moleküle zu einer wesentlichen Voraussetzung habe, daß die Moleküle nicht kugelförmig seien, daß sie etwa dreiaxige Ellipsoide seien, welche selbst in dem kleinsten meßbaren Volumen ganz unregelmäßig angeordnet seien. Wenn auf einen so zusammengesetzten Körper eine äußere Kraft wirkt, so muß neben der Verschiebung der Moleküle eine Drehung derselben eintreten, da bei bestimmten wirksamen Kräften den Molekülen eine bestimmte stabile Gleichgewichtslage zukommt, der sie sich zu nähern suchen. Diese Verdrehung der Moleküle läßt Kräfte zwischen denselben tätig werden, welche die gegenseitige Lage derselben beeinflussen. So ergeben z. B. die Rechnungen, daß bei einem longitudinal gezogenen Stab die Dehnung nach der Länge eine Drehung der Moleküle derart zur Folge hat, daß parallel der Längsrichtung eine Abstoßung eintritt. Bleibt demnach der äußere Zug der gleiche, so muß die durch die Drehung bewirkte Abstoßung eine Verlängerung des Stabes zur Folge haben, welche als die elastische Nachwirkung erscheint. Gleichzeitig ergibt sich, daß nach der Querrichtung des Stabes eine weitere Kontraktion eintreten muß, wie es Pulfrich gefunden hat. Ähnlich in andern Fällen. Die eigentümlichen von F. Kohlrausch beobachteten Superpositionen der elastischen Nachwirkungen

1) Braun, a. a. O. p. 390

2) W. Weber, Poggend Ann. 54 p. 1. 1841.

3) F. Kohlrausch, Poggend Ann. 128 p. 1. 207. 399. 1866

4) Warburg, Wiedem Ann. 4 p. 232. 1878

5) Michaelis, Beiblätter zu den Annalen d. p. 11. 1885. Das Arbeit kann sie nur aus den Beiblättern, scheint einen Ausbau der Warburg'schen Theorie zu versuchen

ener Art hat Warburg noch nicht abgeleitet, man erkennt aber weiteres, daß jener eigentümliche Widerstand, auf den wir vorhin rksam machten, in dieser Anschauung der Drehung der Moleküle, der Verschiebung derselben gegeneinander, entgegenwirken muß. Warburg selbst hält seine Theorie noch nicht für fertig, da sie noch nicht ade ist, den Erfolg eines bestimmten Versuchs rechnermäßig anzuzeigen<sup>1)</sup>.

Andere Versuche einer Theorie der Nachwirkung zu geben, haben Meyer<sup>2)</sup> und Neesen<sup>3)</sup> gemacht. Eine mathematische Theorie der Wirkung hat weiter Wiechert<sup>4)</sup> gegeben; wir gehen darauf nicht ein, begnügen uns kurz die Betrachtungen mitzuteilen, welche W. Weber<sup>5)</sup> F. Kohlrausch<sup>6)</sup> zur Ableitung der obigen die elastische Nachwirkung darstellenden Gleichung geführt haben<sup>7)</sup>.

Der Ausgangspunkt ist einfach die Annahme, daß bei jeder elastischen Verschiebung die Moleküle den wirksamen Kräften nicht frei folgen können, sondern auch ein Widerstand dem Eintritt in die neue durch die gerade wirkenden Kräfte bedingte Gleichgewichtslage entgegenstellt. Wenn wir den Abstand der Moleküle von dieser Gleichgewichtslage, mag er eine Verschiebung, mag er eine Verschiebung bedeuten,  $x$  nennen, so setzt W. Weber die Geschwindigkeit, mit welcher die Moleküle sich gegen dieselbe hin bewegen, irgend einer Potenz dieses Abstandes  $x$  proportional. F. Kohlrausch dagegen führt auch die Zeit  $t$  ein, welche seit dem Beginn des Bestehens der die neue Gleichgewichtslage bedingenden Kräfte verstrichen ist, so z. B. die Zeit, welche seit dem Aufheben der primären Torsion verstrichen ist. Er setzt die Geschwindigkeit, mit welcher die Moleküle sich der Gleichgewichtslage nähern, dem Abstand  $x$  direkt und einer Potenz der Zeit  $t$  umgekehrt proportional. Da wir, wie wir schon, diese Geschwindigkeit stets als den ersten Differentialquotienten des Abstandes nach der Zeit schreiben können, liefert die Annahme von Kohlrausch die Gleichung

$$-\frac{dx}{dt} = a \frac{x}{t^n},$$

wo links das negative Vorzeichen schreiben müssen, weil die Bewegung die Abnahme der  $x$  hervorbringt, also der Richtung entgegengesetzt ist, welcher  $x$  als positiv gerechnet ist. Bei nicht großen kurz dauernden primären Änderungen kann man  $n$  gleich 1 setzen, und erhält dann

$$-\frac{dx}{dt} = a \frac{x}{t}.$$

1) Man vergleiche hierzu die Bemerkung von Voigt am Schlusse seiner Abhandlung über Reibung fester Körper, auf die wir im § 62 zurückkommen; Wiedem. Ann. 17. p. 671. 1892.

2) O. E. Meyer, Poggend. Ann. 151. 1873; 154. 1874. Wiedem. Ann. 4. 1878. Neesen, Poggend. Ann. 157. 1875.

3) Wiechert, Wiedem. Ann. 50. p. 335 u. 546. 1893.

4) W. Weber, Poggend. Ann. 54. 1841.

5) F. Kohlrausch, Poggend. Ann. 119. 1863; 128. 1866.

Eine andere und eingehendere Entwicklung, ohne auf die der Nachwirkung zugrunde liegenden molekularen Vorgänge zurückzugehen, gibt Boltzmann, Ber. 70. 1874; Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. 1876. Man sehe darüber auch Kohlrausch, Poggend. Ann. 160. 1877.

Diese Gleichung läßt sich schreiben

$$-\frac{dx}{x} = \alpha \frac{dt}{t}.$$

Den zur Zeit  $t$  vorhandenen Abstand von der Gleichgewichtslage erhalten wir dann, wenn wir den zu einer bestimmten Zeit  $t_1$  nach Aufhören der primären Änderung vorhandenen Abstand mit  $x_1$  bezeichnen, durch Bildung der Summe aller Werte auf der linken Seite von  $x_1$  bis  $x$ , auf der rechten Seite von  $t_1$  bis  $t$ , oder durch Bildung der bestimmten Integrale

$$\int_{x_1}^x -\frac{dx}{x} = \int_{t_1}^t \alpha \frac{dt}{t}.$$

Nach E 2 und E VIII sind dieselben

$$-(\log \text{nat } x - \log \text{nat } x_1) = \log \text{nat } t^\alpha - \log \text{nat } t_1^\alpha,$$

oder auch

$$\frac{x_1}{x} = \frac{t^\alpha}{t_1^\alpha}$$

$$x = \frac{x_1 t_1^\alpha}{t^\alpha} = c \frac{1}{t^\alpha},$$

wenn wir den aus den Beobachtungen zu bestimmenden Zähler der rechten Seite mit  $c$  bezeichnen. Wir gelangen somit zu der Gleichung, welche Kohlrausch bei allen kleinern und kurz dauernden Änderungen bestätigte, und erkennen gleichzeitig, daß  $\alpha$  eine für das betreffende Material charakteristische Konstante ist, welche deshalb Kohlrausch auch als die Konstante der elastischen Nachwirkung bezeichnet.

Bei stärkern länger dauernden primären Änderungen ist  $n$  nicht gleich 1, dann erhalten wir für die Verschiebung  $x$  zur Zeit  $t$

$$\int_{x_1}^x -\frac{dx}{x} = \int_{t_1}^t \alpha \frac{dt}{t^n} = \int_{t_1}^t \alpha t^{-n} dt,$$

und das wird mit Beachtung der Regel E 1 für die rechte Seite der Gleichung

$$\log \text{nat } x_1 - \log \text{nat } x = -\frac{\alpha}{n-1} t^{-(n-1)} + \frac{\alpha}{n-1} t_1^{-(n-1)},$$

oder, wenn wir  $t_1 = 0$  setzen, also  $x_1$  als die Verschiebung ansehen, die im Augenblick des Aufhörens der primären Änderung vorhanden ist,

$$\log \text{nat } \frac{x}{x_1} = \frac{\alpha}{n-1} t^{1-n}$$

$$x = x_1 e^{-\frac{\alpha}{1-n} t^{1-n}}$$

also die Gleichung, welche Kohlrausch in diesem Falle experimentell stätigte. Wie die Versuche zeigen, hängt bei solchen primären Änderungen auch der Wert von  $\alpha$  von der Stärke und Dauer derselben ab, er wird besonders mit wachsender Dauer der primären Änderung kleiner, das!

ische Nachwirkung verläuft um so langsamer, je länger die pri-  
derung gedauert hat.

### § 57.

**elastizitätsgrenze.** Die bisher besprochenen durch äußere Kräfte  
verbrachten Veränderungen des Volumens oder der Gestalt der Körper  
vorübergehende, der Körper kehrte nach Aufhören der Wirkung der  
Kräfte in seinen frühern Zustand zurück, wenn auch ein Teil dieser  
enden Bewegung sehr langsam war. Diese Rückkehr in die ur-  
he Gleichgewichtslage findet jedoch keineswegs immer statt, man  
elmeht immer dann bleibende Änderungen, wenn die ändernden  
der vielmehr die durch diese hervorgebrachten Änderungen eine  
iröße überschreiten. Wird ein Draht durch einen sehr starken  
ehut, so behält er nach Aufhören desselben einen Teil seiner Ver-  
g bleibend bei, er nimmt, auch wenn die elastische Nachwirkung  
übergegangen ist, nicht wieder die frühere Länge an, seine Mole-  
en eine neue Gleichgewichtslage erhalten. Dasselbe findet man bei  
rn von uns betrachteten Fällen; ein zu weit tordierter Draht kehrt  
der in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück, ebenso gibt  
starke Biegung eine bleibende Durchbiegung des gebogenen Stabes.  
beruht die Verlängerung eines Drahtes, wenn man ihn durch einen  
zieht, der Abdruck des Stempels auf den Münzen, das Auswalzen  
e, die Wirkung des Hämmerns und alle ähnlichen Formänderungen,  
an ohne Trennung des Zusammenhanges der Körper bewirkt.

gibt demnach eine Elastizitätsgrenze, oder eine Grenze, welche  
räfte bei ihrer Wirkung auf die Körper nicht überschreiten dürfen,  
Körper dauernd zu ändern. Als diese Grenze definiert man dann  
r, beim Dehnen also die Größe des Zuges, bei der Torsion jenes  
moment, welches die erste bleibende Änderung des Körpers her-

Diese Grenze ist für verschiedene Substanzen sehr verschieden,  
erhält schon bei sehr schwachem Zuge, bei sehr geringer Torsion  
gung eine bleibende Änderung, während es bei Eisen oder Stahl  
solcher Kräfte bedarf.

weil es ist, eine Definition der Elastizitätsgrenze aufzustellen, so  
ist eine scharfe Bestimmung derselben. Zunächst erkennt man,  
ge genommen eine Kraft, welche eine bleibende Formänderung  
schon außerhalb der Elastizitätsgrenze liegt. Um diese Schwierig-  
zugehen, hat man z. B. bei der Dehnung jenen Zug, in Kilo-  
ausgedrückt, der pro Quadratmillimeter des Querschnitts wirkt,  
elastizitätsgrenze bezeichnet, welcher einen Draht um 0,00005 seiner  
hen Länge dauernd verlängert.

Selbst nach dieser Definition, und selbst abgesehen von der elasti-  
Nachwirkung, bietet die exakte Bestimmung dieser Grenze eine große  
keit, ja ist nach den Beobachtungen von Thalén<sup>1</sup> gar nicht mög-  
stens dann nicht, wenn man die Elastizitätsgrenze in ähnlicher  
den Elastizitätskoeffizienten als eine für das Material charakte-

<sup>1</sup>Thalén, Poggend. Ann. 124. 1865

ristische Konstante ansehen will. Zunächst scheint die Zeitdauer der Wirkung der äußeren Kräfte auf die bleibende Veränderung der Körper in ähnlicher Weise von Einfluß zu sein wie bei der elastischen Nachwirkung ja es scheinen selbst kleine Belastungen bei dauernder Einwirkung permanente Veränderungen hervorzubringen. Aus dem Grunde erlahmen an die Dauer alle Federn, biegen sich die Balken in den Decken usf. Ferner hat Thalén gezeigt, daß das Eintreten einer permanenten Verlängerung durch den Zug wesentlich davon abhängig ist, ob der Körper schon früher eine Dehnung erfahren hat oder nicht. Ein früher noch nicht gedehnter Körper erhält schon durch kleine Gewichte eine bleibende Verlängerung ein bereits durch einen starken Zug bleibend gedehnter erst durch sehr viel größere. So fand Thalén bei einem Stabe von mittelhartem schwedischem Stahl, daß bei der ersten Dehnung die Elastizitätsgrenze nach obiger Definition gleich 19,3 war, das heißt ein Zug von 19,3<sup>kg</sup> auf das Quadratmillimeter brachte bei kurz dauernder Wirkung eine bleibende Verlängerung von 0,00005 der ursprünglichen Länge hervor. Derselbe Stab wurde dann nach und nach einem Zuge bis zu 40<sup>kg</sup> auf das Quadratmillimeter ausgesetzt, wodurch seine bleibende Verlängerung bis auf 0,005 der ursprünglichen Länge zunahm. Der so verlängerte Stab wurde neuen Dehnungsversuchen unterworfen, und es ergab sich, daß eine neue bleibende Verlängerung jetzt nicht eintrat, wenn auch die früher bestimmte Elastizitätsgrenze erheblich überschritten wurde. Erst ein Zug von 33,8<sup>kg</sup> auf das Quadratmillimeter brachte eine neue Verlängerung von 0,00005 der ursprünglichen Länge hervor. Bei dieser Versuchsreihe wurde der Zug schließlich auf 44,5<sup>kg</sup> auf das Quadratmillimeter gesteigert und der Stab um 0,0085 seiner ursprünglichen Länge bleibend verlängert. Nachfolgende Dehnungen des Stabes ergaben dann, daß bei dem so verlängerten Stabe die Elastizitätsgrenze erst bei 38,6<sup>kg</sup> erreicht war<sup>1)</sup>.

Es ergibt sich somit, daß durch vorhergehende Streckungen die Elastizitätsgrenze sehr erheblich erweitert wird, daß man deshalb die gleiche Elastizitätsgrenze bei demselben Material nur dann findet, wenn dasselbe vorher durch den gleichen Zug gedehnt worden ist. Man erhält deshalb für hart gezogene Drähte eines Metalls ziemlich übereinstimmende Werte der Elastizitätsgrenze. In dieser Weise sind auch die in der folgenden Tabelle angegebenen von Wertheim<sup>2)</sup> erhaltenen Zahlen für hartgezogene Drähte zu verstehen.

Metalle	Elastizitätsgrenze		Metalle	Elastizitätsgrenze	
	hartgezogen	angelassen		hartgezogen	angelassen
	kg	kg		kg	kg
Blei . . . . .	0,25	0,20	Kupfer . . . . .	12,0	3,0
Zinn . . . . .	0,45	0,20	Platin . . . . .	26,0	14,5
Gold . . . . .	13,5	3,0	Eisen . . . . .	32,5	5,0
Silber . . . . .	11,25	2,75	Gußstahl . . . . .	55,6	5,0
Zink . . . . .	0,75	1,00	Stahldraht . . . . .	42,5	15,0

1) Man sehe darüber auch *Bach*, Elastizität und Festigkeit. Berlin 18  
2) *Wertheim*, Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. 1848. Ann. de chim. et d  
12. (3.) 1844.

Die Beobachtungen Thaléns erklären auch den großen Unterschied, welcher, wie ebenfalls die vorstehende Tabelle zeigt, Wertheim für die Elastizitätsgrenze hartgezogener und geglühter und dann langsam abgekühlter Drähte fand. Durch das Erhitzen gehen die Metalle wieder in den molekularen Zustand über, den sie vor der Streckung besaßen, und deshalb tritt schon bei viel geringerem Zuge eine dauernde Verlängerung ein. Wie Thalén fand, tritt diese Senkung der Elastizitätsgrenze schon bei einer Erwärmung auf  $200^{\circ}$  C. ein. Das Gleiche wird durch eine Reihe von Erfahrungen in der Technik bestätigt, wir erwähnen nur die leichtere Schmiedbarkeit der Metalle, wenn sie glühend sind; die Notwendigkeit beim Walzen der Bleche, wenn sie durch mehrere Walzen gegangen sind, dieselben erst neu zu erwärmen u. a. m.

Für die Torsion und Biegung hat Wiedemann<sup>1)</sup> schon früher ganz ähnliches gefunden, es zeigt sich auch dort, daß durch mehrmaliges Torsion und Biegen die Elastizitätsgrenze ganz erheblich herausgerückt wird. Man kann deshalb, wie Wiedemann hervorhebt, bei vorher noch gar nicht formierten, gedehnten, tordierten oder gebogenen Körpern eigentlich von einer Elastizitätsgrenze sprechen, schon die geringsten temporären Deformationen haben bleibende Änderungen zur Folge: erst wenn man die Körper hinlänglich oft innerhalb gewisser Grenzen durch bestimmte äußere Kräfte deformiert hat, kehren sie bei erneuerter Einwirkung derselben oder anderer Kräfte im gleichen Sinne, wie die zuletzt angewandten waren, in denselben Zustand zurück, den sie vor dieser erneuerten Einwirkung besaßen.

Geht man mit den auf einen festen Körper wirkenden Kräften über die Elastizitätsgrenze hinaus, so treten Formänderungen der Körper ein, welche man im wesentlichen mit Lehmann<sup>2)</sup> als ein Überwinden der Starrheit als ein langsames Fließen, ähnlich dem Fließen einer Flüssigkeit annehmen kann. Man erkennt, daß die festen Körper plastisch sind.

So hebt Lehmann hervor, daß, wenn bei dem Prägen einer Münze einwirkende Kraft konstant erhalten wird, der Stempel in dem Maße, als die elastische Reaktion überwunden wird, immer weiter eindringt, immer stets von neuer Spannung und Deformation hervorruft. In gleichem Maße, wie der Stempel eindringt, findet eine Verdrängung der Körpersubstanz, eine langsame Strömung derselben statt, welche im Prinzip identisch mit dem Fließen einer Flüssigkeit.

Ein wirkliches Fließen fester Körper haben Tresca<sup>3)</sup>, Spring<sup>4)</sup> und Lehmann<sup>5)</sup> erhalten. Tresca legte zylindrische Scheiben von etwa  $10^{\text{cm}}$  Durchmesser in einen festen Stahlzylinder von gleicher lichter Weite, dessen Mitte eine Öffnung von  $1-4^{\text{cm}}$  Weite besaß. In den nahezu mit Scheiben gefüllten Zylinder konnte ein dicht schließender Stempel durch eine

1) Wiedemann, Poggend Ann 103. 1858; 104. 1858; 107. 1859; 117. 1862; Ann 6. 1879. Über den Zustand permanent tordierter Drähte siehe man Warburg, Wied Ann 10. 1880.

2) Lehmann, Molekularphysik 1. p. 57. Leipzig 1888.

3) Tresca, Comptes Rendus 59. p. 754. 1864; 60. p. 1226. 1865.

4) W. Spring, Ann. de chim. et de phys. 22 (5.) p. 170. 1881.

5) Lehmann, Werigin und Luckojeff, Ann. d. Physik. 10. p. 647. 1903. Die Beschreibung des Apparates findet sich Ann. d. Phys. 7. p. 198. 1902.



hydraulische Presse eingepreßt werden, welche einen Druck bis zu 100000 zu liefern imstande war. Es wurden Platten von Blei, Silber, Kupfer, Eisen, auch von Ton usw. verwandt, und es zeigte sich, daß alle diese Substanzen in Form eines Strahles durch die enge Öffnung hindurchgepresst wurden. Indem die ausgepreßten Strahlen durch einen parallel der Achse geführten Schnitt geteilt wurden, konnte man auf der Schnittfläche die Verschiebungen und Bewegungen der einzelnen Teile der gepreßten Substanz erkennen. Es zeigte sich, daß die Platten sämtlich in der Mitte also über der Ausflußöffnung eingedrückt und rohrenförmig ausgestoßen waren, so daß die vorher übereinander geschichteten Platten in dem Strahl als ineinander gesteckte Röhren erschienen. Spring hat durch starke Kompression Pulver von Metallen und andern Substanzen in kompakte Massen verwandelt, wie wenn dieselben zusammengeschmolzen wären, und sie durch Pressen durch enge Öffnungen, in ähnlicher Weise wie Tresca in Draht verwandelt.

Tammann hat durch eine eigentümliche Anordnung seines Druckstempels die Schnelligkeit des Fließens der plastisch gewordenen Substanz, die man als ein Maß der Plastizität ansehen kann, messen können.

Der Druckstempel endigte über der auf ihre Plastizität zu untersuchenden, in einem dickwandigen Stahlrohr eingeschlossenen Substanz mit einem nach unten breiter werdenden abgestumpften Kegel. Die obere Basis des Kegels hatte den gleichen Durchmesser wie der Druckstempel, die untere größte Fläche des Kegels hatte einen Durchmesser, der etwas kleiner war als der lichte Durchmesser des Stahlrohres, so daß zwischen dem Kegel und der Röhrenwand ein schmaler ringförmiger Zwischenraum blieb. Wenn zum Fließen gekommene Metall trat durch diesen Zwischenraum in den Raum der oberhalb des Kegels zwischen dem Druckstempel und der Röhrenwand frei gelassen war. Da die plastisch gewordene Masse so durch den ringförmigen Zwischenraum nach oben abfloß, übte der Druckstempel stets seinen vollen Druck auf die obere Fläche der festen Substanz aus. Die Schnelligkeit, mit welcher der Druckstempel unter sonst gleichen Umständen vorwärts bewegt wurde, gab somit ein Maß für die Schnelligkeit, mit der die betreffenden Substanzen in den plastischen Zustand übergingen.

Die Versuche ergaben, daß die untersuchten Metalle Kalium, Natrium, Blei, Thallium, Zinn, Wismut, Kadmium, Zink bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur sehr verschieden plastisch waren; die Ausflußgeschwindigkeit war bei Kalium am größten und wurde nach der Reihenfolge der angegebenen Metalle kleiner. Gleichzeitig ergab sich, daß die Plastizität der Metalle mit steigender Temperatur sehr stark zunahm; die Ausflußgeschwindigkeit wird bei gleichem Drucke und gleicher ringförmiger Ausflußöffnung bei einer Temperatursteigerung von  $10^{\circ}$  nahezu verdoppelt.

In gleicher Weise ist das Ausziehen der Metalle zu Drähten als Fließen aufzufassen; der Zug an dem Metallstücke, welches dicker ist als die Öffnung des Ziehens, überwindet die Starrheit und verschiebt die Molekülschichten so aneinander, wie sie in fließenden Flüssigkeiten, die Schichten verschiedene Geschwindigkeit haben, aneinander hergehen.

Man bezeichnet die Eigenschaft der Körper, welche eine solche Verschiebung der Molekülschichten ohne Trennung des Zusammenhanges gestattet, als Geschmeidigkeit und Dehnbarkeit. Manche Metalle, wie



und Platin sind ganz außerordentlich dehnbar, man kann sie zu den feinsten Drähten ausziehen, oder wie das Gold durch Hämmern in äußerst dünne Blätter verwandeln.

Fehlt diese Eigenschaft, oder ist sie nur in geringerem Grade vorhanden, so nennt man die Körper spröde.

### § 58.

**Festigkeit.** Wenn die auf einen Körper wirkenden äußern Kräfte über die Elastizitätsgrenze hinaus weiter und weiter gesteigert werden, so wird der Zusammenhang des Körpers schließlich aufgehoben; ein über eine gewisse Grenze hinaus belasteter Draht zerreißt, unter zu starkem Drucke wird ein Körper zerquetscht oder zerstampft, ein zu stark tordierter Stab wird abgedreht, und ein zu stark gebogener Stab wird zerbrochen.

Den Widerstand, den ein Körper der Trennung seiner Teile entgegensetzt, nennt man seine Festigkeit, und das Maß der Festigkeit ist die auf die Flächeneinheit wirkende Kraft, welche aufgewandt werden muß, um die Trennung der Körperteile eintreten zu lassen. Der Unterschied zwischen Elastizitätsgrenze und Festigkeit tritt sehr gut in der Definition hervor, wie sie Lehmann<sup>1)</sup> von den beiden Grenzen gibt. Führen wir durch einen Körper, auf welchen irgendwie äußere Kräfte wirken, in Gedanken irgend einen Schnitt, so können wir die durch die äußern Kräfte in diesem Schnitte bewirkten Spannungen stets in zwei Komponenten zerlegen, deren eine parallel dem Schnitte, deren andere zu demselben senkrecht ist. Die erstere Komponente sucht ein Gleiten der benachbarten Schichten, ein Fließen zu erzeugen, und die Elastizitätsgrenze ist erreicht, wenn die Starrheit nicht mehr ausreicht, um das Fließen zu verhindern. Ist die zur Schnittfläche senkrechte Komponente eine Zugspannung, so darf diese eine gewisse Größe nicht überschreiten, wenn die Deformation eine elastische sein soll; wird diese Grenze, also die zulässige Grenze der pro Flächeneinheit wirkenden Zugspannung an irgend einer Stelle überschritten, so tritt dort ein Riß ein, der sich in der Regel durch die ganze Masse fortsetzt. Man unterscheidet so viele Arten von Festigkeiten, als es Arten der Einwirkung äußerer Kräfte auf einen Körper gibt.

Den für die Querschnittseinheit eines gezogenen Drahtes erforderlichen Zug, um den Draht zu zerreißen, nennt man seine Zugfestigkeit oder absolute Festigkeit. Übt man auf einen Draht einen solchen Zug aus, so beginnt er an einer Stelle sich stark zu dehnen unter Einschnürung seines Querschnittes, so daß dieser etwa in der Mitte der gedehnten Stelle am kleinsten ist; an dieser gedehnten Stelle zerreißt der Draht dann. Bei festen Substanzen ist diese dem Zerreißen vorausgehende Dehnung nicht zu erkennen. Wir müssen daraus schließen, daß der Draht nicht vollkommen homogen ist. Denn da bei einem longitudinal gezogenen Draht der zwischen je zwei zur Drahtachse senkrechten Querschnitten vorhandene Zug über die ganze Länge des Drahtes hin genau der gleiche ist, so ist, wenn Homogenität vorausgesetzt, gar kein Grund vorhanden, weshalb der Draht eher in dem einen als in dem andern Querschnitt reißen soll. Hat

1) O. Lehmann, Molekularphysik. I. p. 76

in der Tat bei einer bestimmten Belastung der Zug jene vorher definiert Grenze überschritten, so müßte das Reißen zwischen allen Querschnitten gleichzeitig eintreten, der Draht müßte in seine Moleküle zerstäuben. Da das Zerreißen in einem bestimmten Querschnitte eintritt, beweist, daß dort die schwächste Stelle des Drahtes ist, weil dort der Draht wohl seine kleinsten Querschnitt besaß. Findet man für eine gegebene Substanz in der Tat den gleichen Wert für die absolute Festigkeit, so weist das darauf hin, daß unsere Bearbeitungsmethoden die Stäbe oder Drähte bis zu dem gleichen Grade der Homogenität bringen.

Annähernd können wir indes die Maximalspannungen beim Zerreißen als für das Material charakteristisch ansehen, da der Querschnitt, in welchem das Zerreißen stattfindet, nur um eine für uns nicht meßbare Größe kleiner sein muß als die übrigen Querschnitte. Wir werden deshalb in dem Quotienten aus der zum Zerreißen eines Drahtes erforderlichen Zugkraft und dem Querschnitte des Drahtes annähernd jene Maximalspannung haben, welche der Zugfestigkeit des Materials entspricht.

In nachfolgender Tabelle geben wir einige der von Wertheim<sup>1)</sup> für die Metalle bestimmten Werte des Zuges für das Quadratmillimeter, welche Drähte derselben zerrissen. Das Zerreißen wurde durch allmähliches Wachsen der Belastung bewirkt; für kurz dauernde aber stoßfreie Belastung ist die Festigkeitsgrenze eine höhere.

Metalle	Festigkeitsgrenze		Metalle	Festigkeitsgrenze	
	hartgezogen	angelassen		hartgezogen	angelassen
Blei . . . . .	2,07	1,80	Kupfer . . . . .	40,30	30,54
Zinn . . . . .	2,45	1,70	Platin . . . . .	34,10	23,50
Gold . . . . .	27,00	10,08	Eisen . . . . .	61,10	46,88
Silber . . . . .	29,00	16,02	Gußstahl . . . . .	80,00	65,76
Zink . . . . .	12,80	—	Stahldraht . . . . .	70,00	40,00

Die Zahlen zeigen, ein wie erheblicher Unterschied der Festigkeit je nach der physikalischen Beschaffenheit des Materials vorhanden ist. Dieser Unterschied zeigt sich auch, wie schon Coulomb<sup>2)</sup> beobachtet hat, bei hartgezogenen Drähten, die Festigkeit wächst im allgemeinen mit Verkleinerung des Querschnittes. Nach Versuchen von Baumeister<sup>3)</sup> wuchs bei Drähten aus schwedischem Stabeisen die Festigkeit von 64<sup>kg</sup> pro Quadratmillimeter bei einem Draht von 0,72<sup>mm</sup> Durchmesser bis 137<sup>kg</sup> bei einem Draht von 0,11<sup>mm</sup> Durchmesser. Für einen Draht von 0,1<sup>mm</sup> Durchmesser ergab sich indes wieder der Wert 123. Der Koeffizient der Zugfestigkeit ist also für ein bestimmtes Metall nur dann derselbe, wenn das Metall ganz gleicher Weise bearbeitet ist.

Bach<sup>4)</sup> hat die Zugfestigkeit von Stäben, deren Querschnitt mehr Quadratcentimeter betrug, untersucht; er definiert als Zugfestigkeit den  $\frac{1}{2}$

1) Wertheim, Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. 1848.  
2) Coulomb, Mémoires de l'Acad. des Scienc. (Paris) 1784. p. 237 und 1  
3) Baumeister, Wiedem. Ann. 18. p. 607. 1883.  
4) Bach, Elastizität und Festigkeit. Berlin 1898.

für die Flächeneinheit, bei welcher die vorher erwähnte Dehnung an der Stelle beginnt, an welcher dann die Zerreißung stattfindet. Bei zwei Stäben von Flußeisen erhält er  $37,47 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$  und  $34,87 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$ , für Flußstahl  $72,36 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$ .

Für einen Kupferstab war die Zugfestigkeit  $22,3 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$ , für zwei Stäbe von Bronze  $19,7$  und  $20,9 \frac{\text{Kilo}}{\text{mm}^2}$ . Die Werte sind erheblich kleiner als die von Wertheim und Baumeister gefundenen, so daß man aus denselben ebenfalls den Schluß ziehen kann, daß mit Vergrößerung des Querschnittes die Zugfestigkeit abnimmt.

Bei der Biegung werden die Fasern auf der konvexen Seite des gebogenen Stabes gedehnt, auf der konkaven zusammengepreßt; der Bruch wird demnach eintreten, wenn die Spannung der gedehnten Fasern dort, wo die Dehnung am stärksten ist, so groß ist, daß die Moleküle an dieser Stelle ihren Zusammenhalt verlieren. Der Ort, wo die größte Spannung zu einem an seinem einen Ende festen, an dem andern durch den Zug  $P$  gebogenen Stab vorhanden ist, und den Wert dieser Spannung erhalten wir leicht aus den Entwicklungen des § 54. Für den Zug, den ein Flächenelement  $b dy$ , welches sich im Abstände  $y$  über der neutralen Faser befindet, von dem benachbarten erfährt, fanden wir dort den Wert

$$E \cdot y \cdot \frac{d\varphi}{dx} b dy;$$

wora  $\varphi$  den Winkel bedeutet, um welchen zwei benachbarte Querschnitte gegeneinander geneigt sind. Dieser Ausdruck erhält in dem gegebenen Querschnitt seinen größten Wert dort, wo  $y$  am größten ist, das ist in der Grenzfläche des Stabes, in dieser wirkt also auf die Flächeneinheit des Querschnittes, wenn wir  $b dy = 1$  setzen, die Spannung

$$E \cdot \frac{e}{2} \frac{d\varphi}{dx}.$$

Ist der betrachtete Querschnitt im Abstände  $x$  von dem befestigten Ende und ist  $l$  die Länge des Stabes, so fanden wir für das Drehungsmoment, welches der betrachtete Querschnitt durch den Zug erhält

$$\frac{E}{12} \cdot \frac{e \varphi}{dx} \cdot b e^2 = P(l - x).$$

Woraus sich ergibt

$$E \cdot \frac{e}{2} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{6P}{be^2} (l - x).$$

Die Spannung ist also dort am größten, wo  $x = 0$  ist, also an dem befestigten Ende des Stabes, sie ist dort, wenn wir sie mit  $S$  bezeichnen

$$S = \frac{6Pl}{be^2}.$$

Ist der Stab an beiden Enden gestützt und wird er durch einen Zug  $P$  in der Mitte gebogen, so tritt die größte Spannung in der Mitte des Stabes an der konvexen Seite auf. Wir erhalten sie durch die Erwägung, daß

wir den so gebogenen Stab ansehen können, als sei er in der Mitte fest und an jedem der unterstützten Enden durch den Zug  $\frac{1}{2}P$  gebogen. Da der Abstand der Mitte von dem gebogenen Ende  $\frac{1}{2}l$  ist, so wird die stärkste Spannung

$$S_1 = \frac{6 \cdot \frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{2}l}{be^3} = \frac{3Pl}{2be^3}.$$

Führen wir die Trägheitsmomente der Querschnitte auf eine durch den Schwerpunkt derselben zur Biegungsebene senkrechte Achse ein, so wird

$$S = \frac{\frac{1}{2}ePl}{\frac{1}{12}be^3} = \frac{\frac{1}{2}ePl}{M}$$

$$S_1 = \frac{\frac{1}{2}ePl}{4 \cdot \frac{1}{12}be^3} = \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2}ePl}{M}.$$

Setzen wir für  $\frac{1}{2}e$  die halbe der Biegungsrichtung parallele Dicke des Stabes, also etwa bei einem kreisförmigen Querschnitte den Radius des Stabes, so können wir durch die letzten Ausdrücke für einen beliebigen Stab die größten Spannungen berechnen.

Bezeichnen wir die Zugfestigkeit mit  $Z$ , so muß hiernach das Brechen eintreten, wenn  $S > Z$ , so daß wir für die Grenze des biegenden Zuges  $l$  bzw. den brechenden Zug bei einem am einen Ende festen Stab von rechteckigem Querschnitt erhalten

$$P = \frac{be^3}{6l} \cdot Z = \frac{M}{\frac{1}{2}el} \cdot Z.$$

Das Brechen muß beginnen als Riß in der Oberfläche an der stärksten beanspruchten Stelle, bei einem an beiden Enden aufgelegten durch den Druck  $P$  in der Mitte gebogenen Stab also in der Mitte.

Auch für die Torsion ist eine Maximalspannung vorhanden, welche wenn sie überschritten wird, ein Abdrehen der tordierten Stäbe oder Drähte bewirkt. Ist die dem letzten Querschnitte des Stabes, an welchem das Drehungsmoment  $F$  angreift, erteilte Drehung gleich  $\omega$ , so ist nach § 5 die Kraft, welche an dem Flächenelement  $\Delta q$  eines kreisförmigen Stabes, das sich im Abstände  $r$  von der Stabachse aber in beliebiger Höhe des Stabes befindet, angreift und parallel der Ebene des Querschnittes, nach der Richtung der Tangente an dem Kreise, auf welchem  $\Delta q$  liegt, hin wirkt

$$P = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{r\omega}{l} \cdot \Delta q,$$

worin  $l$  die Länge des tordierten Stabes ist. Die pro Flächeneinheit des Querschnittes, vorausgesetzt alle Elemente der Flächeneinheit befänden sich in demselben Abstände  $r$  von der Achse, wirkende Kraft ist demnach ein Koeffizient von  $\Delta q$ .

Denken wir uns durch die zur Achse senkrechte Verbindungslinie des Elementes  $\Delta q$  mit der Achse des Stabes eine Ebene gelegt, welche unter  $45^\circ$  gegen die Achse, also auch gegen den Querschnitt, zu welchem das Element  $\Delta q$  gehört, geneigt ist, so können wir uns die Kraft, welche die Verschiebung des Querschnittes bewirkt, nach den in § 50 mitgeteilten Betrachtungen von Clebsch durch einen zu dieser unter  $45^\circ$  gegen den Querschnitt des Stabes geneigten Ebene senkrechten Zug

anden denken. Die Größe dieses an der Flächeneinheit der Diagonalfäche zubringenden Zuges  $K$  erhalten wir durch folgende Überlegung. An ein Stücke  $ac$ , das wir gleich  $df$  setzen, der unter  $45^\circ$  gegen das Element  $ab$  geneigten Ebene, welches als Diagonalebene einem Würfel entspricht, dessen Seitenfläche gleich  $\Delta q$  ist, muß eine Kraft  $Kdf$  angreifen, so daß  $Kdf \cos 45^\circ$  gleich  $P$  ist, wenn durch den zur Ebene  $ac$  senkrechten Zug die parallel  $ab$  wirkende schiebende Kraft entstehen soll. Da nun aber die Diagonalebene  $df$  gleich  $\frac{\Delta q}{\cos 45^\circ}$  ist, so muß

$$Kdf \cos 45^\circ = K\Delta q = P$$

ein.

Damit also durch den senkrecht zu der Diagonalebene wirkenden Zug die der Torsion entsprechende verschiebende Kraft entsteht, muß an der Flächeneinheit der Diagonalebene genau derselbe Zug wirken, welcher parallel dem Querschnitte, zu welchem  $\Delta q$  gehört, zur Hervorbringung der Torsion wirkt. Daraus folgt, daß eine parallel  $ab$  wirkende Torsionskraft einen senkrecht zu  $ac$  wirkenden Zug von der gleichen Größe bedingt.

Dieser Zug  $K$ , welcher hiernach gegeben ist durch

$$K = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{r\omega}{l},$$

so, wie die ganze Überlegung ergibt und wie die Theorie der Elastizität weiter nachweist, die Maximalspannung, welche an der betreffenden Stelle des Drahtes vorhanden ist.

Ihr Wert von  $K$  wird am größten, wo  $r$  seinen größten Wert hat, also wenn  $\rho$  der Radius des Stabes ist für  $r = \rho$ . Aus dem am untersten Querschnitte des Stabes angreifenden, die Torsion  $\omega$  bewirkenden Drehungsmomente  $F$

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi \rho^4 \omega}{2l}$$

haben wir

$$K = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\rho \omega}{l} = \frac{2F}{\rho^3 \pi}.$$

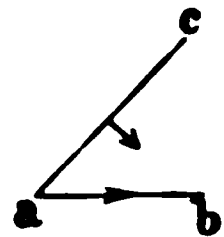
Nennen wir also wieder die Zugfestigkeit  $Z$ , so wird ein Abdrehen eintreten, wenn das Drehungsmoment am untersten Querschnitt einen solchen Wert hat, daß

$$F = \frac{\rho^3 \pi}{2} \cdot Z.$$

Das Abdrehen muß in einer spiralförmigen Fläche erfolgen, welche gegen die Achse des Stabes um  $45^\circ$  geneigt ist und das Reißen muß an der Oberfläche des Drahtes beginnen. Da bei einem kreisförmigen Drahte die gegen die Achse um  $45^\circ$  geneigte Spiralfäche gleichwertig ist, so wird auch hier der Riß an einer schwachen Stelle des Drahtes beginnen und von da aus sich spiralförmig fortsetzen.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Es sei auch hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese Entwicklungen nur für kreisförmige Querschnitte gelten; für elliptische Querschnitte er-

Fig. 72.



Bei einer von allen Seiten gleichmäßigen Kompression kann ein Zertrümmern eines festen Körpers nicht eintreten, da in dem Falle die Moleküle desselben allseitig genähert werden, also keine Zugspannung eintreten kann, welche dieselben voneinander trennt. Bei einseitiger Kompression tritt dagegen durch die Querdilatation eine Entfernung der Moleküle und infolgedessen eine Zugspannung auf.

Ist  $P$  der pro Flächeneinheit parallel der Längsrichtung eines Stabes wirkende Druck, so ist die Verkürzung des Stabes

$$\delta = \frac{1}{E} P,$$

die Ausdehnung nach der Quere ist  $\mu\delta$ . Dieselbe Verlängerung nach der Quere würde eingetreten sein, wenn nach dieser Richtung pro Flächeneinheit der Zug  $\mu P$  gewirkt hätte, wir werden also  $\mu P$  als die der Querrichtung parallele Zugspannung ansehen müssen. Das zur Längsrichtung senkrechte Zerreißen des Stabes wird demnach, wenn wir wieder mit  $Z$  die Zugfestigkeit bezeichnen, eintreten müssen, wenn  $\mu P = Z$  ist.

Die vorstehenden Betrachtungen können keine Theorie der Festigkeit geben, da sie nur von den einfachsten Annahmen ausgehen, die zweifellos ohne der Wirklichkeit nicht entsprechen. Wir haben die Gesetze der elastischen Deformation bis zur Bruchgrenze als gültig angenommen, so daß z. B. bei Besprechung der Biegung lediglich, wie wir es bei kleinen Veränderungen tun durften, die Verlängerungen und Verkürzungen der Fasern beachtet, keine Rücksicht darauf nahmen, daß wegen der verschiedenen Ausdehnung der Fasern eine Reibung zwischen denselben stattfinden muß. Ferner setzten wir voraus, daß die zu zerbrechenden Körper überall gleich beschaffen sind, während bei der Biegung es wesentlich von der Beschaffenheit der stärkst gespannten in der Oberfläche liegenden Fasern abhängen muß, wann der Bruch beginnt. Es wird eben, wie wir schon bei Besprechung der Zerreißfestigkeit erwähnten, von einem Mangel an Homogenität abhängen, ob die Festigkeitsgrenze etwas früher oder später erreicht wird. Unsere Entwicklungen werden uns deshalb nur im allgemeinen die Bedingungen des Bruches geben, ohne daß sie eine zahlenmäßige Übereinstimmung mit der Wirklichkeit liefern können. Das muß auch die Erfahrung.

Kowalski<sup>1)</sup> hat eine Anzahl Glasstäbchen von nahezu kreisförmigen Querschnitten durch Zerreißen, Zerbiegen, Zerdrehen und Pressen zum Bruch gebracht. Die Stäbchen waren thüringer Glas aus einem und demselben Hafen hergestellt und sorgfältig gekühlt, so daß angenommen werden durfte, die Stäbchen seien alle gleich beschaffen.

Bei den Zerreißversuchen wurden Stäbchen von 2—4 cm Länge in Schellack in zwei Halter eingekittet, so daß 1—2 cm der Stäbchen sichtbar blieben; die obere Fassung des Stäbchens wurde an einem Querstabe zwischen zwei Stellischen befestigt und an die untere eine Schale zur Annahme der Gewichte gehängt und gleichzeitig dafür gesorgt, daß etwa

gibt z. B. die Theorie, daß die stärkste Spannung nicht dort, wo der Abstand von der Achse am größten ist, sondern am Endpunkte der kleinen Achse vorhanden ist. Man sehe *Clebsch*, Elastizität § 37.

1) von Kowalski, Wiedem. Ann. 36. 1889.

Schwingungen der Schale sich nicht auf das Stäbchen übertragen konnten. Die Belastung geschah anfänglich durch größere Gewichte, später indem man zu denselben Schrotkörner hinzufügte. Bei 30 derart durchgeführten ZerreiBversuchen ergaben sich für  $Z$ , dem Zug pro Quadratmillimeter, Werte zwischen 8,651 und 8,971<sup>kg</sup>, im Mittel

$$Z = \frac{8,767 \text{ kg}}{\text{mm}^2}.$$

Das Zerbrechen geschah, indem die Glasstäbchen von 40—90<sup>mm</sup> Länge mit ihren Enden auf zwei Schneiden gelegt wurden; es ergab sich als Mittel aus 29 Versuchen, bei denen die Werte zwischen 8,712 und 8,987 schwankten

$$Z = \frac{8,794 \text{ kg}}{\text{mm}^2}.$$

Für die Torsion wurden die Stäbchen ebenso wie für die ZerreiBversuche in zwei Halter gekittet und ähnlich aufgehängt; an der untern Fassung war eine Torsionsrolle befestigt, die durch zwei horizontal nach entgegengesetzten Richtungen geführte Drähte, welche dann über vertikal gestellte Rollen liefen, gedreht wurde. Es ergab sich aus 33 Versuchen

$$Z = \frac{10,142 \text{ kg}}{\text{mm}^2}.$$

Das Zerdrehen fand, wie Kowalski ausdrücklich hervorhebt, in einer Fläche statt, die am Rande von einer Spirallinie begrenzt war, eine schöne Bestätigung der Theorie.

Bei den Zerdrückungsversuchen wurden Stäbchen von 3,5—5<sup>cm</sup> Länge durch einen einarmigen Hebel gepreßt, an dessen Enden das drückende Gewicht angebracht wurde. Als Druck  $P$  pro Quadratmillimeter, bei welchem das Zerdrücken eintrat, wobei nur solche Versuche als gelungen angenommen wurden, bei denen das Stäbchen in der Längsrichtung parallelen Flächen entzwei ging, fand sich im Mittel aus 14 Versuchen

$$P = \frac{37,700 \text{ kg}}{\text{mm}^2}.$$

Da Kowalski für den Querkontraktionskoeffizienten  $\mu$  den Wert 0,226 gefunden hatte, ergibt sich

$$Z = \mu P = \frac{8,520 \text{ kg}}{\text{mm}^2}.$$

Nur der für die Torsionsfestigkeit gefundene Wert stimmt nicht mit anderen Entwicklungen überein, derselbe ist zu groß; woran das liegt, läßt sich nicht erkennen.

Die Resultate Kowalskis sind später nicht bestätigt worden. Brodmann<sup>1</sup> hat für das gleiche Material die ZerreiBfestigkeit, Biegezugfestigkeit, Torsionsfestigkeit verglichen, er fand in  $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  die Festigkeit bei dem

	Zerreißen	Zerdrehen	Zerbiegen
im Maximum	14,50	15,60	16,69
„ Mittel	11,90	12,11	13,47.

<sup>1</sup> Brodmann, Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu München 1894 Nr. 1.



Die Zahlen sind alle größer als die von Kowalski gefundenen, Zahlen für Zerreißen und Zerdrehen sind nahezu gleich, während die die Biegung erheblich größer sind. Auch Bach<sup>1)</sup> findet für die Biegunfestigkeit durchweg größere Zahlen als für die Zerreißung.

Von welch bedeutendem Einfluß die oberflächliche Beschaffenheit Glasstäbchen ist, hat Brodmann gezeigt, indem er eine Anzahl von Stäbchen mit Flußsäure matt ätzte, also die oberflächliche Schicht wegnahm. Die Festigkeit nahm dadurch beträchtlich zu, so daß man schließen mußte, es würde durch die Ätzung eine oberflächliche Schicht von geringer Kohäsion fortgenommen. Die Zerreißfestigkeit stieg im Mittel auf 17, die Torsionsfestigkeit auf 20,34, die Biegungsfestigkeit auf 27,46.

Für das Verhältnis von Druckfestigkeit zur Zugfestigkeit bei Gußeisen fand Bach<sup>2)</sup> 4 : 1, so daß mit dem Querkontraktionskoeffizienten  $\mu = 0$  berechnet, sich die vorhin abgeleitete Beziehung ergibt.

Winkelmann und Schott<sup>3)</sup> haben für eine Anzahl Jenenser Gläser die Zug- und Druckfestigkeit verglichen; als Druckfestigkeit definierten sie aber nicht den Druck, bei dem die von Kowalski beobachtete Spaltbildung des Glases eintrat, sondern die Drucksteigerung wurde so weit fortgesetzt, bis das Glas mit einem Knall auseinander gesprengt war; es wurde dabei der Staub nach allen Richtungen auseinander geschleudert. Die so gemessene Druckfestigkeit war die 9,1 bis 18,7 fache der Zerreißfestigkeit.

Für die Druckfestigkeit hat Bach<sup>4)</sup> nachgewiesen, daß sie bei Gläsern von gleichem Querschnitt von der der Druckrichtung parallelen Dimension des Stabes abhängig ist; bei Rundstäben von rund  $3,1 \text{ cm}^2$  Querschnitt erhielt er als Druckfestigkeit bei einer Höhe von  $4 \text{ cm}$  72,1,  $1,98 \text{ cm}$  75,00;  $1 \text{ cm}$  85,79. Es trat also eine erhebliche Zunahme der Druckfestigkeit mit abnehmender Höhe ein.

Weiter ergab sich, daß während bei der Torsion, wie es Kowalski fand, der Riß in einer Spirale erfolgt, bei dem Zerdrücken die Bruchflächen nicht parallel der Druckrichtung, sondern schräg gegen dieselbe lagen.

Schließlich sei erwähnt, daß ein Zerbrechen und Zerdrücken nur spröden Substanzen eintritt, daß bei zähen Substanzen, wie Flußstein, Biegungen von  $180^\circ$  eintreten können ohne Brechung, daß Blei nicht zerdrückt werden kann.

Es genüge an diesen Angaben, um zu erkennen, wie verwickelt die Erscheinungen der Brechung sind, so daß eine Theorie derselben die größten Schwierigkeiten bietet<sup>5)</sup>.

Man unterscheidet noch eine fünfte Art von Festigkeit, die Härte. Als solche bezeichnet man den geringern oder größern Widerstand, den ein Körper dem Eindringen von Spitzen oder Schneiden entgegenstellt. Das erste Mittel eine Schätzung der Härte zu erhalten war das Aufste-

1) Bach, Elastizität und Festigkeit. Abschnitt III. § 22. 1898.

2) Bach, a. a. O. p. 114.

3) Winkelmann und Schott, Wiedem. Ann. 51. p. 697. 1894.

4) Bach, a. a. O. p. 139.

5) Man sehe auch die Arbeiten von Sella und Voigt, sowie von Voigt über die Festigkeit des Steinsalzes, Bergkristalls und Flußspates. Wiedem. Ann. p. 636—673. 1893.

nier Härteskala. Man teilte die Körper in 10 Klassen und bestimmte den Grad der Härte darnach, welche Körper den zu untersuchenden noch ritzen können und welche er ritzen kann. Die Körper, welche man als die Vertreter der Härteskala aufgestellt hat, sind nach Mohs vom geringsten zum größten Härtegrad fortschreitend folgende 10:

1. Talk.		6. Feldspat.
2. Steinsalz.		7. Quarz.
3. Kalkspat.		8. Topas.
4. Flußspat.		9. Korund.
5. Apatit.		10. Diamant.

Man legt danach einem Körper den Härtegrad 5 bei, wenn er Flußspat ritzen kann, und selbst vom Feldspat geritzt wird. Körper, die sich gegenseitig ritzen können, haben gleiche Härte.

Später wurde von Frankenheim<sup>1)</sup>, Seebeck<sup>2)</sup>, Franz<sup>3)</sup>, Pfaff<sup>4)</sup> und andern ein Maß für die Härte aufzustellen gesucht, indem man den Druck maß, der auf eine Spitze wirken mußte, damit sie den Körper, dessen Härte gemessen werden sollte, zu ritzen imstande waren, oder indem man wie Pfaff die Tiefe bestimmte, bis zu welcher ein mehrfaches Schaben mit einer Diamantschneide in die Fläche des zu untersuchenden Körpers einzudringen gestattete. Alle diese Methoden gestatteten indes nur ein mehr oder weniger an Härte zu erkennen, ein absolutes Maß derselben geben sie nicht.

Ein solches hat später Hertz<sup>5)</sup> aufzustellen versucht. Hertz geht aber von den Spannungen aus, welche an der Berührungsstelle elastischer Körper entstehen, wenn man etwa eine kugelförmig begrenzte Linse auf der Fläche eines Körpers legt und nun auf die Linse einen Druck ausübt. Wird eine solche Linse auf eine Ebene ohne Druck gelegt, so findet die Berührung in einem Punkte statt, wird die Linse gegen die Ebene gedrückt, so berühren sich die Körper in einer von der Größe des Druckes abhängigen Fläche, indem die Ebene eingedrückt, die Kugel abgeplattet wird. Handelt es sich um isotrope Körper, so wird diese Fläche, die Berührungsfläche, ein Kreis sein, dessen Radius mit der Größe des Druckes wächst. Innerhalb dieser Druckfläche sind Spannungen in beiden Körpern vorhanden, welche im allgemeinen Druckspannungen, an der Grenze der Berührungsfläche aber jedenfalls Zugspannungen sein müssen, da die in der Berührungsfläche einander genäherten Moleküle von den nicht gepreßten sich ebenfalls entfernen müssen. Hiernach definiert Hertz die Härte folgendermaßen: Die Härte ist die Festigkeit, welche ein Körper denjenigen Spannungen entgegensetzt, welche in ihm in der Nähe einer kreisförmigen Berührungsfläche auftreten. Eine Festigkeit messen wir durch diejenigen Kräfte

1. *Frankenheim*, Inauguraldissertation. Breslau 1829.

2. *Seebeck*, Programm des Cöln. Realgymnasiums 1833.

3. *Franz*, Poggend. Ann. 80. p. 37. 1850.

4. *Pfaff*, Münchener Berichte 1883. p. 55 und 372. 1884. p. 255. Weitere Details siehe man in der Abhandlung von *Auerbach*, Wiedem. Ann. 43. p. 64. 71.

5. *Hertz*, Verhandl. der physikal. Gesellschaft zu Berlin 1882. p. 67. *Crelles Annal.* 92. p. 156. 1882.

oder Ausdehnungen, welche einen Körper eben bis zur Festigkeitsgrenze beanspruchen, sei es, daß die Überschreitung der Grenze, dort wo sie überschritten ist, einen Sprung hervorruft wie bei spröden Körpern, sei es, daß sie wie bei zähen Körpern eine Einsenkung mit aufgewulsteten Rändern zur Folge hat. Das Maß der Härte ist der Druck pro Flächeneinheit, welcher im Mittelpunkte einer kreisförmigen Druckfläche herrschen muß, damit in einem Punkte des Körpers eben die Grenze der Festigkeit erreicht wird. Dies Maß hat den Vorzug sich nicht auf eine individuelle Spitze zu beziehen, es ist ferner ein absolutes, da zur Bestimmung der Härte eines Materials die Berührung zweier Körper aus diesem Material dienen kann, ein härteres also garnicht vorhanden zu sein braucht.

Nach den Rechnungen von Hertz besteht zwischen der Größe bzw. dem Radius  $r$  der Druckfläche und dem ausgeübten Drucke  $p$  sowie dem Radius  $\varrho$  der drückenden Kugelfläche die Beziehung

$$r = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \frac{p \varrho}{E} (1 - \mu^2)},$$

wenn  $E$  der Elastizitätskoeffizient und  $\mu$  der Querkontraktionskoeffizient des gedrückten Materials ist. Der mittlere Druck der Flächeneinheit der Druckfläche ist der Quotient aus dem Drucke  $p$  und der Größe der Druckfläche also  $\frac{p}{\pi r^2}$ . In dem Mittelpunkte der Druckfläche ist nach den Rechnungen von Hertz der Druck der anderthalbfache des mittlern Druckes, somit ist  $p_1$  der Druck pro Flächeneinheit im Mittelpunkte der Druckfläche

$$p_1 = \frac{3}{2} \frac{p}{\pi r^2} = \frac{3}{2\pi} p \left( \frac{2E}{3p\varrho(1-\mu^2)} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ist  $P$  der Druck, bei welchem die Elastizitätsgrenze überschritten wird, so ist die Härte  $P_1$  nach der Definition von Hertz

$$P_1 = \frac{3}{2\pi} P \left( \frac{2E}{3P\varrho(1-\mu^2)} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{PE^2}{\varrho^2(1-\mu^2)^2}}.$$

Da die Härte eine charakteristische Eigenschaft des Materials ist, so muß für ein gegebenes Material der Wert von  $P_1$  derselbe sein, es muß demnach  $\frac{P}{\varrho^{\frac{2}{3}}} = \text{konst.}$ , also der Druck  $P$  dem Quadrate des Radius der drückenden Kugelfläche proportional sein.

Auerbach<sup>1)</sup> hat aufgrund der Entwicklungen von Hertz absolute Härtemessungen an verschiedenen Gläsern und an Bergkristall durchgeführt versucht. Mittels eines Hebels wurden Glaslinsen, deren Krümmungsradien zwischen 1 und 30<sup>mm</sup> waren, auf Glasplatten von 8<sup>mm</sup> Dicke aufgesetzt, und die jedem Drucke  $p$  entsprechende Größe der Druckfläche nach einem später zu besprechenden optischen Verfahren, sowie der Druck  $p$  bestimmt, bei welchem in der Grenze der Druckfläche der Sprung eintrat.

Die Theorie von Hertz zeigte sich durch diese Versuche nicht bestätigt, indem bei Änderung des Krümmungsradius der drückenden Linse sich der Wert von  $P_1$  änderte, derart, daß  $P_1$  um so größer wurde, je kleiner der Krümmungsradius  $\varrho$  und damit auch der Radius der Dr

1) Auerbach, Wiedem. Ann. 43. p. 61. 1891; 45. p. 262. 1892; 53. p. 1 1894.

liche wurde, während der ersten Gleichung für  $r$  entsprechend der Wert

$$\frac{p\varrho}{r^3} = \frac{2E}{8(1-\mu^2)}$$

sch in der Tat als konstant fand.

Dagegen ergab sich, daß das Produkt  $P_1 \cdot \sqrt[3]{\varrho}$  konstant war, daß also der Druck  $P$ , bei welchem sich der Sprung zeigte, nicht dem Quadrate von  $\varrho$ , sondern der ersten Potenz proportional ist. Auerbach definiert deshalb das Produkt  $P_1 \sqrt[3]{\varrho}$  als die Härte  $H$  des Materials. Setzen wir nun aus mehrfachen Messungen abzuleitenden Quotienten  $\frac{P}{r^2} = q$ , so wird

$$H = P_1 \sqrt[3]{\varrho} = \frac{3}{2\pi} \sqrt[3]{Pq^2 \cdot \overline{\varrho}}.$$

Folgende Tabelle enthält die von Auerbach für drei Gläser und für Bergkristall senkrecht zur Achse gefundenen Werte der Härte in Kilogramm. pro mm<sup>2</sup>.

Stoff	$\varrho =$								Mittel
	1	3	4	5	10	12	15	30	
Glas I	212	—	215	—	—	214	—	—	213,7
II	—	228	—	222	227	—	223	—	226,7
III	—	—	244	—	—	237	—	236	239,0
Bergkristall	292	—	298	—	—	293	—	—	294,2

Welches die Zugspannung an der Sprungstelle ist, läßt sich nicht berechnen.

In der unten als dritte erwähnten Abhandlung hat Auerbach eine Anzahl Jenerser Gläser auf ihre Härte geprüft, er findet Werte zwischen 15 und 316; die früher gefundenen Beziehungen, abweichend von Hertz, bestätigen sich bestätigt.

### § 59.

**Stoß der Körper.** Die Erscheinungen, welche zwei Körper darbieten, wenn sie aufeinander stoßen, die Änderungen, welche ihre Bewegungen dabei erfahren, hängen wesentlich von den elastischen Eigenschaften derselben ab. Wir entwickeln die Gesetze des Stoßes, indem wir zunächst voraussetzen, daß die stoßenden Körper Kugelgestalt haben.<sup>1)</sup>

Haben zwei Massen  $m$  und  $m'$  gewisse gleichgerichtete Geschwindigkeiten  $v$  und  $v'$  erhalten, so werden sie, wenn die Geschwindigkeit  $v$  von  $m$  größer ist als die  $v'$  von  $m'$ , nach einiger Zeit aufeinander treffen und während einer sehr kurzen Zeit gegeneinander gedrückt sein. Infolge

1) Die Gesetze des Stoßes kugelförmiger Körper wurden zu gleicher Zeit von Wallis, Wren und Huyghens entwickelt und von Wallis am 26. November 1666, von Wren am 17. Dezember 1668, von Huyghens am 4. Januar 1669 der Royal Society zu London vorgelegt, der letztere soll sie jedoch schon im Jahre 1663 entwickelt haben. Philos. Transact. of the Royal Soc. of London from commencement etc. Abridged with notes etc. 1. p. 307, 310, 335. London 1809.

dieses Stoßes wird dann die Geschwindigkeit jedes der beiden Körper geändert sein, die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers wird verkleinert, die des gestoßenen Körpers wird vergrößert sein. Sind die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoße  $c$  und  $c'$ , so erhalten wir zunächst ganz allgemein folgende Relation zwischen den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße. Während die Körper sich berühren, übt der eine auf den andern einen Druck aus, und infolge dieses Druckes wird die Geschwindigkeit geändert, und zwar für den stoßenden Körper um  $v - c$ , für den gestoßenen um  $c' - v'$ . Da der Druck auf die beiden Massen  $m$  und  $m'$  während derselben Zeit wirkt, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, die diese Drucke erteilen, also die soeben abgeleiteten Geschwindigkeitsänderungen umgekehrt wie die Massen, denen sie erteilt sind, oder

$$\frac{v - c}{c' - v'} = \frac{m'}{m}$$

und daraus

$$m v + m' v' = m c + m' c'.$$

Um eine zweite Relation zwischen den Geschwindigkeiten zu erhalten, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1) Beide Körper sind absolut unelastisch. Der Stoß wird dann eine bleibende Änderung der Gestalt hervorbringen, die Körper entfernen sich nach dem Stoße nicht mehr voneinander, sondern bewegen sich nach dem Stoße mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter. In diesem Falle ist also  $c = c'$ , und wir erhalten

$$\begin{aligned} m v + m' v' &= (m + m') c, \\ c &= \frac{m v + m' v'}{m + m'}, \\ v - c &= \frac{m' (v - v')}{m + m'}, \quad c - v' = \frac{m (v - v')}{m + m'}. \end{aligned}$$

War die Bewegung  $v'$  jener von  $v$  entgegengesetzt, so haben wir in diesen Ausdrücken nur  $v'$  mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu verstehen und es wird

$$c = \frac{m v - m' v'}{m + m'}.$$

Und ist nun  $m v = m' v'$ , so wird  $c = 0$ , also beide Körper bleiben in Ruhe. Dieser Fall scheint also durchaus dem im § 11 abgeleiteten Satze von der Konstanz der lebendigen Kraft zu widersprechen, da die lebendige Kraft nach dem Stoße gleich Null ist. Indes ist der Widerspruch nur scheinbar, da durch den Stoß Arbeit geleistet, nämlich die Gestalt der Massen bleibend geändert, und, wie wir später nachweisen werden, auch Wärme erzeugt ist. Und da hier, nicht nur wenn  $c = 0$  ist, sondern in jedem Falle eine Gestaltsänderung der Massen erfolgt, also Arbeit geleistet wird, so muß in jedem Falle die lebendige Kraft der bewegten Massen nach dem Stoße kleiner sein wie vor dem Stoße. Man findet diesen Satz bestätigt, wenn man die lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoße vergleicht.

2) Wenn dagegen die beiden Körper vollkommen elastisch sind, gleicht sich die im Stoße eintretende Gestaltsänderung sofort wieder

da die zusammengedrückten Körper sich sofort wieder ausdehnen und ihre ursprüngliche Gestalt annehmen. Die Körper sind also nach dem Stöße wieder in ihrem ursprünglichen Zustande, oder es ist bei dem Stöße keine Arbeit geleistet worden. Die lebendige Kraft der bewegten Massen ist in dem Falle durch den Stoß nicht geändert worden. Diese Bemerkung führt uns für die elastischen Körper die zweite Relation zur Bestimmung der Geschwindigkeiten nach dem Stöße; denn nach derselben ist

$$mv^2 + m'v'^2 = mc^2 + m'c'^2$$

oder

$$m(v^2 - c^2) = m'(c'^2 - v'^2).$$

Dividieren wir diese Gleichung durch die vorhin allgemein abgeleitete

$$m(v - c) = m'(c' - v'),$$

so folgt

$$v + c = v' + c'.$$

Setzen wir in den beiden letzten Gleichungen

$$c = \frac{2m'v' + (m - m')v}{m + m'}; \quad c' = \frac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'};$$

so müssen wir wieder das Zeichen von  $c'$  ändern müssen, wenn die Geschwindigkeiten die entgegengesetzte Richtung haben.

Nehmen wir nun an, daß  $m = m'$  sei, so wird

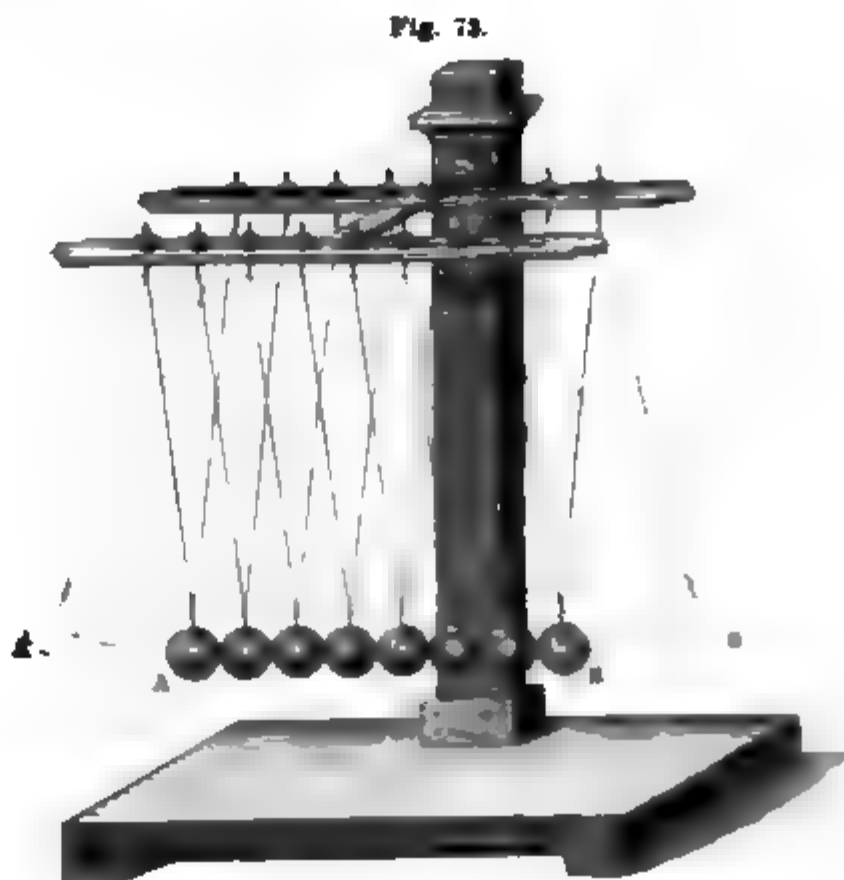
$$c = c', \quad c' = c.$$

Die Körper haben also nach dem Stöße die Geschwindigkeiten ausgetauscht. War die Geschwindigkeit der einen Masse  $m'$  gleich  $u$ , so wird jetzt die andere Null, denn  $c = 0$ , und  $c' = u$ .

$$v = 0, \quad v' = u.$$

Wird also eine Kugel von einer ruhenden ganz gleicher Masse gerade gestoßen, so erhält sie von letzterer deren volle Geschwindigkeit, und die andere Kugel bleibt still.

Dieser bemerkenswerte Schluß läßt sich leicht durch den Versuch nachweisen<sup>1)</sup>. Man setze an einem Gestelle (Fig. 73) mehrere unter sich gleiche Kugeln von



<sup>1)</sup> Der Apparat zum Nachweis des Satzes vom Stöße der Körper wurde zuerst von Mariotte angegeben. Mariotte, Traité de la percussion ou choc des corps. Paris 1677.

Elfenbein so auf, daß sie sich berühren, und daß ihre Zentra sich in einer geraden Linie befinden. Man hebt nun die erste um einen gewissen Winkel und läßt sie dann fallen. Sie beschreibt einen Kreisbogen wie ein Pendel und stößt auf die zweite Kugel mit einer Geschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh}$ . Nach dem Stoße ist sie in Ruhe, gibt aber ihre Geschwindigkeit an die zweite Kugel ab; diese überträgt sie an die dritte usf. durch die ganze Reihe bis schließlich die letzte Kugel  $A$  die Geschwindigkeit erhält, welche  $B$  besaß, und deshalb bis  $A'$  aufsteigt.

Dann fällt  $A$  wieder zurück, erreicht dieselbe Geschwindigkeit und teilt dieselbe wieder durch alle die Kugeln hindurch an  $B$  mit. Man hat demnach ein Pendel, welches aus einer Reihe von Kugeln besteht, deren mittlere unbeweglich bleiben, und deren beide äußeren sich abwechselnd heben und senken.

Ist  $m' = \infty$ ,  $v' = 0$ , so wird

$$c = \frac{v(m - m')}{m + m'} = -v \frac{m'}{m} = -v,$$

d. h. stößt eine Kugel gegen eine feste Wand, so besitzt sie nach dem Stoße eine ihr gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit. Läßt man demnach eine Elfenbeinkugel auf eine Marmorplatte fallen, so muß sie zurückspringen und zu derselben Höhe wieder aufsteigen, von der sie herabfiel, um neuerdings zu fallen und so ihre Bewegung ohne Ende fortzusetzen. Man weiß nun, daß das nicht der Fall ist, daß die Kugel allerdings zurückspringt, aber nicht bis zu ihrer ursprünglichen Höhe, und daß ihre Bewegung nach und nach aufhört. Ebenso findet man, daß die gestoßene Kugel niemals genau die Geschwindigkeit der stoßenden erhält, somit, daß unserer Theorie entgegen jedesmal bei dem Stoße ein Verlust von lebendiger Kraft eintritt, respektive ein Teil der lebendigen Kraft in eine andere Form umgesetzt wird. Der Grund dieser Abweichung der Erfahrung von der Theorie liegt eben darin, daß, wie wir § 56 und 57 sahen, die in der Theorie vorausgesetzte vollkommene Elastizität der Körper nicht besteht. Die durch die elastische Kraft geleistete Arbeit ist niemals genau gleich der in der ersten Hälfte des Stoßes geleisteten Arbeit, es wird vielmehr immer im Innern sowohl des stoßenden als des gestoßenen Körpers ein Teil der geleisteten Arbeit in andere Formen umgesetzt.

Die in dem bisherigen abgeleiteten Stoßgesetze gelten unter der Voraussetzung, daß die Körper sich in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte stoßen, so daß also der durch den Stoß ausgeübte Druck und der elastische Gegendruck direkt durch den Schwerpunkt gehen. Lassen wir diese Voraussetzung fallen, so ist die Wirkung des Stoßes eine andere.

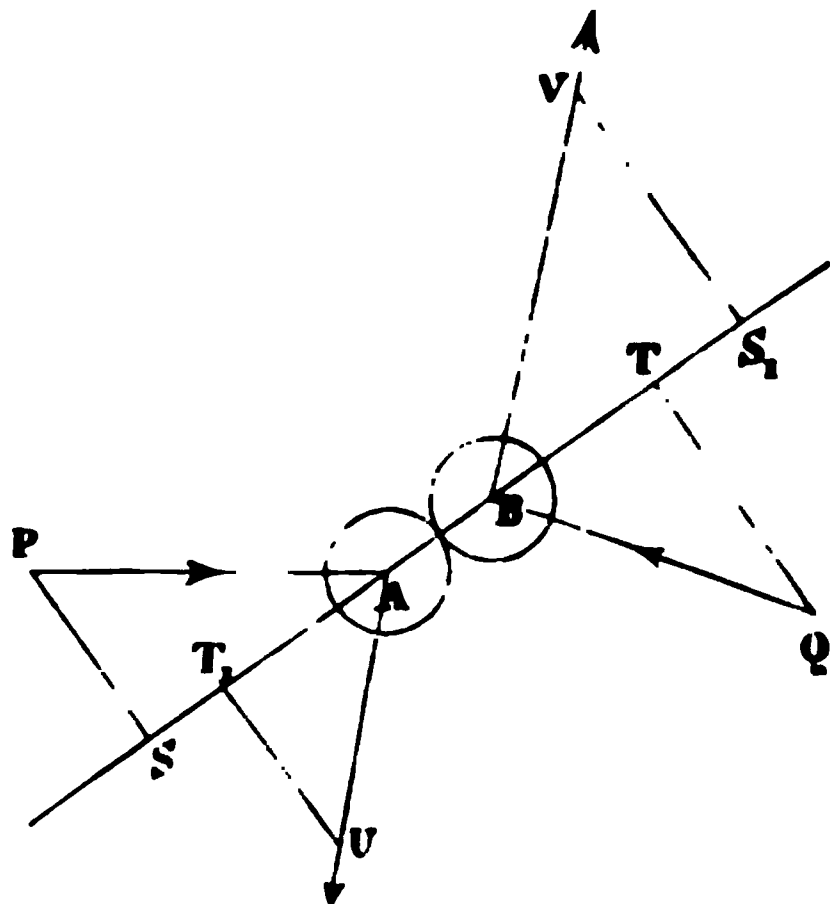
Bei Kugeln ist es leicht, bei solchen nicht nach dem Zentrum gerichteten, also exzentrischen oder schiefen Stößen die Bewegung nach dem Stoße abzuleiten.

Seien zu dem Ende  $A$  und  $B$  (Fig. 73a) die Mittelpunkte zweier Kugeln im Momente des Stoßes, und sei  $PA$  der Richtung und Größe nach die Geschwindigkeit  $v$  der Kugel  $A$ ,  $QB$  jene  $v'$  der Kugel  $B$ , so ferner die Masse der ersten Kugel  $m$ , jene der zweiten  $m'$ . Die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte  $AB$  geht dann stets durch den Berührungspunkt, und steht, da der Radius einer Kugel stets normal ist



lemente der Kugel, an welches er gezogen ist, normal zu den  
renden Elementen. Zerlegen wir die Geschwindigkeit  $PA$  in  
 $B$  parallele Komponente  $SA$  und die zu  $AB$  senkrechte Kom-  
S, und ebenso die Ge-  
eit  $QB$  in  $QT$  senkrecht  
d  $TB$  parallel  $AB$ , so  
nd  $QT$  gleichzeitig paral-  
rührungsflächen der bei-  
n. Diese Komponenten  
er durch den Stoß nicht  
erden, dieselben sind nach  
die gleichen wie vor  
i. Die beiden anderen  
en senkrecht zur Berüh-  
sind nach den Mittel-  
so den Schwerpunkten der  
richtet, auf diese sind  
ittelbar die Gesetze des  
stoßes anzuwenden. Be-  
ir den Winkel, den  $PA$   
ildet, mit  $\alpha$ , den Winkel  
 $B$  und  $BA$  mit  $\alpha'$ , so ist

Fig. 73a.



$$SA = v \cdot \cos \alpha, \quad TB = -v' \cos \alpha';$$

indigkeiten von  $A$  und  $B$  parallel  $SA$  und  $BT$  nach dem  
len dann

$$\frac{r' \cos \alpha' + m - m' r \cos \alpha}{m + m'}, \quad \xi' = \frac{2 m r \cos \alpha - (m' - m) r' \cos \alpha'}{m + m'},$$

$r' \cos \alpha'$  mit dem negativen Vorzeichen schreiben müssen, weil  
g der Komponente  $TB$  jener  $SA$  entgegengesetzt gerichtet ist.  
die Massen beider Kugeln als gleich voraus, also  $m = m'$ , so

$$\xi = -r' \cos \alpha'; \quad \xi' = r \cos \alpha,$$

Kugeln tauschen einfach ihre parallel  $AB$  gerichteten Ge-  
riten aus.

stalen Geschwindigkeiten nach dem Stoße erhalten wir als Re-  
der je beiden zueinander senkrechten Komponenten

$$r^2 = r'^2 \sin^2 \alpha + \xi^2, \quad r'^2 = r'^2 \sin^2 \alpha' + \xi'^2,$$

ichtung der Bewegung nach dem Stoße respektive den Winkel,  
mit  $AB$  bildet, in den Gleichungen

$$\tan \alpha_1 = \frac{r \sin \alpha}{\xi}, \quad \tan \alpha'_1 = \frac{r' \sin \alpha'}{\xi'}.$$

u,  $m = m'$ , so wird

$$\tan \alpha_1 = -\frac{r \sin \alpha}{r' \cos \alpha'}, \quad \tan \alpha'_1 = -\frac{r' \sin \alpha'}{r \cos \alpha}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Richtungen der Bewegungen  $AU$  und  $BV$  an der andern Seite von  $AB$  liegen, als die Bewegungen vor dem Stoße. Wir erhalten dieselben, indem wir  $AT_1 = BT$ ,  $T_1U = P$  ziehen in der Linie  $AU$  und ebenso, indem wir  $BS_1 = AS$ ,  $S_1V = Q$  ziehen in  $BV$ , für beide Kugeln der Größe und Richtung nach.

Die Bewegung der beiden Kugeln in einzelnen Fällen ist hiernach leicht zu bestimmen. Wird z. B. eine Kugel gegen eine ruhende gleiche Masse gestoßen, so bewegt sich die stoßende nach dem Stoße stets senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, die gestoßene mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte parallelen Komponente der stoßenden Kugel parallel der Verbindungslinie. Die beiden Kugeln bewegen sich also in zueinander senkrechten Richtungen. Ist  $m'$  unendlich  $v' = 0$ , wie also die Kugel  $m$  gegen eine feste Wand geworfen, so daß sie mit der Normale der Wand den Winkel  $\alpha$  bildet, so wird

$$\xi = -v \cdot \cos \alpha, \quad \xi' = -0 = c', \quad c = v,$$

$$\tan \alpha_1 = -\frac{v \cdot \sin \alpha}{v \cdot \cos \alpha} = -\tan \alpha.$$

Die zur Wand normale Komponente bleibt ihrer Größe nach unverändert, sie wird der Richtung nach die entgegengesetzte; die Geschwindigkeit  $c$  nach dem Stoße ist deshalb dieselbe wie vor dem Stoße, die Richtung der Bewegung liegt an der andern Seite der Normalen zur festen Wand, in der durch die Bewegungsrichtung vor dem Stoße und der Normalen gegebenen Ebene, sie bildet mit der Normalen zur Wand denselben Winkel wie vor dem Stoße.

Sehr viel verwickelter werden die Wirkungen des Stoßes, wenn einer der stoßenden Körper oder beide nicht Kugeln sind. Die nicht kugelförmigen Körper erhalten im allgemeinen durch den Stoß auch eine rotierende Bewegung. Die Wirkung des Stoßes ist nämlich stets normal dem Flächenelement, in welchem die stoßenden Körper sich berühren; diese Richtung geht aber bei nicht kugelförmigen Körpern im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt derselben. Deshalb erteilt der Stoß solchen Körpern im allgemeinen eine rotierende Bewegung um eine Achse, welche durch den Schwerpunkt der Körper geht, und welche senkrecht ist zu der Ebene, welche durch die Bewegungsrichtung vor dem Stoße und die Berührungsfläche normale Richtung gegeben ist. Man erhält das Drehmoment, indem man die zur Berührungsfläche senkrechte Komponente der Bewegung nochmals zerlegt, und zwar in die durch den Berührungspunkt und den Schwerpunkt gehende und die zu dieser Richtung senkrechte Komponente; letztere bewirkt die Drehung. Es wird demnach von der lebendigen Kraft der stoßenden Körper ein Teil zur Erzeugung der rotierenden Bewegung verwandt, die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung muß somit um diesen Betrag vermindert werden. Die Geschwindigkeiten der fortschreitenden Bewegungen müssen deshalb kleiner sein, als sie sich aus den vorhin für Kugeln durchgeführten Rechnungen ergeben.

Ganz vollständig ist indes eine solche Rotation auch nicht bei Kugeln ausgeschlossen; die beiden Kugeln reiben nämlich aneinander, solange die Berührung dauert, und diese Reibung wirkt auf beide Kugeln wie eine

rührungsfläche parallelen Bewegungskomponente entgegengesetzt Kraft; diese muß als senkrecht zum Radius an der Peripherie Kraft eine Rotation der Kugeln zur Folge haben.

solcher Übergang von Bewegung bzw. lebendiger Kraft in das Körper kann je nach der Form der Körper auch bei ganz zentraler eintreten. Es ist das z. B. der Fall, wenn man zwei Zylinder mit ebenen oder gerundeten Endflächen aneinander stoßen läßt, so daß der Stoß genau axialer ist. Durch den Stoß der Zylinder werden die zur Achse senkrechten Schichten der Zylinder in die später zu besprechenden longitudinalen Schwingungen versetzt. Je nach der Verhältnißlänge der Zylinder, wenn wir dieselben gleichen Materials annehmen, kann in dem einen Zylinder ein erheblicher Teil der fortschreitenden Bewegung als Molekularbewegung zurückbleiben, und demortschreitende Bewegung nach dem Stoße eine erheblich andere sein, als es die entwickelten Stoßgesetze, die ausdrücklich auf der Voraussetzung beruhen, daß alle lebendige Kraft auch nach dem Stoße der fortschreitenden Bewegung vorhanden bleibt, ergeben.

Zylindrische Stäbe gleichen Materials, gleichen Querschnittes und gleicher Länge ergibt sich, daß dort die einfachen Stoßgesetze gelten, und von Voigt<sup>1)</sup> bestätigen das; ist der stoßende Stab halb so lang als der gestoßene, so würde nach der einfachen Theorie, im Falle der geraden dem Stoße in Ruhe war, der stoßende mit  $\frac{1}{3}$  seiner früheren Geschwindigkeit zurück, der gestoßene mit  $\frac{2}{3}$  der Geschwindigkeit des stoßenden vorwärts gehen; berücksichtigt man die in den gestoßenen übertragene Arbeit, so sollte der stoßende nach den Entwicklungen von Saint Venant<sup>2)</sup> und Neumann<sup>3)</sup>, sowie nach einer elementaren Theorie von Hausmann<sup>4)</sup> in Ruhe bleiben, der gestoßene mit der halben Geschwindigkeit des stoßenden vorangehen. Nach den Versuchen von Voigt, Boltzmann und Hausmann<sup>5)</sup> ist das aber nicht der Fall, der Verlust der Kraft der fortschreitenden Bewegung ist erheblich geringer, als nach der Theorie von de Saint Venant sein sollte. Die Abweichung von der nach der einfachen Stoßtheorie sich ergebenden Bewegung ist um so größer, je größer die Geschwindigkeit ist, mit welcher der Körper an den gestoßenen ankommt, bei schwachen Stößen sind die Bewegungsänderungen fast genau nach der einfachen Stoßtheorie.

In der Versuche, eine Theorie der Erscheinungen zu geben, verläßt man auf die erwähnten Arbeiten von Voigt und Hausmann.

#### § 60.

**Adhäsion.** In ähnlicher Weise wie die Moleküle eines und desselben Körpers aneinander haften, ziehen sich auch diejenigen zweier getrennter Körper an.

<sup>1)</sup> Voigt, Wiedem. Ann. 19. p. 44. 1883.

<sup>2)</sup> Saint Venant, Liouville's Journal 12. (2) p. 237.

<sup>3)</sup> Neumann, nach der Angabe von Voigt a. a. O.

<sup>4)</sup> Hausmann, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Jahrg. 1891. p. 1383.

<sup>5)</sup> Boltzmann, Wiedem. Ann. 17. p. 343. 1882.

<sup>6)</sup> Hausmann, Wiener Berichte 88. p. 162. 1883. Wiedem. Ann. 15.

Körper an, wenn man sie hinreichend einander nähert. Am deutlichsten zeigt sich diese als Adhäsion bezeichnete Anziehung, wenn man zwei Körper mit großen Flächen zu recht inniger Berührung bringt. Schleif man zwei Platten von etwa 10<sup>cm</sup> Durchmesser möglichst gut aufeinander und schiebt sie sorgfältig übereinander, so daß sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung berühren, so bedarf es eines Zuges von vielen Kilogrammen um die Platten voneinander zu reißen.

Durch Versuche mit solchen sogenannten Adhäsionsplatten, denen man eine verschiedene Größe gibt, kann man erkennen, daß die Größe der Adhäsion mit der Größe der adhärierenden Flächen zunimmt; ein Gesetz der Abhängigkeit der Adhäsion von der Größe der Flächen läßt sich in dieser Art schwierig aufstellen, weil es sich nicht erreichen läßt, bei allen Versuchen eine gleich innige Berührung der Flächen herzustellen.

Auf diesem Aneinanderhaften der Körper bei inniger Berührung beruhen alle Methoden der Verbindung zweier Körper durch irgend ein Bindemittel. Um die Berührung der Körper mit dem Bindemittel möglichst innig zu machen, wird das letztere in flüssiger Form zwischen die zu verbindenden Flächen gebracht, und dann erstarren gelassen. In der Regel adhäreren dann diese Bindemittel stärker an den Körpern, zwischen welche man sie gebracht hat, als ihre Teile untereinander kohäreren, deshalb wird bei einer versuchten Trennung der durch ein solches Bindemittel verbundenen Körper meist eher die Kohäsion des Bindemittels überwunden als die Adhäsion desselben an die verbundenen Körper.

Ein solches Aneinanderhaften zweier Körper zeigt sich auch, wenn man zwei Platten mit genau parallelen Flächen bis auf gewisse kleine Entfernungen nähert, ohne daß man sie zur Berührung bringt, schon bei Abständen, welche erheblich größer sind, als daß wir nach den später besprechenden Erfahrungen annehmen können, daß die molekularen Kräfte dort noch wirksam sein können. Stellt man eine Platte genau horizontal und läßt eine andere, welche an einer Wage äquilibriert ist, in kleinen Abständen, etwa 0,1<sup>mm</sup> darüber schweben, so bedarf es stets eines nicht unerheblichen Übergewichts, um die schwebende Platte von der festen zu entfernen. Stefan hat diese von ihm als scheinbare Adhäsion bezeichnete Erscheinung genauer untersucht<sup>1)</sup> und gezeigt, daß sie ein Phänomen ganz anderer Art ist, bei welchem von einer molekularen Anziehung gar keine Rede ist.

Es zeigt sich nämlich, daß es in diesem Falle gar keiner bestimmten Kraft bedarf, um die bewegliche Platte von der festen loszureißen, vielmehr schon das kleinste Übergewicht, welches auf die andere Wagschale gelegt wird, dazu ausreicht. Je kleiner aber das Übergewicht ist, um so größerer Zeit bedarf es, bis der Abstand der Platten von einem gegebenen anfänglichen Wert auf einen gewissen größeren Wert gewachsen ist. Diese Zeitdauer ist ferner wesentlich davon abhängig, ob man die Platten in der Luft übereinander hängen läßt oder in einer Flüssigkeit, und weiter von der Natur der Flüssigkeit; sie ist eine andere, wenn die Platten im Wasser übereinander schweben, als wenn sie sich in Alkohol oder in einer Salzlösung befinden. Gerade die Abhängigkeit

1) Stefan, Wiener Berichte. 69. 1874.

Ercheinung von der Flüssigkeit, in welcher sich die Platten befinden, weist auf das deutlichste, daß hier ganz andere Kräfte maßgebend sind, als eine molekulare Anziehung der beiden Platten. Wir werden deshalb an einer andern Stelle bei Besprechung der Flüssigkeitsreibung auf die Untersuchung von Stefan zurückkommen.

### § 61.

**Von der Reibung.** Wenn zwei Körper übereinander hin bewegt werden, so bedarf es immer einer gewissen Kraft, um die Bewegung zu erhalten, selbst wenn die Bewegung in genau horizontaler Richtung vor sich geht. Durch die Berührung der Körper tritt also der Bewegung derselben übereinander hin ein Hindernis entgegen. Dieses Hindernis bezeichnet man als Reibungswiderstand; er tritt nur dann auf, wenn man einen Körper über einen andern hin in der Berührungsebene zu bewegen will.

Die Reibung ist um so stärker, je rauher die Flächen sind, welche übereinander bewegen; wir müssen daher eben in dieser Rauigkeit den hauptsächlichsten Grund suchen, indem dadurch die Teile der Körper teilweise ineinander greifen, und deshalb bei jeder Bewegung derselben übereinander hin ein geringes Heben des bewegten Körpers stattfindet. Je glatter im allgemeinen die Berührungsflächen sind, um so geringer ist die Reibung. Daß aber in den Unebenheiten der Berührungsebenen nicht der einzige Grund der Reibung zu suchen ist, geht daraus hervor, daß dieselbe auch von der Natur der reibenden Körper abhängig ist.

So z. B. zeigt sich, daß bei sonst gleichen Umständen Stahl und Eisen aufeinander bewegt, den kleinsten Reibungswiderstand zeigen. Wir müssen daher zur Erklärung der Reibung noch eine Anziehung zwischen den Teilen der sich berührenden Körper annehmen, ähnlich wie wir sie bei der Adhäsion gesehen haben.

Man unterscheidet gleitende und rollende Reibung; erstere findet statt, wenn zwei Ebenen übereinander hingeschoben werden, oder zwei ineinander greifende Flächen, wie Zapfen im Zapfenlager sich ineinander bewegen. Rollende Reibung tritt auf, wenn ein von krummen Flächen begrenzter Körper so über einen andern hin bewegt wird, daß in jedem Augenblicke derselbe Punkte der beiden Körper sich berühren, wenn also ein Körper über einen andern fortrollt. Die gleitende Reibung ist bei weitem die stärkere.

Trotz mancher Untersuchungen über die Reibung sind nur wenige Tatsachen sicher konstatiert worden. Um die gleitende Reibung zu untersuchen, legt man einen Körper mit einer glatten Fläche auf eine glatte horizontale Unterlage und sucht die Kraft zu bestimmen, deren es bedarf, um den Körper in Bewegung zu versetzen, oder genauer, durch welche Kraft man ihn mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter bewegt, wenn man ihn erst durch einen einmaligen Anstoß in Bewegung gesetzt hat. Diese Kraft mißt die Reibung. Sehr bequem läßt sich dazu auch die schiefe Ebene verwenden, indem man den Winkel aufsucht, um welchen man dieselbe neigen muß, damit der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit dieselbe hinabrollt. Man nennt diesen Winkel den Reibungswinkel.

Durch ähnliche Versuche haben Coulomb<sup>1)</sup>, Rennie<sup>2)</sup> und besonder Morin<sup>3)</sup> folgende Gesetze erhalten:

1. Die Reibung ist dem Drucke der Körper auf die Unterlage proportional.

2. Die Reibung hängt bei dem gleichen Drucke nicht von der Ausdehnung der sich berührenden Flächen ab, sofern diese keine Spitzen oder Kanten haben, sondern nur von deren Natur und Glätte.

3. Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.

Letzterer Satz scheint jedoch nur innerhalb gewisser Grenzen zu gelten; besonders bei sehr raschen Bewegungen scheint doch die Reibung mit der Geschwindigkeit sich zu ändern<sup>4)</sup>.

Das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke, das heißt den Bruchtheil des Gewichtes eines Körpers, der ihn auf horizontaler Ebene in gleichförmiger Bewegung zu erhalten vermag, der nach dem vorigen für dieselben Körper konstant ist, nennt man den Reibungskoeffizienten. Derselbe ist wie man sieht, gleichzeitig der Sinus des Reibungswinkels. So ist z. B. der Reibungskoeffizient

von Eisen auf Eisen . . . . . 0,108,  
von Messing auf Gußeisen . . 0,189 usf.

Im allgemeinen nimmt die Reibung etwas zu, wenn Körper lange auf einander gestanden haben, jedoch nur bei dem Übergange der Körper aus der Ruhe zur Bewegung; einmal bewegt, ist der Reibungskoeffizient wieder der frühere.

## § 62.

**Innere Reibung bei festen Körpern.** Bei Besprechung der elastischen Nachwirkung haben wir gesehen, daß bei einer Einwirkung äußerer Kräfte auf die festen Körper nur ein Teil der durch sie stattfindenden Verschiebungen sofort eintritt, daß es sehr lange Zeit dauern kann, bis zu den äußeren Kräften entsprechende Gleichgewichtslage vollständig erreicht ist. Wir schlossen daraus, daß sich der Bewegung der Moleküle ein Widerstand entgegenstellt, allerdings ein Widerstand ganz eigentümlicher Art, dessen Wesen wir noch nicht zu erkennen imstande sind.

Bei der durch elastische Kräfte bewirkten Bewegung fester Körper läßt sich nun noch in anderer Weise ein Widerstand wahrnehmen, der sich darin zu erkennen gibt, daß diese Bewegungen allmählich zur Ruhe kommen, und zwar viel schneller, als es durch die etwa vorhandenen äußeren Widerstände, wie die Reibung an der umgebenden Luft ihn darbietet, der Fall sein kann. Am bequemsten zur Erkennung dieses Widerstandes und deshalb auch am meisten zur Untersuchung desselben geeignet sind die schwingenden Bewegungen, welche durch die Torsion entstehen.

1) *Coulomb*, Mémoires présentés à l'Acad. de Paris. 10. 1830.

2) *Rennie*, Experiments on the friction etc. Philos. Trans. 119. 1829.

3) *Morin*, Nouvelles expériences sur le frottement. I. Mémoire présenté à l'Acad. de Paris. 4. 1833. II. Mémoire. Paris 1834. III. Mémoire. Paris Doves Repertorium. 1.

4) Man sehe indes *Warburg* und *Babo*, Wiedem. Ann. 2. p. 406. 1880.

Drahtes hervorgebracht werden. Tordieren wir einen Draht um einen Bogen  $\varphi$ , so wissen wir, daß infolgedessen ein Drehungsmoment entsteht welches gleich  $D \cdot \varphi$  ist, und welches den Stab in die untordierte Lage zurückzutreiben sucht. Hierin ist  $D$  das den Draht zurückdrehende Moment, wenn der Bogen  $\varphi$  gleich der Einheit ist. Wir können uns dieses Drehungsmoment als einen Druck denken, welcher am Ende eines Hebelarmes von der Länge eins angreift, dann ist gleichzeitig  $\varphi$  der Abstand des Punktes, an welchem die Kraft angreift, von der Gleichgewichtslage, bezw. der Weg, den dieser Punkt zurücklegen muß, um in die Gleichgewichtslage zurückzukehren. Ist der Draht an seinem untern Ende mit einem Körper beschwert, etwa einer Kugel, so daß das Trägheitsmoment derselben und des Drahtes in bezug auf die Achse des Drahtes gleich  $M$  ist, so ist die Beschleunigung, welche der im Abstände eins von der Drehungsachse befindliche Punkt gegen die Gleichgewichtslage erhält, also auch die Winkelbeschleunigung gleich  $\frac{D}{M} \cdot \varphi$ . Wir erhalten demnach gerade wie in § 27 als Bewegungsgleichung des schwingenden Systems

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{D}{M} \cdot \varphi.$$

Nennen wir die Torsion des Drahtes, die wir ihm ursprünglich erteilen, als wir ihn sich selbst überließe,  $\varphi_0$  und rechnen die Zeit  $t$  von dem Momente an, in welchem wir den Draht sich selbst überließe, so erhalten wir gemäß § 27 für den Abstand  $\varphi$  des Systems von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$

$$\varphi = \varphi_0 \cos t \sqrt{\frac{D}{M}}.$$

Hieraus folgt, daß wenn

$$t \sqrt{\frac{D}{M}} = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi \dots$$

$$\varphi = \varphi_0, \quad -\varphi_0, \quad \varphi_0, \quad -\varphi_0, \quad \varphi_0 \dots$$

der der Draht vollführt Schwingungen, deren Dauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{D}}$$

und deren Amplitude konstant gleich  $\varphi_0$  ist, das heißt, der Draht bewegt sich unanfhörlich jedesmal in der Zeit  $T$  zwischen den Grenzen  $+\varphi_0$  und  $-\varphi_0$  hin und her.

Wenn man die Bewegungen eines solchen Drahtes nun aber verfolgt, und die Amplituden desselben bestimmt, so findet man, daß dieselben stetig kleiner werden. Man kann das am schärfsten, indem man unten an der Kugel einen Spiegel anbringt und dann in der § 54 besprochenen Weise die Bewegung mit Fernrohr und Skala verfolgt; die Punkte, an denen die Bewegung umkehrt, die also den Werten  $+\varphi_0$  entsprechen sollen, setzen immer näher zusammen. Schon Gauß und Weber, welche zuerst die Abnahme der Schwingungsweiten verfolgten, fanden, daß die Werte der Amplituden, so lange dieselben nicht zu groß sind, etwa 4 bis 6 Grad betragen, in einer geometrischen Reihe abnehmen. Nennen wir also die



Werte der bei den Schwingungen erreichten äußersten Abstände, Rücksicht auf das Vorzeichen  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$ , so findet sich

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = a$$

oder

$$\log \varphi_0 - \log \varphi_1 = \log \varphi_1 - \log \varphi_2 = \dots \log a.$$

Die Differenz der Logarithmen der aufeinander folgenden Amplituden ist konstant. Diese Differenzen nennt Gauß die logarithmischen Module.

Dieses Gesetz der Abnahme der Amplitude beweist, daß der schwachen Bewegung des Drahtes in jedem Momente ein Widerstand entgegenwirkt, welcher der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung proportional ist, daß also die Beschleunigung zur Zeit  $t$  nicht gleich dem Werte  $\frac{D}{M} \varphi$  ist, sondern kleiner, und zwar um eine Größe kleiner, welche der augenblicklichen Geschwindigkeit  $v$  des schwingenden Drahtes proportional ist. Bezeichnen wir daher mit  $2\gamma$  den Widerstand, welcher der Geschwindigkeit  $v$  gleich eins ist, so können wir die zur Zeit  $t$  vorhandene Beschleunigung schreiben

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M} \varphi - \frac{2\gamma}{M} v$$

oder da  $v$  der erste Differentialquotient von  $\varphi$  nach der Zeit ist,

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M} \varphi - \frac{2\gamma}{M} \frac{d\varphi}{dt}$$

oder

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + k^2 \varphi = 0,$$

wenn wir  $\frac{2\gamma}{M} = 2\varepsilon$  und  $\frac{D}{M} = k^2$  setzen.

Aus dieser Gleichung, welche uns eine Beziehung zwischen der Beschleunigung, Geschwindigkeit und der augenblicklichen Lage des beweglichen gibt, können wir nicht so direkt die Lage des Beweglichen zur Zeit ableiten, wie wir es § 27 aus der Gleichung konnten, welche die Geschwindigkeit oder den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit nicht enthielt. Wir können indes in Erwägung, daß  $\varphi$  eine Funktion von  $t$  sein muß, daß die gegebene Gleichung zwischen den verschiedenen Differentialquotienten der Funktion  $\varphi$  und dieser selbst sein muß, mit Hilfe unserer Kenntnis von den Eigenschaften der Funktion die gesuchte Funktion in folgender Weise erhalten. Setzen wir

$$\varphi = e^{\lambda t},$$

worin  $e$  die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und  $\lambda$  eine zu bestimmende Konstante sein soll, so ist nach E 3a und E IV

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda e^{\lambda t}; \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung ein, so wird dieselbe

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2) = 0.$$

Somit entspricht die Funktion  $\varphi = e^{\lambda t}$  unserer Gleichung, wenn wir  $\lambda$  aus der Gleichung

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2 = 0$$

bestimmen, denn mit dem so bestimmten  $\lambda$  wird die uns gegebene Gleichung erfüllt. Für  $\lambda$  erhalten wir aus dieser Gleichung

$$\lambda = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Es gibt somit zwei Werte von  $\lambda$ , welche jeder für sich unsere Gleichung erfüllen, nämlich

$$\lambda_1 = -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Jeder dieser beiden Werte hat dieselbe Berechtigung, wir können daher zur Darstellung von  $\varphi$  nicht den einen wählen und den andern verwerfen. Da indes die Exponentialfunktion mit jedem der beiden Werte der gegebenen Gleichung genügt, so tut es auch die Summe

$$\varphi = e^{-\varepsilon t + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} + e^{-\varepsilon t - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t}.$$

Indem wir so  $\varphi$  dieser Summe gleichsetzen, berücksichtigen wir jeden der beiden Werte ganz gleichmäßig. Indes müssen wir an dem so bestimmten Werte von  $\varphi$  noch eine Korrektur anbringen; würden wir die Gleichung für  $\varphi$  so aufstellen, so läge darin eine ganz bestimmte Voraussetzung, es würde nämlich, wenn wir  $t = 0$  setzen,  $\varphi = 2$  werden, da dann beide Exponenten gleich Null, somit jedes Glied der rechten Seite gleich 1 würde. Wir müssen deshalb jedes Glied der rechten Seite mit einer Konstanten multiplizieren, die indes nicht für beide Glieder dieselbe sein darf, da wir dann eine nicht notwendige spezielle Voraussetzung über die Abhängigkeit des Wertes  $\varphi$  von  $t$  machen würden. Sind demnach  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Konstante, deren Wert noch näher zu bestimmen ist, so erhalten wir als ganz allgemeine Beziehung für  $\varphi$

$$\varphi = A e^{-\varepsilon t + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} + B e^{-\varepsilon t - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t}$$

oder

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \{ A e^{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} + B e^{-\sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} \}.$$

In diesem Ausdrucke müssen wir beachten, daß die beiden Exponenten jedenfalls imaginär sind, denn wenn eine dauernde Bewegung eintreten soll, muß  $k^2$  jedenfalls erheblich größer sein als  $\varepsilon^2$ , wir können daher den Ausdruck schreiben

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \{ A e^{i \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t} + B e^{-i \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t} \}.$$

An Stelle der Exponentialfunktion mit imaginären Exponenten kann man, wie in der Differentialrechnung bewiesen wird, trigonometrische Funktionen einführen und schreiben

$$\begin{aligned} & A e^{i \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t} + B e^{-i \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t} \\ &= (A + B) \cos t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + (A - B) i \sin t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \end{aligned}$$

oder

$$\varphi = e^{-\epsilon t} \left\{ (A + B) \cos t \sqrt{k^2 - \epsilon^2} + (A - B) \sqrt{-1} \sin t \sqrt{k^2 - \epsilon^2} \right\},$$

worin jetzt noch die beiden Konstanten  $A$  und  $B$  zu bestimmen sind.

Dieselben ergeben sich aus der Bedingung, daß zur Zeit  $t = 0$  der Abstand des schwingenden Drahtes von der Gleichgewichtslage gleich  $\varphi_0$  sein soll, und weiter daß, weil zur Zeit  $t = 0$  die Bewegung infolge der Elastizität des Drahtes beginnt, in diesem Momente die Geschwindigkeit der Bewegung gleich Null sein muß. Da zur Zeit  $t = 0$  der Wert  $\sin t \sqrt{k^2 - \epsilon^2} = 0$ , dagegen der Kosinus gleich 1 ist, so ergibt die erste Bedingung

$$A + B = \varphi_0.$$

Um den Koeffizienten des zweiten Gliedes zu bestimmen, haben wir den Quotienten  $\frac{d\varphi}{dt}$  zu berechnen. Setzen wir der Abkürzung wegen

$$(A - B) \sqrt{-1} = b; \quad \sqrt{k^2 - \epsilon^2} = m,$$

somit

$$\varphi = e^{-\epsilon t} \{ \varphi_0 \cos mt + b \sin mt \},$$

so erhalten wir nach E II, E 3 a, E 4, E 5

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\epsilon e^{-\epsilon t} \{ \varphi_0 \cos mt + b \sin mt \} + e^{-\epsilon t} \{ -\varphi_0 m \sin mt + mb \cos mt \}$$

Setzen wir  $t = 0$ , so wird die rechte Seite unserer Gleichung  $-\epsilon \varphi_0 + mb$ , und da die Gleichung gleich 0 sein soll, wird

$$b = \frac{\epsilon}{m} \varphi_0.$$

Setzen wir diesen Wert für  $b$  in die Gleichung für  $\varphi$ , so wird

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\epsilon t} \left\{ \cos mt + \frac{\epsilon}{m} \sin mt \right\}.$$

Ehe wir die durch diese Gleichung dargestellte Bewegung näher betrachten, wollen wir zeigen, daß sie der Gleichung entspricht, die wir zwischen der Beschleunigung und Geschwindigkeit erhielten

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\epsilon \frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0.$$

Wir haben dazu nur die drei Glieder dieser Gleichung auszurechnen. Das letzte Glied wird

$$k^2\varphi = k^2\varphi_0 e^{-\epsilon t} \cdot \cos mt + k^2\varphi_0 e^{-\epsilon t} \frac{\epsilon}{m} \cdot \sin mt.$$

Das mittlere wird nach obiger Entwicklung, wenn wir für  $b$  seinen Wert setzen,

$$2\epsilon \frac{d\varphi}{dt} = -2\epsilon\varphi_0 e^{-\epsilon t} \left( \frac{\epsilon^2}{m} + m \right) \sin mt.$$

Zur Berechnung von  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)$  haben wir auf  $\frac{d\varphi}{dt}$  dieselbe

gleichung anzuwenden wie zur Berechnung von  $\frac{d\varphi}{dt}$  aus  $\varphi$ . Damit wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \left( \frac{\varepsilon^2}{m} + m \right) \sin mt - \varphi_0 \left( \frac{\varepsilon^2}{m} + m \right) e^{-\varepsilon t} m \cdot \cos mt.$$

Beachtet man nun, daß  $\frac{\varepsilon^2}{m} + m = \frac{\varepsilon^2 + m^2}{m} = \frac{k^2}{m}$ , so sieht man sofort, daß die Summation, dieser drei Ausdrücke den Wert 0 gibt.

Man erkennt unmittelbar, daß die Gleichung

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \left\{ \cos t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{m} \sin t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \right\}$$

eine schwingende Bewegung darstellt, wie sie Gauß und Weber bei einem tordierten Draht beobachteten. Wächst  $t$  von 0 ab, so nimmt  $\varphi$  ab, der Draht nähert sich der Gleichgewichtslage und erreicht dieselbe, wenn das Glied in der Klammer Null wird. Das tritt ein zu einer Zeit  $t$ , die sich aus der Gleichung

$$\cos mt + \frac{\varepsilon}{m} \sin mt = 0$$

$$\tan mt = -\frac{m}{\varepsilon}$$

ergibt. Wächst die Zeit weiter, so wird  $\varphi$  negativ, der Draht schwingt auf die andere Seite der Gleichgewichtslage, er erreicht dort den größten Abstand, wenn  $t$  einen solchen Wert  $T$  hat, daß

$$T \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = \pi,$$

denn die für die Geschwindigkeit der Bewegung abgeleitete Gleichung zeigt, daß für diesen Wert von  $t$  die Geschwindigkeit gleich Null wird, der zu dieser Zeit erreichte Abstand ist also der Punkt, wo die Bewegung umkehrt. Der Abstand  $\varphi_1$  ist dann

$$\varphi_1 = -\varphi_0 e^{-\varepsilon T}.$$

Wächst die Zeit wieder um denselben Wert

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}},$$

so befindet sich der schwingende Draht wieder an dem andern äußersten Punkte seiner Bahn. Der Abstand wird

$$\varphi_2 = \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}.$$

Der Draht vollführt somit jedesmal in der Zeit  $T$  eine Schwingung, d. h. die aufeinander folgenden äußersten Abstände, oder die Amplituden sind ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, zur Zeit

$$\begin{aligned} (1) \quad & T, \quad 2T, \quad 3T, \quad \dots \dots \dots nT \\ & \varphi_0, \quad \varphi_0 e^{-\varepsilon T}, \quad \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}, \quad \varphi_0 e^{-3\varepsilon T} \dots \dots \dots \varphi_0 e^{-n\varepsilon T} \end{aligned}$$

die die Amplituden gehören einer geometrischen Reihe an, der Quotient der aufeinander folgenden Amplituden ist

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = e^{-\varepsilon T}.$$

Die Differenz der Logarithmen ist

$$\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n = \varepsilon T \cdot \log e.$$

Hieraus erkennen wir auch sofort, daß die Beobachtungen des logarithmischen Dekrements uns ein Maß für die Größe des der Bewegung entgegenstehenden Widerstandes liefert, denn die Gleichung nach  $\varepsilon$  aufgelöst liefert

$$\varepsilon = \frac{\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n}{T \cdot \log e} = \frac{\Lambda}{T \cdot \log e}.$$

Der Widerstand, welcher der Bewegung entgegensteht, ist somit, da im natürlichen Logarithmensystem  $\log e = 1$  ist, gleich dem in natürlichen Logarithmen gegebenen logarithmischen Dekrement dividiert durch die Dauer der Schwingungen.

Voigt<sup>1)</sup> setzt  $\varepsilon$  gleich dem Ausdruck  $\alpha k^2$ , worin  $\alpha$  eine von der Natur des Materials abhängige Konstante ist, so daß

$$\frac{\Lambda}{T} = \varepsilon = \alpha k^2.$$

Da die dämpfende Reibung die Schwingungsdauer nur in sehr geringem Maße beeinflusst, so kann man ohne merklichen Fehler setzen

$$T \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = Tk = \pi; \quad k^2 = \frac{\pi^2}{T^2}$$

somit

$$\frac{\Lambda}{T} = \alpha \frac{\pi^2}{T^2}$$

$$\alpha = \frac{\Lambda T}{\pi^2}.$$

Es muß demnach, wenn die innere Reibung die Ursache der Dämpfung ist, das Produkt aus dem logarithmischen Dekrement  $\Lambda$  und der Schwingungsdauer  $T$  für ein und dasselbe Material eine für das Material charakteristische Konstante sein.

Boltzmann<sup>2)</sup> hat eine ganz andere Auffassung dieser Erscheinung entwickelt, er sieht in derselben lediglich eine Erscheinung der elastischen Nachwirkung, welche bewirkt, daß die den Draht gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft nicht dem Abstände von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Der Gedankengang Boltzmanns ist folgender. Erfährt ein Parallelepiped eines festen Körpers auf den Seitenflächen die Drucke  $p_1, p_2, p_3$ , und sind die Verkürzungen parallel den Druckrichtungen  $\alpha, \beta, \gamma$ , so fanden wir § 50 für die Drucke

$$p_1 = 2k\alpha + K(\alpha + \beta + \gamma), \quad p_2 = 2k\beta + K(\alpha + \beta + \gamma), \\ p_3 = 2k\gamma + K(\alpha + \beta + \gamma)$$

und erkannten, da die im Innern geweckten elastischen Drucke diesen Drucken gleich sind, daß den Verschiebungen  $\alpha, \beta, \gamma$  diese elastischen

1) Voigt, Wiedem. Ann. 47. p. 671. 1892.

2) Boltzmann, Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. p. 624. 1876. Man sehe auch Riecke, Wiedem. Ann. 20. p. 484. 1883; A. Koch, Wiedem. Ann. 36. p. 132. 1900.

äfte entsprechen, mit denen die verschobenen Teilchen gegen ihre relativen Gleichgewichtslagen hinstreben. Diese elastischen Kräfte sind indes modifiziert, wenn in dem betreffenden Körper schon früher Deformationen aufgefunden haben, wobei jedoch eine vorhergegangene Deformation von einem so geringeren Einfluß ist, vor je längerer Zeit sie stattfand; und zwar ist die durch eine Verschiebung geweckte elastische Kraft geringer, wenn schon vorher eine Verschiebung im gleichen Sinne erfolgt war. Von der Größe dieser durch die frühere Deformation bedingten Kraftverminderung nimmt Boltzmann folgendes an. Ist zur Zeit  $t$  die augenblickliche Verschiebung nach den drei Richtungen  $\alpha, \beta, \gamma$ , so ist die Kraft parallel  $\alpha$ , im Falle der Körper niemals vorher irgend welche Deformation erfahren hat, durch obigen Ausdruck für  $p_1$  gegeben. Hat aber zur Zeit  $\tau$  kleiner als  $t$ , also vor der Zeit, zu welcher die Verschiebung  $\alpha$  erteilt ist, während der unendlich kleinen Zeit  $d\tau$  eine Verschiebung  $\alpha(\tau)$  stattgefunden, so soll die durch diese Verschiebung zur Zeit  $t$  wirksame Kraftverminderung proportional sein der Verschiebung  $\alpha(\tau)$ , der Dauer dieser Verschiebung  $d\tau$  und einer Funktion der Zeit  $t - \tau$ , welche seit der Verschiebung  $\alpha(\tau)$  verwichen ist

Hierzu tritt die Annahme, daß sich der Einfluß der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Verschiebungen superponiert, das heißt, daß die Kraftverminderung, welche dieselben zur Zeit  $t$  bewirken, jede so in Rechnung zu ziehen ist, wie wenn sie allein vorhanden gewesen wäre. Sie ist also unabhängig von den Zuständen, welche der Körper inzwischen durchlaufen hat.

Gleiches wie für die Verschiebungen  $\alpha$  gilt für die Verschiebungen  $\beta$  und  $\gamma$ . Wir erhalten demnach für  $p_1$ , wenn wir wie früher  $\alpha + \beta + \gamma = v$  setzen

$$p_1 = 2ka - Kr - \sum_{-\infty}^t d\tau \cdot \alpha(\tau) \cdot \psi(t - \tau) - \int_{-\infty}^t d\tau v(\tau) \chi(t - \tau)$$

Wir setzen  $\alpha(\tau) + \beta(\tau) + \gamma(\tau) = v(\tau)$  und die Funktionen der Zeit, zu welcher die Kraftverminderung sich ändert, für die Starrheit mit  $\psi(t - \tau)$ , für die Volumelastizität mit  $\chi(t - \tau)$  bezeichnen. Das Summieren bedeutet, daß alle vor der Zeit  $t$  stattgehabte Änderungen, jede nach ihrem Betrage in Rechnung zu ziehen und die Summe aller zu ziehen ist.

Von den Funktionen  $\chi$  und  $\psi$  ist sicher, daß sie mit wachsender Zeit abnehmen, und wenn die Zeit bis ins unendliche wächst, gleich Null werden.

Ist ein Draht vom Radius  $R$  und der Länge  $l$  an seinem untern Ende um den Winkel  $\varphi$  zur Zeit  $t$  tordiert und war er zu frühern Zeiten  $\tau$  um den Winkel  $\varphi(\tau)$  in demselben Sinne tordiert, so wird das den Draht zurückbringende Moment hiernach gemäß § 53

$$\frac{\pi R^4}{2l} \left\{ \frac{E}{2(1 + \mu)} \varphi - \int_{-\infty}^t d\tau \varphi(\tau) \psi(t - \tau) \right\}.$$

Bei der Torsion nur der Koeffizient der Starrheit, nicht derjenige der Volumelastizität eingeht.

Die Gleichung für die Schwingungen eines Drahtes, der etwa eine Kugel trägt, so daß das Trägheitsmoment des schwingenden Systems gleich  $M$  ist wird dann

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{\pi R^4}{M \cdot 2l} \left\{ \frac{E}{2(1+\mu)} \varphi - \int_{-\infty}^t d\tau \varphi(\tau) \psi(t - \tau) \right\}.$$

Auch diese Gleichung liefert gedämpfte Schwingungen; rechnen wir die Zeit  $t$  von dem Augenblicke an, in welchem etwa durch einen an dem Zeiger, der sich an der Kugel befindet, wirkenden Stoß der Draht aus der Gleichgewichtslage gebracht wird, so daß für  $t = 0$   $\varphi = 0$  ist, so wird der Gleichung genügt durch

$$\varphi = C e^{-\epsilon t} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Wegen der weiteren Entwicklungen müssen wir auf die Abhandlung von Boltzmann verweisen. Als Resultat der Entwicklungen ergibt sich für die Schwingungsdauer  $T$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\left(\frac{\pi R^4 A}{2l}\right)}} = \sqrt{\frac{8\pi l M}{R^4 A}}$$

und für  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{\pi R^4}{2l} \cdot B \frac{T}{8M} = \sqrt{\frac{\pi^3 R^4 B^2}{32 l M A}},$$

worin  $A$  und  $B$  zwei lediglich von der physikalischen Beschaffenheit des Drahtes abhängige Konstanten sind, von denen  $A$  wesentlich von dem Starrheitskoeffizienten abhängt.

Für das in natürlichen Logarithmen ausgedrückte logarithmische Dekrement  $\Lambda$  ergibt sich

$$\Lambda = \epsilon T = \frac{\pi^2}{2} \frac{B}{A};$$

das logarithmische Dekrement ist also nicht von den Dimensionen des Drahtes abhängig, sondern nur von der Beschaffenheit des Materials, die dämpfende Kraft  $\epsilon$  ist demnach wesentlich in reziproker Weise wie die Schwingungsdauer von den Dimensionen des Drahtes abhängig.

Der Ausdruck für die Schwingungsdauer und damit auch für das logarithmische Dekrement wird ein anderer, wenn wir außer der Torsionselastizität auf das schwingende System noch ein anderes Drehungsmoment einwirken lassen. Man kann das etwa dadurch erreichen, daß man die schwingende Kugel eine Magnetnadel befestigt, so zwar daß, wenn der Draht untordiert ist, die Nadel sich im magnetischen Meridian befindet. Wird dann der Faden um einen Winkel  $\varphi$  tordiert, so erhält die Magnetnadel gleichzeitig die Ablenkung  $\varphi$  aus dem magnetischen Meridiane, damit das schwingende System ein Drehungsmoment  $D\varphi$  gegen die Gleichgewichtslage hin, das sich somit zu dem Drehungsmomente der Torsion, welches das System gegen die Gleichgewichtslage hintreibt, addiert.



Die Bewegungsgleichung wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{\pi R^4}{2lM} \left\{ \frac{E}{2(1+\mu)}\varphi - \int_{-\infty}^t d\tau \varphi(\tau) \psi(t-\tau) \right\}.$$

Für die Schwingungsdauer ergibt sich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\left(\frac{\pi R^4 A}{2l}\right) + D}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 l M}{\pi R^4 A + 2lD}}.$$

Der Ausdruck für die dämpfende Kraft ist auch jetzt

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4 B}{2l} \cdot \frac{T}{8M},$$

und demnach, wenn wir für  $T$  seinen Wert einsetzen

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi^4 R^4 B^2}{32lM(\pi R^4 A + 2lD)}}.$$

Das logarithmische Dekrement wird

$$\Lambda = \varepsilon T = \frac{\pi R^4 B}{16lM} \cdot T^2 = \frac{\pi^3 R^4 B}{2(\pi R^4 A + 2lD)}.$$

Während also im ersten Falle das logarithmische Dekrement nur von der physikalischen Beschaffenheit des Drahtes abhängt, ist es jetzt von der Schwingungsdauer abhängig und zwar bei einem und demselben Drahte und bei einem und demselben Systeme, also gleichem Trägheitsmomente stellen, ist es dem Quadrate der Schwingungsdauer proportional. Bei Anwendung einer die Schwingungen mit bewirkenden Magnetnadel kann man durch passende Stellung von Magneten in der Nähe den Wert von  $\Lambda$  innerhalb weiter Grenzen und damit bei sonst ungeändertem System die Schwingungsdauer variieren.

Betreffs der Entwicklung dieser Gleichungen macht Boltzmann ausdrücklich darauf aufmerksam, daß dieselben nur angenähert sein können, denn eine Reihe vereinfachender Voraussetzungen über die Funktion  $\psi$  gemacht und nur die Nachwirkungen berücksichtigt werden, welche innerhalb der einzelnen Schwingungen, also zwischen  $\frac{1}{2}T$  und  $\frac{3}{2}T$ , zwischen  $\frac{3}{2}T$  und  $\frac{5}{2}T$  usw. nach der Anschauung von Boltzmann eintritt. Nur dann läßt sich das in den Gleichungen vorkommende Integral überhaupt behandeln.

Experimentell sind die Gesetze des innern Widerstandes, nachdem es Warburg einige Messungen gemacht hatte, zunächst von H. Streintz<sup>1)</sup> und Schmidt<sup>2)</sup> mit Hülfe der Torsionsschwingungen untersucht worden; später von Voigt<sup>3)</sup> mit Torsions- und Biegungsschwingungen. Die beiden ersten Experimentatoren beobachteten die Dekremente der Schwingungen, indem die betreffenden Drähte mit einer horizontalen Scheibe, deren Mittelachse in der Achse des Drahtes lag oder mit einer Kugel belastet und,

1) H. Streintz, Poggend. Ann. 153 p. 387 1874

2) P. M. Schmidt, Wiedem. Ann. 2. p. 48 u. 241. 1877.

3) Voigt, Wiedem. Ann. 48. p. 670 1892

nachdem ihnen eine kleine Torsion erteilt war, sich selbst überlassen wurden. Das einzige die Bewegung bedingende Drehungsmoment war also das der Torsion. Das so direkt beobachtete logarithmische Dekrement rührt nicht nur von dem innern Widerstande in den schwingenden Drähten sondern zum Teil auch daher, daß die schwingenden Körper an der umgebenden Luft eine Reibung erfahren. Wie man diese bestimmen und Rechnung ziehen kann, werden wir bei Besprechung der Luftreibung (§ 11) kennen lernen.

In den Versuchen von Streintz konnte Boltzmann eine Bestätigung seiner Theorie finden, denn Streintz war in seinen Versuchen zu dem Resultate gelangt, daß das logarithmische Dekrement der Schwingung unabhängig sei von der Amplitude der Schwingungen, ebenso von der Schwingungsdauer, wenn dieselbe durch Änderung der Trägheitsmomente der schwingenden Massen geändert wurde, ebenso unabhängig von der Länge des schwingenden Drahtes, durch welche sich die Schwingungsdauer nach den Torsionsgesetzen ändert, und daß dasselbe außerdem vielleicht unabhängig oder doch nicht bedeutend abhängig sei von dem Durchmesser des schwingenden Drahtes, wenn zugleich das Trägheitsmoment der schwingenden Massen so geändert wird, daß die Schwingungsdauer konstant bleibt. Da Streintz als erstes Resultat seiner Versuche angibt, daß eine Änderung der Schwingungsdauer durch Änderung des Trägheitsmomentes keinen Einfluß auf das Dekrement hat, folgt in bezug auf den letzten Satz, daß eine Änderung des Durchmessers überhaupt keinen Einfluß auf das logarithmische Dekrement hat. Wie man sieht, entspricht das alles der Boltzmannschen Theorie.

Schmidt schloß aus seinen Versuchen, daß bei den elastischen Schwingungen den Bewegungen ein Reibungswiderstand entgegensteht, welcher von dem in den elastischen Nachwirkungen sich zeigenden Widerstande verschieden sei. Es ergab sich nämlich aus seinen Versuchen, daß bei einem neu aufgehängten und unten mit einer Kugel belasteten Draht das von der Luftreibung befreite, also lediglich den innern Widerstand messende Dekrement anfänglich viel größer ist als später, dasselbe nähert sich bei längerem Hängen einem kleinsten Werte. Diesen Wert behält es bei, wenn der Draht inzwischen keine Veränderung erfährt, welche eine neue elastische Nachwirkung bedingt, und wenn man sich auf so kleine Schwingungen beschränkt, daß die Dekremente unabhängig sind von der Amplitude. Jede Beeinflussung des Drahtes, welche elastische Nachwirkungen bedingt, vergrößert wieder das logarithmische Dekrement. Entlastet man den Draht oder nimmt die Kugel ab, wodurch bewirkt wird, daß der Draht mit Nachwirkung sich einige Zeit zusammenzieht, so wird bei erneuter Anhängen der Kugel und hervorgerufenen Schwingungen das Dekrement wieder größer, um bei dauernder gleicher Belastung wieder bis zu dem kleinsten Wert abzunehmen.

Man kann indes in diesen Resultaten einen Widerspruch gegen die Boltzmannsche Theorie nicht erkennen, es entspricht derselben vielmehr durchaus, daß wenn der Draht noch mit der Zeit abnehmende von früher vor Beginn der Versuche stattgehabten Deformationen herrührende Nachwirkungen besitzt, daß diese sich zu den durch die Schwingungen bedingten Nachwirkungen summieren, und daß erst, wenn im Laufe der Zeit

Nachwirkungen verschwunden sind, die Dekremente konstant werden, nur die Nachwirkungen, welche von den Schwingungen herrühren, einen Einfluß sind.

Das spricht es nicht gegen die Theorie von Boltzmann, wenn man findet, daß bei zu großen Amplituden die logarithmischen Dekremente nicht mehr konstant sind, sondern mit der Amplitude abnehmen, wobei die Grenze, bis zu welcher die Amplituden konstant sind, für verschiedenen Drähte sehr verschieden ist. Es werden dadurch große Verrückungen der Gleichgewichtslage eintreten, welche für kleine Amplituden verkleinern. Jedenfalls bezieht sich Boltzmanns Theorie nur auf Schwingungen von solcher Größe, daß deren Dekrement klein ist.

Schmidt glaubt aber weiter aus seinen Versuchen den Schluß ziehen zu können, daß das logarithmische Dekrement von den Dimensionen des Drahtes bei gleicher physikalischer Beschaffenheit desselben abhängig sei. Er findet Schmidt mit zunehmender Länge bald eine Zunahme des Dekrements bald eine Abnahme; für andere Drähte schwankt dasselbe, erst mit wachsender Länge zu dann wieder ab. Man wird also aus den Versuchen von Schmidt keinen sichern Schluß ziehen können. Einzig ist ein Versuch Schmidts beweisend, aus welchem er schließt, daß das Dekrement der dritten Wurzel aus dem Radius proportional sei, indes selbst bemerkt, daß ein solcher einzelner Versuch noch nicht beweisend sei.

Voigt hat bei einer Reihe von Metallen die Abhängigkeit der logarithmischen Dekremente von der Schwingungsdauer verfolgt. Nach der entwickelten Theorie der innern Reibung ergab sich

$$\frac{1}{T} = \alpha$$

Das Dekrement soll, da  $\alpha$  eine Konstante ist, der Schwingungsdauer umgekehrt proportional sein, während nach Boltzmann das logarithmische Dekrement von der Schwingungsdauer unabhängig sein soll.

Voigt gelangte zu dem Resultate, daß sich in bezug auf die Dekremente sowohl bei Biegung als auch bei Torsion die Metalle verschieden verhielten. Bei 15 Stäbchen von Phosphorbronze, deren Schwingungsdauer zwischen 0,523 und 0,263 Sekunden für die einfache Schwingung betrug, setzt  $T$  für die Dauer der Doppelschwingung, weshalb bei dem Nenner des Ausdruckes für  $\alpha$  die Zahl 2 steht, schwankte bei den Schwingungen der Wert von  $\alpha$  zwischen etwa  $32 \cdot 10^{-6}$  und  $6 \cdot 10^{-6}$  ohne irgend eine Beziehung in den Schwankungen des Produktes aus Schwingungsdauer erkennen zu lassen. Ebenso ändert sich auch für die Torsion der Wert von  $\alpha$  nur wenig. Voigt schließt aus diesen Beobachtungen eine Abnahme mit abnehmender Schwingungsdauer; ähnlich verhielt sich Bronze, während bei Kupfer und Nickel die Dekremente  $\alpha$  sowohl für Biegung als Drillung konstant waren. Diese Beobachtungen stehen im Gegensatz zu den einfachen Gesetzen der innern Reibung.

Für Gußstahl, Aluminium, Gußeisen, Kadmium ergaben sich die beobachteten Dekremente nahezu unabhängig von der Schwingungsdauer, sie stimmen also nahezu mit der Theorie von Boltzmann überein.

Werte der bei den Schwingungen erreichten äußersten Abstände, Rücksicht auf das Vorzeichen  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$ , so findet sich

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = a$$

oder

$$\log \varphi_0 - \log \varphi_1 = \log \varphi_1 - \log \varphi_2 = \dots \log a.$$

Die Differenz der Logarithmen der aufeinander folgenden Amplituden ist konstant. Diese Differenzen nennt Gauß die logarithmischen Intimente.

Dieses Gesetz der Abnahme der Amplitude beweist, daß der schwindenden Bewegung des Drahtes in jedem Momente ein Widerstand entgegenwirkt, welcher der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung proportional ist, daß also die Beschleunigung zur Zeit  $t$  nicht gleich dem Werte  $\frac{D}{M} \varphi$  ist, sondern kleiner, und zwar um eine Größe kleiner, welche der augenblicklichen Geschwindigkeit  $v$  des schwingenden Drahtes proportional ist. Bezeichnen wir daher mit  $2\gamma$  den Widerstand, wenn die Geschwindigkeit  $v$  gleich eins ist, so können wir die zur Zeit  $t$  vorhandene Beschleunigung schreiben

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{D}{M} \varphi - \frac{2\gamma}{M} v$$

oder da  $v$  der erste Differentialquotient von  $\varphi$  nach der Zeit ist,

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{D}{M} \varphi - \frac{2\gamma}{M} \frac{d\varphi}{dt}$$

oder

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + k^2 \varphi = 0,$$

wenn wir  $\frac{2\gamma}{M} = 2\varepsilon$  und  $\frac{D}{M} = k^2$  setzen.

Aus dieser Gleichung, welche uns eine Beziehung zwischen der Beschleunigung, Geschwindigkeit und der augenblicklichen Lage des Drahtes gibt, können wir nicht so direkt die Lage des Drahtes zur Zeit ableiten, wie wir es § 27 aus der Gleichung konnten, welche die Geschwindigkeit oder den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit nicht enthielt. Wir können indes in Erwägung, daß  $\varphi$  eine Funktion von  $t$  sein muß, daß die gegebene Gleichung zwischen den verschiedenen Differentialquotienten der Funktion  $\varphi$  und dieser selbst bestehen muß, mit Hilfe unserer Kenntnis von den Eigenschaften der Funktion die gesuchte Funktion in folgender Weise erhalten. Setzen wir

$$\varphi = e^{\lambda t},$$

worin  $e$  die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und  $\lambda$  eine zu bestimmende Konstante sein soll, so ist nach E 3a und E IV

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda e^{\lambda t}; \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung ein, so wird dieselbe

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2) = 0.$$

Somit entspricht die Funktion  $\varphi = e^{\lambda t}$  unserer Gleichung, wenn wir aus der Gleichung

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2 = 0$$

bestimmen, denn mit dem so bestimmten  $\lambda$  wird die uns gegebene Gleichung erfüllt. Für  $\lambda$  erhalten wir aus dieser Gleichung

$$\lambda = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Es gibt somit zwei Werte von  $\lambda$ , welche jeder für sich unsere Gleichung erfüllen, nämlich

$$\lambda_1 = -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Jeder dieser beiden Werte hat dieselbe Berechtigung, wir können daher zur Darstellung von  $\varphi$  nicht den einen wählen und den andern verwerfen. Indes die Exponentialfunktion mit jedem der beiden Werte der gegebenen Gleichung genügt, so tut es auch die Summe

$$\varphi = e^{-\varepsilon t + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} + e^{-\varepsilon t - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t}.$$

Indem wir so  $\varphi$  dieser Summe gleichsetzen, berücksichtigen wir jeden der beiden Werte ganz gleichmäßig. Indes müssen wir an dem so bestimmten Werte von  $\varphi$  noch eine Korrektur anbringen; würden wir die Gleichung für  $\varphi$  so aufstellen, so läge darin eine ganz bestimmte Voraussetzung, es würde nämlich, wenn wir  $t = 0$  setzen,  $\varphi = 2$  werden, da dann beide Exponenten gleich Null, somit jedes Glied der rechten Seite gleich 1 würde. Wir müssen deshalb jedes Glied der rechten Seite mit einer Konstanten multiplizieren, die indes nicht für beide Glieder dieselbe sein darf, da wir dann eine nicht notwendige spezielle Voraussetzung über die Abhängigkeit des Wertes  $\varphi$  von  $t$  machen würden. Sind demnach  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Konstante, deren Wert noch näher zu bestimmen ist, so erhalten wir als ganz allgemeine Beziehung für  $\varphi$

$$\varphi = A e^{-\varepsilon t + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} + B e^{-\varepsilon t - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t}$$

oder

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \left\{ A e^{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} + B e^{-\sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} \right\}.$$

In diesem Ausdrucke müssen wir beachten, daß die beiden Exponenten jedenfalls imaginär sind, denn wenn eine dauernde Bewegung eintreten soll, muß  $k^2$  jedenfalls erheblich größer sein als  $\varepsilon^2$ , wir können daher den Ausdruck schreiben

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \left\{ A e^{i \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t} + B e^{-i \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t} \right\}.$$

An Stelle der Exponentialfunktion mit imaginären Exponenten kann man, wie in der Differentialrechnung bewiesen wird, trigonometrische Funktionen einführen und schreiben

$$\begin{aligned} & A e^{i \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t} + B e^{-i \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t} \\ &= (A + B) \cos t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + (A - B) i \sin t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \end{aligned}$$

oder

$$\varphi = e^{-\epsilon t} \{ (A + B) \cos t \sqrt{k^2 - \epsilon^2} + (A - B) \sqrt{-1} \sin t \sqrt{k^2 - \epsilon^2} -$$

worin jetzt noch die beiden Konstanten  $A$  und  $B$  zu bestimmen.

Dieselben ergeben sich aus der Bedingung, daß zur Zeit  $t$  der Abstand des schwingenden Drahtes von der Gleichgewichtslage  $g$  sein soll, und weiter daß, weil zur Zeit  $t = 0$  die Bewegung infolge der Elastizität des Drahtes beginnt, in diesem Momente die Geschwindigkeit der Bewegung gleich Null sein muß. Da zur Zeit  $t = 0$  der  $\sin t \sqrt{k^2 - \epsilon^2} = 0$ , dagegen der Kosinus gleich 1 ist, so ergibt die Bedingung

$$A + B = \varphi_0.$$

Um den Koeffizienten des zweiten Gliedes zu bestimmen, haben wir den Quotienten  $\frac{d\varphi}{dt}$  zu berechnen. Setzen wir der Abkürzung wegen

$$(A - B) \sqrt{-1} = b; \quad \sqrt{k^2 - \epsilon^2} = m,$$

somit

$$\varphi = e^{-\epsilon t} \{ \varphi_0 \cos mt + b \sin mt \},$$

so erhalten wir nach E II, E 3 a, E 4, E 5

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\epsilon e^{-\epsilon t} \{ \varphi_0 \cos mt + b \sin mt \} + e^{-\epsilon t} \{ -\varphi_0 m \sin mt + mb \cos mt \}$$

Setzen wir  $t = 0$ , so wird die rechte Seite unserer Gleichung  $-\epsilon \varphi_0 + mb$ , und da die Gleichung gleich 0 sein soll, wird

$$b = \frac{\epsilon}{m} \varphi_0.$$

Setzen wir diesen Wert für  $b$  in die Gleichung für  $\varphi$ , so wird

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\epsilon t} \left\{ \cos mt + \frac{\epsilon}{m} \sin mt \right\}.$$

Ehe wir die durch diese Gleichung dargestellte Bewegung näher betrachten, wollen wir zeigen, daß sie der Gleichung entspricht, die zwischen der Beschleunigung und Geschwindigkeit erhalten

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\epsilon \frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0.$$

Wir haben dazu nur die drei Glieder dieser Gleichung auszuwickeln. Das letzte Glied wird

$$k^2\varphi = k^2\varphi_0 e^{-\epsilon t} \cdot \cos mt + k^2\varphi_0 e^{-\epsilon t} \cdot \frac{\epsilon}{m} \sin mt.$$

Das mittlere wird nach obiger Entwicklung, wenn wir für  $\frac{d\varphi}{dt}$  den Wert setzen,

$$2\epsilon \frac{d\varphi}{dt} = -2\epsilon\varphi_0 e^{-\epsilon t} \left( \frac{\epsilon}{m} \cos mt + \sin mt \right).$$

Zur Berechnung von  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)$  haben wir auf  $\frac{d\varphi}{dt}$  die

regeln anzuwenden wie zur Berechnung von  $\frac{d\varphi}{dt}$  aus  $\varphi$ . Damit wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \left( \frac{\varepsilon^2}{m} + m \right) \sin mt - \varphi_0 \left( \frac{\varepsilon^2}{m} + m \right) e^{-\varepsilon t} m \cdot \cos mt.$$

Beachtet man nun, daß  $\frac{\varepsilon^2}{m} + m = \frac{\varepsilon^2 + m^2}{m} = \frac{k^2}{m}$ , so sieht man sofort, daß die Summation dieser drei Ausdrücke den Wert 0 gibt.

Man erkennt unmittelbar, daß die Gleichung

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \left\{ \cos t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{m} \sin t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \right\}$$

die schwingende Bewegung darstellt, wie sie Gauß und Weber bei einem tordierten Draht beobachteten. Wächst  $t$  von 0 ab, so nimmt  $\varphi$  ab, der Draht nähert sich der Gleichgewichtslage und erreicht dieselbe, wenn das Glied in der Klammer Null wird. Das tritt ein zu einer Zeit  $t$ , die sich aus der Gleichung

$$\cos mt + \frac{\varepsilon}{m} \sin mt = 0$$

$$\tan mt = -\frac{m}{\varepsilon}$$

ergibt. Wächst die Zeit weiter, so wird  $\varphi$  negativ, der Draht schwingt auf die andere Seite der Gleichgewichtslage, er erreicht dort den größten Abstand, wenn  $t$  einen solchen Wert  $T$  hat, daß

$$T \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = \pi,$$

da die für die Geschwindigkeit der Bewegung abgeleitete Gleichung zeigt, daß für diesen Wert von  $t$  die Geschwindigkeit gleich Null wird, so zu dieser Zeit erreichte Abstand ist also der Punkt, wo die Bewegung kehrt. Der Abstand  $\varphi_1$  ist dann

$$\varphi_1 = -\varphi_0 e^{-\varepsilon T}.$$

Wächst die Zeit wieder um denselben Wert

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}},$$

umkehrt sich der schwingende Draht wieder an dem andern äußersten Punkt seiner Bahn. Der Abstand wird

$$\varphi_2 = \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}.$$

Der Draht vollführt somit jedesmal in der Zeit  $T$  eine Schwingung, d. h. die aufeinander folgenden äußersten Abstände, oder die Amplituden ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, zur Zeit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & T, & 2T, & 3T, & \dots\dots\dots & nT \\ \varphi_0, & \varphi_0 e^{-\varepsilon T}, & \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}, & \varphi_0 e^{-3\varepsilon T} & \dots\dots\dots & \varphi_0 e^{-n\varepsilon T} \end{array}$$

die Amplituden gehören einer geometrischen Reihe an, der Quotient aufeinander folgenden Amplituden ist

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = e^{-\varepsilon T}.$$



Die Differenz der Logarithmen ist

$$\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n = \varepsilon T \cdot \log e.$$

Hieraus erkennen wir auch sofort, daß die Beobachtungen des logarithmischen Dekrements uns ein Maß für die Größe des der Bewegung entgegenstehenden Widerstandes liefert, denn die Gleichung nach  $\varepsilon$  aufgelöst liefert

$$\varepsilon = \frac{\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n}{T \cdot \log e} = \frac{\Lambda}{T \cdot \log e}.$$

Der Widerstand, welcher der Bewegung entgegensteht, ist somit, da im natürlichen Logarithmensystem  $\log e = 1$  ist, gleich dem in natürlichen Logarithmen gegebenen logarithmischen Dekrement dividiert durch die Dauer der Schwingungen.

Voigt<sup>1)</sup> setzt  $\varepsilon$  gleich dem Ausdruck  $\alpha k^2$ , worin  $\alpha$  eine von der Natur des Materials abhängige Konstante ist, so daß

$$\frac{\Lambda}{T} = \varepsilon = \alpha k^2.$$

Da die dämpfende Reibung die Schwingungsdauer nur in sehr geringem Maße beeinflusst, so kann man ohne merklichen Fehler setzen

$$T \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = Tk = \pi; \quad k^2 = \frac{\pi^2}{T^2}$$

somit

$$\frac{\Lambda}{T} = \alpha \frac{\pi^2}{T^2}$$

$$\alpha = \frac{\Lambda T}{\pi^2}.$$

Es muß demnach, wenn die innere Reibung die Ursache der Dämpfung ist, das Produkt aus dem logarithmischen Dekrement  $\Lambda$  und der Schwingungsdauer  $T$  für ein und dasselbe Material eine für das Material charakteristische Konstante sein.

Boltzmann<sup>2)</sup> hat eine ganz andere Auffassung dieser Erscheinung entwickelt, er sieht in derselben lediglich eine Erscheinung der elastischen Nachwirkung, welche bewirkt, daß die den Draht gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft nicht dem Abstände von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Der Gedankengang Boltzmanns ist folgender. Erfährt ein Parallelepiped eines festen Körpers auf den Seitenflächen die Drucke  $p_1, p_2, p_3$ , und sind die Verkürzungen parallel den Druckrichtungen  $\alpha, \beta, \gamma$ , so fanden wir § 50 für die Drucke

$$p_1 = 2k\alpha + K(\alpha + \beta + \gamma), \quad p_2 = 2k\beta + K(\alpha + \beta + \gamma), \\ p_3 = 2k\gamma + K(\alpha + \beta + \gamma)$$

und erkannten, da die im Innern geweckten elastischen Drucke diesen Drucken gleich sind, daß den Verschiebungen  $\alpha, \beta, \gamma$  diese elastischen

1) Voigt, Wiedem. Ann. 47. p. 671. 1892.

2) Boltzmann, Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. p. 624. 1876. Man sehe auch Riecke, Wiedem. Ann. 20. p. 484. 1883; A. Koch, Wiedem. Ann. 36. p. 132. 1890.

kräfte entsprechen, mit denen die verschobenen Teilchen gegen ihre relativen Gleichgewichtslagen hinstreben. Diese elastischen Kräfte sind indes modifiziert, wenn in dem betreffenden Körper schon früher Deformationen aufgefunden haben, wobei jedoch eine vorhergegangene Deformation von so geringerem Einfluß ist, vor je längerer Zeit sie stattfand; und zwar ist die durch eine Verschiebung geweckte elastische Kraft geringer, wenn nun vorher eine Verschiebung im gleichen Sinne erfolgt war. Von der Größe dieser durch die frühere Deformation bedingten Kraftverminderung nimmt Boltzmann folgendes an. Ist zur Zeit  $t$  die augenblickliche Verschiebung nach den drei Richtungen  $\alpha, \beta, \gamma$ , so ist die Kraft parallel  $\alpha$ , in Falle der Körper niemals vorher irgend welche Deformation erfahren hat, durch obigen Ausdruck für  $p_1$  gegeben. Hat aber zur Zeit  $\tau$  kleiner als  $t$ , also vor der Zeit, zu welcher die Verschiebung  $\alpha$  erteilt ist, während  $\tau$  unendlich kleinen Zeit  $d\tau$  eine Verschiebung  $\alpha(\tau)$  stattgefunden, so soll die durch diese Verschiebung zur Zeit  $t$  wirksame Kraftverminderung proportional sein der Verschiebung  $\alpha(\tau)$ , der Dauer dieser Verschiebung  $d\tau$  und einer Funktion der Zeit  $t - \tau$ , welche seit der Verschiebung  $\alpha(\tau)$  verstrichen ist.

Hierzu tritt die Annahme, daß sich der Einfluß der zu verschiedenen Zeiten  $\tau$  vorhandenen Verschiebungen superponiert, das heißt, daß die Kraftverminderung, welche dieselben zur Zeit  $t$  bewirken, jede so in Rechnung zu ziehen ist, wie wenn sie allein vorhanden gewesen wäre. Sie ist also abhängig von den Zuständen, welche der Körper inzwischen durchlaufen hat.

Gleiches wie für die Verschiebungen  $\alpha$  gilt für die Verschiebungen  $\beta$  und  $\gamma$ . Wir erhalten demnach für  $p_1$ , wenn wir wie früher  $\alpha + \beta + \gamma = v$  setzen

$$p_1 = 2ka + Kv - \sum_{-\infty}^t d\tau \cdot \alpha(\tau) \cdot \psi(t - \tau) - \int_{-\infty}^t d\tau v(\tau) \chi(t - \tau)$$

wo wir  $\alpha(\tau) + \beta(\tau) + \gamma(\tau) = v(\tau)$  setzen, und die Funktionen der Zeit, mit welcher die Kraftverminderung sich ändert, für die Starrheit mit  $\psi(t - \tau)$ , für die Volumelastizität mit  $\chi(t - \tau)$  bezeichnen. Das Summieren bedeutet, daß alle vor der Zeit  $t$  stattgehabte Änderungen, jede zu ihrem Betrage in Rechnung zu ziehen und die Summe aller zu ziehen ist.

Von den Funktionen  $\chi$  und  $\psi$  ist sicher, daß sie mit wachsender Zeit abnehmen, und wenn die Zeit bis ins unendliche wächst, gleich Null werden.

Ist ein Draht vom Radius  $R$  und der Länge  $l$  an seinem untern Ende um den Winkel  $\varphi$  zur Zeit  $t$  tordiert und war er zu frühern Zeiten  $\tau$  um den Winkel  $\varphi(\tau)$  in demselben Sinne tordiert, so wird das den Draht zurückzuleitende Moment hiernach gemäß § 53

$$\frac{\pi R^4}{2l} \left\{ \frac{K}{2(1 + \mu)} \varphi - \int_{-\infty}^t d\tau \varphi(\tau) \psi(t - \tau) \right\},$$

wo der Torsion nur der Koeffizient der Starrheit, nicht derjenige der Volumelastizität eingeht.

Die Gleichung für die Schwingungen eines Drahtes, der etwa eine Kugel trägt, so daß das Trägheitsmoment des schwingenden Systems gleich  $M$  ist wird dann

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{\pi R^4}{M \cdot 2l} \left\{ \frac{E}{2(1+\mu)} \varphi - \int_{-\infty}^t d\tau \varphi(\tau) \psi(t - \tau) \right\}.$$

Auch diese Gleichung liefert gedämpfte Schwingungen; rechnen wir die Zeit  $t$  von dem Augenblicke an, in welchem etwa durch einen an dem Zeiger, der sich an der Kugel befindet, wirkenden Stoß der Draht aus der Gleichgewichtslage gebracht wird, so daß für  $t = 0$   $\varphi = 0$  ist, so wird der Gleichung genügt durch

$$\varphi = C e^{-\varepsilon t} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Wegen der weiteren Entwicklungen müssen wir auf die Abhandlung von Boltzmann verweisen. Als Resultat der Entwicklungen ergibt sich für die Schwingungsdauer  $T$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\left(\frac{\pi R^4 A}{2l}\right)}} = \sqrt{\frac{8\pi l M}{R^4 A}}$$

und für  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4}{2l} \cdot B \frac{T}{8M} = \sqrt{\frac{\pi^3 R^4 B^2}{32 l M A}},$$

worin  $A$  und  $B$  zwei lediglich von der physikalischen Beschaffenheit des Drahtes abhängige Konstanten sind, von denen  $A$  wesentlich von dem Starrheitskoeffizienten abhängt.

Für das in natürlichen Logarithmen ausgedrückte logarithmische Dekrement  $\Lambda$  ergibt sich

$$\Lambda = \varepsilon T = \frac{\pi^2}{2} \frac{B}{A};$$

das logarithmische Dekrement ist also nicht von den Dimensionen des Drahtes abhängig, sondern nur von der Beschaffenheit des Materials, die dämpfende Kraft  $\varepsilon$  ist demnach wesentlich in reziproker Weise wie die Schwingungsdauer von den Dimensionen des Drahtes abhängig.

Der Ausdruck für die Schwingungsdauer und damit auch für das logarithmische Dekrement wird ein anderer, wenn wir außer der Torsionselastizität auf das schwingende System noch ein anderes Drehungsmoment einwirken lassen. Man kann das etwa dadurch erreichen, daß man die schwingende Kugel eine Magnetnadel befestigt, so zwar daß, wenn der Draht untordiert ist, die Nadel sich im magnetischen Meridian befindet. Wird dann der Faden um einen Winkel  $\varphi$  tordiert, so erhält die Magnetnadel gleichzeitig die Ablenkung  $\varphi$  aus dem magnetischen Meridiane, damit das schwingende System ein Drehungsmoment  $D\varphi$  gegen die Gleichgewichtslage hin, das sich somit zu dem Drehungsmomente der Torsion, welches das System gegen die Gleichgewichtslage hintreibt, addiert.

Die Bewegungsgleichung wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{\pi R^4}{2lM} \left\{ \frac{E}{2(1+\mu)} \varphi - \int_{-\infty}^t d\tau \varphi(\tau) \psi(t-\tau) \right\}.$$

Für die Schwingungsdauer ergibt sich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\left(\frac{\pi R^4 A}{2l}\right) + D}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 l M}{\pi R^4 A + 2l D}}.$$

Der Ausdruck für die dämpfende Kraft ist auch jetzt

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4 B}{2l} \cdot \frac{T}{8M},$$

und demnach, wenn wir für  $T$  seinen Wert einsetzen

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi^4 R^4 B^2}{32lM(\pi R^4 A + 2lD)}}.$$

Das logarithmische Dekrement wird

$$\Lambda = \varepsilon T = \frac{\pi R^4 B}{16lM} \cdot T^2 = \frac{\pi^3 R^4 B}{2(\pi R^4 A + 2lD)}.$$

Während also im ersten Falle das logarithmische Dekrement nur von der physikalischen Beschaffenheit des Drahtes abhängt, ist es jetzt von der Schwingungsdauer abhängig und zwar bei einem und demselben Drahte bei einem und demselben Systeme, also gleichem Trägheitsmomente. Es ist es dem Quadrate der Schwingungsdauer proportional. Bei Anwendung einer die Schwingungen mit bewirkenden Magnetnadel kann man durch passende Stellung von Magneten in der Nähe den Wert von  $\Lambda$  innerhalb weiter Grenzen und damit bei sonst ungeändertem System die Schwingungsdauer variieren.

Betreffs der Entwicklung dieser Gleichungen macht Boltzmann ausdrücklich darauf aufmerksam, daß dieselben nur angenähert sein können, weil eine Reihe vereinfachender Voraussetzungen über die Funktion  $\psi(\tau)$  gemacht und nur die Nachwirkungen berücksichtigt werden, welche innerhalb der einzelnen Schwingungen, also zwischen  $\frac{1}{2}T$  und  $\frac{3}{2}T$ , zwischen  $\frac{3}{2}T$  und  $\frac{5}{2}T$  usw. nach der Anschauung von Boltzmann einwirken. Nur dann läßt sich das in den Gleichungen vorkommende Integral verallgemeinert behandeln.

Experimentell sind die Gesetze des innern Widerstandes, nachdem z. B. Warburg einige Messungen gemacht hatte, zunächst von H. Streintz<sup>1)</sup> und Schmidt<sup>2)</sup> mit Hülfe der Torsionsschwingungen untersucht worden; dann von Voigt<sup>3)</sup> mit Torsions- und Biegungsschwingungen. Die beiden letztgenannten Experimentatoren beobachteten die Dekremente der Schwingungen, indem die betreffenden Drähte mit einer horizontalen Scheibe, deren Mittelachse in der Achse des Drahtes lag oder mit einer Kugel belastet und,

1) H. Streintz, Poggend. Ann. 153 p. 387. 1874

2) P. M. Schmidt, Wiedem. Ann. 2. p. 48 u. 241. 1877.

3) Voigt, Wiedem. Ann. 48. p. 670. 1892

nachdem ihnen eine kleine Torsion erteilt war, sich selbst überlassen wurden. Das einzige die Bewegung bedingende Drehungsmoment war also das der Torsion. Das so direkt beobachtete logarithmische Dekrement rührt nicht nur von dem innern Widerstande in den schwingenden Drähten sondern zum Teil auch daher, daß die schwingenden Körper an der umgebenden Luft eine Reibung erfahren. Wie man diese bestimmen und in Rechnung ziehen kann, werden wir bei Besprechung der Luftreibung (§ 119) kennen lernen.

In den Versuchen von Streintz konnte Boltzmann eine Bestätigung seiner Theorie finden, denn Streintz war in seinen Versuchen zu dem Resultate gelangt, daß das logarithmische Dekrement der Schwingungen unabhängig sei von der Amplitude der Schwingungen, ebenso von der Schwingungsdauer, wenn dieselbe durch Änderung der Trägheitsmomente der schwingenden Massen geändert wurde, ebenso unabhängig von der Länge des schwingenden Drahtes, durch welche sich die Schwingungsdauer nach den Torsionsgesetzen ändert, und daß dasselbe außerdem vielleicht unabhängig oder doch nicht bedeutend abhängig sei von dem Durchmesser des schwingenden Drahtes, wenn zugleich das Trägheitsmoment der schwingenden Massen so geändert wird, daß die Schwingungsdauer konstant bleibt. Da Streintz als erstes Resultat seiner Versuche angibt, daß eine Änderung der Schwingungsdauer durch Änderung des Trägheitsmomentes keinen Einfluß auf das Dekrement hat, folgt in bezug auf den letzten Satz, daß eine Änderung des Durchmessers überhaupt keinen Einfluß auf das logarithmische Dekrement hat. Wie man sieht, entspricht das alles der Boltzmannschen Theorie.

Schmidt schloß aus seinen Versuchen, daß bei den elastischen Schwingungen den Bewegungen ein Reibungswiderstand entgegenstehe, welcher von dem in den elastischen Nachwirkungen sich zeigenden Widerstande verschieden sei. Es ergab sich nämlich aus seinen Versuchen, daß bei einem neu aufgehängten und unten mit einer Kugel belasteten Draht das von der Luftreibung befreite, also lediglich den innern Widerstand messende Dekrement anfänglich viel größer ist als später, dasselbe nähert sich bei längerem Hängen einem kleinsten Werte. Diesen Wert behält er bei, wenn der Draht inzwischen keine Veränderung erfährt, welche eine neue elastische Nachwirkung bedingt, und wenn man sich auf so kleine Schwingungen beschränkt, daß die Dekremente unabhängig sind von der Amplitude. Jede Beeinflussung des Drahtes, welche elastische Nachwirkung bedingt, vergrößert wieder das logarithmische Dekrement. Entlastet man den Draht oder nimmt die Kugel ab, wodurch bewirkt wird, daß der Draht mit Nachwirkung sich einige Zeit zusammenzieht, so wird bei erneuter Anhängen der Kugel und hervorgerufenen Schwingungen das Dekrement wieder größer, um bei dauernder gleicher Belastung wieder bis zu dem kleinsten Wert abzunehmen.

Man kann indes in diesen Resultaten einen Widerspruch gegen die Boltzmannsche Theorie nicht erkennen, es entspricht derselben vielmehr durchaus, daß wenn der Draht noch mit der Zeit abnehmende von früher vor Beginn der Versuche stattgehabten Deformationen herrührende Nachwirkungen besitzt, daß diese sich zu den durch die Schwingungen bedingten Nachwirkungen summieren, und daß erst, wenn im Laufe der

der Nachwirkungen verschwunden sind, die Dekremente konstant werden, indem nur die Nachwirkungen, welche von den Schwingungen herrühren, noch von Einfluß sind.

Ebenso spricht es nicht gegen die Theorie von Boltzmann, wenn Schmidt findet, daß bei zu großen Amplituden die logarithmischen Dekremente nicht mehr konstant sind, sondern mit der Amplitude abnehmen, wobei die Grenze, bis zu welcher die Amplituden konstant sind, für die verschiedenen Drähte sehr verschieden ist. Es werden dadurch momentane Verrückungen der Gleichgewichtslage eintreten, welche für sich die Amplituden verkleinern. Jedenfalls bezieht sich Boltzmanns Theorie nur auf Schwingungen von solcher Größe, daß deren Dekrement konstant ist.

Schmidt glaubt aber weiter aus seinen Versuchen den Schluß ziehen zu sollen, daß das logarithmische Dekrement von den Dimensionen des Drahtes bei gleicher physikalischer Beschaffenheit desselben abhängig sei. Schmidt findet mit zunehmender Länge bald eine Zunahme des Dekrements bald eine Abnahme; für andere Drähte schwankt dasselbe, nimmt erst mit wachsender Länge zu dann wieder ab. Man wird also aus den Versuchen von Schmidt keinen sichern Schluß ziehen können. Densowenig ist ein Versuch Schmidts beweisend, aus welchem er schließt, daß das Dekrement der dritten Wurzel aus dem Radius proportional sei, wobei er indes selbst bemerkt, daß ein solcher einzelner Versuch noch nicht beweisend sei.

Voigt hat bei einer Reihe von Metallen die Abhängigkeit der logarithmischen Dekremente von der Schwingungsdauer verfolgt. Nach der von ihm entwickelten Theorie der innern Reibung ergab sich

$$\frac{\Delta T}{\pi^2} = \alpha$$

daß das Dekrement soll, da  $\alpha$  eine Konstante ist, der Schwingungsdauer umgekehrt proportional sein, während nach Boltzmann das logarithmische Dekrement von der Schwingungsdauer unabhängig sein soll.

Er gelangte zu dem Resultate, daß sich in bezug auf die Dekremente sowohl bei Biegung als auch bei Torsion die Metalle verschieden verhalten. Bei 15 Stäbchen von Phosphorbronze, deren Schwingungsdauer zwischen 0,523 und 0,263 Sekunden für die einfache Schwingung betrug, Voigt setzt  $T$  für die Dauer der Doppelschwingung, weshalb bei ihm im Nenner des Ausdruckes für  $\alpha$  die Zahl 2 steht, schwankte bei geringen Schwingungen der Wert von  $\alpha$  zwischen etwa  $32 \cdot 10^{-6}$  und  $2 \cdot 10^{-6}$  ohne irgend eine Beziehung in den Schwankungen des Produktes aus Schwingungsdauer erkennen zu lassen. Ebenso ändert sich auch für hohen Schwingungen der Wert von  $\alpha$  nur wenig. Voigt schließt aus diesen Zahlen eine Abnahme mit abnehmender Schwingungsdauer; ähnlich verhielt sich Bronze, während bei Kupfer und Nickel die Werte von  $\alpha$  sowohl für Biegung als Drillung konstant waren. Diese folgen also den einfachen Gesetzen der innern Reibung.

Bei Gußstahl, Aluminium, Gußeisen, Kadmiun ergaben sich die beobachteten Dekremente nahezu unabhängig von der Schwingungsdauer, sie entsprechen also nahezu der Theorie von Boltzmann.

Wie schon früher Warburg so haben W. König<sup>1)</sup> bei Gelegenheit von Versuchen über die Reibung von Flüssigkeiten und A. Koch<sup>2)</sup> zu Messungen der innern Dämpfung Schwingungen verwandt, welche außer der Torsion des Fadens noch durch andere Drehungsmomente bedingt wurden. König wandte entweder die später zu besprechende bifilare Aufhängung oder wie früher Warburg und später Koch die Wirkung des Magnetismus an.

Die von diesen Experimentatoren gefundenen Resultate sprechen sehr für die Richtigkeit der Boltzmannschen Theorie. Wir geben zunächst einige Beobachtungen von König. Die unter  $d$  angegebenen Zahlen sind den Drehungsmomenten proportional, unter  $T$  sind die Schwingungsdauern, unter  $A$  die von der Luftreibung befreiten Dekremente und unter  $A \cdot 10^5 : T^2$  die Quotienten aus den mit  $10^5$  multiplizierten Dekrementen und dem Quadrate der zugehörigen Schwingungsdauer angegeben; die Werte beziehen sich auf einen Silberdraht von 73<sup>cm</sup> Länge und 0,09<sup>mm</sup> Dicke.

$d$	$T$ (Sek.)	$A$	$A \cdot 10^5 : T^2$
4	11,991	0,00861	5,981
8	11,137	738	5,950
18	9,591	531	5,772
28	8,569	393	5,353
38	7,792	314	5,172
44	7,203	269	5,185
68	6,346	204	5,066
88	5,737	165	5,013

Die letzte Zahlenreihe zeigt, daß mit wachsender Schwingungsdauer das logarithmische Dekrement nur wenig schneller als dem Quadrate der Schwingungsdauer proportional wächst.

A. Koch kam bei seinen Versuchen zu dem Resultate, daß das logarithmische Dekrement etwas langsamer als das Quadrat der Schwingungsdauer wächst. Die in folgender Tabelle angegebenen Zahlen wurden an Drähten von 100<sup>cm</sup> Länge und 0,27<sup>mm</sup> Durchmesser erhalten, nachdem dieselben durch langes Hängen unter der gleichen Belastung von allen frühern Nachwirkungsdeformationen befreit waren.

Kupfer			Silber		
$A \cdot 10^5$	$T$ (Sek.)	$A \cdot 10^5 : T^2$	$A \cdot 10^5$	$T$	$A \cdot 10^5 : T^2$
892,21	10,793	7,659	244,01	10,03	2,425
1599,71	15,54	6,624	411,91	13,27	2,337
			552,81	15,73	2,234
Eisen			Platin		
119,81	6,805	2,588	75,24	7,058	1,510
151,26	8,027	2,348	123,31	9,455	1,379
214,91	10,07	2,119	315,41	16,07	1,221
Messing			Neusilber		
74,81	8,903	0,944	54,71	7,84	0,890
126,76	12,019	0,877	113,91	12,86	0,66
208,61	15,61	0,856	319,61	23,66	0,5

1) Walther König, Wiedem. Ann. 32. p. 203. 1887.  
2) A. Koch, Wiedem. Ann. 36. p. 122. 1889.



In welcher Weise sich das logarithmische Dekrement bei dieser Anwendung mit den Dimensionen der Drähte ändert, hat Koch nicht untersucht. Dagegen hat er gezeigt, daß das logarithmische Dekrement von dem elastischen Zustande der Drähte wesentlich abhängt, indem er fand, daß das Dekrement derselben im harten Zustande bei gleicher Schwingungszahl erheblich größer ist als im ausgeglühten.

Nach den Versuchen von Streintz und Schmidt wächst das Dekrement ganz erheblich mit steigender Temperatur.

Man wird hiernach für jeden Draht das den Versuchsumständen entsprechende logarithmische Dekrement, wenn man die Dämpfung bestimmen will, direkt messen müssen.

## Zweites Kapitel.

### Von den tropfbar flüssigen Körpern.

#### § 63.

**Konstitution der Flüssigkeiten.** Wir haben im § 47 als zweiten Aggregatzustand den flüssigen bezeichnet und die Flüssigkeiten dahin definiert, daß sie ein festes Volumen besitzen, aber keine selbständige Gestalt, daß sie sofort die Gestalt des Gefäßes annehmen, in welches wir sie legen. Die einzelnen Teile der Flüssigkeiten sind nicht, wie die der festen Körper, fest miteinander verbunden, sie können sich vielmehr unter dem Einfluß der geringsten Kraft gegeneinander verschieben und fortwährend an Ort verändern, indem jedes Teilchen nach und nach einen bestimmten Platz einnimmt und wieder verläßt, um von einem andern ersetzt zu werden.

Aus dieser, soweit wir beurteilen können, vollkommen freien Bewegung der Flüssigkeitsteilchen gegeneinander ergibt sich zunächst, daß eine flüssige Masse nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn die auf ein Teilchen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht thun, wenn also die auf das Teilchen wirkenden Drucke nach gerade entgegengesetzten Richtungen genau gleich sind und deshalb sich aufheben. Wenn wäre der Druck auf das Molekül nach der einen Richtung stärker als der gerade entgegengesetzten, so müßte das Molekül, da es auch dem kleinsten Drucke folgt, sich nach der Richtung der größern Kraft bewegen.

Es folgt weiter, daß, wenn wir ein ringgeschlossenes Gefäß mit Flüssigkeit haben, welche unter der Wirkung irgend welcher Kräfte im Gleichgewicht ist (Fig. 74) und nun durch einen Stempel  $B$  einen Druck auf die Flüssigkeit ausüben, daß dann dieser Druck sich ganz ungeändert auf die Flüssigkeit ausbreiten muß. Sei der Druck auf den Stempel  $P$ , die zur Berührungsebene des Stempels und der Flüssigkeit gleich  $S$ , die Flächeneinheit der Berührungsebene, welche die Größe  $S$  habe,

Druck  $\frac{P}{S}$  erhält, so wirkt auf jede im Innern oder in der Grenzfläche

der Flüssigkeit gedachte Ebene, deren Fläche gleich  $s$  ist, der Druck  $\frac{P}{s}$  also überall auf die Flächeneinheit der Druck  $\frac{P}{s}$ .

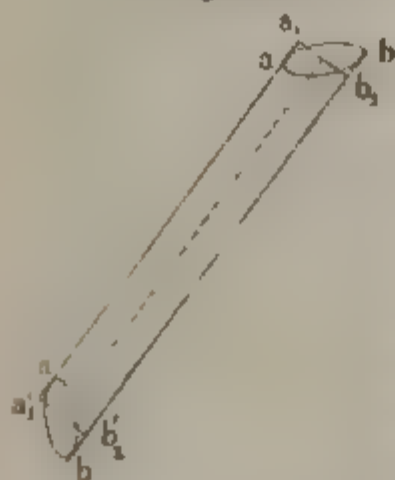
Um dieses nachzuweisen, nehmen wir an, die Flüssigkeit in dem Gefäße Fig. 74 sei unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewicht, es wirke nun auf den Stempel  $B$  eine Kraft, so daß die Flächeneinheit der Berührungsebene einen normalen Druck  $p_0$  erfahre. Denken wir von dem Mittelpunkte des Stempels  $B$  eine Linie in das Innere der Flüssigkeit von der Länge  $l$ , etwa in der Richtung nach dem Mittelpunkte des Stempels  $A$ , und lege diese Linie einen Kreiszylinder gelegt, dessen Radius gegen die Länge nur sehr klein sei. Die an  $B$  anliegende Grenzfläche dieses Zylinders steht senkrecht zur Achse, ihre Normale bildet mit der Achse denselben Winkel  $\alpha$ , welchen die Normale der Stempeloberfläche mit der Richtung  $AB$  bildet. Auf der andern Seite denken wir uns den Zylinder ebenfalls durch eine schiefe Endfläche begrenzt (Fig. 75), welche etwa parallel sei mit der Fläche des Stempels  $A$ , deren Normale mit der Achse den Winkel  $\alpha'$  bilde. Die Richtung der Achse bilde mit der Vertikalen den Winkel  $\beta$ . Wenn die Flüssigkeit vor der Herstellung des Druckes im Gleichgewicht war, so bleibt sie es auch nach derselben. Die Flüssigkeit befindet sich also im Innern des gedachten Zylinders im Gleichgewicht. Da nun aber infolge des Druckes auf  $ab$  und der Schwere der im Innern des Zylinders vorhandenen Flüssigkeit eine bewegende Kraft vorhanden ist, so kann die Flüssigkeit wegen der vollkommen freien Beweglichkeit

Fig. 74.



Teile nur dann in dem Zylinder eingeschlossen in Ruhe bleiben, wenn die auf die äußere Begrenzung des Zylinders wirkenden, durch die bewegende Flüssigkeit ausgeübten Drucke gleich den bewegenden Kräften sind, oder wenn die überhaupt auf die Grenzfläche des Zylinders wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Denken wir uns die überhaupt auf die Flüssigkeit des Zylinders durch die Umgebung ausgeübten Drucke jeder in zwei Komponenten zerlegt, deren eine normal zur Grenzfläche des Zylinders ist an der Stelle, wo die Kraft wirkt, deren andere parallel der Grenzfläche ist, so müssen die letztern für sich schon im Gleichgewicht sein, da sonst die Flüssigkeit im Innern des Zylinders sich gegeneinander verschieben würde. Die zur Oberfläche normalen Drucke und die Schwere der Flüssigkeit stehen dann für sich wieder im Gleichgewicht, weil sonst der Zylinder als solcher sich in der umgebenden Flüssigkeit bewegen würde.

Fig. 75.



Wenn diese Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so haben sie in keiner Richtung eine Resultierende; bilden wir also die Summe der Projektionen nach irgend einer beliebigen Richtung, so muß, welche Richtung wir auch wählen, diese Summe stets gleich Null sein. Projizieren wir

die Kräfte, welche, wie wir eben sahen, den Zylinder als solchen bewegen können, auf die Achse des Zylinders, so sieht man zunächst, daß die Summe aller Projektionen der auf die Seitenfläche des Zylinders wirkenden Drucke auf die Achse für sich Null ist, da diese Kräfte zur Achse senkrecht sind; es müssen also ebenfalls für sich Null sein die Summe der auf die Achse des Zylinders projizierten Komponenten der auf die schiefen Endflächen wirkenden Drucke und der Schwere der im Zylinder enthaltenen Flüssigkeit. Setzen wir den Druck auf die Fläche  $ab$  gleich  $p$ , den auf die Endfläche  $a'b'$  wirkenden gleich  $p'$ , und bezeichnen wir das Gewicht der Flüssigkeit des Zylinders mit  $q$ , so ist diese Gleichgewichtsbedingung

$$p \cdot \cos \alpha + p' \cdot \cos \alpha' + q \cdot \cos \beta = 0.$$

Bezeichnen wir den Querschnitt unseres Zylinders mit  $\sigma$ , so ist nach bekannten Sätzen der Stereometrie die Größe der schiefen Endfläche  $ab$ , welche wir mit  $s$  bezeichnen wollen,

$$s = \frac{\sigma}{\cos \alpha},$$

somit

$$\cos \alpha = \frac{\sigma}{s}.$$

Ebenso erhalten wir für  $\cos \alpha'$ , wenn wir die Größe der schiefen Endfläche  $a'b'$  mit  $s'$  bezeichnen,

$$\cos \alpha' = \frac{\sigma}{s'}.$$

Das Volumen des schief abgeschnittenen Zylinders ist, nach ebenfalls bekannten Sätzen der Stereometrie, gleich dem Volumen des geraden Zylinders, dessen Achse gleich ist der Länge der Achse des schief abgeschnittenen Zylinders, den wir also erhalten, wenn wir durch die Mittelpunkte der schiefen Endflächen die geraden Endflächen  $a_1b_1$  und  $a'_1b'_1$  legen. Bezeichnen wir die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, das Gewicht der Volumeneinheit mit  $d$ , so ist das Gewicht  $q$  der im Zylinder enthaltenen Flüssigkeit

$$q = \sigma \cdot l \cdot d.$$

Setzen wir die so erhaltenen Werte für  $\cos \alpha$ ,  $\cos \alpha'$ ,  $q$  in die sich aus dem Gleichgewicht des Zylinders ergebende Gleichung ein, so wird

$$\frac{p}{s} \cdot \sigma + \frac{p'}{s'} \cdot \sigma + \sigma l d \cdot \cos \beta = 0$$

oder

$$-\frac{p'}{s'} \cdot \sigma = \frac{p}{s} \cdot \sigma + \sigma \cdot l d \cdot \cos \beta$$

Da  $\beta$  der Winkel ist, welchen die Achse des Zylinders mit der Verticalen bildet, so ist

$$l \cdot \cos \beta = h$$

gleich dem lotrechten Abstände der Mittelpunkte der beiden Endflächen des Zylinders, und wir erhalten dann schließlich

$$-\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + d \cdot h.$$

Die Quotienten  $\frac{p}{s}$  und  $\frac{p'}{s'}$  liefern uns die auf die Flächeneinheit wirkenden Drucke, vorausgesetzt, daß die Drucke auf derselben gleichmäßig verteilt und überall so groß sind als auf den sehr kleinen Flächen  $s$  und  $s'$ . Dann sagt also die letztere Gleichung, daß auf der untern Fläche  $a'b'$  des Zylinders ein gegen das Innere des Zylinders gerichteter normaler Druck wirkt, welcher für die Flächeneinheit gleich ist dem auf die Flächeneinheit der obern Endfläche des Zylinders wirkenden Drucke, vermehrt um das Gewicht eines Flüssigkeitszylinders, dessen Querschnitt der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich ist dem vertikalen Abstände der Mittelpunkte der Flächen, welche den Zylinder oben und unten begrenzen.

Da wir vorher sahen, daß in einer Flüssigkeit nur Gleichgewicht sein kann, wenn die auf die Moleküle nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte einander gleich sind, so folgt, daß eine ebensolche Kraft auf die Flächeneinheit der untern Grenzfläche von innen nach außen wirkt und daraus weiter, da wir über die Lage unseres Zylinders, also über den Winkel  $\beta$  und ebenso über die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha'$  gar keine spezielle Voraussetzung gemacht haben, daß sich der auf irgend eine Fläche im Inneren oder an der Grenze der Flüssigkeit wirkende Druck nach einer beliebigen Richtung ganz ungeändert fortpflanzt, so daß auf die Flächeneinheit immer derselbe Druck wirkt. Setzen wir z. B. in Fig. 74 etwa voraus, daß die Stempel  $A, B, C$  sich in derselben Horizontalebene befinden, so ist  $h$  gleich Null, und wir erhalten dann, wenn die Querschnitte der Stempel  $S, S_1, S_2$  sind, für die auf dieselben wirkenden Drucke  $P, P_1, P_2$

$$\frac{P}{S} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2}$$

oder mit der vorhin gewählten Bezeichnung

$$\frac{P}{S} = p_0$$

$$P_1 = p_0 \cdot S_1; \quad P_2 = p_0 \cdot S_2.$$

Liegen die Stempelflächen nicht in derselben Horizontalebene, so gilt für den fortgepflanzten Druck ganz dasselbe; der auf die im tiefern Niveau liegenden Stempelflächen wirkende Druck wird dann nur vermehrt durch das Gewicht des Flüssigkeitszylinders, dessen Querschnitt gleich ist dem der tiefer liegenden Stempelflächen, und dessen Höhe gleich ist der Nivaudifferenz der Stempelflächen.

Aus der Gleichmäßigkeit der Fortpflanzung des Druckes ergibt sich weiter, daß, wenn wir uns im Innern der Flüssigkeit eine kleine ebene Fläche denken, welche durch die vorhandenen Kräfte irgend einen Druck erfährt, daß der Druck dann unabhängig ist von der Richtung, welche die kleine Fläche hat. Wir mögen die Ebene drehen wie wir wollen, der Druck ist immer derselbe. Die vorhin aus der Beweglichkeit der Moleküle gezogene Folgerung, daß die auf ein Molekül nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte gleich sein müssen, können wir daher dahin erweitern, daß die im Innern einer Flüssigkeit auf ein Molekül wirkenden Kräfte nach allen Richtungen des Raumes dieselben sind.

## § 64.

**Kompressibilität der Flüssigkeiten.** Wir haben im vorigen Paragraphen die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes, den wir an einer Stelle einer Flüssigkeit ausüben, lediglich als eine Folgerung aus der vollkommen freien Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen abgeleitet; wir können es leicht auch den physikalischen Vorgang erkennen, wodurch diese Ausbreitung des Druckes zustande kommt.

Wenn eine Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, so befinden sich die Moleküle derselben in bestimmten durch die gegenseitigen Anziehungen und Abstossungen bedingten Entfernungen. Wenn wir nun auf eine rings eingeschlossene Flüssigkeit in einer Richtung einen Druck ausüben, so muß zunächst in dieser Richtung, gerade wie bei den festen Körpern, eine Annäherung der Moleküle stattfinden, bis die infolge der Annäherung derselben vergrößerte Abstossung der Moleküle gleich ist der durch den äussern Druck vermehrten Anziehung der Moleküle. Gerade so aber, wie die Moleküle sich in der Richtung des Druckes einander nähern, so nähern sie sich auch in den auf die Druckrichtung senkrechten Dimensionen, und zwar, wie aus der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes folgt, um genau die gleiche Grösse. Darin unterscheiden sich also die Flüssigkeiten von den festen Körpern; drücken wir einen festen Körper in der einen Richtung zusammen, so ist die Querdilatation nur ein Bruchteil der in ersterer Richtung eintretenden Kompression; soll die Ausdehnung nach der Quere verhindert werden, so bedarf es deshalb auch nur eines ebenso grossen Bruchteils der in der ersten Richtung tätigen Kraft, welche in der Richtung der Querdimensionen der Ausdehnung entgegenwirken muß. Weil wir bei einer in einem unausdehnbaren Gefässe eingeschlossenen Flüssigkeit die Moleküle nach allen Richtungen sich gleichmässig nähern, deshalb muß wenn keine Ausdehnung eintreten soll, von allen Seiten der gleiche Druck wirken.

Die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten können wir somit als eine Folge davon ansehen, daß die Flüssigkeiten in einer Beziehung ebenso wie die festen Körper elastisch sind; es treten in ihnen Kohäsionskräfte immer dann auf, aber auch nur dann, wenn die Moleküle aus ihrer Gleichgewichtslage so verschoben werden, daß sie sich einander durch eine Verschiebung der Moleküle ohne Änderung der Dichtigkeit keine elastische Kraft hervor, die Flüssigkeiten besitzen also nur Kompressibilität.

Um den Nachweis zu liefern, daß die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes in der That eine Folge der durch eine Annäherung der Moleküle bedingten elastischen Kraft ist, haben wir zu zeigen, daß die Flüssigkeiten in der That durch äussere Drucke eine Volumverminderung erfahren. Wenn wir dann gleichzeitig die durch einen gegebenen Druck hervorgerufene Volumverminderung messen, können wir die Abhängigkeit der Volumverminderung von dem äussern Drucke und besonders die Frage untersuchen, ob auch hier, wie bei festen Körpern, die Volumverminderung der Grösse des Druckes proportional ist. Ist das der Fall, so muß die durch einen auf die Flächeneinheit wirkenden Druck  $P$  hervorgebrachte Volumverminderung  $v$  in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens  $V$

$$v = \kappa \cdot P$$

sein, worin  $\kappa$  eine Konstante ist, welche man als den Kompressionskoeffizienten der Flüssigkeit bezeichnet. Der reziproke Wert dieses Koeffizienten oder

$$\frac{1}{\kappa} = E$$

ist dann der Elastizitätskoeffizient der Flüssigkeiten, jener Koeffizient, welchem wir die in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens angegebene Volumverminderung multiplizieren müssen, um die durch diese Volumverminderung geweckte elastische Kraft zu erhalten.

Der erste Versuch, um die Kompressibilität der Flüssigkeiten nachzuweisen, wurde von der Academia del Cimento zu Florenz<sup>1)</sup> gemacht, jedoch mit ungünstigem Erfolge. Man nahm unter anderen Versuch eine mit Wasser gefüllte, mit einer Öffnung versehene Hohlkugel von Silber. In die Öffnung wurde ein Stempel mit großer Gewalt hineingetrieben; aber anstatt einer Zusammendrückung des Wassers beobachtete man, daß dasselbe durch die Poren des Silbers hindurch gepreßt wurde.

Mit günstigerem Erfolge wurde der Versuch im Jahre 1761 von John Canton<sup>2)</sup> wiederholt, dem es gelang, den Nachweis zu liefern, daß das Wasser durch einen äußern Druck eine Verminderung des Volumens erfährt. Canton wandte zu seinen Versuchen eine mit einer langen und engen Glasröhre versehene Kugel an. Dieselbe wurde mit Wasser gefüllt, erhitzt, und wenn das Wasser im Kochen war, die Spitze der Röhre zugeschmolzen. Durch die Abkühlung zog sich dann das Wasser zusammen und reichte bei einer bestimmten Temperatur bis zu einem gewissen Punkte der Röhre. Durch das Zusammenziehen des Wassers entstand über denselben in der Röhre ein luftleerer Raum. Wurde die Spitze abgebrochen, so drang die Luft rasch in die Röhre, und unter ihrem Drucke sank die Flüssigkeit in der Röhre sinken. Dieses Sinken hatte jedoch zwei Ursachen, einmal die Zusammendrückung des Wassers, dann aber die Vergrößerung des Volumens des Gefäßes dadurch, daß plötzlich der Druck im Innern desselben um den Druck einer Atmosphäre erhöht wurde. Um die Vergrößerung des innern Raumes des Gefäßes zu messen, genügt es, den äußern Druck auf die Gefäßwände gerade soviel zu vermindern, als vorher der innere Druck vermehrt war; brachte man also die Kugel in den luftleeren Raum, so mußte sich ihr Volumen gerade so vermehren, wie in dem vorigen Falle. Die Vermehrung wurde durch das Sinken des Wassers in der engen Röhre gemessen und die so erhaltene Größe wurde der bei dem ersten Versuche erhaltenen abgezogen; der Unterschied gab die Kompression des Wassers. Auf diese Weise war also die Kompressibilität des Wassers bewiesen. Ähnliche Versuche stellte 1820 Perkins

1) *Fischer*, Geschichte der Physik. 2. p. 207.

2) *John Canton*, Experiments to prove that water is not incompressible. Philosophical Transactions of London Royal Society. 52. 1762. Poggend. Ann. 12. p. 43. 1828.

3) *Perkins*, Philosophical Transactions for 1826. part. III. p. 541. Poggend. Ann. 9. p. 547. 1827.



ichem Erfolg. Die ersten genauer messenden Versuche rühren Oersted<sup>1)</sup> her.

Oersted konstruierte einen Apparat, den man Piezometer oder Symmetron nennt. Das Piezometer besteht aus einem weiten Gefäße *G* an dem sich ein sehr enges Glasrohr *O* befindet, welches in einen Trichter endigt und unverschlossen bleibt.

Das Rohr ist genau zylindrisch und in gleiche Teile geteilt. Zu-3 der Apparat graduirt, d. h. die Kapazität des ganzen Gefäßes es zwischen zwei Teilstrichen befind-  
umes verglichen werden. Wir wollen  
von etwas näher beschreiben, da wir  
g derselben Aufgabe begegnen.

Man wiegt zunächst das leere Gefäß und  
füllt es mit Quecksilber; wegen der Enge  
läßt sich das nicht durch einfaches  
füllen, weil die im Gefäße enthaltene  
entweichen und deshalb das Quecksilber  
sinken kann. Man erwärmt daher das

Man hält den Trichter, in welchem das  
steht, unter Quecksilber. Beim Erkal-  
ten durch den Druck der äußern Luft  
steigt das Quecksilber in die Röhre und das Gefäß auf.  
Man läßt das Quecksilber auf zu steigen, so erwärmt  
man es allmählich und so fort, bis das Gefäß ganz  
mit Quecksilber gefüllt ist. Um keine Spur Luft  
im Gefäß zu lassen, erwärmt man dann das  
Gefäß nochmals, taucht währenddessen seine Spitze  
in Quecksilber und läßt es dann auf 0° erkalten.

Man erwärmt es vorsichtig mit schmelzendem Eisen  
einige Zeit, vielleicht nach einer  
Weile oder bei großen Gefäßen noch länger,

Man hebt den mit Quecksilber von der Temperatur 0° gefüllten Apparat aus  
dem Quecksilber heraus, trocknet ihn rasch und vorsichtig ab und bestimmt mög-  
lichst sein Gewicht. Von dem erhaltenen Totalgewicht *P* zieht man

das Gewicht *p* des leeren Gefäßes ab und erhält aus dem Quotienten  $\frac{P-p}{D}$

den Inhalt des Gefäßes in Kubikzentimetern, wenn *P* und *p* in Gramm  
und *D* das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist.

Man erwärmt nun das Gefäß sehr wenig, bewirkt dadurch, daß  
das Quecksilber austritt, und läßt es wieder wie vorher auf 0° er-  
kalten. Jetzt zieht sich das Quecksilber zusammen, und schließlich wird  
das in die Röhre hineinragende Quecksilberfaden konstant einem  
Teilstrich der Röhre gegenüberstehen, der um *n* Teilstriche tiefer sei als  
bei der ersten Wägung. Jetzt wiegt man wieder; und ist das jetzt ge-  
wicht gleich *P'*, so gibt die Verminderung des Gewichts *P - P'*  
das Gewicht des Gramme Quecksilber den Raum zwischen jenen *n* Teilstrichen





ausfüllen; der Quotient  $\frac{P - P'}{D}$  gibt dann diesen Raum in Kubikzentimetern und der Quotient  $\frac{P - P'}{nD}$  den Raum zwischen zwei Teilstrichen in derselben Einheit an.

Nach geschehener Kalibrierung wird das Gefäß in ganz gleicher Weise mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und in den kleinen Trichter ein Tropfen Quecksilber gebracht. Dieser dient einmal als Pfropfen, um das Eindringen von Flüssigkeit in das Gefäß zu verhüten, dann auch als Index, da er während der Kompression in die Röhre hinabgedrückt wird und somit angibt, um wieviel das Volumen der Flüssigkeit klein geworden ist. Das Gefäß wird auf einer Messingplatte befestigt, daneben ein Thermometer *I*, und eine geteilte, unten offene, oben geschlossene, mit Luft gefüllte Röhre *K*, welche als Druckmesser dient, und dann die ganze Vorrichtung in ein mit Wasser gefülltes Gefäß hinabgelassen, das als Kompressionsapparat dient.

Das Gefäß *E* besteht aus einem Zylinder von starkem Glase, der unten in einen Fuß *F* eingelassen und oben mit einer Fassung versehen ist, in deren Röhre *A* sich ein beweglicher Kolben *D* befindet. Man füllt das Gefäß, während der Kolben sich über *A* befindet, durch den Hahn mit Wasser soweit, daß dasselbe aus einer Öffnung bei *A* ausfließt. Man schließt dann den Hahn und schraubt den Kolben herab. Sobald derselbe unter *A* herabgeschraubt ist, kann kein Wasser mehr entweichen und das Gefäß wird zusammengedrückt.

Der Druck, den man auf diese Weise ausübt, trifft nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen in ganz gleicher Weise die äußere Wand des Piézometers und die in seinem Innern enthaltene Flüssigkeit. Man sieht den Index um eine gewisse Anzahl Teilstriche sinken und dadurch die Volumverminderung der im Piézometer enthaltenen Flüssigkeit. Zugleich wird auch die Luft in der Röhre *K* komprimiert, und in der Volumveränderung derselben erhalten wir, wie wir später sehen werden, ein Maß für den ausgeübten Druck.

Man hat auf diese Weise die Volumverminderung gemessen und andererseits den Druck, welcher dieselbe hervorgebracht hat. Dividiert man die Volumveränderung durch das ursprüngliche Volumen und diesen Quotienten durch den auf die Flächeneinheit wirkenden Druck, so erhält man den scheinbaren Kompressionskoeffizienten der Flüssigkeit, d. h. die Kompression der Flüssigkeit ohne Rücksicht auf diejenige des Gefäßes.

Oersted fand diesen Koeffizienten für Wasser gleich 46 Milliontheile, wenn man als Einheit des Druckes den einer Atmosphäre annimmt, d. h. wenn man in einem rings geschlossenen Gefäße auf jedes Quadratmeter Oberfläche einen Druck von  $1,0333^{\text{kg}}$  ausübt, so wird die Flüssigkeit um 46 Milliontheile ihres ursprünglichen Volumens komprimiert. Oersted hielt dies für die wahre Kompressibilität des Wassers; denn er glaubte, weil der Druck in ganz gleicher Weise auf die äußere und innere Wand ausgeübt wird, so könne sich die Kapazität des Gefäßes nicht ändern und ganz unmerklich dadurch, daß die Wanddicke des Gefäßes etwas geändert wird. Das Irrige dieser Annahme ergibt sich aus unsern Entwicklungen des § 51. Wir erhielten dort für die Verminderung einer Kugel

in Radius  $r$ , welche in einer Hohlkugel liegt, deren innerer Radius gleich  $R_0$ , äußerer gleich  $R_1$  ist (der Wert von  $r$  liegt also zwischen  $R_0$  und  $R_1$ ) und wenn auf der äußern Fläche der Druck  $P_1$  auf der innern  $P_0$  wirkt

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \left\{ \frac{1}{3K + 2k} \cdot \frac{P_1 R_1^3 - P_0 R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{1}{4k} \frac{R_0^3 R_1^3 (P_1 - P_0)}{r^3 (R_1^3 - R_0^3)} \right\}.$$

Die Volumverminderung des Hohlraumes der Kugel, wenn wie bei den Versuchen von Oersted der Druck pro Flächeneinheit außen und innen gleich ist, erhalten wir aus jener Gleichung, wenn  $P_1 = P_0$ ,  $r = R_0$  gesetzt wird und es ergibt sich

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{1}{3K + 2k} \cdot P_1 = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot P_1 = C_k \cdot P_1.$$

Die Volumverminderung des Hohlraumes unter diesen Umständen ist demnach die gleiche wie die einer massiven Kugel. Gleiches gilt, welche Gestalt auch das Gefäß hat.

Ist  $V$  das Volumen des Piézometers,  $\alpha$  der wahre Kompressionskoeffizient des Wassers, so würde bei ganz ungeändertem Gefäße das Volumen des Wassers bei einem Drucke  $P$  um  $\alpha PV$  vermindert sein, da aber der Hohlraum um  $C_k PV$  kleiner geworden ist, so ist die beobachtete Volumverminderung  $\alpha'$  des Wassers

$$\alpha' = \alpha PV - C_k PV; \quad \frac{\alpha'}{PV} = \alpha - C_k.$$

Man beobachtet also die Differenz zwischen dem Kompressionskoeffizienten des Wassers und dem kubischen Kompressionskoeffizienten des Gefäßes.

Colladon und Sturm wiesen diesen Irrtum in Oersteds Versuchen auf und unternahmen es, ihn zu korrigieren<sup>1)</sup>. Sie stellten eine große Reihe von Versuchen mit einem dem Oerstedschen sehr ähnlichen Apparate Fig. 77 an. Ein Piézometer  $A$  wurde wie das Oerstedsche hergestellt und graduirt und dann in ein weites Gefäß  $C$  mit starken Wänden, welches mit Wasser gefüllt war, eingeschlossen. Letzteres diente als Kompressionsapparat. Der einzige Unterschied besteht darin, daß sie das Piézometer horizontal legten und den ausgeübten Druck mit einem feinsten, langen und deshalb sehr empfindlichen Quecksilbermanometer  $K/I$  maßen. Dieser Druck wurde mit Hilfe eines Kolbens ausgeübt, dessen Ende  $I$  durch ein Seil gezogen wurde, welches um eine durch eine Schraube am Ende  $H$  bewegliche Walze gerollt war.

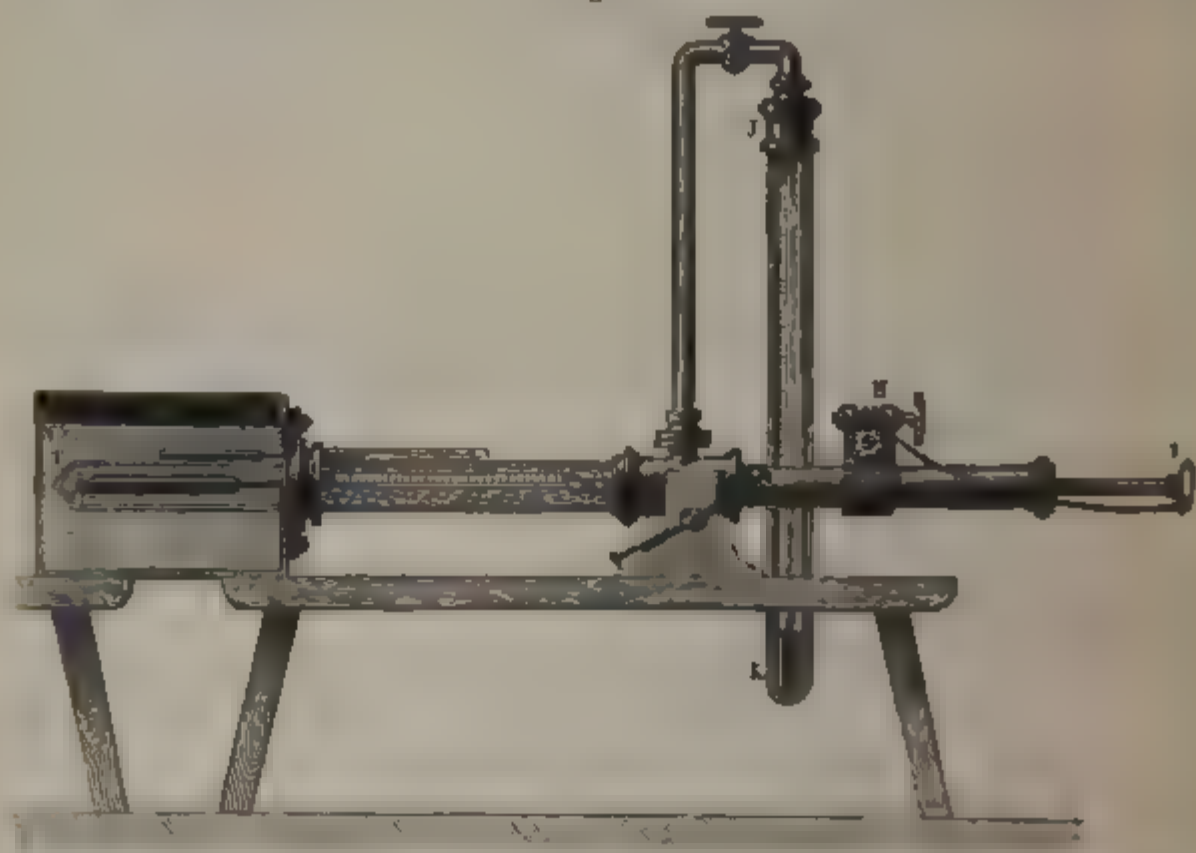
Colladon und Sturm bemerkten nun bald auch einige Fehlerquellen, welche an sich zwar sehr klein, auf das endliche Resultat wegen der Kleinheit der zu messenden Größen jedoch von bedeutendem Einfluß wurden. Der Index von Quecksilber in der Röhre des Piézometers bot manche Unregelmäßigkeit, er adhärirte am Glase, bewegte sich nicht regelmäßig, sondern sprungweise bei Vermehrung des Druckes. Sie wandten deshalb sehr Tropfen Schwefelkohlenstoff oder auch eine kleine Luftsäule an und zeigten so regelmäßig verlaufende Versuche.

Andererseits ist das Piézometer ein wahres Thermometer und wegen

<sup>1) Colladon und Sturm, Annales de chim. et de phys. 36 p. 113 1827.  
et Poggend Ann. 12 1828.</sup>

des großen Gefäßes und der engen Röhre sogar ein sehr empfindliches. Jede Temperaturänderung veranlaßt daher eine Bewegung des Index und da jede Zusammendrückung das Wasser erwärmt, jede Ausdehnung wieder abkühlt, so waren die beobachteten Variationen Resultate sehr verwackelter Natur. Man schaffte diese Störung fort, indem man das Kompressions-

Fig. 77



gefäß in ein großes Gefäß mit Wasser einschloß, welches dazu diente die Temperatur konstant zu halten. Die Versuche waren daher sehr genau. Bei der Korrektur wegen der Kompression des Gefäßes begingen Colladon und Sturm jedoch leider den Fehler, daß sie den kubischen Kompressions-

Fig. 78.



koeffizienten einfach gleich dem dreifachen dreifachen Dilatationskoeffizienten setzten, welchen sie an einem Stabe aus demselben Glase, aus welchem das Piezometer bestand, gemessen hatten. Sie erheben sich für den kubischen Kompressionskoeffizienten und den Druck einer Atmosphäre 0,0000033. Nehmen wir die Querkontraktion des Glases gleich 0,25, so wird der Kompressionskoeffizient gleich 0,00000165. Die Zahlen für die Kompression der Flüssigkeiten von Colladon und Sturm sind demnach zu groß.

Einige Jahre später stellte Aimé<sup>1</sup> Versuche über die Kompression der Flüssigkeiten an, bei denen er eigentümlich reformte Piezometer aus Meeresschale und so den Druck des Meerwassers zur Kompression benutzte. Die Form der Piezometer zeigt Fig. 78.

In dem Gefäß G, daß die zu komprimierende Flüssigkeit enthielt, endigte die zu einer Spitze ausgezogene Röhre B, welche bis zu einer gewissen Höhe

1 G. Aimé, Ann. de chim. et de phys. 8 (3) 1843.

silber gefüllt war. Wurde bei dem Einsenken des Apparates in der auf die Fläche des Quecksilbers bei  $a$  ein Druck ausgeübt, so die Flüssigkeit in  $G$  komprimiert, bei hinreichender Kompression floß silber durch die Spitze in das Gefäß  $G$  und blieb in demselben, das Piézometer aus dem Meer herausgezogen wurde. Aus der Menge des Gefäß ausgetretenen Quecksilbers ließ sich die Kompression be-

Die Volumverminderung war gleich dem Volumen der im Rohre dem Quecksilber befindlichen Flüssigkeit und dem Volumen des Gefäß  $G$  eingetretenen Quecksilbers. Als Korrektion wegen der Dilation des Gefäßes nahm er den Wert, der sich aus den Versuchen von Laplace und Sturm unter Voraussetzung  $\mu = 0,25$  ergibt, also 16.

ist sehr schwierig bei diesem Verfahren genaue Werte zu erhalten, Temperaturen, denen das Piézometer im Laufe des Versuches ausgesetzt, sich schwer genau ermitteln lassen.

**Versuche von Regnault<sup>1)</sup>.** Regnault wurde durch andere Fragen veranlaßt, sich eingehend mit diesem Gegenstande zu beschäftigen.

Er wählte dem Piézometer  $A$  eine genau bekannte geometrische Gestalt, einer Metallröhre mit bekanntem innern und äußern Durchmesser eines Zylinders mit ebenen oder kugelförmigen Endflächen, wie in Fig. 79. Das Gefäß ist eine gut kalibrierte Glasröhre, die ihrer ganzen Länge nach mit Quecksilber angefüllt ist, und deren Volumverhältnisse in der oben beschriebenen Weise bestimmt

Er schließt nun das Gefäß des Piézometers an einen mit Wasser angefüllten Zylinder  $B$ , der durch einen mittels einer Schraube befestigten Deckel verschlossen ist. Die Öffnung des Deckels reicht der

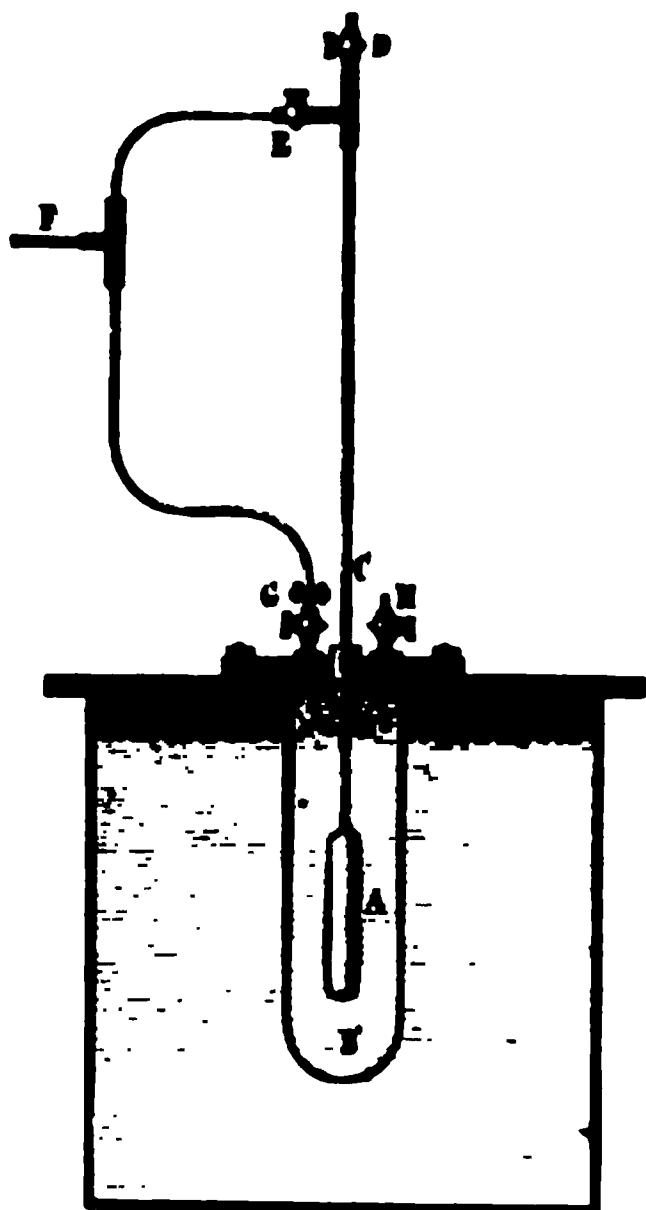
Piézometers aus dem Gefäße her mit Kitt in der Öffnung befestigt

Innere der Röhre kann an ihrem oberen Ende durch einen Hahn  $D$  mit der Luft in Verbindung gebracht und die Röhre mit der Atmosphäre ausgesetzt werden. Der Hahn  $E$  und die Röhre  $CD$  aber

mit einem mit komprimierter Luft gefüllten Gefäße in Verbindung gebracht und

mit einem starkem Drucke ausgesetzt werden oder nicht. Durch die Röhre  $CD$  kann dasselbe Gefäß mit komprimierter Luft, wenn der Hahn  $G$  und  $H$  geschlossen ist, auch einen Druck auf das Wasser des Gefäßes ausüben.

Fig. 79.



<sup>1)</sup> Regnault, Relation des expériences etc. Mémoires de l'Académie. 21. Paris 1847

Man kann somit 1. auf das Piézometer einen äußern Druck ausüben, indem man  $E$  schließt,  $G$  und  $D$  öffnet und  $H$  schließt; 2. einen inneren und äußern Druck, wenn man  $H$  und  $D$  schließt,  $G$  und  $E$  öffnet; 3. einen inneren Druck allein, wenn man  $D$  und  $G$  schließt,  $H$  und  $E$  öffnet.

Regnault vollführte nach und nach alle drei Kompressionen.

Wie wir bereits § 51 erwähnten, glaubte Regnault durch den ersten der erwähnten Versuche direkt den Kompressionskoeffizienten des Gefäßes bestimmen zu können, indem Lamé in den Formeln, welche er Regnault zur Berechnung dieser Versuche gegeben hatte, von vorn herein den Querkontraktionskoeffizienten  $\mu = 0,25$  gesetzt hatte. In der Tat erhielten wir § 51 für den ersten Versuch die Volumveränderung

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{9}{2} \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} P.$$

Setzen wir  $\mu = 0,25$ , so geht der Ausdruck über in

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{9 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P = \frac{9}{4} C_k \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} P.$$

Da der zweite Versuch die scheinbare Kompressibilität gibt, die Differenz zwischen dem wirklichen Kompressionskoeffizienten  $\kappa$  und dem Kompressionskoeffizienten  $C_k$  des Gefäßes, würde zu dieser Differenz der aus der ersten Beobachtung abgeleitete Kompressionskoeffizient  $C_k$  addieren sein, um die wahre Kompressibilität zu erhalten.

Da  $\mu$  nicht allgemein 0,25 ist, so ist die Korrektur ungenau. In Ermangelung eines bessern habe ich in früheren Auflagen deshalb aus dem ersten Versuche unter Annahme der von Wertheim bestimmten Elastizitätskoeffizienten für Kupfer, Messing und Glas den Wert von  $\mu$  und mit diesem den Wert von  $C_k$  berechnet, eine Korrektur, die ebenfalls unsicher ist, weshalb ich die Resultate dieser Rechnungen nicht mehr mitteile.

Der dritte Versuch ist eine Kontrolle für die beiden ersten, die beobachtete Volumverminderung muß nach den Gleichungen des § 51 und der eben gemachten Bemerkung, daß der zweite Versuch die scheinbare Kompressibilität gibt, die Summe der bei dem ersten und zweiten Versuche gefundenen Volumverminderung geben, ein Resultat, das Regnault bei allen seinen Messungen bestätigt fand.

Später hat Grassi<sup>1)</sup> mit dem Regnaultschen Apparate eine Reihe von Flüssigkeiten untersucht; zur Korrektur wegen der Kompression des Gefäßes nahm er nach dem Vorgange von Wertheim  $\mu = \frac{1}{3}$ , damit wird der kubische Kompressionskoeffizient gleich dem linearen, und der erste Versuch gestattet, wenn die Form des Piézometers genau geometrisch bestimmt ist, denselben zu berechnen. Die von Grassi angenommene Korrektur ist demnach für alle Versuche mit gläsernen Piézometern zu ziehen.

Amagat<sup>2)</sup> hat wegen dieser Unsicherheit der Korrektur an seinen Piézometern in der im § 51 besprochenen Weise den Elastizitätskoeffizienten, den Querkontraktionskoeffizienten und direkt den kubischen Kompressionskoeffizienten des benutzten Glases bestimmt. Gerade die direkte Beobachtung des kubischen Kompressionskoeffizienten ist besonders wertvoll, da bei

1) Grassi, Ann. de chim. et de phys. 31. (3.) 1851.

2) Amagat, Ann. de chim. et de phys. 21. (6.) 1890.

strung der von der Theorie gegebenen Gleichungen die Dimensionen der Piézometer sowie deren Form eine große Rolle spielen.

Vom größten Einfluß ist die Korrektion für die Kompression des Piézometers zur Messung der Kompressibilität des Quecksilbers, da dieselbe nur wenig größer als diejenige des Glases ist. Setzt man für den Querkontraktionskoeffizienten des Glases  $\mu = 0,25$ , so ergeben die Beobachtungen Regnaults für den Kompressionskoeffizienten des Glases für den Druck einer Atmosphäre ( $0,01033^{\text{kg}}$  pro  $\text{mm}^2$ ) den Wert  $0,000002374$  die scheinbare Kompressibilität des Quecksilbers wird  $0,000001145$  (die von Regnault angegebene Zahl  $0,000001234$  beruht auf einem Rechenfehler), mit wird der Kompressionskoeffizient des Quecksilbers für eine Atmosphäre gleich  $0,000003519$ .

Grassi leitete aus seinen Versuchen mit den Regnaultschen Apparaten die Kompressibilität des Quecksilbers  $0,00000295$  ab, ein Wert, welcher aus dem angegebenen Grunde zu klein ist; nehmen wir statt des von Grassi eingesetzten den Regnaultschen Kompressionskoeffizienten, so erhalten wir  $0,00000374$ .

Amagat hat mit sieben verschiedenen Piézometern, deren vier aus Kristallglas, drei aus gewöhnlichem Glase hergestellt waren, für welche, wie oben erwähnt, die Kompressionskoeffizienten direkt gemessen waren, folgende Werte der Kompressibilität des Quecksilbers erhalten.

Piézometer aus Kristallglas.	Piézometer aus Glas.
Nr. 1. $0,000003916$	Nr. 1. $0,000003898$
Nr. 2. $0,000003925$	Nr. 2. $0,000003880$
Nr. 3. $0,000003937$	Nr. 3. $0,000003934$
Nr. 4. $0,000003954$	Mittel $0,000003904$
Mittel $0,000003933$	

Die Werke sind bei Drucken erhalten, die bis zu 50 Atmosphären betragen. Amagat bemerkt am Schlusse seiner Arbeit, daß bei der Unmöglichkeit der Bestimmung des Kompressionskoeffizienten der Gläser besser sei, dieselben durch piézometrische Versuche mit Quecksilber zu bestimmen. Man beobachtet die scheinbare Kompression und zieht diese  $0,0000039$  ab; die Differenz ist die Kompression des Glases.

Auch Tait<sup>1)</sup> und de Metz<sup>2)</sup> bestimmten direkt die kubischen Kompressionskoeffizienten der von ihnen benutzten Piézometer: Tait erhielt als Kompressionskoeffizienten des Quecksilbers  $3,6 \cdot 10^{-6}$ , de Metz  $74 \cdot 10^{-6}$  für den Druck einer Atmosphäre.

Für den Druck Kilogramm pro  $\text{mm}^2$  ergibt sich aus der Amagatschen Zahl  $0,000003920 : 0,010333 = 0,00038$ ; der Elastizitätskoeffizient des Quecksilbers ist demnach

$$E = \frac{1}{0,00038} = 2632^{\text{kg}} \text{ pro } \text{mm}^2.$$

Die Dimensionen des Elastizitätskoeffizienten einer Flüssigkeit sind verständlich die gleichen wie diejenigen der Elastizitätskoeffizienten

1) Tait, Beibl. 13 p. 443. 1889.

2) de Metz, Wiedem. Ann. 47. p. 731. 1892.



der festen Körper, somit

$$E = s [\mu l^{-1} \tau^{-2}],$$

wir müssen den oben geschriebenen Wert mit  $981 \cdot 10^5$  multiplizieren, ihn im CGS-System auszudrücken.

In folgender Tabelle ist eine große Zahl der von Grassi gemessenen Kompressionskoeffizienten zusammengestellt, die in Spalte 3 angegeben. Zahlen sind die mit  $10^6$  multiplizierten Kompressionskoeffizienten; Spalte 4 gibt die Elastizitätskoeffizienten in Kilogramm pro  $\text{mm}^2$  in der Weise, wie wir es oben für Quecksilber angegeben haben.

Name der Flüssigkeit	Tempe- ratur	Zusammen- drückbarkeit $10^6 \times$ für Atmosph.	Druck in Atmosphären aus dem $\times$ ab- geleitet ist	Elastizitäts- koeffizient $E$ in Kilo- gramm pro $\text{mm}^2$
Wasser . . . . .	0,0	50,3	—	205
" . . . . .	1,5	51,5	—	—
" . . . . .	4,8	49,9	—	—
" . . . . .	10,1	48,0	—	—
" . . . . .	13,4	47,7	—	217
" . . . . .	18,0	46,3	—	—
" . . . . .	—	46,0	—	—
" . . . . .	25,0	45,6	—	225
" . . . . .	34,5	45,3	—	—
" . . . . .	43,0	44,2	—	—
" . . . . .	53,0	44,1	—	231
Äthylalkohol . . . . .	7,3	82,8	2,302	124
" . . . . .	7,3	85,3	9,495	—
" . . . . .	13,1	90,4	1,570	114
" . . . . .	13,1	99,1	8,970	—
Methylalkohol . . . . .	13,5	91,3	—	113
Äthyläther . . . . .	0,0	111,0	3,408	93
" . . . . .	0,0	131,0	7,820	—
" . . . . .	14,0	140,0	1,580	74
" . . . . .	13,8	153,0	8,362	—
Chloroform . . . . .	8,6	62,5	—	165
Chlorcalcium Lösung I . . . . .	17,5	30,6	—	356
" Lösung II . . . . .	15,8	20,6	—	500
" Lösung II . . . . .	41,25	22,9	—	451
Kochsalz Lösung I . . . . .	18,5	32,1	—	322
" Lösung II . . . . .	18,1	25,7	—	402
" Lösung II . . . . .	39,6	26,3	—	393
Jodkalium Lösung . . . . .	15,5	26,0	—	400
Natronsalpeter Lösung . . . . .	18,1	29,5	—	350
Soda Lösung . . . . .	16,6	29,7	—	348
Meerwasser . . . . .	17,5	43,6	—	237
$H_2SO_4 + H_2O$ . . . . .	13,6	24,2	—	424
$H_2SO_4 + 2H_2O$ . . . . .	14,6	25,0	—	400
$H_2SO_4 + 3H_2O$ . . . . .	16,5	27,1	—	381
$H_2SO_4 + 4H_2O$ . . . . .	14,7	27,9	—	370
$H_2SO_4 + 5H_2O$ . . . . .	14,2	28,3	—	365
$H_2SO_4 + 9H_2O$ . . . . .	14,6	31,5	—	328

Die Versuche Grassis zeigen, daß für Wasser der Kompressionskoeffizient mit steigender Temperatur abnimmt, somit der Elastizitätskoeffizient mit derselben wächst; für die übrigen Flüssigkeiten, sowohl



denen der Einfluß der Temperatur untersucht ist, zeigt dagegen die Kompression mit steigender Temperatur eine Zunahme.

Dieses Resultat ist durch alle spätern Versuche bestätigt und erweitert worden. Zunächst zeigten Pagliani und Vincentini<sup>1)</sup>, daß der Kompressionskoeffizient des Wassers bis gegen 60° stetig abnimmt, daß aber bei Temperaturen über 60° der Kompressionskoeffizient zunimmt, ein Resultat, welches von Tait<sup>2)</sup> und Amagat<sup>3)</sup> bestätigt wurde.

Die von Pagliani und Vincentini gefundenen Werte sind folgende:

Temperatur.	$\alpha \cdot 10^6$	Temperatur.	$\alpha \cdot 10^6$
0°	52,1	60°	40,8
10°	48,9	70°	40,9
20°	46,3	80°	41,5
30°	44,2	90°	42,1
40°	42,7	100°	43,0
50°	41,6		

Bis zu 70° lassen sich die Werte von  $\alpha$  recht gut durch die Gleichung

$$\alpha \cdot 10^6 = 52,1 - 0,372 t + 0,0031 t^2$$

darstellen, welche nur wenig von derjenigen abweicht, welche Tait aus seinen Versuchen abgeleitet hat.

Der Gang der Kompressibilität des Wassers bei verschiedenen Temperaturen hängt nicht unwesentlich ab von dem Drucke, unter welchem der Kompressionskoeffizient des Wassers bestimmt wird.

Gegenüber frühern Versuchen von Cailletet<sup>4)</sup> welche eine wirkliche Abänderung des Kompressionskoeffizienten des Wassers mit wachsendem Drucke nicht erkennen ließen, haben Amagat<sup>5)</sup> und Tait<sup>6)</sup> gezeigt, daß derselbe mit steigendem Drucke erheblich abnimmt. Cailletet hatte aus seinen Versuchen bis zu einem Drucke von 705 Atmosphären als scheinbare Koeffizienten bei 8° den Wert  $\alpha \cdot 10^6 = 45$  gefunden, fügen wir den Regnaultschen oder Amagatschen Kompressionskoeffizienten des Glases  $C_g \cdot 10^6 = 2,2$  hinzu, so ergibt sich für  $\alpha \cdot 10^6$  der Wert 47,2, der nur wenig von dem Paglianischen bei 10° und ebenso von dem von Röntgen und Schneider<sup>7)</sup> bei 9° und einer Drucksteigerung bis 9 Atmosphären gefundenen Werte  $\alpha \cdot 10^6 = 48,1$  abweicht.

Das Verfahren von Cailletet war im wesentlichen das Oerstedtsche, nur nahm er die Kompression, um zu hohen Drucken gehen zu können, in sehr dickwandigen Stahlgefäßen vor. Die Methode der Druckmessung

1) Pagliani und Vincentini, Ann. die Reale Ist. Tecnico Germano Sommeiller Torino 12 Beiblätter 8. p. 794. 1884. Rend. Reale Accad. dei Lincei 1889 p. 777 Beiblätter 14. p. 94. 1890. Die im Texte mitgeteilten Werte sind der dort angegebenen Stelle entnommen.

2) Tait, Beiblätter 13. p. 442. 1889

3) Amagat, Comptes Rendus. 104. p. 1159. 1887.

4) Cailletet, Comptes Rendus. 75. p. 77. 1872.

5) Amagat, Comptes Rendus. 103. p. 429. 1886; 104. p. 1159. 1887; 105. p. 1159. 1887.

6) Tait, Proceedings of the Royal Soc. Edinburg. 13 p. 2. 1886. Beibl. 10. p. 149. 1886; 13 p. 442. 1889.

7) Röntgen und Schneider, Wiedem. Ann 33. p. 652. 1888.

werden wir in § 66 besprechen. Um die durch den Druck eingetretene Volumänderung zu messen, welche man in den Stahlgefäßen nicht direkt beobachten konnte, waren die Innenflächen der kapillaren Röhren der Piézometer vergoldet, und das offene Ende derselben in Quecksilber getaucht. Das in die Röhre eindringende Quecksilber löste, soweit es eingedrungen war, das Gold auf, so daß man nach Beendigung des Versuches die während desselben eingetretene Volumverminderung bestimmen konnte.

Amagat, welcher ebenfalls in sehr festen Stahlgefäßen komprimierte, verfuhr nach einem von Tait gemachten Vorschlage etwas anders, er maß die Drucke, welche zum Hervorbringen einer bestimmten Volumverminderung erforderlich sind, mit Hilfe des elektrischen Stromes. Zu dem Zwecke werden in die enge Röhre des Piézometers in bestimmten Stellen Platindrähte eingeschmelzt, und das zwischen je zwei Drähten abgegrenzte Volumen genau bestimmt. Die Drähte sind außen durch Drähte miteinander verbunden, welche einen bestimmten elektrischen Widerstand haben. Die Piézometer tauchen, wie bei Cailletet, mit dem offenen Ende nach unten in Quecksilber. Der oberste Draht des Piézometers tritt durch eine Dichtung, wie bei den § 51 beschriebenen Versuchen Amagats aus dem Kompressionsgefäße heraus. Man verbindet nun das Quecksilber des Gefäßes leitend mit einer galvanischen Säule und den andern Pol mit einem Galvanometer, welches andererseits mit dem obersten Platindraht verbunden ist. Ist der Druck so groß geworden, daß das Quecksilber bis zu dem untersten Platindrahte reicht, so wird der Strom geschlossen; er fließt von dem untersten Platindraht durch sämtliche Widerstände zu dem obersten Drahte, von dort durch das Galvanometer zur galvanischen Säule, und die Nadel des Galvanometers erhält einen Ausschlag. Wird der zweite Platindraht von dem eindringenden Quecksilber berührt, so hat der Strom nicht mehr den Widerstand, zwischen dem ersten und zweiten Draht zu durchlaufen, sondern tritt direkt aus dem Quecksilber in den zweiten Draht. Der Strom nimmt also bei der Berührung des zweiten und ebenso jedes folgenden plötzlich an Stärke zu, so daß man genau den Moment erkennen kann, in welchem die durch den betreffenden Draht angegebene Volumverminderung erreicht ist. Der Druck, durch welchen diese Volumverminderung erreicht war, wurde von Amagat nach dem von Cailletet angewandten Verfahren gemessen.

Tait selbst wandte bei seinen Versuchen in den engen Röhren verschiedene Indizes an, welche von dem aufsteigenden Quecksilber gehoben wurden, aber in der Stellung sitzen blieben, wenn das Quecksilber zurückging.

Wie sehr mit wachsendem Drucke bei konstanter Temperatur der Wert von  $\alpha$  abnimmt, zeigen folgende von Amagat gegebene Zahlen; dieselben bedeuten die mittlern Werte von  $\alpha \cdot 10^6$ , wenn der Druck von unten bis zur obern Grenze zunahm

Druck in Atmosphären.	$\alpha \cdot 10^6$ .	Druck in Atmosphären.	$\alpha \cdot 10^6$ .
von 1—262	45,1	von 1784—2202	29,8
„ 262—805	40,1	„ 2202—2590	27,9
„ 805—1334	35,4	„ 2590—2981	26,0
„ 1334—1784	32,4		

a. Amagat nur die scheinbaren Kompressionskoeffizienten gibt, haben von Amagat gegebenen Kompressionskoeffizienten jenen des  $C_p \cdot 10^6 = 2,2$  hinzuaddiert.

Tait gibt für die Abhängigkeit des Kompressionskoeffizienten von Druck und Temperatur folgende Gleichung, in welcher der Druck in Tonnen auf den Quadratzoll, deren jede 152,3 Atmosphären beträgt, gemeint ist

$$= 52,0 - 1,7p + 0,1p^2 - (0,355 + 0,005p)t + (0,003 + 0,001p)t^2.$$

Der Kompressionskoeffizient bei 456,9 Atmosphären und der Temperatur  $t$  wird darnach

$$\alpha \cdot 10^6 = 47,8 - 0,370t + 0,006t^2,$$

wie man sieht, daß bei diesem Drucke das Minimum des Kompressionskoeffizienten fast genau bei  $60^\circ$  liegt; bei einem Drucke von etwa 60 Tonnen der Kompressionskoeffizient von  $10^6$  ab schon wachsen.

Für die Abhängigkeit der Kompressionskoeffizienten des Wassers vom Drucke hat Tait später<sup>1)</sup> eine einfachere Formel gegeben. Ist  $\alpha$  der Kompressionskoeffizient von 1 bis  $p$  Atmosphären so ist

$$\alpha = \frac{A}{B + p}$$

$A$  und  $B$  zwei nur von der Temperatur abhängige Konstanten sind. Bei Temperatur  $0^\circ$  ist

$$\alpha = \frac{0,8015}{5933 + p}.$$

Die Werte von  $A$  und  $B$  nehmen bis etwa  $40^\circ$  zu, dann aber ab.

Für die übrigen nicht wasserhaltigen Flüssigkeiten würde aus den Beobachtungen von Grassi folgen, daß die Werte von  $\alpha$  mit steigender Temperatur zunehmen, daß also bei diesen, wie bei den festen Körpern, die Kompressibilität mit steigender Temperatur abnimmt; die Beobachtungen von Amagat für Alkohol und Äthyläther würden weiter zu dem Schlusse führen, daß die Kompressibilität mit wachsendem Drucke zunähme, daß demnach der Kompressionskoeffizient abnähme, je näher die Moleküle der Flüssigkeiten aneinander rücken.

Der letztere Schluß ist von allen spätern Beobachtern, so von Amagat<sup>2)</sup>, Pagliani und Palazzo<sup>3)</sup>, Röntgen<sup>4)</sup> u. a. bestätigt worden. So erhält man für  $\alpha \cdot 10^6$  folgende Werte

Alkohol . . .	bei $14^\circ,7$ C.	$\alpha \cdot 10^6 = 104$	bei $100^\circ$ C.	$\alpha \cdot 10^6 = 221$
Alkohol . . .	.. $14^\circ$	.. .. = 101	.. $99^\circ,4$	.. .. = 202
Alkohol . . .	.. $13^\circ,8$	.. .. = 82	.. $99^\circ$	.. .. = 154
Werkkohlenstoff ..	$15^\circ,6$	.. .. = 87	.. $100^\circ$	.. .. = 174
.. ..	.. $14^\circ$	.. .. = 110	.. $99^\circ$	.. .. = 280.

<sup>1)</sup> Tait, Beibl. 18. p. 415. 1894.

<sup>2)</sup> Amagat, Ann. de chim. et de phys. 11. 3. 1877. Comptes Rendus 105. 30. 1887.

<sup>3)</sup> Pagliani und Palazzo, Memor. d. Reale Accad. dei Lincei. 19. 3. Bei-  
trag 9 p. 149. 1885.

<sup>4)</sup> Röntgen, Wiedem. Ann. 44. p. 1. 1891.

Für Chloroform erhält Amagat bei 100° den Wert  $\kappa \cdot 10^6 = 2$  so daß gegenüber dem von Grassi gefundenen Werte die Kompression mehr als das dreifache zunähme; eine solche Zunahme hat Amagat Äthyläther selbst beobachtet, er findet bei 13°<sub>7</sub>  $\kappa \cdot 10^6 = 167$ , für Temperatur 99° dagegen  $\kappa \cdot 10^6 = 550$ , also mehr als dreimal so gr

Pagliani und Palazzo beobachteten die Kompressionskoeffizien bei 3 oder 4 Temperaturen zwischen 0° und 100° und stellten ihre l obachtungen dar durch eine Gleichung von der Form

$$\kappa = \kappa_0 (1 + at + bt^2).$$

Nachstehende Tabelle gibt die von diesen Beobachtern gegeben Werte von  $\kappa_0 \cdot 10^6$ ,  $a$  und  $b$ . Die Spalten 5 und 6 enthalten die v Röntgen für die gleichen Substanzen gefundenen Werte und die Zunah der Werte  $\kappa \cdot 10^6$  für einen Grad der Temperaturerhöhung bis zu et 18°, der höchsten von Röntgen genommenen Temperatur. Die We von  $\kappa_0 \cdot 10^6$  habe ich aus Röntgens Angaben abgeleitet, indem ich v den bei 2°—4° gefundenen Werten von  $\kappa$  nach der von Röntgen gef denen Zunahme die betreffenden Größen abgezogen habe.

Substanzen	$\kappa_0 \cdot 10^6$	$a \cdot 10^3$	$b \cdot 10^3$	$\kappa_0 \cdot 10^6$	$\frac{\Delta \kappa_0 \cdot 10^6}{\Delta t}$
Toluol . . . . .	77,0	6,570	0,0174	—	—
Xylol . . . . .	73,4	2,204	0,0644	—	—
Cumol . . . . .	72,5	2,531	0,0521	—	—
Methylalkohol . . . .	101	6,225	0,01007	105,3	0,80
Äthylalkohol . . . . .	97,0	3,177	0,0550	98,4	0,67
Normal Propylalkohol	85,8	3,245	0,0530	86,2	0,62
Isobutylalkohol . . . .	88,2	2,983	0,0572	88,3	0,565
Amylalkohol . . . . .	81,65	2,913	0,0590	81,7	0,495
Schwefelkohlenstoff. .	—	—	—	78,4	0,615
Benzol . . . . .	—	—	—	78,8	0,73

Pagliani und Palazzo finden für Benzol bei 15°<sub>4</sub> C.  $\kappa \cdot 10^6 = 87$ , aus den Beobachtungen von Röntgen würde sich für diese Temperat 90,0 ergeben. Man sieht, die von den verschiedenen Beobachtern gefu denen Zahlen stimmen gut überein.

Den aus Grassis Beobachtungen zu ziehenden Schluß, daß die Kom pressibilität mit wachsendem Drucke zunähme, haben die spätern l obachtungen von Amaury und Descamp<sup>1)</sup>, Cailletet<sup>2)</sup> und besond von Amagat<sup>3)</sup> nicht bestätigt.

Innerhalb der von Grassi angewandten Druckgrenzen konst Amaury und Descamps, und in viel weiteren Grenzen auch Cailletet eine merkliche Änderung der Kompressibilität nicht erkennen, Amag dagegen fand, daß die Kompressionskoeffizienten aller Flüssigkeiten eben

1) Amaury und Descamps, Comptes Rendus. 68. p. 1564. 1869.  
2) Cailletet, Comptes Rendus. 75. p. 77. 1872.  
3) Amagat, Ann. de chim. et de phys. 11. (6.) 1887. Comptes Rendus. III p. 429. 1886.

wie diejenigen des Wassers mit steigendem Drucke kleiner werden. So erhielt er als Werte  $\alpha \cdot 10^6$  für Äthyläther bei  $13^{\circ},7$  C. folgende Werte

Atmosphären	$\alpha \cdot 10^6$	Atmosphären.	$\alpha \cdot 10^6$
8,53—13,70	168	25,40—30,56	162
13,70—19,47	169	30,56—36,45	152
19,47—25,40	169		

Die Abnahme wird merklich, sowie der Druck über 25 Atmosphären steigt; mit weiter wachsendem Drucke nimmt  $\alpha$  noch rascher ab, wie folgende von Amagat gegebene Zahlen zeigen; die Temperatur war  $17^{\circ},4$ .

Atmosphären.	$\alpha \cdot 10^6$	Atmosphären.	$\alpha \cdot 10^6$
1—154	158,2	870—1243	65,2
154—487	109,2	1243—1623	51,1
487—870	85,2	1623—2002	47,2

Der Kompressionskoeffizient des Äthers ist also zwischen 1623 und 2002 Atmosphären weniger als  $\frac{1}{3}$  desjenigen bei geringen Drucken; bei größeren Drucken ist aber, wie zu erwarten war, die Abnahme der Kompression mit wachsendem Drucke eine langsamere als bei geringeren Drucken.

Richards und Stull<sup>1)</sup> haben die Kompressibilität einer Anzahl Flüssigkeiten mit der des Quecksilbers bis 500 Atmosphären Druck verglichen. sie finden ebenso mit wachsendem Druck abnehmende Werte von  $\alpha$  und schließen weiter, daß je größer  $\alpha$ , um so größer auch die Abnahme von  $\alpha$  sei.

Die Änderung der Kompressionskoeffizienten bei wachsendem Drucke hängt wesentlich von der Temperatur ab, bei welcher die Kompression stattfindet. Amagat fand für den Äthyläther, dessen Kompressionskoeffizienten bis 36,65 Atmosphären bei  $13^{\circ},7$  C. wir vorher angaben, innerhalb derselben Druckgrenzen bei der Temperatur von  $100^{\circ}$  folgende Werte von  $\alpha \cdot 10^6$

Atmosphären.	$\alpha \cdot 10^6$	Atmosphären.	$\alpha \cdot 10^6$
von 8,50—13,90	560	von 25,60—30,55	489
„ 13,90—19,55	540	„ 30,55—36,65	474
„ 19,55—25,60	525		

Während bei der niedern Temperatur die Abnahme der Kompressionskoeffizienten erst bemerkbar wird, wenn der Druck über 25 Atmosphären gewachsen ist, zeigt sich hier dieselbe schon bei geringen Drucken sehr deutlich: während er bei niedriger Temperatur innerhalb dieser Druckgrenzen um 0,1 seines anfänglichen Wertes abgenommen hat, ist er hier fast nahezu  $\frac{1}{3}$  verkleinert.

Auf die spätern Versuche von Amagat<sup>2)</sup> kommen wir in der Wärmelehre bei Besprechung der Temperaturänderungen durch Druck und der Abhängigkeit der Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeiten vom Druck zurück.

1) Richards und Stull, Fortschr. d. Physik i. J. 1903. p. 196

2) Amagat, Comptes Rendus 104. p. 1159. 1887; 105 p. 1120. 1887 Zusammenge stellt hat Amagat die Resultate seiner Versuche in Ann. de chim. et de phys. 29. 6. 1893.

Die Versuche von Grassi zeigen weiter, daß die Kompressionskoeffizienten der Salzlösungen, soweit er dieselben untersucht hat, kleiner als jene des Wassers, ein Resultat, das durch neuere Versuche insbesondere von Röntgen und Schneider<sup>1)</sup> bestätigt worden ist, aus dem auch ergibt, daß der Kompressionskoeffizient im allgemeinen mit dem Gehalte der Lösung abnimmt. Für Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure finden Röntgen und Schneider, daß die Kompressibilität wachsendem Schwefelsäuregehalt kleiner wird, bis zu einer Mischung welche etwa 78%  $H_2SO_4$  enthält; von da ab nimmt dieselbe zu jener der reinen Schwefelsäure, welche etwa  $\frac{2}{3}$  derjenigen des Wassers. Bis zu einer Mischung von etwa 30,4%  $H_2SO_4$  liegt die Kompressibilität der Mischungen zwischen derjenigen des Wassers und der Schwefelsäure; für die übrigen Mischungen ist dieselbe kleiner als jene der Schwefelsäure.

Messungen von Schumann<sup>2)</sup>, Tait<sup>3)</sup>, Gilbault<sup>4)</sup> gelangten im allgemeinen zu gleichen Resultaten; im allgemeinen ist die Kompressibilität der Lösungen kleiner als die des reinen Lösungsmittels und nimmt mit wachsender Konzentration ab; für sehr verdünnte Lösungen von Chloroform und Chlorcalcium bei 15° und von Chlorstrontium und Chlorammonium findet indeß Schumann die Kompressionskoeffizienten etwas größer als die des reinen Wassers.

Durch Einführung des Begriffes der molekularen Kompression gelangte Gilbault zu einer ziemlich einfachen Beziehung zwischen der Kompressibilität und der Konzentration einer Lösung. Als molekulare Kompression bezeichnet Gilbault die durch die Einheit des Druckes eintretende Verminderung einer Lösung, welche die gleiche Anzahl von Molekülen enthält wie die Volumeinheit des Lösungsmittels. Nehmen wir nun eine Lösung und setzen als Volumeinheit 100 Cc oder das Volumen von 100 g Wasser, so ist, da 18 das Molekulargewicht des Wassers ist, die Zahl der Wassermoleküle in der Volumeinheit  $\frac{100}{18} = 5,555$  Moleküle des Lösungsmittels. In einer 100 g Lösung  $p$  g Salz, so ist die Zahl der Wassermoleküle  $\frac{100-p}{18}$ . Würden die Salze als solche in der Lösung sein, und ist  $m$  das Molekulargewicht des Salzes, so würde  $\frac{p}{m}$  die Zahl der Salzmoleküle sein. Gilbault nimmt aber an, daß die Salzmoleküle dissoziiert seien, daß bei  $NaCl$  in die Bestandteile  $Na$  und  $Cl$  zerfallen, so daß in der Lösung die doppelte Zahl der Moleküle, statt  $\frac{p}{m}$  somit  $2 \frac{p}{m}$  Moleküle vorhanden wären. Die Zahl der Moleküle in 100 g Lösung ist demnach

$$2 \frac{p}{m} + \frac{100-p}{18}.$$

Die Zahl  $z$  der Moleküle in 100 Cc Lösung erhalten wir, wenn die Zahl  $z$  mit dem spezifischen Gewicht der Lösung  $\sigma$  multipliziert

1) Röntgen und Schneider, Wiedem. Ann. 29. p. 165. 1886.

2) Schumann, Wiedem. Ann. 32. p. 14. 1887.

3) Tait, Fortschritte der Physik für 1897. 1. p. 380.

4) Gilbault, Zeitschrift für physikal. Chemie. 24. p. 385. 1897.

men von  $\sigma$  g Lösung gleich dem Volumen von 1 g Wasser ist.  
 Danach

$$z = \left( 2 \frac{p}{m} + \frac{100 - p}{18} \right) \sigma.$$

Volumen  $x$  der Lösung, welche  $\frac{100}{18}$  Grammmoleküle enthält, er-  
 r aus der Proportion

$$z : 1 = 5,555 : x.$$

$$x = \frac{5,555}{z} = \frac{\frac{100}{18}}{\left( 2 \frac{p}{m} + \frac{100 - p}{18} \right) \sigma}.$$

ch einen Druck  $P$  das Volumen  $x$  dieser Lösung  $x_1$  so ist

$$\frac{x - x_1}{x} = \kappa P,$$

r  $P = 1$ , so wird

$$x - x_1 = \kappa x = \mu.$$

odukt  $\mu$  bezeichnet Gilbault als die molekulare Kompression der

Konzentration der Lösung bezeichnet Gilbault das Verhältnis  
 rüle des gelösten Salzes zu der Gesamtzahl der in der Lösung  
 en Moleküle also

$$a = \frac{2 \frac{p}{m}}{2 \frac{p}{m} + \frac{100 - p}{18}}.$$

un  $\mu_0$  die Kompression des Wassers,  $\mu$  diejenige der Salzlösung  
 Konzentration  $a$ , so gelangt Gilbault zu der Gleichung

$$\frac{\log \mu_0}{a} - \log \mu \quad \sigma = k,$$

ine für jedes Salz charakteristische Konstante ist.

Beziehung wurde an Lösungen von 18 Salzen geprüft und vorzüg-  
 u den größten Konzentrationen bestätigt gefunden.

ergab sich für Lösungen von

1	Natriumnitrat	Chlorkalium	Chlornatrium	Natriumcarbon
2	1,264	1,321	1,7055	4,641.

Mischungen zweier Flüssigkeiten, die nicht chemisch aufeinander  
 . liegt die Vermutung nahe, daß die Kompression der Mischung  
 leich der Summe der Kompression der Bestandteile sei, das heißt,  
 Volumverminderung der Mischung stets gleich der Summe der  
 minderungen der Bestandteile sei, daß also auch in der Mischung  
 nen Flüssigkeiten so zusammengedrückt werden, wie wenn der  
 ruck auf jede für sich wirkte. Besteht demnach eine Flüssig-  
 Volumen  $V$  aus  $v_1$  einer und  $v_2$  der zweiten Flüssigkeit, so daß  
 $v_2$ , so würde

$$\Delta V = \Delta v_1 + \Delta v_2.$$



Ist  $\kappa$  der Kompressionskoeffizient der Mischung,  $\kappa_1$  derjenige der einen  $\kappa_2$  der andern Flüssigkeit, so würde bei einem Drucke  $P$

$$\Delta V = \kappa VP, \Delta v_1 = \kappa_1 v_1 P, \Delta v_2 = \kappa_2 v_2 P$$

and daraus

$$\kappa = \frac{\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Nach den Versuchen von Drecker<sup>1)</sup> sowie Pagliani und Palazzo<sup>2)</sup> ist das indes nicht der Fall. Drecker maß die Kompressionen bei einer Temperatur von 25° für Mischungen von Schwefelkohlenstoff mit Alkohol, Wasser mit Alkohol, Chloroform mit Alkohol und Schwefelkohlenstoff mit Chloroform. Folgende Tabelle gibt die von Drecker gefundenen Werte, unter  $\kappa \cdot 10^6$  die beobachteten, unter  $\kappa' \cdot 10^6$  die nach obiger Formel berechneten Werte, unter  $p$  sind die Gewichte Alkohol bzw. bei den Mischungen Schwefelkohlenstoff-Chloroform die Gewichte Schwefelkohlenstoff in 100 Lösung angegeben.

Wasser-Alkohol			Schwefelkohlenst.-Alkohol			Chloroform-Alkohol			Chloroform-Schwefelkohlenstoff		
$p$	$\kappa \cdot 10^6$	$\kappa' \cdot 10^6$	$p$	$\kappa \cdot 10^6$	$\kappa' \cdot 10^6$	$p$	$\kappa \cdot 10^6$	$\kappa' \cdot 10^6$	$p$	$\kappa \cdot 10^6$	$\kappa' \cdot 10^6$
0	45,5	—	0	97,5	—	0	106,7	—	0	106,7	—
12,37	42,0	55,5	18,54	103,0	101,8	10,33	106,3	107,9	12,46	106,7	105,8
23,91	41,1	64,5	27,48	106,6	103,6	20,84	106,4	109,0	25,25	105,3	104,1
34,61	44,8	72,8	40,32	109,3	105,9	31,21	108,0	109,9	33,35	105,2	103,3
50,29	54,5	84,0	51,76	111,3	107,8	40,56	107,6	110,6	45,93	102,9	102,1
62,95	65,0	92,0	64,15	113,8	109,5	50,52	105,4	111,3	58,38	102,2	101,0
79,72	80,7	102,6	74,89	115,0	110,9	64,28	105,6	112,1	72,07	99,9	99,8
85,13	88,6	105,6	89,54	115,4	112,7	79,30	109,1	112,9	100	97,5	—
100	113,8	—	100	113,8	—	100	113,8	—			

Die von Pagliani und Palazzo für die Gemische Wasser-Alkohol gefundenen Werte stimmen mit den von Drecker gefundenen recht überein; auch sie zeigen, daß die Mischungen, welche weniger als 50% Alkohol enthalten, kleinere Kompressionskoeffizienten besitzen als das Wasser. Das gleiche gilt für die wenig Chloroform enthaltenden Gemische Chloroform-Alkohol, während die Gemische Schwefelkohlenstoff-Alkohol zum Teil größere Werte haben als Alkohol. Das verschiedene Verhalten dieser Mischungen scheint mit der Änderung der Dichte zusammenzuhängen; bei den Mischungen von Wasser und Alkohol und ebenso bei den meisten Mischungen Chloroform-Alkohol tritt eine Kontraktion ein, das heißt, das Volumen der Mischung ist kleiner als das Volumen der Bestandteile, während bei Alkohol und Schwefelkohlenstoff das Volumen der Mischung größer ist als das der Bestandteile.

Jedenfalls zeigen die Versuche, daß auch bei Mischung solcher Flüssigkeiten

1) Drecker, Wiedem. Ann. 20. p. 890. 1883.  
2) Pagliani und Palazzo, Rendic. d. Reale Accad. dei Lincei. p. 777. J. 1889. Beiblätter 14. p. 93. 1890.

iten, welche direkt chemisch nicht aufeinander einwirken, Molekularwirkungen zwischen den verschiedenen Flüssigkeiten vorhanden sind.

### § 65.

**Hydrostatischer Druck.** Die im § 63 abgeleitete Gleichung über die im Innern einer Flüssigkeit vorhandenen Drucke setzt uns in den Stand, das Verhalten einer Flüssigkeit in einem offenen Gefäße und die in derselben vorhandene Verteilung der Drucke zu bestimmen.

Nehmen wir zunächst an, daß die Flüssigkeit nur der Schwere unterworfen sei, so ergibt sich als erste Folge jener Gleichung, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eben und horizontal sein muß. Als Bedingung, daß die Oberfläche einer Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, ergibt sich nämlich unmittelbar, daß die auf irgend einen Punkt der Oberfläche wirkenden, der Oberfläche parallelen Kräfte, sich gegenseitig aufheben müssen. Denn wenn das nicht der Fall ist, so wird die Flüssigkeit sich nach der Richtung der größeren Kraft bewegen müssen. Dieses Aufheben der der Flüssigkeitsfläche parallelen Drucke findet aber nur dann statt, wenn die vorhandenen Drucke normal sind zur Oberfläche und an allen Stellen derselben gleiche Größe haben. Denn, sind die Drucke nicht normal, so haben sie eine der Fläche parallele Komponente, welche demnach das Gleichgewicht stören würde; sind die Drucke aber an verschiedenen Stellen verschieden, so tritt ebenfalls, wegen der nach allen Richtungen gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes, eine der Oberfläche parallele Kraft auf, welche nicht durch den Gegendruck aufgehoben wird. Diese zwei Bedingungen fallen also streng genommen in eine zusammen, da bei Flüssigkeiten immer, wenn die Drucke an allen Stellen einer Fläche dieselben sind, die Drucke normal zur Oberfläche sind. Derartige Flächen, in welchen der normale Druck an allen Stellen derselbe ist, nennt man Niveaulächen. Damit können wir also als Gleichgewichtsbedingung einer freien Flüssigkeitsoberfläche den Satz aufstellen, daß dieselbe eine Niveauläche sein muß.

Wir erhielten nun § 63 ganz allgemein für den auf die Flächeneinheit im Innern einer Flüssigkeit wirkenden Druck, wenn in derselben irgend eine andere Fläche einen Druck erhält, der für die Flächeneinheit  $p_0$  ist,

$$p = p_0 + d \cdot h,$$

wann  $d$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit und  $h$  den vertikalen Abstand des Flächenelementes, auf welchem der Druck für die Flächeneinheit  $p$  ist, von dem bedeutet, auf welchem der Druck  $p_0$  ist.

Es gehören nun alle diejenigen Flächenelemente zu einer Niveauläche, für welche  $p$  einen und denselben Wert hat, für welche also

$$p = p_0 + d \cdot h = \text{const.}$$

In einer gegebenen Flüssigkeitsmasse ist demnach für alle Elemente konstant, für welche

$$h = \text{const.},$$

da vertikale Abstände von einem gegebenen Punkte alle gleich sind; ist aber eine horizontale Ebene. Da somit die Niveaulächen die hori-

zontalen Ebenen sind, so muß auch die freie Oberfläche einer Flüssigkeit eine horizontale Ebene sein.

Ganz dasselbe, was von der freien Oberfläche einer Flüssigkeit gilt, gilt auch für die Grenzfläche zweier nicht mischbaren Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichtes, welche übereinander geschichtet sind. Auch diese muß eine horizontale Ebene sein. Es ergibt sich demnach mittelbar aus dem eben abgeleiteten Satze, daß die Niveaulinien einer Flüssigkeit horizontale Ebenen sein müssen, daß es überflüssig ist, den Beweis besonders zu führen.

Den letztern Fall finden wir in der Regel in der Natur, indem auf den in unseren Gefäßen vorhandenen Flüssigkeiten der hydrostatische Druck wirkt, wie wir im nächsten Kapitel nachweisen werden, auf der Fläche einen leicht meßbaren, in jedem Flächenelement gleich ausübt.

Aus dem soeben bewiesenen Satze, daß die Niveaulinien einer Flüssigkeit horizontale Ebenen sind, ergibt sich ferner, daß auf einer horizontalen, durch die Flüssigkeit gelegten Ebene der Druck in jedem Flächenelement derselbe und zwar gleich dem Drucke der Flüssigkeitssäule sein muß, welche sich über diesem Flächenelement befindet. Wenn man nämlich von dem Drucke der Luft ab, so gibt uns unsere Gleichung (1) der auf die Flächeneinheit einer Ebene, welche in der Tiefe  $h$  unter der Oberfläche der Flüssigkeit sich befindet, der Druck  $p$  gegeben ist durch den Ausdruck

$$p = dh.$$

Hat die Fläche im Innern der Flüssigkeit die Größe  $s$ , so ist der auf ihr lastende Druck den Wert

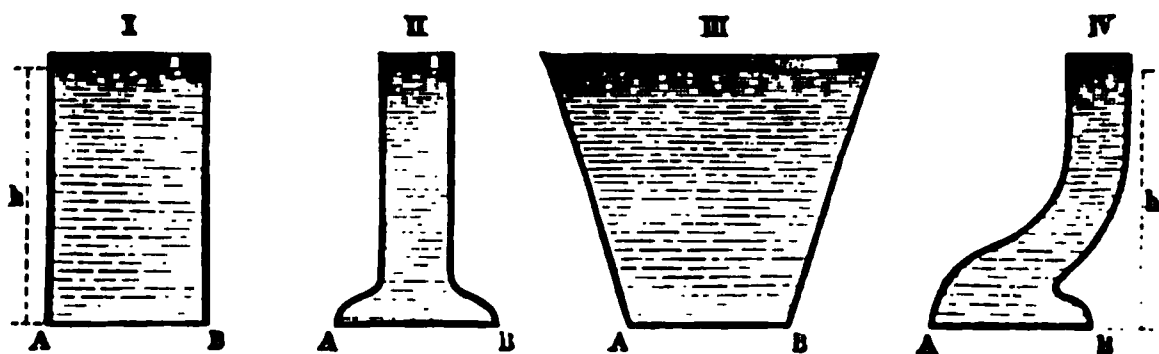
$$ps = sdh;$$

er ist also gleich dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt  $s$  in ihrer ganzen Höhe gleich  $s$  ist, und deren Höhe gleich  $h$  ist.

Hieraus folgt ein merkwürdiger unter dem Namen des hydrostatischen Paradoxons schon von Pascal ausgesprochener Satz, der Satz nämlich, daß der Druck, welcher auf den Boden eines Gefäßes wirkt, nur abhängig ist von der Größe der Bodenfläche und von der Höhe der Flüssigkeitssäule.

Gefäße, in denen die Flüssigkeit bis zur gleichen Höhe  $h$  steht, zeigen, daß der Druck auf die Bodenfläche derselbe ist, wenn die Gefäße bis zur gleichen Höhe  $h$  mit derselben Flüssigkeit gefüllt sind.

Fig. 80.



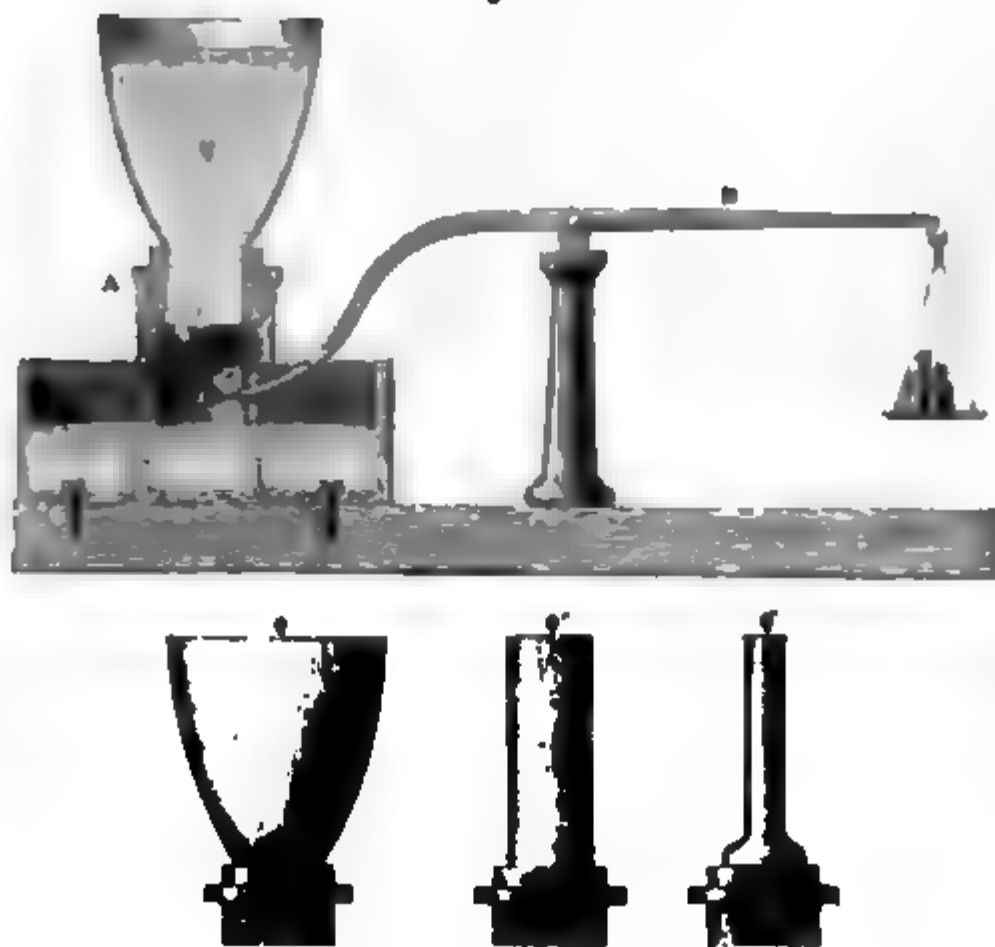
auf eine Fläche  $s$ , in einer gegebenen Flüssigkeit nur abhängig ist von der Größe der Fläche und der Höhe  $h$  der Flüssigkeit über der Fläche. Haben wir demnach Gefäße verschiedener Form, wie etwa in Fig. 80 dargestellt, stets gleicher Bodenfläche, so ist der Druck auf die Bodenfläche derselbe, wenn die Gefäße bis zur gleichen Höhe  $h$  mit derselben Flüssigkeit gefüllt sind.

ist gefüllt sind, einerlei ob die Gefäße sich oben erweitern oder verengern, ob sie senkrechte oder geneigte Wände haben; der Druck ist immer gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, welche überall den Querschnitt  $s$  der Seitenfläche und die Höhe  $h$  hat.

Man kann diesen Satz leicht mit dem Apparate Fig. 81 nachweisen und so gleichzeitig den experimentellen Beweis des allgemeinen Satzes liefern, daß auf die Flächeneinheit einer in der Tiefe  $h$  unter der Oberfläche liegenden Ebene ein vertikal abwärts gerichteter Druck wirkt, der gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitszylinders, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich  $h$  ist.

Auf einen hohlen metallischen Zylinder  $A$  (Fig. 81) können Gefäße verschiedener Form  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$  wasserdicht aufgeschraubt werden. Die Ge-

Fig. 81



ße und unten offen; in dem Zylinder  $A$  befindet sich aber eine Platte, auf welcher die Messingfassungen der Gefäße unten aufgepaßt sind. Den Boden der Gefäße bildet dann ein in diese Platte genau eingeschliffenes technisches Ventil  $k$ , welches sich von unten nach oben öffnen kann. Wenn z. B. das Gefäß  $Q$  Flüssigkeit bis zu einer bestimmten Marke eingefüllt ist, so wird das Ventil durch das Gewicht der Flüssigkeit fest in die Platte gedrückt und wasserdicht geschlossen. Das Ventil kann dann geöffnet werden durch einen an dem zweiarmligen Hebel  $H$  befestigten Stift  $s$ , der das Ventil berührt. Wird in die Wagschale ein Gewicht  $p$  gelegt, so treibt der Stift das Ventil mit einem dem Gewichte  $p$  gleichen Drucke in die Höhe; ist nun dieser Druck etwas größer als der von oben nach unten gerichtete Druck der Flüssigkeit auf das Ventil, so öffnet sich dasselbe, und die Flüssigkeit fließt in das den hohlen Zylinder  $A$  umgebende Gefäß.

Es bedarf nun, welches der Gefäße  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$  man auch stets desselben Gewichtes  $p$ , um das Ventil zu heben, wenn man allen dreien dieselbe Flüssigkeit bis zu der in gleicher Höhe  $h$  am Boden befindlichen Marke einfüllt, und zwar ist immer das Gewicht jenes des Flüssigkeitszylinders vom Querschnitte der Bodenfläche  $F$  die Höhe der Marke über dem Boden.

Wie wir schon in § 63 zeigten, müssen im Gleichgewichte die auf ein Flächenelement im Innern einer Flüssigkeit wirkenden



dieselben sein, welche Richtung auch die des Flächenelementes besitzt. Ebenso wie auf eine horizontale Fläche von der Größe  $s$  ein vertikal abwärts gerichteter Druck von der Größe  $p$  wirkt, ebenso muß auch ein vertikal aufwärts gerichteter Druck von derselben Größe auf die Fläche wirken. Es läßt sich auch dieser Druck durch den Versuch nachweisen. Wenn man eine Glasröhre (Fig. 82) mit einer Messingplatte mit einem durch die Röhre hindurchgehenden Fadenschnur legt und dann dieses Rohr mit der Platte nach unten in ein mit Wasser gefülltes Glas taucht, so wird die Platte fest an das Glas gedrückt und

dringt keine Flüssigkeit in die Röhre, und die Platte fällt nicht herunter, wenn man den Faden losläßt; ein Beweis, daß im Innern der Flüssigkeit von unten nach oben gerichteter Druck vorhanden ist. Man kann diesen Druck durch einen gleichen in entgegengesetzter Richtung angelegten Druck messen, indem man in die Röhre so lange Wasser schüttet, bis die Platte hinabfällt. Das geschieht, wenn die Flüssigkeit in der Röhre fast die Höhe hat, welche die Flüssigkeit im Gefäße hat, um so genau, wie die Platte ist.

Es folgt weiter, daß auch ein Flächenelement der Seitenwand eines Gefäßes, sei sie vertikal oder geneigt, einem



erfahren muß, der gleich dem Gewichte der Flüssigkeit im Flüssigkeitszylinder ist, der das Flächenelement über der Basis und den vertikalen Abstand des Elementes von der freien Oberfläche zur Höhe hat. Dieser Druck hält der durch die Festigkeit der Röhre bewirkte Gegendruck das Gleichgewicht. Wenn solcher Seitendruck vorhanden ist, kann man ihn durch den Versuch nachweisen, indem man einen Seitendruck den Gegendruck durch eine Bohrung der Wand fortnimmt. Dann tritt nur eine dem innern Drucke folgende Bewegung der Flüssigkeit ein, sondern, wenn das Gefäß

in Fig. 83 beweglich aufgestellt ist, tritt eine dem noch übrigbleibenden Druck folgende Bewegung ein. Man stellt auf einen hinlänglich hohen Schwimmer von Kork ein mit Wasser gefülltes Gefäß, das an einer seiner Seitenwand eine verschließbare Öffnung hat. Ist die Öffnung geschlossen, so drückt das Wasser gegen  $A$  ebenso stark wie gegen

man aber die Ausflußöffnung bei  $A$  geöffnet, so kann das Wasser an der Stelle dem Druck folgen und ausfließen; an der gegenüberliegenden Stelle bei  $A'$  dauert aber der Druck fort, und diesem Drucke folgt sich der Schwimmer mit dem Gefäße in der Richtung  $AA'$ .

Die sogenannten Reaktionsräder beruhen auf dieser Wirkung des Wassers; sie bestehen (Fig. 84) aus einer weitem mit Wasser gefüllten Röhre  $A$ , welche um eine mit ihrer Achse zusammenfallende vertikale Achse sich drehen kann. An dem untern Ende befinden sich zwei oder mehrere horizontale Ausflußröhren, welche in demselben Sinne gerichtet sind.

Beim Ausfließen des Wassers aus den Öffnungen dieser Röhren treibt der gegen die den Ausflüssen gegenüberliegenden Wände wirkende Druck das Rad herum.

Es ist nach Besprechung der einfachen Fälle nicht schwierig, den Druck zu bestimmen, welcher auf irgend ein ebenes Stück, sei es im Innern, sei es an der Wand einer Flüssigkeit, auszuüben wird; es ist das nur eine Aufgabe der Rechnung. Haben wir, um ein einfaches Beispiel zu nehmen, eine ebene Wandfläche von bestimmtem Querschnitt, die wir uns vorstellen von der Höhe  $h$  und der Breite  $b$  denken wollen, so erhalten wir den Druck, den die ganze Wandfläche erfährt, in folgender Weise. Denken wir uns in der Tiefe  $x$  unter der Oberfläche einer Flüssigkeit einen horizontalen Streifen der Wandfläche, dessen Höhe  $dx$  sehr kleine ist, daß wir ihn als ganz in der Tiefe  $x$  durch die seit gelegten Niveaulinie liegend ansehen können, so ist der Druck, welcher auf diesen Streifen wirkt, gleich dem Produkte des auf die Fläche der Niveaulinie wirkenden Druckes und des Flächeninhaltes des Streifens. Ersterer ist, wenn wir annehmen, daß auf der Oberfläche der Flüssigkeit kein Druck lastet, gleich  $s \cdot x$ , wenn  $s$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit ist; letzterer ist  $b \cdot dx$ .

Der auf den Flächenstreifen wirkende Druck ist somit

$$s b x dx$$

Der auf die ganze Fläche wirkende Druck ist die Summe der auf allen Streifen wirkenden, welche die ganze Fläche zusammensetzen. Halten wir alle diese einzelnen Drucke, wenn wir  $x$  nach und nach vergrößern lassen, von  $x = 0$  bis  $x = h$ , so daß der ganze Druck erhalten wird

$$P = \int_0^h s b x dx = \frac{1}{2} s b h^2 = \frac{1}{2} h f s,$$

Wir mit  $f$  die Größe der Fläche  $f = b h$  bezeichnen. Der Druck ist also gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt

Fig. 84





gleich der Fläche  $f$  ist, und deren Höhe gleich ist der halben Höl Flüssigkeit.

Zu ganz demselben Satze gelangt man, wenn man eine Fläche betrachtet, welche gegen die Vertikale geneigt ist; es ist immer der gleich einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist der Wand und deren Höhe gleich ist der halben vertikalen Entfernung des Randes der Wandfläche von dem Niveau der Flüssigkeit.

Ebenso wie den resultierenden normal gegen die Wandfläche gerichteten Druck können wir auch leicht den Angriffspunkt dieser Resultierenden rechnen. Die auf die einzelnen Flächenelemente wirkenden Drücke sämtlich parallel, wir haben also nur den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte aufzusuchen. Zunächst ist klar, daß der Mittelpunkt der Resultierenden in der Halbierungslinie der rechteckigen Fläche liegt, welche wir erhalten, wenn wir die Fläche durch einen vertikalen Schnitt in zwei gleiche Teile teilen. Es liege der Angriffspunkt in dieser Linie im Abstand  $X$  von der oberen Grenzfläche der Flüssigkeit; bringen wir dann dort eine der Resultierenden gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft an, so ist die Fläche dieselbe als frei beweglich gedacht, im Gleichgewicht, sie nimmt keine fortschreitende noch um irgend eine Achse eine drehende Bewegung an. Denken wir uns deshalb etwa durch die obere Grenze der Flüssigkeit in der Fläche liegende horizontale Drehungsachse gelegt, so muß in Bezug auf diese die Summe der Drehungsmomente gleich Null sein. Die Resultierende gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft liefert das Drehungsmoment

$$-PX,$$

worin das negative Vorzeichen bedeutet, daß das von dieser Kraft herrührende Moment die Fläche entgegengesetzt dreht als die vorhandenen Kräfte.

Der in der Tiefe  $x$  auf ein Flächenelement von der Höhe  $dx$  wirkende Druck ist

$$sbx dx;$$

das von diesem herrührende Drehungsmoment ist somit

$$xsbx dx = sbx^2 dx.$$

Die Summe aller Drehungsmomente erhalten wir, wenn wir in den Ausdruck nach und nach für  $x$  alle Werte von 0 bis  $h$  einsetzen und alle die für die einzelnen Elemente erhaltenen Werte summieren, so ist die Summe

$$\int_0^h sbx^2 dx = \frac{1}{3} sbh^3.$$

Somit wird die Gleichung für  $X$

$$PX = \frac{1}{3} sbh^3$$

oder, wenn wir nach  $X$  auflösen und gleichzeitig für  $P$  seinen Wert einsetzen,

$$X = \frac{\frac{1}{3} sbh^3}{\frac{1}{2} sbh} = \frac{2}{3} h.$$



riffpunkt liegt also um  $\frac{1}{3}$  der Höhe der Flüssigkeit unter Niveau derselben.

her Weise kann man für alle Flächen, ebene oder gekrümmte, den Druck und dessen Angriffspunkt berechnen, wenn auch es zuweilen nicht so einfach sind.

### § 66.

nisierende Röhren. Unsere Ausführungen über das Gleich-  
flüssigkeiten waren durchaus unabhängig von der Gestalt der  
men die Flüssigkeit enthalten ist.

er auch Gültigkeit, wenn wir die-  
Gefäße verteilen und diese Gefäße

Röhre miteinander verbinden, daß  
it in beiden gleichsam nur eine

Man nennt solche Gefäße, weil sie  
renform angewandt werden, kom-  
Röhren. Wenn demnach in beiden

CD (Fig. 85) dieselbe Flüssigkeit  
so muß, da die Gefäße kommu-

flüssigkeiten also eine Masse bilden, die Oberfläche derselben  
r in beiden Röhren genau von gleicher Höhe sein, wenn nicht

oben etwa noch ein besonderer äußerer Druck ausgeübt wird.

edoch die eine Röhre, z. B. AB, eine andere Flüssigkeit von  
t  $d'$ , während die Flüssigkeit in der Röhre CD die Dichtig-

müssen die Oberflächen verschiedene Höhen haben. Sei z. B.  
vi. zuerst Quecksilber gegossen und dann in die Röhre CDE

uß das Wasser höher stehen als das Quecksilber und zwar  
r als es spezifisch leichter ist wie letzteres.

ur uns eine Scheidewand in mn und in derselben ein Element,  
ir mit  $o$  bezeichnen wollen. Von

elbe einen Druck, der gleich ist  
einer Quecksilbersäule von der

ler Höhe  $H'$ , die gleich ist dem  
Abstande der durch  $o$  gelegten

ie von der durch  $N$  gelegten  
leich  $o \cdot H' d'$ , wenn wir mit  $d'$

des Quecksilbers bezeichnen. Von  
te her erhält das Flächenelement  $o$

zunächst von einer Quecksilber-  
Höhe  $h$ , welche vom Niveau des

$o$  bis CD reicht, und von einer Wassersäule von eben-  
s und der Höhe CE. Nennen wir nun die Dichtigkeit des

$d$  bezeichnen die Höhe CE mit  $H$ , so ist der Druck, den  
iek von dieser Seite her erfährt, gleich  $ohd' + oHd$ . Im

leichgewichtes müssen diese Drucke gleich sein, oder es muß

$$oH'd' = ohd' + oHd,$$

$$(H' - h) d' = Hd;$$

Fig. 85.



Fig. 86.



nennen wir nun die Differenz

$$H' - h = NB = H'',$$

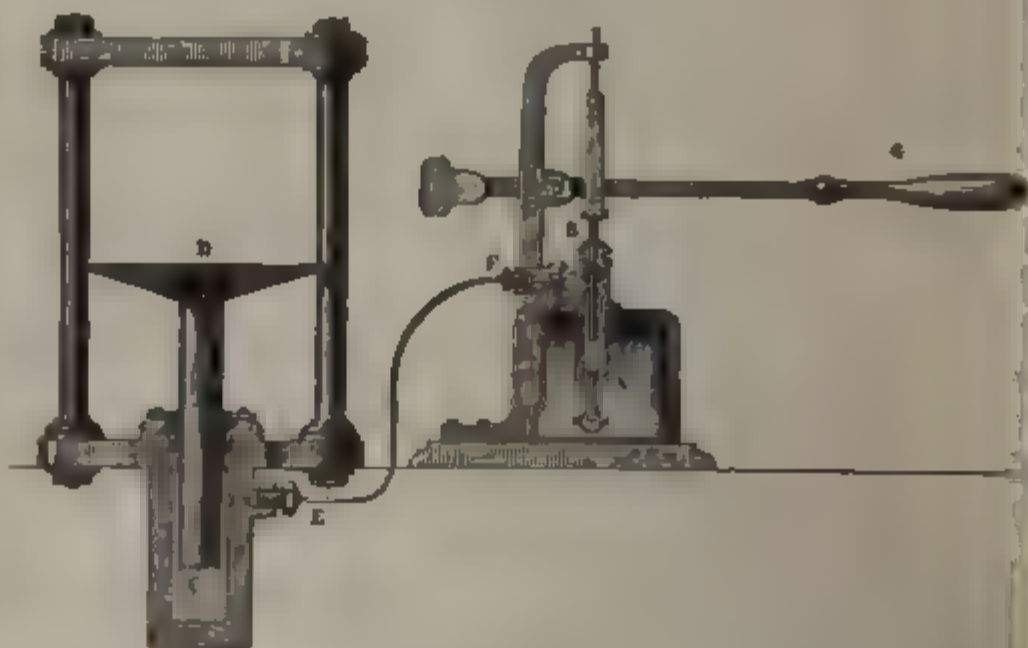
so muß

$$\frac{H}{H''} = \frac{d'}{d},$$

oder die beiden Höhen  $H''$  und  $H$  der Flüssigkeiten über ihre Fläche müssen sich verhalten umgekehrt wie die Dichtigkeiten der Flüssigkeiten.

In Fig. 85 hält, wie wir sehen, die kleine Wassermasse in  $CD$  der großen Wassermenge in  $AB$  das Gleichgewicht. Würde Wassermenge  $AB$  fortgenommen und anstatt deren ein Kolben die dann entstehende Flüssigkeitsoberfläche gelegt, so müßte der Wassersäule  $AB$  gleiches Gewicht haben, um den in der nach oben gerichteten Druck zu äquilibrieren. Das Gewicht die

Fig. 87



zu dem Gewichte der Flüssigkeit in  $CD$  verhält sich wie die Querschnitte der Röhren, da sich so das Gewicht der Flüssigkeitssäule  $AB$  zu ihr das Gleichgewicht haltenden Flüssigkeitssäule  $CD$  verhält. Wenn nun auf die Flüssigkeit in der engen Röhre einen Druck  $p$  ausüben wir, wenn der Kolben in der weiten Röhre diesem Druck das Gleichgewicht halten soll, diesen mit einem Gewichte  $P$  belasten, ebensovielmal größer ist wie  $p$ , als der Querschnitt von  $AB$  als der von  $CD$ .

In Brahmas hydraulischer Presse (Fig. 87) ist dieser Umstand benutzt, um mit kleinen Kräften große mechanische Effekte zu erzielen. Dieselbe besteht im wesentlichen aus einer kleinen Druckpumpe, durch welche man Wasser durch die Röhre  $EF$  in die weite, mit  $AB$  kommunizierende Röhre  $C$  pumpt. In diese paßt der Kolben  $CD$ . Das in die Röhre  $C$  gepumpte Wasser hebt oder drückt die zu komprimierenden Gegenstände gegen einen festen Boden. Man kann mit einem Drucke von  $1^{\text{kg}}$  einem Gewichte von  $1000^{\text{kg}}$ , wenn der Querschnitt der Röhre  $C$  zu dem der Pumpe

im Verhältnis von 1000 : 1 steht, das Gleichgewicht halten. Dadurch wird zugleich unser Satz bewiesen, den wir anfänglich ableiteten, daß bei einem äußern Drucke auf die Flüssigkeit eines Gefüßes der Druck auf irgend ein Flächenstück der Wandfläche der Größe desselben proportional sei.

Bemerken wollen wir hier, daß bei diesen äußerst großen Wirkungen mit kleinen Kräften doch auch nur eine Übertragung der Arbeit, kein Gewinn an solcher eintritt; denn auch hier gilt der Satz wieder, was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren. Denn soll der Kolben *D* um ein Zentimeter gehoben werden, so ist eine tausendmal größere Bewegung des Kolbens der Pumpe nötig, da aus dem engen Pumpenrohr die Wassermenge in das weite Rohr geschafft werden muß. Auch hier besteht die

Fig. 88.



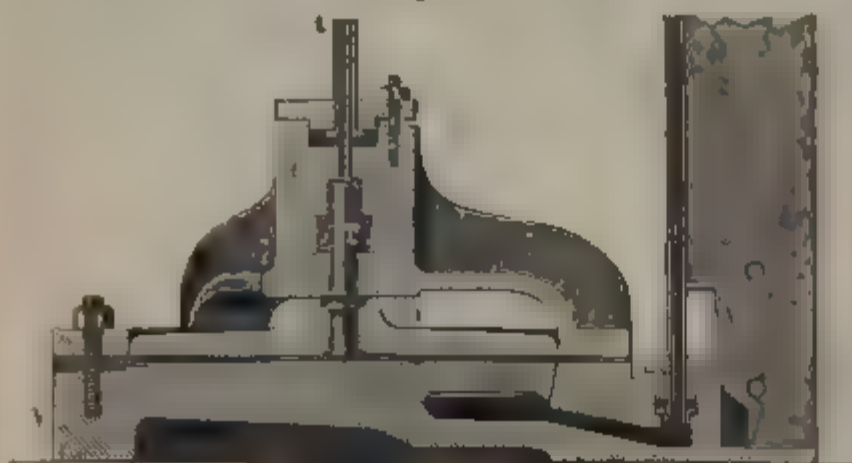
Gleichung, daß das Produkt der Kraft in den Weg, durch welchen sie gewirkt hat, gleich ist dem Produkte der Last in den Weg, um welchen sie gehoben ist.

Das Prinzip der hydraulischen Presse ist in sehr sinnreicher Weise von Gally-Cazalat angewandt, um große Drucke, etwa in der hydraulischen Presse direkt zu messen; das Manometer (es wird gewöhnlich nach seinem Verfertiger als Desgoffesches bezeichnet)<sup>1)</sup> ist gewissermaßen die Umkehr der hydraulischen Presse. Dasselbe besteht, wie Fig. 88 in perspektivischer Ansicht, Fig. 89 im Durchschnitt des untern Teiles zeigt, aus einem starken eisernen Gefüße *V* von kreisförmigem Querschnitt,

1 Man sehe *Amagat*, Ann. de chim et de phys 29. (6) 1893

in welchem ein Metallstempel  $D$  sich auf und nieder bewegen kann. Das Gefäß enthält Quecksilber und auf demselben eine dünne Wasserschicht. Zwischen der Wasserschicht und dem Stempel ist eine feine Kautschukmembran ausgespannt, welche durch den aufgeschraubten Kreisring festgehalten wird, der mit Hilfe der Schrauben so fest angezogen ist, daß die Membran das Gefäß  $V$  nach oben hin vollkommen wasserdicht absperrt. Auf der Mitte des Stempels  $D$  steht ein Stahlzylinder  $T$ , welcher durch eine Stopfbüchse in den Hohlraum des Messingzylinders  $C$  eintritt, der mit dem die Kautschukmembran befestigenden, auf das Gefäß aufgeschraubten

Fig. 89



Ringe aus einem Stück gearbeitet ist. Der Hohlraum des Zylinders  $C$  steht andererseits durch die Röhre  $t$ , welche, wie Fig. 89 zeigt, durch die den Hohlraum des Zylinders  $C$  oben abschließende Platte hindurchgeführt ist, mit dem Raume in Verbindung, in welchem der Druck ausgeübt wird, also etwa mit dem Hohlraum  $C$  der hydraulischen Presse Fig. 87.

man gibt zu dem Ende, wenn man den Druck in der hydraulischen Presse messen will, der Wand derselben eine zweite Durchbohrung, an der man das Ende der Röhre  $t$  gerade so ansetzt, wie bei  $E$  die zur Pumpe führende Röhre angesetzt ist. Das Gefäß  $V$  kommuniziert mit seinem untern Teile mit der seitlich angebrachten Glasröhre  $AB$ , welche in einer Teilung an dem an dem Gefäße  $V$  befestigten vertikalen Ständer fest angebracht ist.

Die Methode der Messung des Druckes ist hiernach leicht zu übersehen; denken wir uns, die Röhre  $t$  sei mit der hydraulischen Presse verbunden, und man beginne durch Handhaben der Pumpe die Presse in Tätigkeit zu versetzen. Das in  $C$  (Fig. 87) eingepumpte Wasser fließt dann gleichzeitig durch  $t$  in den Hohlraum des Zylinders  $C$  (Fig. 88 und 89) füllt denselben und die Röhre  $t$ , so daß die Presse und die Röhre von einer zusammenhängenden Wassermasse gefüllt sind. Die obere Basis des Stahlzylinders  $T$  erhält deshalb einen genau ebenso großen, vertikal abwärts gerichteten Druck, wie ein ebenso großes Stück in der Wandfläche des Zylinders der Pumpe. Ist der Druck auf die Flächeneinheit in der Presse gleich  $p$  und die obere Basis des Zylinders  $T$  gleich  $s$ , so erhält der Stahlzylinder den vertikal abwärts gehenden Druck  $p \cdot s$ . Dieser Druck wirkt durch die untere Fläche des Zylinders auf die im Gefäße  $V$  enthaltene Flüssigkeit; bezeichnen wir den Flächeninhalt der untern auf die Flüssigkeit druckenden Fläche des Stempels  $D$  mit  $S$ , so ergibt sich für den in die Flächeneinheit wirkenden Druck  $P$  aus der Gleichung

$$p \cdot s = P \cdot S,$$

$$P = \frac{s}{S} \cdot p.$$

Ist also der Durchmesser des Stempels  $D$  etwa 10mal so groß als der des Zylinders  $T$ , so würde  $P = 0,01 p$  sein. Durch diesen Druck wird der Stempel  $D$  hinabgedrückt und dadurch in der Röhre  $AB$  das Quecksilber so hoch gehoben, daß der Druck der gehobenen Quecksilbersäule auf die Flächeneinheit gleich  $P$  wird. Ist also z. B. der Druck  $p$  100 Atmosphären, also gleich  $100 \cdot 1,033^{\text{kg}}$  auf das Quadratcentimeter, so wird das Quecksilber in  $AB$  um  $0,76^{\text{m}}$  steigen, da der Druck einer Quecksilbersäule von dieser Höhe auf das Quadratcentimeter  $1,033^{\text{kg}}$  beträgt. Beobachtet man also in  $AB$  eine Erhöhung des Quecksilbers um  $h$  Atmosphären, jede gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von der Höhe  $H$ , so ist in der Presse der Druck in Atmosphären

$$h = \frac{S}{s} \cdot H.$$

Durch das Herabdrücken des Stempels  $D$  wird die Kautschukmembran demselben gespannt, und auf diese mit stärkerer Ausdehnung wachsende Spannung wird ein Teil des Druckes  $p$  verwandt, so daß strenge Berechnungen an dem soeben berechneten Druck eine kleine Korrektur angesetzt werden muß. Indes kann man den Querschnitt der Röhre  $AB$  über dem des Gefäßes  $V$  so klein wählen, daß für eine beträchtliche Erhöhung des Quecksilbers in  $AB$  der Stempel  $D$  nur um eine verschwindend kleine Größe hinabsinkt. Das von Cailletet bei seinen § 64 erwähnten Manometern benutzte Manometer von Gally Cazalat hatte ein derartiges Verhältniß der Querschnitte, daß, wenn in  $AB$  das Quecksilber um  $4,3^{\text{m}}$  stieg, der Stempel  $D$  nur um  $\frac{1}{2}^{\text{mm}}$  sank, so daß man den Einfluß der Ausdehnung des Kautschuks ganz vernachlässigen konnte.

## § 67.

**Gleichgewicht einer Flüssigkeit, auf welche beliebige Kräfte wirken.**  
 1. Wir haben bisher bei der Untersuchung des Verhaltens der Flüssigkeiten vorausgesetzt, daß nur die Schwerkraft auf dieselben einwirke; die im vorhergehenden betrachteten Resultate lassen sich aber auch sofort anwenden, um die Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, wenn noch andere Kräfte auf die Flüssigkeiten einwirken, wenn z. B. die Flüssigkeit sich in einem rotierenden Zylinder befindet, dessen Rotationsachse die Achse des Zylinders ist. Wir denken uns, um die an den verschiedenen Stellen der Flüssigkeit wirkenden Drucke zu berechnen, gerade wie § 63 einen kleinen Zylinder mit schiefen Endflächen  $s$  und  $s'$  von so kleinem Querschnitte  $\sigma$  und einer kleinen Länge  $l$ , daß wir überall in diesem Zylinder die auf die Flächeneinheit wirkenden Kräfte als gleich und gleich gerichtet ansehen können. Nennen wir die auf die Volumeinheit wirkenden Kräfte  $k$ , so können wir diese jetzt ganz einfach an die Stelle des Gewichtes  $d$  der Volumeinheit setzen, welches wir § 63 als allein wirksam voraussetzen. Ganz dieselben Resultate, welche wir § 63 anstellten, liefern uns dann für den Druck auf der Fläche  $s'$  des Zylinders

$$\frac{P'}{s'} = \frac{P}{s} + k \cdot l \cdot \cos \beta,$$

wenn  $\beta$  den Winkel bedeutet, welchen die Achse unseres Zylinders mit der Richtung der resultierenden Kraft bildet, und  $p$  den Druck auf die schiefe Endfläche  $s$  bedeutet.

Die Bedingung der Niveauflächen ist auch jetzt wieder, daß in ihnen überall der Druck für die Flächeneinheit derselbe sein muß; somit muß, wenn die beiden Endflächen des kleinen Zylinders ein und derselben Niveaufläche angehören sollen.

$$\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s}$$

sein, eine Bedingung, welche erfüllt wird, wenn

$$k \cdot l \cdot \cos \beta = 0.$$

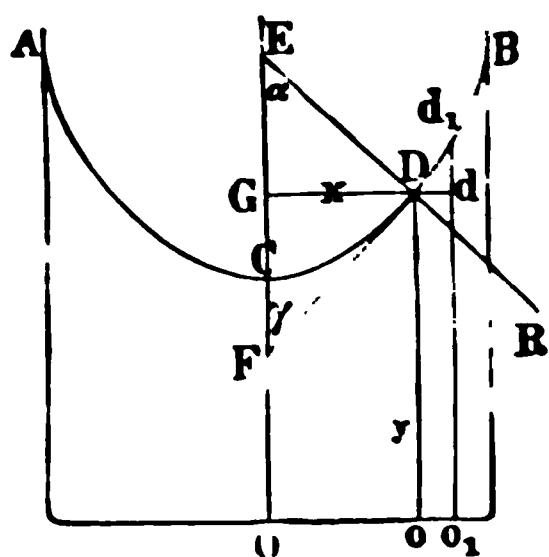
Letztere Bedingung wird aber, da  $k$  und  $l$  von 0 verschieden sind, nur erfüllt, wenn

$$\cos \beta = 0, \quad \beta = 90^\circ.$$

Ist also die Achse unseres kleinen Zylinders senkrecht zur Richtung der resultierenden Kräfte, so liegt derselbe ganz in einer Niveaufläche, oder die Niveauflächen sind solche, welche an allen Stellen normal zu den resultierenden Kräften sind.

Können wir die Richtung der resultierenden Kräfte bestimmen, so können wir hieraus die Gleichung der Niveauflächen ableiten; wir wollen

Fig. 90.



diese Ableitung für den vorhin schon erwähnten Fall einer Flüssigkeit in einem rotierenden Zylinder durchführen. Die Kräfte, welche dort auf die Flüssigkeit einwirken, sind die Schwere und die Zentrifugalkraft; da letztere nur abhängig ist von dem Abstand der betrachteten Flüssigkeitsmasse von der Rotationsachse und in gleichen Abständen von der Achse dieselbe ist, so folgt, daß die Niveauflächen Rotationsflächen sind, deren Achse die Rotationsachse des Zylinders ist. Wir erhalten demnach die Flächen schon vollständig bestimmt, wenn wir einen Schnitt derselben, der durch die Rotationsachse gelegt ist, untersuchen.

Sei  $ACB$  Fig. 90 ein solcher Schnitt und zwar, da wir wissen, daß die Oberfläche eine Niveaufläche ist, durch die Oberfläche der Flüssigkeit, und  $OC$  die Rotationsachse. Sei ferner  $DR$  die Richtung der aus der Wirkung der Schwere und der Zentrifugalkraft im Punkte  $D$  resultierenden Kraft, welche mit der Vertikalen den Winkel  $\alpha$  bilde. An dem Punkte  $D$  des Schnittes der Niveaufläche legen wir dann eine Tangente  $DF$ , welche bekanntlich in dem Punkte  $D$  die Richtung der Kurve angibt; dieselbe schneide die Vertikale unter dem Winkel  $\gamma$ . Da  $FD$  senkrecht zu  $DR$  sein muß, so folgt weiter, daß die Winkel  $\gamma$  und  $\alpha$  sich zu einem Rechteck ergänzen müssen, oder daß

$$\tan \alpha = \cot \gamma$$

sein muß.

Wir beziehen unsere Kurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Achse der  $X$  horizontal, und dessen Achse der  $Y$  vertikal sei



Rotationsachse zusammenfallen. Der Anfangspunkt der Koordinaten ist der Punkt  $O$ , in welchem die Rotationsachse den Boden des Zylinders berührt.

Die Koordinaten des Punktes  $D$  seien  $x$  und  $y$ . Da die Tangente  $DF$  mit der Kurve auf ein unendlich kleines Stück zusammenhängt, verbindet sie zwei unendlich nahe Punkte  $D$  und  $d_1$  der Kurve, letzterer die Koordinaten  $x + dx$  und  $y + dy$  hat. Ziehen wir durch  $d_1$  die dem Punkte  $d_1$  entsprechende Ordinate  $d_1o_1$  und verlängern die Ordinate  $GD$ , bis sie erstere in  $d$  schneidet, so erhalten wir das rechtwinklige Dreieck  $Ddd_1$ , dessen Winkel  $Dd_1d = \gamma$  ist. Demnach ist

$$\tan \alpha = \cot \gamma = \frac{dd_1}{Dd} = \frac{dy}{dx}.$$

Um den Winkel  $\alpha$  zu erhalten, sei  $m$  die Masse der im Punkte  $D$  befindlichen Flüssigkeit. Auf diese Masse wirkt dann gleichzeitig die Gewichtskraft, welche, wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit mit  $v$  bezeichnen, gleich  $\frac{v^2 m}{x}$  ist. Bezeichnen wir die Rotationsdauer des Zylinders mit  $t$ , so ist

$$v = \frac{2\pi x}{t},$$

die Zentrifugalkraft

$$\frac{4\pi^2}{t^2} x \cdot m.$$

Die Gewichtskraft wirkt vertikal abwärts, die Zentrifugalkraft horizontal von der Rotationsachse fort, so erhalten wir die Tangente des Winkels, welche die Resultierende mit der Vertikalen bildet, wenn wir die Zentrifugalkraft, die horizontale Komponente der Resultierenden, durch die Gewichtskraft, also das Produkt aus dem Gewichte  $m$  der Flüssigkeit und der Erdbeschleunigung  $g$  dividieren. Damit wird

$$\tan \alpha = \frac{4\pi^2}{gt^2} \cdot x.$$

Bestimmung der Niveaufläche erhalten wir somit die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\pi^2}{gt^2} \cdot x.$$

Die Gleichung liefert uns also direkt den Quotienten aus den beiden Differenzialen der Koordinaten, wenn wir von einem Punkte der Kurve zum nächsten übergehen, oder den Zuwachs

$$dy = \frac{4\pi^2}{gt^2} \cdot x dx,$$

die Ordinate  $y$  erfährt, wenn die Abszisse  $x$  um  $dx$  zunimmt. In der mathematischen Einleitung dargelegten Bedeutung des Integrals und mit Beachtung von E 1 wird daraus

$$y = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2}{gt^2} \cdot x^2 + \text{const.}$$

Der Wert der Konstanten ergibt sich, wenn wir  $x$  gleich Null setzen, d. h. den Wert von  $y$ , in welchem die Kurve die Rotationsachse



schneidet, es ist das der tiefste Punkt der Flüssigkeitsoberfläche. wir die Höhe der Flüssigkeit dort  $h$ , so erhalten wir

$$y = \frac{2\pi^2}{gt^2} \cdot x^2 + h.$$

Diese Gleichung ist die bekannte Gleichung einer Parabel. Die Achse der Rotationsachse des Zylinders ist. Es folgt somit, die Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit ein Rotationsparaboloid ist, dessen Achse die Rotationsachse des Zylinders ist. Die Flüssigkeit ist am höchsten dort, wo  $x$  seinen größten Wert hat, also an der Wand des Gefäßes; die Höhe  $H$  ist dort, wenn wir mit  $r$  den Radius des Gefäßes bezeichnen,

$$H = \frac{2\pi^2}{gt^2} \cdot r^2 + h,$$

$$H - h = \frac{2\pi^2}{gt^2} \cdot r^2.$$

Die Erhebung der Flüssigkeit an der Wand über dem tiefsten Punkt ist also um so größer, je kleiner die Umlaufzeit  $t$  ist, je größer die Rotationsgeschwindigkeit ist, eine Folgerung, die man leicht an einer Zentrifugalmaschine bestätigen kann.

Da die Niveauflächen einander parallele Flächen sind, so folgen auch im Innern der Flüssigkeiten dieselben Paraboloiden, welche die Oberfläche parallel sind; der auf den verschiedenen Niveauflächen herrschende Druck nimmt zu, je tiefer dieselben unter der Oberfläche liegen. Auf jeder Niveaufläche der Druck an allen Stellen derselbe ist, so haben wir um ihn zu bestimmen, nur den Druck aufzusuchen, welchen dieselbe Niveaufläche erhält, wo die Niveauflächen die Rotationsachse schneiden; man erhält dann, daß der Druck dort gleich ist dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, deren Höhe gleich ist dem Abstände der betrachteten Niveaufläche von der Oberfläche der Flüssigkeit.

## § 68.

**Archimedisches Prinzip.** Wenn ein Körper in eine Flüssigkeit taucht, so wird die Oberfläche desselben von der Flüssigkeit umher einen Druck erfahren, welcher an allen Punkten senkrecht auf jedes Element der Oberfläche gerichtet ist, und dessen Größe gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist dem der Oberfläche des Körpers, und deren Höhe gleich ist der Höhe der Flüssigkeit über diesem Elemente. Wenn wir nun diese auf alle Punkte der Körperoberfläche senkrecht wirkenden Druckkräfte in zwei aufeinander senkrechte Komponenten zerlegen, eine horizontale und eine vertikale, ist klar, daß erstere als von Flüssigkeitsschichten herrührend, welche tief unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, an den entgegengesetzten Seiten des Körpers paarweise gleich und entgegengesetzt sind; sie drücken daher den Körper nur mehr oder weniger zusammen. Anders mit den vertikalen Komponenten, auch diese werden zwar auf den den Körper begrenzenden Elementen der Oberfläche vertikal nach außen

den untern nach oben, also gerade entgegengesetzt gerichtet sein; aber sind sich nicht gleich, weil die obern Elemente den Druck einer weniger Flüssigkeitssäule erfahren als die unteren. Mit der Differenz dieser Drücke wird deshalb der Körper in der Flüssigkeit nach oben getrieben.

Um die Größe dieser Differenz zu erhalten, denken wir uns den Körper in eine Schar sehr naher vertikaler Ebenen in eine Reihe sehr schmaler Ebenen zerlegt, und diese nochmals durch eine Schar paralleler, ebenvertikaler, aber zu den erstern senkrechter Ebenen zerschnitten. Da-

her haben wir den ganzen Körper in ein Aggregat elementarer Prismen zerlegt, deren Endflächen ebenfalls sehr kleine Flächenstücke sind, die wir als einander gleich betrachten können. Der Druck nun, den die

Endfläche eines Prismas vertikal abwärts erfährt, ist gleich dem Druck eines Flüssigkeitsprismas, dessen Basis gleich ist einem Flächenstück, und dessen Höhe der senkrechte Abstand desselben von der Oberfläche der Flüssigkeit ist. Auf die untere Endfläche wirkt ein nach oben gerichteter Druck, dessen Größe gleich ist dem Gewichte einer Flüssigkeitsmenge mit einer der Größe des Elementes gleichen Basis, und mit einer gleich dem senkrechten Abstände dieses Elementes von der Oberfläche.

Die Differenz beider Drucke ist also das Gewicht eines Flüssigkeitsprismas mit einer jenen beiden gleichen Grundfläche und einer der Differenz beider Abstände gleichen Höhe oder, was dasselbe ist, das Gewicht jenem betrachteten Prisma an Größe gleichen Prismas. Es wird also jedes Prisma mit einem Drucke aufwärts getrieben, welcher dem Gewichte einer ihm an Größe gleichen Flüssigkeitsmenge gleich ist. Was von einem einzelnen Prisma gilt, gilt in gleicher Weise auch von allen zusammen; wir gelangen daher zu dem Resultate, daß jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper einen von unten nach oben gerichteten Druck, einen Auftrieb, erfährt, der dem Gewichte einer ihm an Volumen gleichen Flüssigkeitsmenge gleich ist.

Man spricht diesen Satz auch wohl so aus: Jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper verliert ein Gewicht, welches gleich ist dem Gewichte der Stelle gedrängten Flüssigkeit.

Es läßt sich dieser Satz noch auf eine andere Weise ableiten. Denken wir uns im Innern der Flüssigkeit eine irgendwie begrenzte Menge von der übrigen Flüssigkeit isoliert, so wird diese von der umgebenden Flüssigkeit in dem Zustande des Gleichgewichtes vollkommen getragen, ihrer Schwere durch den Druck im Innern der Flüssigkeit das Gleichgewicht ge-

leistet. Da nun aber dieser Druck unabhängig ist von der Natur und der Größe des eingetauchten Körpers, so ist klar, daß, wenn wir anstatt der Flüssigkeitsmenge einen andern Körper eintauchen, der der verdrängten Flüssigkeitsmenge gleiche Teil seines Gewichtes von der Flüssigkeit getragen wird, oder, was dasselbe ist, daß er einen so großen Teil seines Gewichtes verliert.

Um diesen Satz, welcher nach seinem Entdecker Archimedes das archimedische Prinzip genannt wird, experimentell zu beweisen, hängt man unter eine mit einem Haken versehene Wagschale (Fig. 91) einen

Kupferzylinder C und unter diesen einen massiven Kupferzylinder D, der genau in den Zylinder C hineinpaßt. Nachdem man nun mittels

auf die andere Wagschale gelegter Gewichte die Wage ins Gleichgewicht gebracht hat, läßt man den massiven Kupferzylinder in ein mit gefülltes Gefäß hinab, indem man mittels des Zahngetriebes im der Wage den Wagebalken herabläßt. Sowie der Kupferzylinder

Fig 91



tauchen beginnt, ist das vorgestellte Gleichgewicht gestört; den Gewichten belastete Schale herab. Es folgt daraus, daß getauchte Körper an Gewicht, daß er einen Auftrieb erfährt, derselbe nun genau gleich den Gewichte der verdrängten Flüssigkeit folgt daraus, daß wir den Kupferzylinder ganz mit Wasser füllen müssen, um das Gleichgewicht herzustellen, wenn der Kupferzylinder ganz in das Wasser getaucht ist.

Wenn wir umgekehrt, Fig. 92, das mit Wasser gefüllte Gefäß auf die Wagschale stellen, Gewichte balanzieren und nun an einem festen Gestell auf dem Kupferzylinder in das Gefäß senken, so wird das Gleichgewicht gestört; die mit dem Gefäß belastete Wagschale sinkt herab; sie

schwerer geworden und zwar, wie sich leicht nachweisen läßt, genau so viel schwerer, als der eingetauchte Körper leichter wird. Nehmen

Fig 92



nämlich Wasser aus dem Gefäße herausfüllen es in den hohlen Kupferzylinder ein, so ist das Gleichgewicht wieder hergestellt, sobald wir den Zylinder geschöpft haben.

Diese Tatsache erklärt sich aus dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion, denn es ist, daß, wenn der eingetauchte Körper von unten nach oben gerichtet erfährt, das Wasser entgegen einen großen Druck von oben nach unten erfahren muß. Man kann diesen aber auch auf folgende Art erklären, die Flüssigkeit trägt ein eingetauchten Körper genau so weit, als ein gleich großes Volumen Flüssigkeit

in ihr Inneres gebracht wäre. Das Eintauchen des Körpers bewirkt dasselbe, als wenn wir die Flüssigkeit um eine dem Körper an gleich große Menge vermehrt hätten; es muß sich daher das Gewicht der Flüssigkeit um das diesem Volumen gleiche Gewicht vergrößern.

Da nun ein eingetauchter Körper zwei Gruppen von Parallelkräften  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{a}$  an seinem Schwerpunkte angreifenden Resultierenden unterworfen ist, welche sich gerade entgegengesetzt sind, so folgt, daß er, wenn er frei ist, entweder der einen oder der andern Kraft folgen, aufsteigen oder niedersteigen kann. Sei  $v$  das Volumen des Körpers,  $d$  seine Dichtigkeit,  $d'$  die der Flüssigkeit, so ist  $vd$  das Gewicht des Körpers,  $vd'$  das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, also die Kraft, welche ihn in die Höhe treibt;  $d - d'$  die Resultante aus beiden. Ist nun  $d > d'$ , so fällt der Körper;  $d = d'$ , so fällt er nicht und steigt nicht, er ist im Gleichgewicht; ist er endlich  $d < d'$ , so folgt der Körper dem Auftrieb, er steigt in der Flüssigkeit auf.

### § 69.

**Schwimmende Körper.** Wenn der eingetauchte Körper mit der Flüssigkeit die gleiche Dichtigkeit besitzt, so ist er, wie wir sahen, in der Flüssigkeit im Gleichgewicht. Man kann dieses leicht durch einen Versuch zeigen. Ein Ei ist dichter als Wasser, weniger dicht als eine gesättigte Kochsalzlösung; in ersterem sinkt es unter, in letztere taucht es zum Teil ein; in einer passenden Mischung beider ist es an allen Stellen im Gleichgewicht. Ähnliches zeigt ein Gemisch aus 1 Teil Zinnober und 25 Teilen weißem Wachs; in Wasser getaucht, ist es an allen Stellen im Gleichgewicht. Dasselbe zeigen Öltropfen in einem passenden Gemische von Wasser und Alkohol.

Ist die Dichtigkeit des eingetauchten Körpers kleiner als die der Flüssigkeit, so steigt er in derselben auf; ist er vollständig untergetaucht, so treibt ihn die Kraft  $v(d - d')$  in die Höhe, er steigt deshalb mit beschleunigter Geschwindigkeit, jedoch nur so lange, bis ein Teil des Körpers aus der Flüssigkeit hervorragt. Von dem Augenblick an vermindert sich das Volumen der aus der Stelle gedrängten Flüssigkeit und damit der Auftrieb. Ist das eingetauchte Volum nur mehr  $v'$ , so ist der Auftrieb  $v'd'$ .

Da nun das Gewicht des Körpers  $vd$  dasselbe bleibt, so wird in einem bestimmten Zeitpunkt  $vd = v'd'$ , Auftrieb und Schwere halten sich das Gleichgewicht. Wegen der bei der aufsteigenden Bewegung erhaltenen Geschwindigkeit wird jedoch der Körper über diese Lage emporsteigen, dann wieder, weil  $vd > v'd'$  wird, herabsinken und so erst nach einigen Oszillationen zur Ruhe kommen. Körper, welche leichter sind als die Flüssigkeit, welche sie eingetaucht sind, sind also im Gleichgewicht, wenn sie zum Teil und zwar so weit eingetaucht sind, daß die aus der Stelle gedrängte Flüssigkeit ihrem Gewichte gleich ist.

Die Körper können dann zwar keine fortschreitende, wohl aber noch eine drehende Bewegung machen. Soll auch diese nicht stattfinden, so müssen die beiden auf den Körper einwirkenden Kräfte sich auch gerade entgegengesetzt sein. Das Gewicht des Körpers greift an seinem Schwerpunkte an, der Auftrieb am Schwerpunkte des aus der Stelle gedrängten Wassers. Es müssen demnach diese beiden Punkte in einer Vertikalen liegen, wenn der Körper im Gleichgewicht sein soll. Eine schwimmende homogene Kugel ist demnach in jeder Lage im Gleichgewicht, ein Ellipsoid, wenn eine seiner Achsen vertikal ist, ein Parallelepipèd, wenn seine Kanten vertikal sind.

Unter diesen Bedingungen braucht aber das Gleichgewicht nicht stabiles zu sein; damit das der Fall ist, d. h. damit der Körper bei Veränderungen seiner Lage immer wieder in seine frühere Stellung kehre, dazu muß noch eine dritte Bedingung erfüllt sein. Es muß

Fig. 93



das Metazentrum des schwimmenden Körpers über dem Schwerpunkt liegen, indem dann die Kräfte immer, bei Schwanken denselben in seine frühere Lage zurückdrehen. Um die Lage dieses Punktes zu erkennen, wird in Fig. 93 der schwimmende Körper aus seiner Lage gebracht, die frühere Vertikale  $P'G'$  durch den Schwerpunkt  $G'$  und den Mittelpunkt des Auftriebs  $P$  geht, die Lage  $P'G'$  erhält.

Der Schwerpunkt des Körpers liegt dann in  $G'$ ; der Mittelpunkt des Auftriebs ist aber nicht mehr  $P$ , sondern  $P'$ , weil die Gestalt des eingetauchten Körpers sich geändert hat. Bei  $P'$  greift der Auftrieb unten nach oben gerichtet, bei  $G'$  die Schwere von oben nach unten. Beide Kräfte suchen also dem Körper eine Drehung zu geben, welche ihn von seiner früheren Lage entfernt; er kehrt also nicht dahin zurück, sondern war im labilen Gleichgewicht. Die Vertikallinie, die wir durch  $P$  schneidet die Linie  $P'G'$ , welche durch die beiden Schwerpunkte in der ersten Lage ging, in dem unterhalb  $G'$  liegenden Punkte  $M$ . Dies

Fig. 94



heißt das Metazentrum  $M$  gegen die Lage des Körpers in Fig. 94 und liegt nach der ersten Lage. So ist das Metazentrum  $M$  dem Schwerpunkte  $G$ , beide bringen an dem Körper eine Drehung hervor, welche ihn seiner früheren Lage nähert; der Körper ist im stabilen Gleichgewicht. In Fig. 94 liegt die Vertikale  $P'G'$  so leicht oberhalb  $G$ , das Metazentrum liegt weit über dem Schwerpunkt, je tiefer dieser liegt. Es ist daher für einen Körper, der im stabilen Gleichgewicht schwimmen soll, z. B. ein Schiff, am besten, wenn ihr Schwerpunkt möglichst tief liegt.

Linie  $G'P'$  um so leichter oberhalb  $G$ , das Metazentrum liegt um so weit über dem Schwerpunkt, je tiefer dieser liegt. Es ist daher für einen Körper, der im stabilen Gleichgewicht schwimmen soll, z. B. ein Schiff, am besten, wenn ihr Schwerpunkt möglichst tief liegt.

## § 70.

**Bestimmung des spezifischen Gewichtes fester Körper.** Wir sahen in § 68, daß, wenn die Dichtigkeit  $d$  des eingetauchten Körpers größer ist als die Dichtigkeit  $d'$  der Flüssigkeit, der Körper sinkt, daß er aber soviel an Gewicht verliert, als die Flüssigkeit



aus der Stelle drängt. Wir haben in § 25 das spezifische Gewicht des Körpers dahin definiert, daß es das Gewicht der Volumeinheit  $\bar{v}$  als Einheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser zugrunde rd. Nennen wir das Volumen eines Körpers  $V$ , sein spezifisches  $s$ , so ist sein Gewicht  $P = V \cdot s$ . Das Gewicht eines gleichen Wasser ist dann in der obigen Einheit ausgedrückt  $V$ , es ist

$$\frac{P}{\bar{V}} = \frac{V \cdot s}{V} = s.$$

Nennen wir demnach das Gewicht eines Körpers und das Gewicht gleichen Volumens Wassers, so ist der Quotient beider  $\frac{P}{V}$  das spezifische Gewicht des Körpers. Da ein in Wasser untergetauchter Körper viel an Gewicht verliert, als das Volumen Wasser wiegt, welches er Stelle drängt, so haben wir hier ein sehr einfaches Mittel, um das Gewicht eines dem gleichen Volumens Wasser zu bestimmen und sein spezifisches Gewicht zu erhalten. Das einfachste Verfahren, um das spezifische Gewicht fester Körper zu bestimmen, ist die Anwendung der hydrostatischen Wage, welche sich von der gewöhnlichen Wage nur darin unterscheidet, daß eine Wagschale nicht so tief herabhängt, sondern in der Mitte ihrer untern Fläche mit einem Haken versehen ist. Man hängt an denselben mittels eines sehr feinen Drahtes den zu untersuchenden Körper, bestimmt sein Gewicht in der Luft und läßt ihn dann in ein mit Wasser gefülltes Gefäß hinab und bestimmt sein Gewicht in demselben. Der Gewichtsverlust ist genau das Gewicht eines dem Körper gleichen Wasservolumens. Der Quotient beider ist das spezifische Gewicht des Körpers.

Man beachte hierbei jedoch einige Vorsichtsmaß-

nahmen. Zunächst haben wir schon bemerkt, daß der Draht möglichst fein sein muß, da sonst auch das von der Stelle gedrängte Wasser auf den Gewichtsverlust von merklichem Einflusse ist, wir also nicht das Gewicht einer dem Körper allein entsprechenden Wassermenge erhalten.

Es ist notwendig, daß man reines destillirtes Wasser anwende, welches die Temperatur  $4^{\circ} \text{C}$ . habe. Wir werden später sehen, daß Wasser bei dieser Temperatur seine größte Dichtigkeit besitzt, und das Gewicht der Volumeinheit Wasser bei dieser Temperatur die Gewichtseinheit ist. Hat das Wasser eine andere Temperatur, so bedarf es einer Korrektur, welche aus der gemessenen Ausdehnung des Wassers bestimmt werden kann. Einer ähnlichen Korrektur bedarf es auch für die Temperatur der Körper, da auch diese beim Erwärmen sich ausdehnen.

Man ist nun überein gekommen, das somit für verschiedene Temperaturen verschiedene spezifische Gewicht der Körper stets auf die

Fig. 96.



Temperatur des schmelzenden Eises, auf  $0^{\circ}$  zu reduzieren. In von der Ausdehnung durch die Wärme werden wir die Mittel lernen, diese Reduktionen vorzunehmen.

Eine zweite auf demselben Prinzip beruhende Methode zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes ist die Anwendung des Nicholson'schen Aräometers. Dasselbe besteht aus einem hohlen unten und oben kegelspitzen Zylinder von Messingblech *A* (Fig. 96). Von der Spitze des obern Kegels steigt als Verlängerung der Achse des Zylinders ein Stäbchen *B* auf, an dessen oberem Ende eine Schale *C* angebracht

Fig. 96



welche man, wie auf eine Wagschale, den zu untersuchenden Körper und Gewichte legen kann. Das Stäbchen ist durch einen Feilstrich eine feine Linie *B* angebracht.

Von der Spitze des untern Kegels hängt ein gabeltörniger Drahtes daran befestigt, an dem ein Gewicht *D* herab, das nach oben hin eine kleine Fläche hat, auf welche man den zu untersuchenden Körper legen kann. Da durch das Gewicht der Schwerpunkt des Apparates möglichst tief liegt, schwimmt derselbe aufrecht und zwar im stabilen Gleichgewicht. Das Gewicht des Apparates ist so gewählt, daß ein Teil desselben, wenn er in Wasser getaucht ist, aus dem Wasser hervorragt, und daß er nur durch die Auflegung von Gewichten auf die Schale *C* bis zu der Marke *B* einsinkt.

Um nun mittels dieses Apparates das spezifische Gewicht eines Körpers zu bestimmen, verfährt man folgendermaßen. Zunächst legt man den zu untersuchenden Körper auf die obere Schale *C* und bewirkt durch die aufgelegten Gewichte, daß das Aräometer bis zur Marke eintaucht. Darauf nimmt man die Gewichte fort und bewirkt durch zugelegte Gewichte, daß

der Apparat wieder bis *B* eintaucht. Da derselbe in beiden Fällen dasselbe Volumen Wasser aus seiner Stelle drängt, so ist in beiden Fällen das Gewicht dasselbe; die statt des Körpers aufgelegten Gewichte geben uns also das absolute Gewicht des Körpers *P*. Darauf legt man den Körper in die untere Schale *D* und nimmt die vorherigen Gewichte wieder fort. Da jetzt der Körper aber in Wasser ist, so verliert er an Gewicht, und deshalb sinkt der Apparat nicht bis *B* ein. Um das zu bewirken, müssen wir ein Gewicht *P'* auf die obere Schale legen, welches uns den Gewichtsverlust des Körpers im Wasser ersetzt. Das Gewicht einer ihm an Volumen gleichen Wassermenge gibt. Der Quotient  $\frac{P}{P'}$  gibt uns also nach dem vorigen das spezifische Gewicht des Körpers.

Daß wir hier dieselben Korrekturen anbringen müssen wie beim vorigen Verfahren, ist klar; aber selbst dann ist es äußerst schwierig, ein genau richtiges Resultat zu erhalten, besonders weil es wegen der der demnächst zu betrachtenden Kapillarität schwer ist zu bestimmen.



der Apparat genau bis zur Marke *B* eintaucht. Um genaue Resultate zu erhalten, ist daher die vorige Methode vorzuziehen.

Die beiden bisherigen Methoden beruhen auf der Erfahrung, daß ein eingetauchter Körper im Wasser an Gewicht verliert. Man kann als dritte Methode noch die Umkehr der ersten hinzufügen, den Satz besitzend, daß das Gewicht des mit Wasser gefüllten Gefäßes durch das Eintauchen eines Körpers gerade soviel an Gewicht zunimmt, als der Körper verliert.

Man wiegt ein Gefäß mit Wasser ab und bestimmt dann die Gewichtszunahme, welche es erhält, wenn der neben der Wage aufgehängte Körper von bekanntem Gewichte in das Wasser hinabgesenkt wird. Der Quotient des bekannten Gewichtes des Körpers und dieser Gewichtszunahme ist dann das gesuchte spezifische Gewicht des Körpers. Dieses Verfahren ist besonders bei der Untersuchung großer und schwerer Körper anzuwenden, indem es keine besondern, an großen Wagen schwer anzubringenden Vorrichtungen erfordert.

Alle diese Methoden können jedoch nur benutzt werden, wenn es sich darum handelt, das spezifische Gewicht von Körpern zu bestimmen, welche nicht porös, nicht in Wasser löslich und schwerer als Wasser sind. Sind die Körper porös, so muß man sie mit einem sehr feinen Lack überstreichen, so daß sowohl das Gewicht als auch das Volumen der Körper möglichst wenig geändert wird, und da man dadurch das Eindringen des Wassers in den Körper gehindert hat, verfahren wie vorhin; sind die Körper in Wasser löslich oder leichter als Wasser, so wendet man statt des Wassers Flüssigkeiten an, in denen sich der Körper nicht löst, oder die ein geringeres spezifisches Gewicht haben. Das Verfahren bleibt dann ungeändert dasselbe. Ist das Gewicht des Körpers  $P$ , sein Gewichtsverlust in der betreffenden Flüssigkeit gleich  $P''$ , sein spezifisches Gewicht gleich  $s$ , das der Flüssigkeit gleich  $s''$  und das Volumen des Körpers gleich  $v$ , so ist

$$P = vs, \quad P'' = vs'',$$

$$\frac{P}{P''} = \frac{s}{s''}, \quad s = s'' \frac{P}{P''}.$$

Kennt man also  $s''$ , das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so läßt sich  $s$  berechnen.

Sind die zu untersuchenden Körper pulverförmig, so lassen sich die beschriebenen Methoden zur Bestimmung ihres spezifischen Gewichtes nicht anwenden: in einem solchen Falle verfährt man am besten so, daß man direkt die von einer gewogenen Quantität des Pulvers aus einem Gefäß verdrängte Menge Wassers, oder im Falle das Pulver im Wasser löslich oder leichter als Wasser ist, einer andern Flüssigkeit bestimmt. Man benutzt dazu sogenannte Pyknometer, wie Fig. 97 ein solches darstellt. Es sind kleine Fläschchen, welche einen ziemlich weiten Hals haben, in welchen ein Glasstöpsel eingeschliffen ist, so daß, wenn er eingesetzt ist, ein ganz bestimmter, immer gleicher Raum im Gefüße abgeschlossen ist. Da man, wie vorhin erwähnt, bei diesen Versuchen immer die Temperatur der Flüssigkeit kennen muß, so wendet man als Glasstöpsel, wie Fig. 97 zeigt, sehr bequem ein Thermometer an. An dem Gefäß ist ferner eine kapillare Röhre  $e$  angebracht, welche oben ausgeweitet ist und dort ebenfalls mit

einem eingeriebenen Glasstöpsel verschlossen werden kann. An der linken Röhre ist bei  $m$  eine Marke.

Man füllt das Gefäß zunächst mit Wasser, schließt es, währen

Fig. 97.



das kapillare Rohr offen ist, einsetzen des Stöpsels bei  $h$  und dann, während man es auf konstanter Temperatur hält, das Wasser zur Marke  $m$  ab. Man schließt das kapillare Rohr und wiegt das Gefäß ab. Es habe das Gewicht  $P$ . Öffnet man das Gefäß und schüttet eine gewogene Quantität  $p$  des zu untersuchenden Pulvers hinein. Man schließt es wieder, tupft das Wasser bis zur Marke  $m$  ab und wiegt wieder. Man finde das Gewicht  $P'$ . Das Gewicht  $P'$  ist dann gleich dem zuerst gefundenen Gewicht  $P$ , vermehrt um das Gewicht des eingeschütteten Pulvers, abnimmt um das Gewicht  $\pi$  des dem Pulver verdrängten Wassers:

$$P' = P + p - \pi,$$

somit

$$\pi = P + p - P'.$$

Demnach ist das spezifische Gewicht  $s$  des Pulvers

$$s = \frac{p}{\pi} = \frac{p}{P + p - P'}.$$

Bei diesem Verfahren muß man dafür sorgen, daß das Pulver keine Luft eingeschlossen hält; am besten, daß man vor dem letzten Abwiegen das Wasser bis nahe zum Sieden erhitzt und dann erst, nach eingetretener Abkühlung, schließt und abschließt.

Abtupfen wägt.

## § 71.

**Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Flüssigkeiten**  
Bestimmung des spezifischen Gewichtes von Flüssigkeiten kann man falls eine Reihe von Methoden anwenden, von denen mehrere auf der Bestimmung des Gewichtsverlustes eingetauchter Körper beruhen, andere

Von letzteren machen wir zwei namhaft. Die genaueste ist die, daß man die im vorigen Paragraphen beschriebenen Pyknometer bis zur Marke  $m$  einmal mit Wasser füllt, abwägt und durch Abziehen des vorher bestimmten Gewichtes des Gläschens das Gewicht des im Gefäße enthaltenen Wassers bestimmt. Darauf füllt man dasselbe Gefäß wieder bis zur Marke  $m$

untersuchenden Flüssigkeit und bestimmt auf gleiche Weise das Gewicht abzu. Man hat auf diese Weise direkt das Gewicht gleicher Volumina  $m$  und der zu untersuchenden Flüssigkeit, der Quotient beider gibt spezifische Gewicht der Flüssigkeit.

Eine zweite Methode beruht auf dem Satze, daß in zwei kommunizierenden Röhren die Höhen verschiedener Flüssigkeiten sich umgekehrt ihre spezifischen Gewichte verhalten. Vor einem Maßstabe (Fig. 98) zwei Glasröhren befestigt, welche vertikal herabsteigen und unten so abgelenkt sind, daß zwei kürzere aufwärts gebogene Arme entstehen, welche bei  $A$  so angeordnet sind, daß die beiden Röhren gleichsam eine mehrfach gekrümmte Röhre

Fig. 98.



Fig. 99.



1. Man gießt in die eine Wasser und zugleich in die andere die untersuchende Flüssigkeit. Auf diese Art erhält man zwei durch eine nicht getrennte Flüssigkeitssäulen. Wenn man die Flüssigkeitssäulen so reguliert, daß das Niveau derselben in den umgebogenen Röhren gleich hoch und das des Nullpunktes der Teilung ist, so sind die Höhen der Flüssigkeiten in den senkrechten Röhren ihrem spezifischen Gewichte umgekehrt proportional. Ist die Höhe der Wassersäule  $h$ , die der Flüssigkeit gleich  $h'$ , die Dichtigkeit der Flüssigkeit

gleich  $d'$ , die des Wassers gleich 1, so ist

$$h : h' = d' : 1,$$

$$d' = \frac{h}{h'}.$$

Eine etwas andere Anordnung des Apparates zeigt Fig. 99. Zwei vertikalen Rohren tauchen unten in zwei abgesonderte Gefäße, welche zu vergleichenden Flüssigkeiten gefüllt sind. Oben kommen sie mittels eines gebogenen Rohres miteinander und durch einen baren Hahn mit einer kleinen Luftpumpe. Pumpt man bei diesem Hahn durch Heraufziehen des Kolbens etwas Luft aus, so steigen die Flüssigkeiten durch den äußern Luftdruck zu Höhen, welche ihren spezifischen Gewichten umgekehrt proportional sind. Schließt man den Hahn oben und mißt die Höhen, so erhält man daraus gerade das spezifische Gewicht der einen Flüssigkeit, wenn das der andern bekannt ist.

Die andern Methoden zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten beruhen auf dem Gewichtsverlust eingetauchter Körper. Die einfachste und genaueste dieser Methoden ist die, daß man einen unregelmäßig geformten Körper, etwa ein kleines Glasröhrchen, welches unten offen und oben zugeschmolzen ist, nachdem man etwas Flüssigkeit hineingebracht hat, an einem sehr feinen Drahte, wie in Fig. 100, befestigt. Man wiegt denselben genau und bestimmt den Gewichtsverlust einmal, wenn er in Wasser getaucht wird, dann, wenn er sich in der zu untersuchenden Flüssigkeit befindet. Diese Gewichtsverluste geben die Gewichte von Flüssigkeitsmengen, deren Volumen gleich ist dem des eingetauchten Körpers, die Quotienten der Gewichtsverluste also das spezifische Gewicht der zu untersuchenden Flüssigkeit.

Eine sehr bequeme Form hat Mohr dem Verfahren gegeben, das durch den Gewichtsverlust eines Glaskörpers das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit bestimmt. Die dazu benutzte Waage hat zwei Wagebalken von ungleicher Länge; der kürzere hat an seinem Ende einen Haken, an welchem der an einem Platindraht befestigte Glaskörper angehängt wird. Der längere Balken hat auf seiner obern Seite eine Teilung, welche den Abstand von der Drehachse der Waage bis zum Aufhängepunkt des Glaskörpers, also die Länge des Wagebalkens in 10 gleiche Teile teilt. Der kürzere Balken hat an seinem Ende ein etwas verschiebbares Gewicht, welches so verschoben wird, daß die Waage im Gleichgewicht ist, wenn der Glaskörper in der Luft an dem betreffenden Haken aufgehängt ist. Man bestimmt den Gewichtsverlust des Glaskörpers im Wasser und fertigt ein Gegengewicht an, der diesem Gewichtsverlust entspricht, was man leicht dadurch kann, daß man diesen Gewichtshaken an den Aufhängehaken des Gegengewichts körpers hängt und den Glaskörper in Wasser senkt. Ist das Gegengewicht richtig bestimmt, so muß dann Gleichgewicht vorhanden sein. Man fertigt ferner einen Haken an, der genau ein Zehntel, und einen andern, der genau ein Hundertstel des Gewichtes des ersten Hakens hat.

Taucht man den Glaskörper in eine Flüssigkeit, die spezifisches

Fig. 100



Wasser, so muß man zur Herstellung des Gleichgewichtes den Haken nicht an den Aufhängehaken des Glaskörpers hängen, sondern auf den Tragebalken näher bei der Drehungsachse. Da es schwer ist, den Haken zu hängen, daß das Gleichgewicht genau erreicht wird, hängt man an denjenigen Teilstrich, an welchem der Auftrieb der Flüssigkeit nicht aufgehoben ist. Zur vollen Herstellung des Gleichgewichtes hängen zweite und dritte Haken. Man hängt den zweiten Haken, wenn das Gleichgewicht durch Aufhängen desselben an einem bestimmten Teilstrich gerade erreicht ist, so daß auch durch ihn der Auftrieb nicht aufgehoben ist, und hängt schließlich den dritten Haken irgendwo oder zwischen zwei Teilstriche, so daß das Gleichgewicht genau erreicht ist. Nehmen wir z. B. an, daß durch Aufhängen des ersten Haken an dem Teilstriche 8 der Glaskörper tiefer sinkt, bei dem Teilstriche 7 aber der Auftrieb noch nicht ganz aufgehoben ist, so hängt man den zweiten Haken auf den Teilstrich 7; wurde etwa durch Aufhängen des dritten Hakens bei dem Teilstriche 9 auch das Gleichgewicht noch nicht hergestellt, so nimmt man den dritten Haken und es sei nun, indem man ihn in der Mitte zwischen Teilstrich 4 und 5 aufhängt, das Gleichgewicht gerade hergestellt. Der Haken 1 wirkt dann so, als sei 0,7 des Gewichtes des Aufhängehaken des Glaskörpers aufgehängt, der Haken 2, als 0,09 und der Haken 3, als sei dort 0,0045 des Gewichtes des Glaskörpers aufgehängt. Da der erste Haken genau dem Gewichtsverlust des Glaskörpers entspricht, folgt daß der Gewichtsverlust des Glaskörpers in der Flüssigkeit gleich 0,7945 von dem im Wasser ist, also daß das spezifische Gewicht der Flüssigkeit gleich 0,7945 ist. Nimmt man den dritten Haken zu Hilfe, dessen Gewicht gleich ist dem Gewichte des eingetauchten Wassers und hängt denselben an den Haken, der den Glaskörper aufhängt, so kann man in der angegebenen Weise die spezifischen Gewichte von Flüssigkeiten bestimmen, deren spezifisches Gewicht zwischen 0,7 und 1 liegt.

Das Nicholsonsche Aräometer kann man, wie leicht ersichtlich, zu verschiedenen Zwecken anwenden. Man bestimmt zunächst das Gewicht des Aräometers in der Luft; dasselbe sei  $A$ ; man taucht es dann in Wasser, und damit es gerade einsinke, sei ein Gewicht  $p$  erforderlich. Da das Aräometer in der Luft wiegt, so ist das Gewicht des dem eingetauchten Teile an Volumen Wasser gleich  $A + p$ . Darauf taucht man es in die zu untersuchende Flüssigkeit, und ist  $p'$  das jetzt aufzulegende Gewicht, damit es gerade einsinkt, so ist  $A + p'$  das Gewicht einer der vorigen Wasser-Volumen gleichen Flüssigkeitsmenge. Der Quotient beider oder

$$\frac{A + p'}{A + p} = s$$

ist das spezifische Gewicht der Flüssigkeit.

Im praktischen Leben sehr häufig notwendig ist, das spezifische Gewicht von Flüssigkeiten zu bestimmen, ohne daß eine möglichst große Genauigkeit erfordert wird, so hat man noch ein anderes Verfahren erdacht, um leicht und schnell das Geforderte zu leisten; man bestimmt die Dichtigkeit von Flüssigkeiten mittels Aräometer von veränderlichem Volumen. Während man mittels der Nicholsonsche Aräometers



die Dichtigkeit der Flüssigkeiten aus den verschiedenen Gewichten  $P$  und  $p$  ableitet und dann, wenn  $P$  das Gewicht der Flüssigkeit der Dichtigkeit  $D$ ,  $p$  das der Flüssigkeit von der Dichtigkeit  $d$  ist, sucht die Dichtigkeit aus der Proportion erhält,

$$D : d = P : p,$$

verfährt man bei den jetzt zu betrachtenden Apparaten so, daß ein konstantes Gewicht  $P$  in verschiedene Flüssigkeiten eintaucht und das Volumen beobachtet, welches dieses aus der Stelle drängt. Der Körper ist stets so tief ein, daß das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit

Fig 102

gleich  $P$  ist. Sinkt er nun in die Flüssigkeit von der Dichtigkeit  $D$  so tief ein, daß er ein Volumen  $V$  aus der Stelle drängt, so ist

$$P = V \cdot D.$$

Drängt er in einer andern Flüssigkeit das Volumen  $v$  aus der Stelle, so ist

$$P = v \cdot d$$

und daher

$$v \cdot d = V \cdot D; \quad d : D = V : v.$$

Fig 101



Nehmen wir also z. B. eine zylindrische Röhre, welche unten und oben, nachdem etwas Silber hineingebracht, zugeschmolzen ist, und wirken, daß sie stets aufrecht schwimmt, so sinkt sie bis zu einem bestimmten, etwa in der Mitte der Röhre liegenden Punkte in Wasser einsinkt, leicht, aus dieser ein Aräometer zu machen, indem man eine einfache Ablesung genügt, um die Dichtigkeit der Flüssigkeit, in die es getaucht ist, zu erhalten. Man bezeichnet die Stelle, bis zu welcher die Röhre (Fig. 101) in Wasser einsinkt, durch eine Zahl 100 und teilt nun die Röhre von diesem Teilstriche aus nach unten in 100 gleiche Teile, und trägt ebenso die Teilstriche nach oben hin auf. Der Rauminhalt zwischen zwei Teilstrichen entspricht dann, da wir die Röhre zylindrisch voraussetzen,  $\frac{1}{100}$  des Rauminhalts der Röhre von unten bis zum Teilstriche 100. Sinkt wir nun diese Röhre in eine Flüssigkeit, so sinkt sie bis zum Teilstriche 80 ein, so schließt

daraus, da sie eine ihrem Gewichte gleiche Flüssigkeitsmenge aus der Stelle drängt, daß 80 Volumteile dieser ebensoviel wiegen als 100 Teile Wasser. Wir haben demnach für das spezifische Gewicht der Flüssigkeit  $s$

$$s : 1 = 100 : 80,$$

$$s = \frac{100}{80} = 1.25;$$

taucht die Röhre dagegen bis zum Teilstriche 120 ein, so ist

$$s = \frac{100}{120} = 0,833;$$

taucht überhaupt die Röhre in irgend eine Flüssigkeit bis zum Teilstrich  $n$  ein, so haben wir für ihr spezifisches Gewicht  $\frac{100}{n}$ .

Diese Aräometer bestimmen demnach das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit aus der Vergleichung des Volumens derselben mit dem Volumen einer gleichen Gewichtsmenge Wasser. Sie führen daher den Namen Volumeter.

Man gibt ihnen meist eine andere Form (Fig. 102). Es ist klar, daß die Apparate eine um so größere Genauigkeit liefern, je weiter zwei Teilstriche voneinander entfernt sind. Zu dem Ende wählt man sehr dünne Röhren, und damit sie dann nicht zu lang und somit zu unbeholfen werden, setzt man unten ein Stück einer weiteren Röhre daran. Die Teilung kann dann nur empirisch aufgetragen werden; man verfährt irgendmaßen. Man bringt in die Röhre etwas Quecksilber, so daß das Gewicht des Apparates gleich  $p$  wird, taucht ihn in Wasser und bezeichnet die Stelle, bis zu welcher er einsinkt, mit 50. Darauf vermehrt man durch Hinzufügen von Quecksilber sein Gewicht auf  $2p$ ,  $3p$  und taucht ihn wieder in Wasser. Das doppelte und dreifache Gewicht verdrängt die doppelte und dreifache Wassermenge, der Apparat sinkt also tiefer ein. Die Stelle, bis zu der er bei doppeltem Gewichte einsinkt, bezeichnet man mit 100, die bei dreifachem Gewichte mit 150 und teilt nun den Raum zwischen 50 und 100, sowohl als zwischen 100 und 150, in 50 gleiche Teile. Der Raum zwischen 50 und 100 ist die Hälfte von dem Raum, den das Instrument ausfüllt, wenn es bis zu 100 einsinkt; der Raum zwischen zwei Teilstrichen also  $\frac{1}{100}$  dieses Raumes. Man gibt schließlich dem Apparate das Gewicht  $2p$  und schließt ihn oben. Im Wasser taucht dann derselbe bis zum Teilstriche 100 ein; wir können ihn daher jetzt gerade so benutzen wie das einfachere Aräometer, taucht ihn in eine Flüssigkeit bis zum Teilstriche  $n$ , so ist  $\frac{100}{n}$  ihr spezifisches Gewicht.

Aber auch so erhält der Apparat immer noch eine bedeutende Länge und wird dadurch zum praktischen Gebrauche unbequem. Man verfertigt daher selten Apparate, welche zugleich dazu dienen das spezifische Gewicht von Flüssigkeiten zu bestimmen, welche schwerer oder leichter sind als Wasser, sondern meist solche, welche nur für die eine oder andere Art von Flüssigkeiten bestimmt sind.

Ist das Instrument für schwerere Flüssigkeiten bestimmt, so bezeichnet man den Punkt oben an der Röhre, bis zu welchem sie beim Gewichte  $2p$  in Wasser einsinkt, mit 100, und ganz unten über der äußeren Röhre beim Gewichte  $p$  mit 50, gibt dem Apparate das Gewicht  $p$  und graduirt wie vorhin. Ist es für die Bestimmung des spezifischen Gewichtes leichterer Flüssigkeiten bestimmt, so richtet man das Gewicht  $p$  des Apparates so ein, daß er in Wasser getaucht bis gerade über die obere Röhre eintaucht, und bei dem Gewichte  $2p$  bis oben. Der Apparat sinkt dann das Gewicht  $p$  und der untere Punkt wird mit 100, der obere mit 200 bezeichnet; das spezifische Gewicht ergibt sich dann wie vorhin.

Häufig findet man auch auf den Aräometerskalen anstatt oder neben



der der Teilung entsprechenden Zahl die Angabe des spezifischen G  
verzeichnet, welche dem nebenstehenden Teilstriche entspricht; al  
dem Teilstriche 100—1, neben dem 120 dann 0,833, 150—0,666, 20  
eine einfache Ablesung ergibt dann das gesuchte spezifische Gewi

**Aräometer für besondere Flüssigkeiten.** Wenn zwei Flüs  
verschiedenen spezifischen Gewichtes, die sich miteinander misch  
sammengegossen werden, so hängt das spezifische Gewicht des G  
von den Mengenverhältnissen der einzelnen Flüssigkeiten ab. Ke  
daher für alle Mischungen ihre spezifischen Gewichte, so kann ma  
der Aräometer die Bestandteile des Gemisches kennen lernen. ]  
zelne Flüssigkeiten sind diese Untersuchungen durchgeführt und  
nauesten für Alkohol, da es im praktischen Leben vielfach von  
keit ist, den Prozentgehalt eines Weingeistgemisches mit Schnellig  
stimmen zu können. Auf den ersten Blick sollte man glauben, da  
einfacher sei, als aus dem spezifischen Gewichte einer Flüssigkeit  
den Gehalt desselben an der einen oder andern zu bestimmen, in  
das spezifische Gewicht aus den Mengenverhältnissen berechnet.  
würde z. B. ein Gemisch von 50 Volumen Wasser und 50 Volumen  
ein Gemisch von 100 Volumen geben, dessen spezifisches Gewicht  
in der Mitte dessen des Alkohols oder des Wassers läge, also, da  
Alkohols gleich 0,794, das des Wassers bei 15° C. gleich 0,9  
gleich 0,8866 sein würde.

Dem ist jedoch nicht so, und zwar deshalb nicht, weil bei der ]  
zweier Flüssigkeiten meist eine Änderung des Volumens eintritt.

Gießt man z. B. Alkohol und Wasser zu gleichen Teilen zu  
so ist das Volumen des Gemisches nicht gleich der Summe der V  
sondern kleiner. Es tritt eine Kontraktion der Flüssigkeiten ein; d  
fische Gewicht ist demnach größer als das vorhin berechnete.

Nach den Versuchen von von Baumhauer<sup>1)</sup> geben:

Volume Wasser.	Weingeist.	Mischung.	Volume Wasser.	Weingeist.	M
100	0	100	40	60	
90	10	99,4	30	70	
80	20	98,2	20	80	
70	30	97,2	10	90	
60	40	96,4	0	100	
50	50	96,0			

Daraus ergibt sich das spezifische Gewicht s bei 15° C.:

Mischung aus Volumen.			Mischung aus Volumen.		
Wasser.	Weingeist.	s	Wasser.	Weingeist.	
100	0	0,9991	40	60	0,9
90	10	0,9857	30	70	0,8
80	20	0,9750	20	80	0,8
70	30	0,9645	10	90	0,8
60	40	0,9511	0	100	0,7
50	50	0,9338			

1) von Baumhauer, Mémoire sur la densité etc. des mélanges d

Wenn man ein Volumeter so einrichtet, daß es in Wasser getaucht, zu einem mit 0 bezeichneten Punkte eintaucht, so wird es in Gemischen aus Alkohol und Wasser tiefer eintauchen. Bezeichnet man die Punkte, bis zu denen es in Flüssigkeiten vom spezifischen Gewichte 0,875, 0,9750 etc. einsinkt, mit 10, 20 . . ., so erhält man ein Alkoholometer, welches in ein Weingeistgemisch eingetaucht durch eine einfache Ablesung angibt, wieviel Volumprocente das Gemisch an reinem Alkohol enthält.

So sind die Alkoholometer von Tralles<sup>1)</sup> eingerichtet, welche in Deutschland meist gebraucht werden, um den Alkoholgehalt des käuflichen Spiritus zu bestimmen.

Es ist jedoch zu bemerken, daß die Zahlen für das spezifische Gewicht des Alkohols, wie schon erwähnt, und so auch die der Gemische nur für eine bestimmte Temperatur gelten, nämlich für 15° C. Deshalb gelten auch die Angaben der Alkoholometer nur für diese oder eine andere Temperatur, in der sie graduiert sind. Um jedoch den Apparat auch für andere Temperaturen brauchbar zu machen, hat Tralles eine Tabelle aufgestellt<sup>2)</sup>, in welcher man für jede Temperatur den Alkoholgehalt eines Gemisches ablesen kann, wenn man beobachtet hat, bis zu welchem Punkte bei dieser Temperatur der Apparat in das Gemische eintaucht. Deshalb ist an den meisten Alkoholometern auch ein Thermometer angebracht.

Vielfach ist auch an den Alkoholometern selbst die Korrektion bemerkt, welche man für die verschiedenen Temperaturen anzubringen hat. In der äußeren Röhre am untern Teile des Apparates ist neben dem Thermometer eine Skala befestigt, auf der dann neben dem normalen Thermometerstand, in welchem das Instrument graduiert ist, 0 verzeichnet ist und darüber oder darunter, wieviel Prozente man von der Angabe des Alkoholometers ziehen oder derselben hinzufügen muß, wenn das Thermometer einen höhern oder tiefern Stand hat.

Außer den Alkoholometern müssen wir noch die Aräometer von Baumé erwähnen, welche vielfach in Gebrauch sind, obwohl sie direkt nichts über die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, noch über ihre Zusammensetzung aussagen. Baumé konstruierte zwei Aräometer, das erste graduierte er so, daß er den Punkt, bis zu dem es in Wasser eintauchte, mit 0, und den, bis zu welchem es in einer Lösung von 15 Teilen Kochsalz auf 85 Wasser eintauchte, mit 15 bezeichnete. Die Teilung wurde weiter nach unten fortgesetzt. Der Apparat gibt in Schwefelsäure 66 Grade an und in konzentrierter Salpetersäure 36.

Für Flüssigkeiten, welche leichter sind als Wasser, wurde der Punkt, bis zu welchem der Apparat in eine Lösung von 10 Teilen Kochsalz auf 90 Wasser taucht, mit 0, in Wasser mit 10 bezeichnet und die Teilung

<sup>1)</sup> Amsterdam 1860. Etwas von diesen verschiedene Werte ergeben sich aus den Versuchen von *Mendelejeff*, *Poggend. Ann.* 138, 1869.

<sup>2)</sup> *Tralles*, *Gilbert Annalen*, 38, p. 349–431, 1811.

<sup>3)</sup> *Tralles* u. a. O. Neuerdings werden in Deutschland Alkoholometer angeboten, welche nach Gewichtsprozenten graduiert sind. Bei der physikalischen Untersuchung befindet sich die Urnormale eines solchen Alkoholometers, nach welchem andere geeicht werden. Man sehe: Das Gewichtsalkoholometer und seine Anwendung, von *H. Homann*, Berlin 1889, bei J. Springer.

nach oben hin fortgesetzt. In käuflichem, meist 80—90prozentigem Spiritus zeigt der Apparat 34—38 Grade<sup>1)</sup>).

## § 72.

**Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern.**  
In unseren bisherigen Entwicklungen über die Gesetze des Gleichgewichtes der flüssigen Körper haben wir keine Rücksicht genommen auf die Wirkung von Kräften, welche an den Gefäßwänden zwischen den Molekülen der festen Wand und denen des flüssigen Körpers und welche zwischen den Molekülen des flüssigen Körpers tätig sind, also gemäß unserer Benennung in § 60 und 47 auf die Wirkung der Adhäsion der flüssigen an die festen Körper und die Kohäsion der Flüssigkeiten.

Von dem Dasein beider Kräfte kann man sich leicht überzeugen. Taucht man ein reines Glasstäbchen in Wasser und zieht es dann heraus, so sieht man, daß eine Wasserschicht an demselben haftet. Hält man es vertikal, so sammelt sich an seinem untern Ende ein Tropfen an, der nicht herabfällt, sondern der Wirkung der Schwere entgegen an dem Stäbchen haften bleibt. Diese einzige Tatsache beweist das Dasein der Adhäsion des flüssigen Körpers an den festen sowohl als auch das der Kohäsion der einzelnen Teile der Flüssigkeit. Denn die zunächst am Glase anhängende Wasserschicht wird durch die Adhäsion des Wassers am Glase getragen und der übrige Teil des Tropfens durch die Kraft, mit welcher die einzelnen Wasserteilchen aneinander haften.

Aus diesem Versuche geht zugleich hervor, daß in diesem Falle sowohl die Kohäsion der Flüssigkeit als auch die Adhäsion derselben am Glase größer ist als die Wirkung der Schwere, denn nur dann ist es möglich, daß der Tropfen, der Schwere entgegen, getragen wird. Der Versuch zeigt aber weiter, daß hier auch die Adhäsion des Wassers am Glase größer ist als die Kohäsion der Wasserteile untereinander; denn beim Herausziehen des Stabes wurden die an dem Stabe haftenden Wasserteile von ihrer Umgebung losgerissen, mit welcher sie durch die Kohäsion zusammenhängen.

Nicht immer ist das jedoch der Fall; denn wenn wir den Glasstab in Quecksilber tauchen, so bleibt kein Quecksilber daran haften, er wird von demselben nicht benetzt. Daß aber auch hier eine Adhäsion des Quecksilbers am Glase vorhanden ist, läßt sich durch einen andern Versuch zeigen. Hängt man nämlich eine Platte mittels dreier Fäden an dem einen Arm einer Wage horizontal auf, äquilibriert sie durch Gewichte, welche auf die andere Wagschale gelegt werden, so bringt das geringste Übergewicht, auf die Wagschale gelegt, eine Erhebung der Glasplatte hervor. Nähert man aber der Platte von unten ein weites, mit Quecksilber gefülltes Gefäß so weit, daß die untere Fläche der Glasplatte die Oberfläche des Quecksilbers gerade berührt, so bedarf es auf der andern Wagschale bedeutender Zulage, um die Platte von dem Quecksilber loszureißen, ein Beweis, daß sie mit einer gewissen Kraft am Quecksilber haftet, daß also auch das Quecksilber am Glase adhärirt.

1) Weiteres *Meißner*, Die Aräometrie in ihrer Anwendung auf Chemie und Technik. Wien 1816.

Die Kohäsion der verschiedenen Flüssigkeiten sowohl als die Adhäsion derselben Flüssigkeit an verschiedene feste Körper ist verschieden. Während Quecksilber Glas nicht benetzt, also an Glas nicht so stark adhärirt, daß die Kohäsion der Quecksilberteile überwunden werden kann, wird Gold vom Quecksilber benetzt. Während reines Glas vom Wasser benetzt wird, vermag eine fettige Glasscheibe die Kohäsion der Wasserteile nicht zu überwinden.

Bei denjenigen Substanzen, bei welchen die Adhäsion an feste Körper größer ist als die Kohäsion der flüssigen Teile, kann obiges Verfahren, welches wir anwandten, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase nachzuweisen, dazu dienen, die Kohäsion der Flüssigkeit zu messen. Gay-Lussac<sup>1)</sup> hat für einige Flüssigkeiten, welche am Glase adhäriren, dieses Verfahren angewandt und mit einer Scheibe von 118,366<sup>mm</sup> Durchmesser folgende Resultate erhalten.

Flüssigkeit	Spezifisches Gewicht	Gewichte
Wasser . . . . . bei 8,5° C.	1	59,40 <sup>gr</sup>
Alkohol . . . . . " " "	0,8196	31,08 „
Alkohol . . . . . " 10° " "	0,8595	32,87 „
Alkohol . . . . . " 8° " "	0,9415	37,15 „
Terpentinöl . . . . . " 8° " "	0,8694	34,10 „

Die angegebenen Gewichte sind diejenigen, welche bei langsamem auflegen der Gewichte gerade die benetzte Platte loszureißen imstande waren. Ganz dieselben Resultate erhielt Gay-Lussac, als er die Glasscheibe der vorigen Versuche durch eine Kupferscheibe ersetzte, was einen neuen Beweis dafür liefert, daß durch diese Versuche wirklich die Kohäsion der Flüssigkeiten gemessen wird.

Bei Flüssigkeiten, welche nicht benetzen, kann man dieses Verfahren nutzen, um die Adhäsion zu messen. Gay-Lussac stellte derartige Versuche an, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase zu erhalten; die Resultate jedoch, welche er erhielt, schwankten um ein Bedeutendes, zwischen 14<sup>gr</sup> und 296<sup>gr</sup>, je nachdem er die Übergewichte rasch oder langsam auflegte. Der Grund dieser Schwankung liegt zum Teil in der Reibung des Quecksilbers am Glase, wie wir später nachweisen werden.

§ 73.

**Normaldruck und Oberflächenspannung in der Oberfläche der Flüssigkeiten.** Aus den im vorigen Paragraphen mitgetheilten Tatsachen folgt erstens, daß die benachbarten Moleküle einer Flüssigkeit sich anziehen, und zweitens, daß die Moleküle eines in eine Flüssigkeit getauchten festen Körpers ebenfalls die benachbarten Teile der Flüssigkeit anziehen. In der Bestimmung des Gleichgewichtszustandes einer Flüssigkeit müssen

<sup>1)</sup> Gay-Lussacs Versuche in La Place Supplément a la Theorie de l'action capillaire II. Supplément zum 10. Buche der Mécanique céleste. Daraus Gilbert, Annalen 88. p. 320. 1809.

wir daher auf diese beiden Kräfte Rücksicht nehmen; es wird daher zunächst unsere Aufgabe sein, zu untersuchen, in welcher Weise sie Änderungen des von uns bisher betrachteten Zustandes hervorbringen können. Beginnen wir mit der Anziehung der Flüssigkeitssteile aufeinander, und setzen wir bei dieser wie bei der zweiten Art von Kräften voraus, daß die Kräfte sich nur auf unmeßbare oder jedenfalls äußerst kleine Entfernungen erstrecken, daß sie unmerklich werden, sobald die Entfernungen sehr kleine Werte übersteigen.<sup>1)</sup>

Betrachten wir zu dem Ende eine flüssige Masse, welche durch irgend eine Oberfläche  $MN$  (Fig. 103) begrenzt ist, und untersuchen die Resultierende aller auf die Moleküle  $m, m', m''$  von den benachbarten Molekülen ausgeübten Anziehungen. Seien zu dem Ende die mit den Radien  $r$ , welche als sehr klein vorausgesetzt werden, um die betreffenden Moleküle beschriebenen Kugeln die Anziehungssphären derselben, so daß also auch nur die in dieser Kugel befindlichen Moleküle anziehend auf  $m, m', m''$  wirken.

Fig. 103



Auf das Molekül  $m$  wirken die ringsum ganz gleichmäßig verteilten Moleküle der Flüssigkeit anziehend ein, dasselbe wird also nach allen Richtungen des Raumes mit gleicher Stärke angezogen, die auf  $m$  wirkenden Kräfte halten sich daher das Gleichgewicht, das Molekül verhält sich gerade so, als wenn keine Kräfte auf dasselbe einwirkten.

Anders bei den der Oberfläche nahen Molekülen; das Molekül  $m'$ , welches gerade in der Oberfläche der Flüssigkeit liegt, erfährt einen einseitigen Zug senkrecht zur Oberfläche gegen die Flüssigkeit hin, nur die untere Hälfte seiner Anziehungssphäre ist mit Flüssigkeit gefüllt, die oberhalb nicht. Die anziehenden Kräfte der die untere Halbkugel ausfüllenden Moleküle haben eine zur Oberfläche  $MN$  senkrechte Resultierende, die ganz symmetrisch um die durch  $m'$  gelegte Normale gruppiert sind. Etwa rechts von der durch  $m'$  gelegten Normale liegendes Molekül  $m_1$  ist ein genau entsprechendes links liegendes  $m_2$ . Zerlegen wir die von  $m_1$  ausgeübten Anziehungen in ihre Komponenten parallel der Normale und parallel der Oberfläche, so summieren sich die ersteren, während die letzteren auf das Molekül  $m'$  nach gerade entgegengesetzter Richtung in gleicher Größe wirken. Die der Normale parallele Komponente sämtlicher Anziehungen, welche von den in der mit dem Radius der Wirkungssphäre beschriebenen Halbkugel liegenden Flüssigkeitsmolekülen auf  $m'$  ausgeübt werden, liefern also einen normalen gegen das Innere der Flüssigkeit wirkenden Druck.

1) *La Place*, *Theorie capillaire* im *Supplément* zum 10. Buche der *Mécanique céleste*, daraus *Gilbert*, *Annalen* 33 1809

es gilt von dem Molekül  $m'$ , welches um weniger als  $r$  unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegt; auch dessen Anziehungssphäre ist mit Flüssigkeit ausgefüllt und unterhalb  $st$  wirkt eine Quantität auf dasselbe ein, deren Anziehung nicht durch eine nach oben gerichtete Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird. Auch an  $m'$  wirkt eine zur Oberfläche senkrechte gegen das Innere gerichtete Kraft, die jedoch kleiner ist als die an  $m''$  angreifende.

Es ist der Fall mit allen Molekülen, welche um weniger als  $r$  von der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, deren Anziehungssphären also mit Flüssigkeit ausgefüllt sind. Legen wir daher parallel zur Oberfläche im Innern der Flüssigkeit eine Fläche, welche von der Oberfläche um  $r$  entfernt ist, so werden alle in dieser Schicht liegenden Moleküle nach innen gezogen. Es muß demnach infolge der Molekularanziehung die Oberfläche einer Flüssigkeit ein normaler gegen das Innere gerichteter Druck vorhanden sein, welcher, da alle in der Oberfläche parallelen Fläche liegenden Moleküle in gleicher Weise gezogen werden, der Größe der Oberfläche proportional sein muß.

Die Einheit der Fläche wirkenden Druck  $K$  nennen wir den Normaldruck. Die Dimensionen des Normaldruckes ergeben sich aus der Überlegung, daß das Produkt aus dem Normaldruck und einer Fläche eine Kraft ist, d. h. der Normaldruck die Kraft pro Flächeneinheit bedeutet, es ist demnach

$$K = z [\mu \lambda \tau^{-2} \lambda^{-2}] = z [\mu \lambda^{-1} \tau^{-2}].$$

Die Dimensionen des Normaldruckes müssen in der eben betrachteten Schicht, die durch die Oberfläche, innen durch die von der Oberfläche nach unten derselben parallelen Fläche begrenzt ist, auch eine der Oberfläche parallele Spannung, die Oberflächenspannung, vorhanden sein.

Die der Oberfläche parallele Komponente der Anziehungen, die der Oberfläche senkrechte Komponente uns den Normaldruck liefert.

Wenn wir durch die Oberfläche eine Linie gelegt nach irgend welcher Richtung, so werden an dieser, und zwar senkrecht zu derselben, nach entgegengesetzten Richtungen gleiche Kräfte wirken. Die oberflächliche Schicht der Flüssigkeit muß sich demnach verhalten wie eine gespannte Membran, man nennt deshalb auch vielfach die Oberflächenschicht Flüssigkeitshäutchen.

Die Oberflächenspannung, welche auf alle in einer Linie der Oberfläche liegenden Moleküle nach entgegengesetzten Richtungen einen gleichen Zug ausübt, ist der Länge einer in der Oberfläche gedachten Schnittlinie proportional.

Die auf die Längeneinheit der Schnittlinie wirkende Kraft  $O$  ist die Oberflächenspannung. Ihre Dimension ergibt sich daraus, daß das Produkt aus der Oberflächenspannung und einer Länge einen Druck ergibt, eben weil sie der Zug pro Längeneinheit sein soll. Es ist demnach

$$O = z [\mu \lambda \tau^{-2} \lambda^{-1}] = z [\mu \tau^{-2}].$$

Die Dimensionen der Oberflächenspannung kommt die Länge hinzu, weil sie der Zug pro Längeneinheit sein soll. Es ist demnach

Die Oberflächenspannung bewirkt gleichzeitig, daß in gekrümmten Oberflächen der Normaldruck ein anderer wird als in ebenen Oberflächen.







in dem Zuge  $Ord\varphi$  herrührende, der Normale in  $O$  parallele Komponente

$$Ord\varphi \frac{r}{\varrho_1}.$$

Genau dieselbe Komponente erhalten wir von dem an der Länge  $Bb$ , welche an dem andern Ende des Kreisbogens  $AB$  liegt, wirkenden Zuge  $Ord\varphi$ , so daß der von  $Aa$  und  $Bb$  herrührende Oberflächendruck gleich  $2Ord\varphi \frac{r}{\varrho_1}$  ist.

Gleiches gilt von den Elementen  $rd\varphi$ , welche bei  $C$  und  $D$ , den Enden des zu  $AB$  senkrechten Schnittes  $CD$  liegen, nur daß wir dort zur Berechnung des Kosinus des Winkels  $CPM$ , in den Nenner den Radius des zu  $AB$  senkrechten Krümmungskreises  $\varrho_2$  einsetzen müssen.

Von den vier betrachteten Elementen  $rd\varphi$  erhalten wir deshalb als  $20$  bzw. auf die vier Flächenstücke, die wir als Dreiecke mit der Basis  $rd\varphi$  und der Höhe  $r$  ansehen können, wirkenden Oberflächendruck

$$2Or^2d\varphi \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right).$$

Den auf die ganze Kalotte wirkenden Druck erhalten wir, wenn wir nach und nach für je vier, also an je zwei zueinander senkrechten Schnitten, liegenden Dreiecken die Drucke bestimmen und die Summe aller dieser Drucke bilden. Bedeuten also  $\varrho_m$  und  $\varrho_n$  die Krümmungsradien irgend zweier zueinander senkrechter Schnitte, so können wir die Summe schreiben

$$\sum 2Or^2d\varphi \left( \frac{1}{\varrho_m} + \frac{1}{\varrho_n} \right).$$

Bezeichnen wir mit  $R$  den Radius der stärksten Krümmung, also den kleinsten Krümmungsradius, und mit  $R_1$  den Radius der schwächsten Krümmung, also den größten Krümmungsradius, welcher bei Herstellung der Schnitte vorhanden ist, so ist nach einem von Euler bewiesenen Satze stets

$$\frac{1}{\varrho_m} + \frac{1}{\varrho_n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

Die Summe der reziproken Werte der Krümmungsradien zweier zueinander senkrechter Schnitte, hat bei einer gegebenen Oberfläche immer denselben Wert und ist gleich der Summe der reziproken Werte des größten und kleinsten Krümmungsradius. Wir können demnach aus jenem den Oberflächendruck darstellenden Ausdruck diesen konstanten Faktor herausheben und erhalten

$$\left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \sum 2Or^2d\varphi.$$

Ohne merklichen Fehler, soweit es die Größe der Fläche angeht, können wir die Oberfläche der Kalotte als einen mit dem Radius  $r$  beschriebenen Kreis betrachten, wir erhalten dann die Summe aller Dreiecke  $rd\varphi$ , da  $r$  konstant angesehen wird, wenn wir für  $\varphi$  einsetzen  $\frac{\pi}{2}$ , also

$$Or^2\pi \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Der in einer gekrümmten Oberfläche, überall gleiche Krümmung vorausgesetzt, vorhandene, an jedem Punkte derselben bzw. auf jedes Oberflächenelement normal zur Oberfläche wirkende Druck ist demnach der Größe des Oberflächenelementes proportional. Beziehen wir ihn, gerade wie den Normaldruck auf die Flächeneinheit, so wird derselbe

$$O \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Der Oberflächendruck hat die Dimension des Normaldruckes, denn er ist der Quotient aus der Oberflächenspannung  $\sigma [\mu \tau^{-2}]$  und einer Länge, also  $\sigma [\mu \lambda^{-1} \tau^{-2}]$ .

Als Konstante des Oberflächendruckes haben wir die Oberflächenspannung erhalten. La Place hat eine andere Konstante  $H$  eingeführt, welche dem Doppelten der Oberflächenspannung gleich ist. In einer Kugelfläche ist  $R = R_1$ , somit wird in dieser der Oberflächendruck

$$\frac{2O}{R} = \frac{H}{R}.$$

Führen wir demnach als Konstante des Ausdruckes für den Oberflächendruck den Druck ein, welchen die Flächeneinheit einer Kugelfläche, deren Radius die Länge eins hat, erfährt, so ist diese von La Place eingeführte Konstante  $H$  gleich der doppelten Oberflächenspannung, und mit dieser Konstanten wird der Oberflächendruck

$$\frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

In einer Ebene ist ein solcher Oberflächendruck nicht vorhanden, da dort die zur Normale parallelen Komponenten gleich Null werden. Das gibt auch unser Ausdruck zu erkennen; denn bei einer Ebene werden sowohl  $R$  als  $R_1$  unendlich groß, ihre reziproken Werte also gleich Null.

Bei einer nach außen konvexen Oberfläche tritt dieser Oberflächendruck zu dem in einer ebenen Oberfläche derselben Flüssigkeit vorhandenen Normaldruck hinzu, indem dieser Druck, der in jedem Normalschnitt gegen den Mittelpunkt der Krümmung gerichtet ist, gegen das Innere der Flüssigkeit wirkt.

Bei einer nach außen konkaven Fläche  $A, B_1$  Fig. 104 ist der Normaldruck um diese Größe kleiner als in der Ebene, da die auch hier gegen  $C_1$  gerichtete Komponente der Oberflächenspannung nach außen wirkt. Nennen wir den auf die Flächeneinheit bezogenen Normaldruck in einer ebenen Oberfläche derselben Flüssigkeit  $K$ , so erhalten wir für den in einer gekrümmten Oberfläche vorhandenen Normaldruck<sup>1)</sup>

1) Der Satz wurde zuerst abgeleitet von *Thomas Young*, Philosophical Transactions of London Royal Society for 1805, p. 65; von *La Place*: Sur l'action capillaire. Supplément au X livre du traité de mécanique céleste; von *Poisson*: Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831; von *Gauß*: Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrum. Commentat. societ. reg. Göttingen. 7. p. 43 ff. 1832. — Man sehe auch *Quincke*, Poggend. Ann. 185. p. 62. 1868; *J. Stahl*, Poggend. Ann. 189. p. 239. 1870; *Beer*, Elastizität und Kapillarität. Leipzig 1869, bei Teubner; *Duclaux*, Théorie élémentaire de la Capillarité. Paris 1872, Gauthier-Villars.

$$P = K \pm \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right),$$

worin das positive Vorzeichen für konvexe, das negative Vorzeichen für konkave Flächen gilt. Unterscheiden wir die Krümmung der Oberfläche, ob konvex oder konkav, dadurch, daß wir die Vorzeichen der Radien positiv für konvexe, negativ für konkave Radien wählen, so können wir in unserm Ausdrucke dem zweiten Gliede allgemein das positive Vorzeichen geben, also setzen

$$P = K + \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

#### § 74.

**Experimenteller Nachweis der Oberflächenspannung; Versuche von Dupré, van der Mensbrugghe, Sondhaus.** Der nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen in einer ebenen Oberfläche vorhandene Sogalldruck läßt sich nicht direkt experimentell nachweisen, dagegen wohl die Oberflächenspannung und der aus derselben folgende Oberflächenruck. Am besten eignen sich dazu flüssige Lamellen, mit deren Eigenschaften sich Plateau<sup>1)</sup> in ausgedehnter Weise beschäftigt hat. Als Flüssigkeit, aus welcher man die Lamellen verfertigt, empfiehlt Plateau eine Mischung aus einer Lösung Marseiller Seife und Glyzerin, über deren Herstellung er zuletzt<sup>2)</sup> folgende Angaben gemacht hat.

Man soll zur Herstellung eine warme Witterung wählen oder muß erst dafür sorgen, daß während der ganzen Dauer der Zubereitung die Temperatur nicht unter 20° C. herabgeht. Frische Marseiller Seife, die noch ihre ganze Feuchtigkeit besitzt, wird in sehr kleine Stückchen geschnitten und in ihrem 40fachen Gewicht mäßig erwärmten Wassers aufgelöst. Nach Abkühlung auf die Zimmertemperatur wird die Lösung filtriert und dann 3 Volumen derselben mit 2,2 Volumen Glyzerin (Plateau empfiehlt besonders englisches, von Price) gemischt und die Mischung einige Tage stehen gelassen. Sie wird dann auf 3° C. abgekühlt und etwa 24 Stunden auf dieser Temperatur gehalten und bei dieser Temperatur gerührt, wobei man sorgfältig darauf zu achten hat, daß die Temperatur nicht steigt, da sonst der durch die Abkühlung entstandene Niederschlag nicht aufgelöst wird. Nach Beendigung der Filtration läßt man die Flüssigkeit noch 10 Tage stehen, dann ist sie zum Gebrauche fertig.

Je nach der Güte der Seife und des Glyzerins dauern aus dieser Flüssigkeit hergestellte Seifenblasen bis zu 18 und mehr Stunden, wenn man sie sorgfältig aufhebt.

Mit Hilfe von solchen flüssigen Lamellen haben Dupré<sup>3)</sup> und van der Mensbrugghe<sup>4)</sup> durch eine Anzahl hübscher Versuche die Oberflächen-

1. Plateau. Die Untersuchungen Plateaus über flüssige Lamellen finden sich in den *Mémoires de l'Acad. de Bruxelles* von 33. an. Auszüge in *Poggend. Ann.* 6 p. 597. 1861; 130. p. 149 u. 264. 1867; 141. p. 44. 1870.

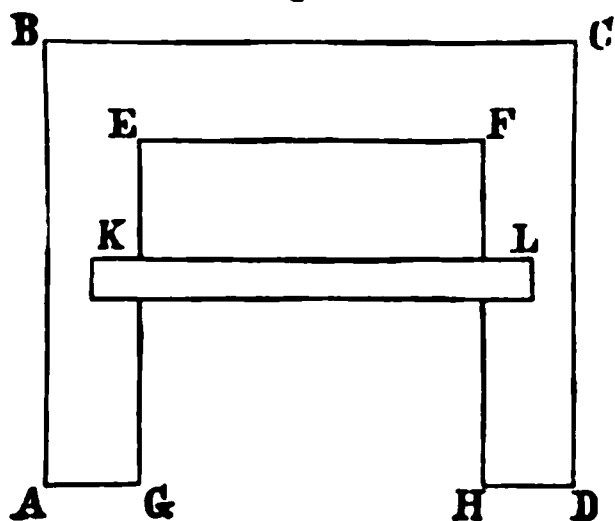
2. Plateau, *Poggend. Ann.* 130. p. 264. 1867.

3. A. Dupré, *Ann. de chim. et de phys.* 7. (4.) p. 246. 406. 1866.

4. van der Mensbrugghe, *Bulletin de l'Acad. de Bruxelles.* 22. *Poggend. Ann.* 133 p. 277. 1868.

spannung augenfällig vorgeführt. Dupré nahm ein Metallblech mit viereckigen Ausschnitt, welches vertikal aufgehängt wurde. Ein sehr dünner Metallstreifen  $KL$ , der etwas länger ist als der Ausschnitt  $E$  des Bleches (Fig. 106) breit ist, wurde zunächst in der Nähe  $v$  gehalten, und darauf zwischen  $EF$  und  $KL$  Seifenlösung gebracht,

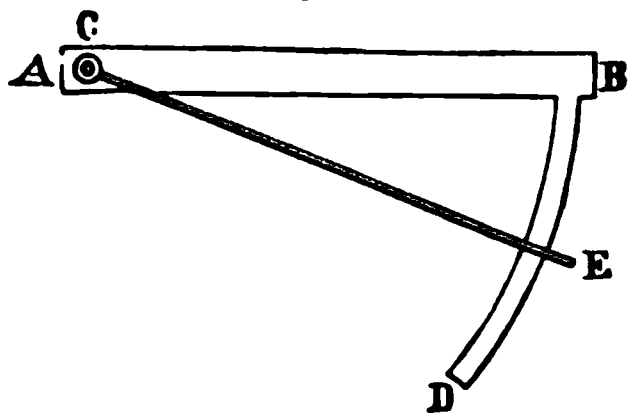
Fig. 106.



mit einem Pinsel sorgfältig beide Bleche benetzt wurden. Zieht man  $KL$  herab, so steht in dem Raume  $EFL$  eine flüssige Lamelle, und wenn  $KL$  losgelassen wird, so hebt es durch die Oberflächenspannung der Flüssigkeit emporgelassen, also der Schwerkraft entgegen unter Überwindung der Reibung gehoben. Stört man die Flüssigkeitslamelle, so fällt der Streifen sofort herab.

Eine etwas andere Form des Versuches stellt Fig. 107 dar. An den Metallstreifen ist ein Kreisbogen  $BD$  und ein um die Ecke bei  $C$  drehbarer Draht angesetzt. Wenn der Draht auf dem Streifen gelegt und mit einem Pinsel Seifenlösung zwischen Draht und Blech aufgetragen wird, so entsteht bei Drehung des Drahtes in die Lage zwischen ihm und dem Metallstreifen eine Lamelle, deren Spannung der Draht zurückzieht, so daß er auf den Streifen zurückkehrt.

Fig. 107.



Van der Mensbrugghe tauchte in Glyzerinlösung einen zu einem Quadrat umgebogenen Eisendraht; zieht man das Quadrat vorsichtig aus der Flüssigkeit heraus, so bildet sich in demselben eine ebene an den Seiten des Quadrates anhaftende Lamelle. Man legt auf die Lamelle einen Seidenfaden passender Dicke, dessen Enden aneinander geknotet sind. Der Seidenfaden schwimmt in der Lamelle und nimmt eine Kurve an, die von den Umständen abhängt, unter welchen der Seidenfaden in die Lamelle gelegt wird. Stört man dann an irgend einer Stelle

die von dem Seidenfaden umgrenzte Fläche durch Eintauchen mit einem Stückchen Fließpapier die Lamelle, so wird sofort der Seidenfaden in einem genauen Kreis auseinander gezogen, der den von der Lamelle eingenommenen Raum von der übrigen Lamelle trennt, wie es Fig. 108 darstellt. Eine andere Form des Versuches zeigt Fig. 109. Man befestigt an zwei Punkten  $m$  und  $n$  der einen Quadratseite die Enden eines Seidenfadens. Wenn man jetzt das Quadrat in die Seifenlösung und zieht es vorsichtig heraus, so daß sich eine Lamelle in demselben bildet, so schwimmt der Seidenfaden in irgend welcher Form in der Lamelle; zerstört man die Lamelle zwischen dem Seidenfaden und dem Drahtstücke  $mn$ , so wird der Seidenfaden sofort in einen Kreisbogen  $mon$  auseinander gezogen, so daß er eine Sehne des Kreises wird.

In einem andern Versuche stellte van der Mensbrugghe aus einem Eisendrahte von  $0,6\text{ mm}$  Dicke einen Ring von  $33,3\text{ mm}$  Durchmesser her, der von drei Füßen ebenfalls von feinem  $0,25\text{ mm}$  dicken Eisendraht

— Länge getragen wurde, Fig. 110. Der Ring wurde mit Glycerinsäure bestrichen horizontal aufgestellt. Ein größerer Eisenring von — Durchmesser wurde mit einer Lamelle versehen und so über den unteren Ring gebracht, daß die gebildete Lamelle den unteren Ring be-

hrte. Wurde der obere Ring gehoben, so bildete, — die Figur zeigt, die Lamelle zwischen den beiden Ringen eine zylindrische Fläche, deren der — parallel der Schnittlinie Kettenlinie ist. Bei ausreichender Hebung des oberen Ringes wird der untere Ring gehoben, und schwebt an der flüssigen Lamelle in stabilem Gleichgewicht.

Die Oberflächenspannung der Lamelle übt auf den Ring einen Zug aus parallel der Tangente der Lamellenfläche, dort wo sie den Ring berührt. Die vertikale Komponente dieses Zuges trägt den Ring. Der Ring muß deshalb gehoben werden, wenn sein Gewicht nicht zu groß ist, so daß vor dem Heben die Lamelle zerreißt. Er muß so weit dem unteren Ring folgen, also so weit gehoben werden, daß sein Gewicht gleich ist dem von der Oberflächenspannung herrührenden Zuge multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den die an dem unteren Rande an die zylindrischen Fläche gelegte Tangente mit der Vertikalen bildet. Da dieser Winkel je nach dem Abstand der beiden Ringe erheblich verschieden sein kann, so kann das Gewicht des unteren Ringes erheblich verschieden sein, er wird stets in stabilem Gleichgewicht getragen, so lange sein Gewicht unterhalb der vorhin angegebenen Grenze bleibt.

Man kann dieses Verfahren benutzen, um die Oberflächenspannung zu messen, und van der Mensbrugghe hat einen Versuch derart durchgeführt, wie es ähnlich früher schon Dupré<sup>1)</sup> hatte. Besser gelingt aber die Messung nach dem Verfahren von Sondhaus<sup>1)</sup>. Man nimmt zwei Drahtringe von gleichem Durchmesser, der eine steht auf drei Füßen und wird, erforderlichenfalls durch Belastung der Füße, so schwer gemacht, daß er nicht wie bei der Anordnung von van der Mensbrugghe gehoben wird. Der zweite Ring, der gerade so, wie es Fig. 110 zeigt, durch einen rechtwinklig gebogenen, mit einem längeren Stiel versehenen Draht getragen wurde, war an der einen Seite einer hydrostatischen Wage (Fig. 95, 365) befestigt und durch die erforderlichen Gewichte auf der andern Seite



Fig. 108.

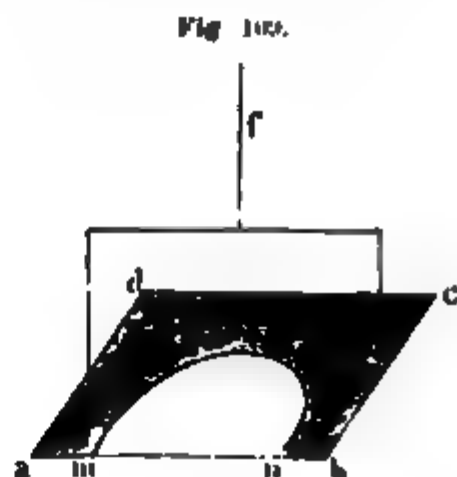


Fig. 109.

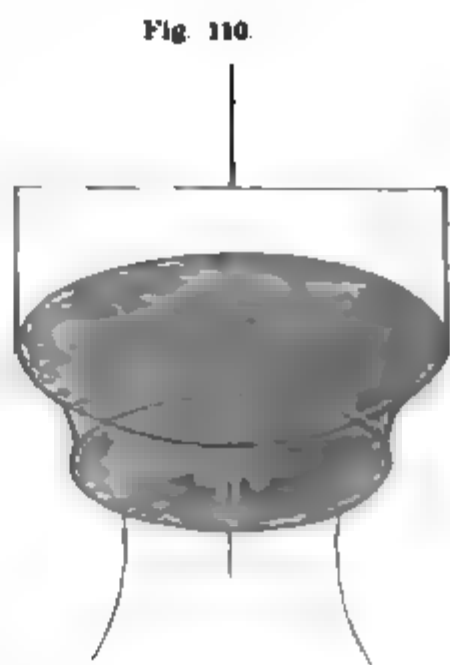


Fig. 110.

<sup>1)</sup> Sondhaus, Poggend. Ann. Erg.-Bd VIII p 266. 1878.

genau ins Gleichgewicht gebracht. Der untere Draht ring wurde so aufgestellt, daß er den an der Wage hängenden gerade berührte. Es wurden dann beide Ringe mittels eines Pinsels mit Seifenflüssigkeit bestrichen und der Wagebalken ein klein wenig gehoben. Damit der an der Wage hängende Ring unter Lamellenbildung dieser Hebung folgte, war es nötig auf der andern Wagschale das Gewicht zu vermehren. Vorsichtige Vermehrung des Gewichtes ließ es dann erreichen, daß der von der Wage getragene Ring im Gleichgewicht hing, daß er also durch die Oberflächenspannung der Lamelle genau so stark herunter, wie durch den Gewichtsüberschuß auf der andern Wagschale emporgezogen wurde. Der den Gleichgewichtszustand bewirkende Gewichtsüberschuß ist gleich der doppelten Oberflächenspannung, da die beiden Oberflächen der Lamelle durch ihre Spannung wirken. Bei einem in dieser Art von Sondhaus mit Plateauscher Glycerinflüssigkeit durchgeführten Versuche hatten die Ringe 6,8<sup>cm</sup> Durchmesser, der an der Wage hängende obere Ring wog 7,83<sup>g</sup>, und um der Lamellenspannung das Gleichgewicht zu halten, waren 1,20<sup>g</sup> hinzuzufügen. Der Quotient

$$\frac{1,2}{\pi \cdot 6,8} = 0,0562^g$$

gibt die Spannung in den beiden Oberflächen der Lamelle für die Länge 1<sup>cm</sup>; die Oberflächenspannung ist demnach 0,0281 pro Cm oder 2<sup>·10<sup>-6</sup></sup> für das Millimeter.

Das beschriebene Verfahren ist nur für wenige Flüssigkeiten anwendbar, da nur wenige Flüssigkeiten, fast nur Seifenlösungen solche Lamellen bilden. Indes fand Sondhaus, daß man durch eine kleine Modifikation des Verfahrens die Oberflächenspannung einer ganzen Reihe von Flüssigkeiten nachweisen und wenigstens sehr angenähert messen kann. Nachdem man den Ring an die Wage gehängt und sein Gewicht ausgeglichen hat, setzt man ein flaches Gefäß, welches etwas der zu untersuchenden Flüssigkeit enthält, unter den Ring, bringt den letzteren mit der Flüssigkeit zur Berührung, und legt auf die andere Wagschale so viel Gewicht, daß der Ring in die Höhe gehoben wird. Es bildet sich eine Lamelle zwischen dem Ringe und der Flüssigkeitsoberfläche, und bei passender Belastung der Wage stellt sich Gleichgewicht her zwischen der Spannung der Lamelle und dem Zuge der Gewichte. Mit einem versilberten Kupfer ring, der von Quecksilber benetzt wird, gelang es selbst die Oberflächenspannung des Quecksilbers zu messen und deren starke Änderung mit der Temperatur zu konstatieren.

Bei diesen Versuchen darf man nicht zu kleine Ringe anwenden, da mit Hebung des Ringes sich die Lamelle an der Oberfläche der Flüssigkeit zusammenzieht, so daß die Lamelle nicht mehr ein gerader Zylinder, sondern ein abgestumpfter Kegel wird. Es wird somit nur die vertikale Komponente des Lamellenzuges gemessen. Man findet die Oberflächenspannung, wenn man einfach das Übergewicht durch den Umfang des Ringes dividiert zu klein. Wir kommen auf die von Sondhaus bestimmten Oberflächenspannungen in § 79 und § 80 zurück.

Zum Nachweise des aus der Oberflächenspannung sich ergebenden Druckes kann man ebenfalls Lamellen wählen, nämlich Seitenblasen. Die Wände einer Seifenblase sind auf der äußern Seite konvex, auf der innern



akav gekrümmt. Auf der äußern Seite ist daher der gegen den Mittelpunkt der Blase gerichtete Druck, wenn wir den Radius der Blase mit  $R$  bezeichnen,

$$P = K + H \frac{1}{R};$$

auf der innern Seite, wenn wir den Radius der innern Fläche wegen der sehr geringen Dicke der flüssigen Hülle gleich dem der äußern Kugeloberfläche setzen, ist der vom Mittelpunkt fortgerichtete Druck

$$P_1 = K - H \frac{1}{R}.$$

Die beiden Drucke liefern als Resultierende den gegen den Mittelpunkt gerichteten Druck

$$P - P_1 = 2 H \frac{1}{R}.$$

Man nimmt den Druck leicht wahr, denn schließt man das Rohr, durch welches man die Blasen dargestellt hat, mit dem Finger, so behält die Blase ihre ursprüngliche Größe; wenn man das Rohr aber öffnet, so wird die Blase rasch kleiner, indem jetzt die in der Blase vorhandene Luft dem Drucke folgen und entweichen kann. Hat man die Blasen mit Kohlenrauch oder Leuchtgas hergestellt, so sieht man den austretenden Strom, indem man die Öffnung einer Flamme nähert, welche das austretende Gas schon entzündet, wenn die Öffnung noch ziemlich weit von der Flamme ist.

Plateau<sup>1)</sup> hat den Oberflächendruck gemessen, indem er Seifenblasen aus einem kleinen Trichter blies, dessen passend verlängertes Rohr U-förmig gebogen und mit Wasser gefüllt war; zur Herstellung der Blase war unter dem Konus des Trichters seitlich ein verschließbares Rohr angebracht. Der Druck  $P - P_1 = p$  wurde so durch die Wassersäule gemessen, um welche das Wasser in dem offenen Schenkel des U höher stand. Nach der soeben entwickelten Gleichung muß

$$p R = 2 H = 4 O$$

In Messungen an 10 Blasen aus Glyzerinflüssigkeit, deren Durchmesser zwischen 7,55 und 48,10<sup>mm</sup> betrugen, gaben für das Produkt aus der gemessenen Niveaudifferenz  $p$  der Wassersäulen des Manometers und dem Radius der Kugel

$$p R = 11,375.$$

Die Zahl gibt die den Druck auf die Luft im Innern der Blase äquivalente Wasserhöhe für eine Blase vom Radius eines Millimeters oder den doppelten Oberflächendruck pro Quadratmillimeter einer Kugeloberfläche vom Radius 1<sup>mm</sup>. Für die Oberflächenspannung, welche gleich  $\frac{1}{2} H$  folgt demnach

$$O = \frac{11,375}{4} = 2,844 \text{ mg},$$

Wert, welcher dem von Sondhaus für die Plateausche Flüssigkeit ge-

<sup>1) Plateau, Poggend. Ann. 114. p. 604. 1861.</sup>



fundenen Werte der Oberflächenspannung  $2,81—2,83^{\text{mg}}$  für das Millim so nahe kommt, daß diese beiden Beobachtungen einen schönen experimentellen Beweis dafür liefern, daß die Konstante  $H$  des Oberflächendruckes gleich der doppelten Oberflächenspannung ist, wie es unsere leitung ergab.

## § 75.

**Einfluß der Wände.** Auch die festen Körper üben, wie wir sah auf die Flüssigkeitsteilchen eine anziehende Wirkung aus, es muß also den Wänden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes zwischen den Teil der festen Wand und den Flüssigkeitsteilchen eine Wechselwirkung stattfinden. Diese Einwirkung muß sich in doppelter Weise geltend machen.

Zunächst muß, worauf Poisson<sup>1)</sup> zuerst aufmerksam machte, in der Nähe einer in eine Flüssigkeit eingetauchten Wand eine Änderung in der Dichtigkeit der Flüssigkeit bewirkt werden. Wenn die Lage der einzelnen Moleküle im Innern der Flüssigkeit von den Anziehungen der umgebenden Moleküle abhängt, so muß, wenn die Anziehung der Wandschicht eine andere ist als die Anziehung einer an derselben Stelle gedachten Flüssigkeitsschicht, die Verteilung der Moleküle in derselben eine andere werden als inmitten der Flüssigkeit. Ist die Anziehung der Wand auf die Flüssigkeitsmoleküle eine stärkere, so müssen in der der Wand nächsten Flüssigkeitsschicht mehr Moleküle sich ansammeln als in anderen parallel der Wand im Innern der Flüssigkeit liegenden Schichten. Die der Wand zunächst liegende Flüssigkeitsschicht muß demnach eine größere Dichtigkeit erhalten als die übrige Flüssigkeit. Diese Verdichtung muß sich bis zu einer gewissen Entfernung von der Wandfläche erstrecken, denn die unmittelbar an der Wand anliegende verdichtete Schicht muß eine ähnliche Wirkung auf die folgende Schicht ausüben, wie die Wand auf die erste Schicht, welche indes nicht ganz so stark sein kann als die Anziehung der Wand selbst. In dieser Weise erkennt man, daß die Verdichtung an der Wand am größten sein muß, und daß mit Entfernung von der Wand die Dichtigkeit allmählich abnehmen muß, bis sie in einem gewissen Abstände von derselben die normale der Flüssigkeit wird.

Das Entgegengesetzte muß eintreten, wenn die Anziehung der Wand auf die Flüssigkeit eine kleinere ist als jene einer an der Stelle der Wand gedachten Schicht derselben Flüssigkeit.

Die in der Nähe der Wand befindlichen Moleküle erhalten in diesem Falle gegen die Flüssigkeit hin einen stärkeren Antrieb als gegen die Wand, es können deshalb in der Nähe der Wand nicht so viele Moleküle vorhanden sein, als in entsprechenden Schichten im Innern der Flüssigkeit.

Zweitens aber muß in der Nähe der Wand eine Krümmung der Oberfläche der Flüssigkeit eintreten, es kann die Flüssigkeit, wenn wir etwa eine solche, deren Oberfläche horizontal ist, eine vertikale Wand eintauchen nicht bis an die Wand hin eine horizontale ebene Oberfläche erhalten, wenn die Wand unter einem rechten Winkel schneidet, sie muß vielmehr

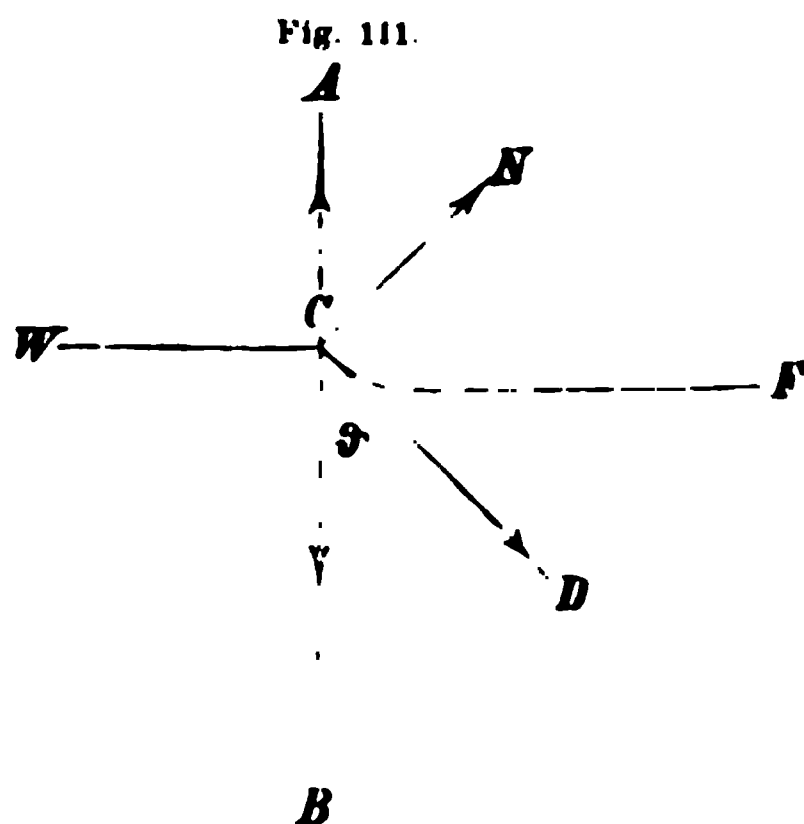
1) Poisson, Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831. Im *Ann. von Link, Poggend.* Ann. 25. 1832 u. 27. 1833.

einem andern Winkel schneiden, welcher von den Anziehungen zur Flüssigkeit und von der Kohäsion der Flüssigkeit ab-

s zu erkennen und zugleich zu bestimmen, von welchen Umständen dieses Winkels abhängt, sei Fig. 111  $AB$  eine feste Wand, welche in eine Flüssigkeit eintaucht, deren Oberfläche in dem Abstände von der Wand horizontal sei. Die Oberfläche der Flüssigkeit sei in der Nähe der Wand nach außen konvex gekrümmt, und ein der Wand anliegendes Flüssigkeitselement schneide die Wand in dem Winkel  $BC'D = \theta$ . Es sei also  $CD$  Tangente an der Oberfläche im Schnittpunkte.

Es wirken auf das letzte Flüssigkeitselement in der Oberfläche eine Reihe von Kräften, welche bei der Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen sich ausgleichen müssen, wenn das Element im Gleichgewicht sein soll.

Es sind erstens ein gewisser Druck  $CN$ , normal zur Wand in  $C$ , herrührend von der Kohäsion der gegen die benachbarten Flüssigkeitsteile, zweitens ein Zug  $CD$ , welcher die Tangente der Oberfläche in der Richtung der Kräfte, also die in den vorhergehenden Abschnitten besprochene Oberflächenspannung ist, welche hier einwirkt, da nur nach der einen Richtung eine Anziehung vorhanden ist. Drittens ein Zug  $CW$  in dem Winkel  $\theta$  vor-



herziehend die Flüssigkeitsteilchen einen Zug aus, dessen Richtung innerhalb des Winkels  $\theta$  liegt, und dessen Stärke wesentlich abhängt von der Beschaffenheit der Flüssigkeit an der Oberfläche der Wand. Dazu kommt die Anziehung der festen Wand, also aller Moleküle, welche in der Wand liegen, aus mit dem Radius der Wirkungssphäre in das Innere des Elements beschriebenen Halbkugel liegen, auf das Flüssigkeitselement. Die Richtung des sich hieraus ergebenden, resultierenden Zuges würde zur Wand normale Richtung  $CW$  sein, wenn wir die Wand homogen betrachten dürften. Das wird indes nicht der Fall sein, weil die in die Flüssigkeit tauchende Wandschicht durch die Anziehung der Flüssigkeit eine Lockerung erfahren haben, infolge deren die untere Hälfte der Halbkugel ohne Zweifel eine etwas andere Dichtigkeit ist, als diejenige der oberen Hälfte. Die Richtung der resultierenden Kraft wird deshalb in den Winkel  $WCA$  fallen.

Zusammen mit den molekularen Anziehungen würde dann noch die Wirkung der Oberflächenspannung kommen, welche wir indes gegenüber den molekularen Anziehungen nach den Bemerkungen des § 72 als verschwindend klein außer Acht lassen dürfen.

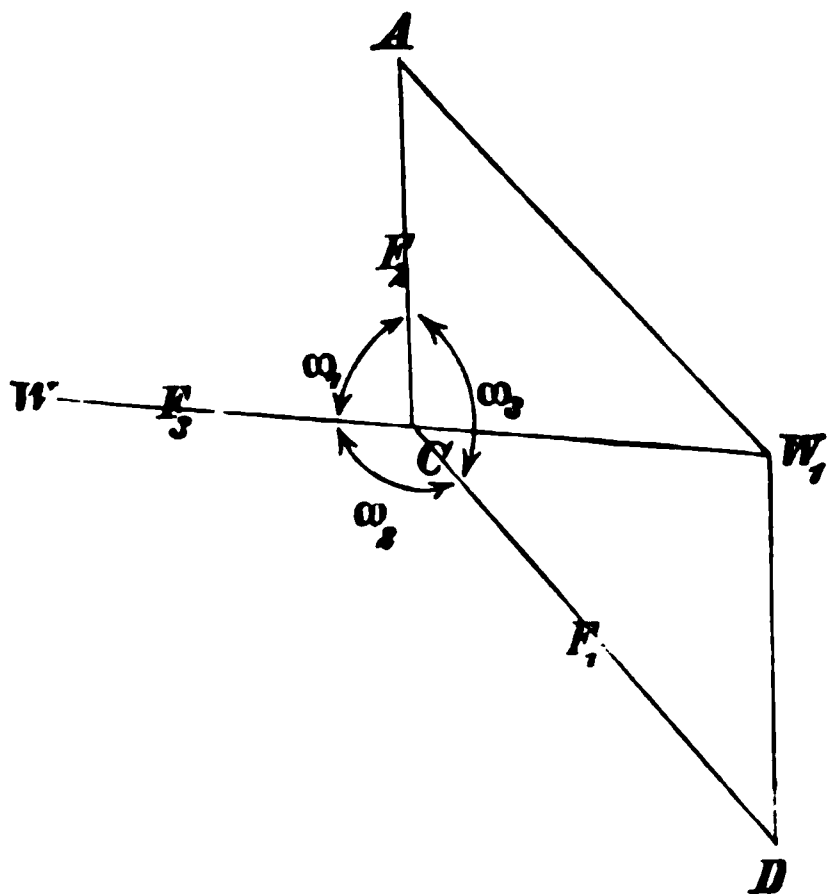
Wir zerlegen nun von allen diesen Kräften ihre Komponenten erstens parallel zur Wand, zweitens senkrecht zur Wand, sei diese gleich  $F_1$ , zweitens parallel  $AB$ , sei diese gleich

$F_2$ , und zwar positiv, wenn dieselbe nach  $A$  hin, also von der Flüssigkeit nach außen gerichtet ist und drittens parallel  $CW$ , sei diese gleich  $F_3$ .

Die Resultierende  $F_1$  hängt nur von der Anziehung der Flüssigkeit auf das betrachtete Element ab, dieselbe wird deshalb einfach proportional der im § 73 abgeleiteten Oberflächenspannung respektive der Konstante gesetzt werden dürfen, da der hauptsächlichste Teil dieser Resultierenden die tangential Komponente der in der oberflächlichen Schicht der Flüssigkeitsteilchen ist. Die Kräfte  $F_2$  und  $F_3$  dagegen hängen von der Anziehung des Festen und des Flüssigen ab, also von der Adhäsion des Flüssigen zum Festen.

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist die, daß diese an dem Element wirkenden Kräfte sich aufheben. Stellen  $F_1, F_2, F_3$  (Fig. 112.) die Größe und Richtung nach die drei resultierenden Kräfte dar, kennt man sofort aus der Bedingung des Gleichgewichtes, nach

Fig. 112.



je zwei derselben eine Mittel geben müssen, welche der an Größe gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt sein müssen, die drei Kräfte sich verhalten sen wie die Seiten eines Dreieckes, welches aus den Kräften  $F_1, F_2, F_3$  und den Nebenwinkeln der Winkel, miteinander bilden, konstruiert wird<sup>1)</sup>. Denn bilden wir mit den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  das Kräfteparallelogramm, so muß, wenn das Gleichgewicht vorhanden sein soll, die Diagonale  $CW_1 = CW$  mit  $WW_1$  muß eine gerade Linie sein. Demnach ist in dem Dreieck  $ACW_1$  der Winkel  $ACW_1$  der Nebenwinkel des Winkels  $\omega_1$ , welchen  $F_1$  und  $F_2$  miteinander bilden, der

$AW_1C = DCW_1$  ist Nebenwinkel des Winkels  $\omega_2$ , den  $F_1$  und  $F_3$  einschließen, und schließlich  $CAW_1$  ist Nebenwinkel von  $\omega_3$ . Da in einem Dreiecke sich die Seiten verhalten wie die Sinus der Gegenwinkel, so können wir die Gleichgewichtsbedingung schreiben

$$\frac{F_1}{\sin \omega_1} = \frac{F_2}{\sin \omega_2} = \frac{F_3}{\sin \omega_3},$$

wo wir an Stelle der Sinus der Dreieckswinkel die Sinus der Nebenwinkel, welche die Kräfte miteinander einschließen, geschrieben haben.

Nennen wir den Nebenwinkel von  $\omega_3$ , den Winkel, welchen das Oberflächenelement mit der Wandfläche bildet,  $\vartheta$ , so ist nach dem allgemeinerten pythagoräischen Lehrsatz

1) Diese Formulierung der Gleichgewichtsbedingung rührt von P. Du Bois-Reymond her; man sehe Quincke, Poggend Ann. 139. p. 59. 1870. P. Du Bois-Reymond, Poggend. Ann. 139. p. 266. 1870.

$$CW_1^2 = F_2^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos \vartheta,$$

ist die Bedingung des Gleichgewichtes für den Winkel  $\vartheta$ ,

$$\cos \vartheta = \frac{F_1^2 + F_2^2 - F_3^2}{2 F_1 F_2}.$$

In unserem spezielleren Falle ist der der Seite  $F_1$  gegenüberliegende Winkel, da wir  $F_2$  parallel der Wandfläche  $F_3$  senkrecht zu derselben genommen haben, ein Rechter, somit

$$F_1^2 = F_2^2 = F_3^2,$$

demnach

$$\cos \vartheta = \frac{F_2}{F_1}.$$

Es folgt somit, daß der Winkel  $\vartheta$ , unter welchem die Oberfläche der Flüssigkeit die Wandfläche schneidet, nur von dem Verhältnis der beiden Kräfte  $F_2$  und  $F_1$  abhängig ist, von denen die zweite nur von der Krümmung der Flüssigkeit, welche nach der vorhin gemachten Bemerkung der Oberflächenspannung, beziehungsweise der Hälfte der Größe  $H$  gleich geworden kann, und  $F_2$  wesentlich von der Adhäsion des Flüssigen am Festen abhängt. Es folgt somit, daß ein und dieselbe Flüssigkeit auf ebenen Flächen eines und desselben festen Körpers immer unter demselben Winkel, den man als den Randwinkel bezeichnet, schneiden muß.

Die Krümmung der Oberfläche gegen den festen Körper hin kann sich auf das letzte Flüssigkeitselement beschränken, sie muß vielmehr bis zu einem gewissen Abstände von der Wandfläche erstrecken, der größer ist als der Radius der Wirkungssphäre. Je weiter wir von der Wand entfernen, um so mehr muß der Winkel  $\vartheta$  sich dem Rechten nähern, die Oberfläche muß allmählich in die Ebene übergehen.

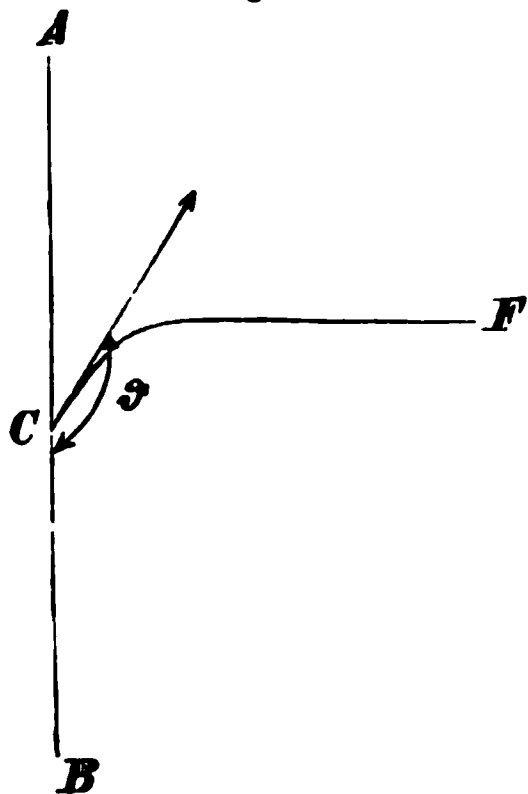
Zunächst erkennt man, daß mit einer Entfernung von der Wand über den Radius der Wirkungssphäre des festen Körpers  $F_2$  kleiner werden muß, er wird aber noch nicht in einem dem Radius der Wirkungssphäre gleichem Abstände zur Null, da, wie wir sahen, in der Nähe der Wand eine Änderung in der Dichtigkeit der Flüssigkeiten eintritt. Die Dichtigkeit geänderten Flüssigkeitsschichten wirken aber auf die Richtung gegen die Flüssigkeiten weiter folgenden in demselben Maße schwächer, ein als die feste Wand auf die nächstliegenden, deshalb ist der Zähler des Ausdruckes für  $\cos \vartheta$  mit Entfernung von der Wand abnehmend. Von da ab, wo derselbe gleich Null geworden ist, treten die gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen der Flüssigkeit ein, es bleibt der in der Ebene vorhandene Normaldruck übrig, dem die Reaktion der unter der Oberfläche liegenden Flüssigkeit das Gleichgewicht hält, die Oberfläche stellt sich wieder normal zu den wirkenden Kräften.

Der Winkel  $\vartheta$  ist ein spitzer, wenn  $F_2$  positiv ist, wenn also die Kräfte parallel der Wand gerichteten Kräfte von der Oberfläche der Flüssigkeit nach außen gerichtet sind; es ist das stets der Fall, wenn die Flüssigkeit die Wand benetzt, wie wir schon daraus schließen können, daß man eine Kugel an einer vertikal aus der Flüssigkeit gezogenen Wand emporheben können. Deshalb sieht man auch stets, daß

eine die Wand benetzende Flüssigkeit sich an der Wand emporzie Oberfläche nimmt die Fig. 111 dargestellte Gestalt an.

Der Winkel  $\vartheta$  ist ein stumpfer, wenn  $F_2$  negativ ist, das heißt die sämtlichen der Wand parallelen Komponenten der Kräfte, welche bei der vorigen Zerlegung erhalten, gegen das Innere der Flüssigkeit der Zeichnung also nach unten gerichtet sind. Es ist das dann

Fig. 113.



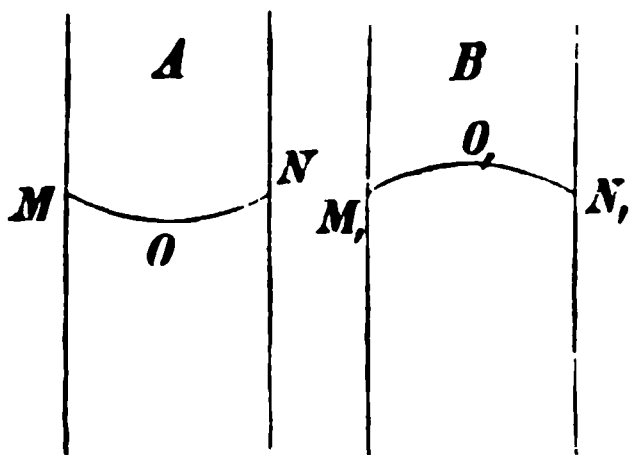
wenn die Wand nicht von der Flüssigkeit wird, wenn also eine in die Flüssigkeit tauchte vertikale Wand keine Flüssigkeit herauszuheben imstande ist. In dem Falle wenn wir eine Glaswand in Quecksilber sehen wir auch, daß die Oberfläche in der Nähe der Wand herabgedrückt wird, sie nimmt die in Fig. 113 dargestellte Form an, sie ist in der Nähe der Wand nach außen konvex ge

Die hier durchgeführten Betrachtungen zeigen, daß in zwei Fällen an einer festen Wand überhaupt kein Gleichgewichtszustand eintreten kann, nämlich erstens, wenn  $F_2 > F_1$ , denn in diesem Falle erhalten wir für den  $\cos \vartheta$  einen Wert größer als 1, und zweitens, wenn die Komponente der zur Wand normalen Kräfte ist, die Resultierende  $F_3$ , also von der

gegen die Flüssigkeit gerichtet ist. Welche Erscheinungen dann eintreten müssen, werden wir später kurz besprechen.

Wenn wir eine feste Wand in einer Flüssigkeit eintauchen, in hinreichend kleiner Entfernung gegenüberstellen, oder wenn wir eine Flüssigkeit in eine enge, sogenannte kapillare Röhre eintauchen, so

Fig. 114.



die ganze Oberfläche im Innern gekrümmt wird. Wenn die Flüssigkeit die Wand benetzt, muß sie sich in der Röhre rings um die Wand emporziehen und ein Durchschnitt durch die Oberfläche muß die Gestalt Fig. 114 A annehmen. Wird die Wand von der Flüssigkeit nicht benetzt, so muß sie rings an der Wand herabgedrückt werden, ein Durchschnitt nimmt die Gestalt Fig. 114 B an.

In Röhren von kreisförmigem Querschnitt muß diese Fläche eine Rotationsfläche werden, da dann jeder Durchschnitt durch die Oberfläche der Flüssigkeit dieselbe Gestalt haben wird. Ist der Durchmesser der Röhre nicht zu groß, so ist die Fläche nahe eine Kugelfläche, wir wollen sie als das Segment einer Kugel betrachten<sup>1)</sup>.

Wir haben bei der Bestimmung des Winkels  $\vartheta$  erwähnt, daß

1) Diese Annahme ist streng genommen nur für sehr enge Röhren gültig. Man sehe darüber außer Poisson a. a. O. Hagen, Poggend. Ann. 57. E. Desains, Annales de chim. et de phys. 51. (3.) 1857; Wertheim, Annales de chim. et de phys. 63. (3.) 1861.

schwere bei Betrachtung der an der Wand wirksamen Kräfte gelassen werden kann. Es folgt daraus, daß der als Randwinkelt Winkel  $\theta$  bei derselben Flüssigkeit und derselben Substanzfläche auch immer derselbe sein muß. Wir werden sehen, daß diese Folgerung bestätigt<sup>1</sup>).

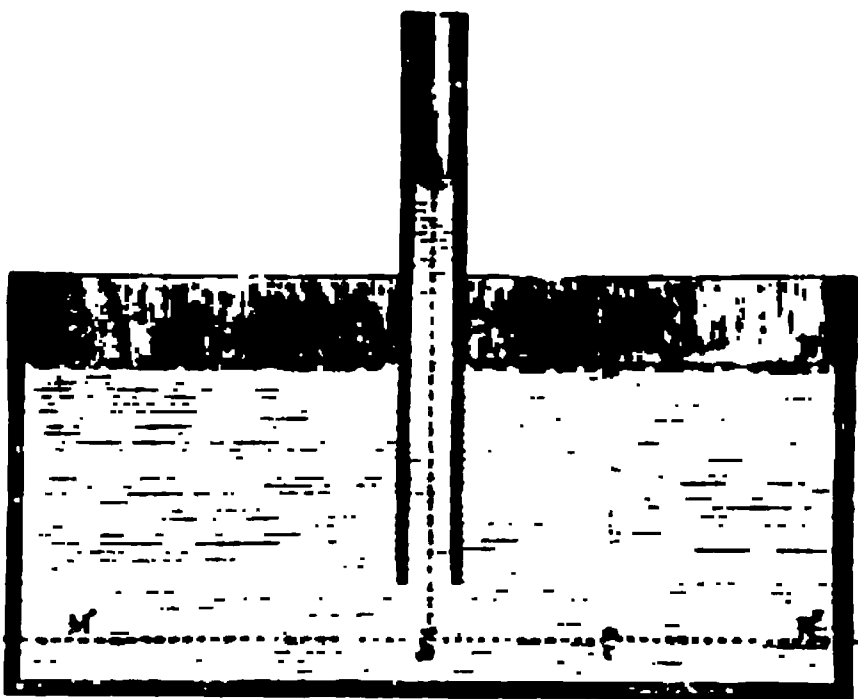
Wir wollen den konstanten Randwinkel stets mit  $\theta$ , seinen Nebenwinkel mit  $\Theta$  bezeichnen. Wir führen in unsere Gleichungen zum Unterchied den großen griechischen Buchstaben  $\Theta$  bezeichnen.

### § 76.

**Niveauperänderungen in kapillaren Röhren.** Da, wie wir in § 75 gesehen haben, der molekulare Druck, den eine Flüssigkeitsoberfläche durch die Anziehung der Flüssigkeitsmoleküle auf sich selbst erfährt, verschieden ist, je nach der Gestalt der Oberfläche, so folgt, daß durch die Veränderung der Oberfläche das Niveau der Flüssigkeit in engen Röhren verschieden sein muß als in damit verbundenen weiten Röhren. Wir stellen uns ein Gefäß mit einer flüssigen Substanz vor, in dem eine enge Röhre einge-

senkt ist. Wir betrachten den Fall, daß die Röhre benetzt wird, die Flüssigkeit also kon-

Fig. 115.



die Oberfläche einer konkav ist, so ist, wenn der Druck, den die Flüssigkeitsoberfläche nach dem Innern der Flüssigkeit ausübt, kleiner als bei einer ebenen Oberfläche ist. Wird daher in eine Flüssigkeitsmasse mit ebener Oberfläche (Fig. 115), z. B. Wasser, eine enge Röhre gestellt, deren Enden offen sind, so ist außerhalb der Röhre der vertikale Druck, der aus der Schwere der Flüssigkeit und dem Normaldruck hervorgeht, größer als im Innern der Röhre. Auswärts wirkt mit  $g$  die aus der Wirkung der Schwere hervorgehende Beschleunigung nach unten, der vertikale abwärts gehende Druck in jedem der kleinen Stücke der Oberfläche gleich  $g + K$ , im Innern der Röhre gleich  $g + K - g$ , wenn wir den von der Oberflächenspan-

<sup>1</sup> Der Satz von der Konstanz des Randwinkels wurde zuerst von Thomas Young in *on natural philosophy* II, p. 685. 1807; Young works I, p. 459 ff. 1816 abgeleitet. Man sehe Quincke, *Ann. der Physik.* 2 p. 147. Er leitet ihn ab Moutier, *C. R.* 70. p. 612 1870. In anderer Weise von Plücker, *Théorie capillaire* im Supplement zum 10. Buche der *Mécanique*, daraus Gilberts *Ann.* 33 1809; Poisson, *Nouvelle théorie de l'Action capillaire* 1831; Gauß, *Principia generalia theoriae figurae fluidorum* in *Berlin Com. soc. reg. Göttingen* 7 p. 43 ff. 1832; Mousson, *Poggend.* 406. 1872 zu dem gleichen Resultate.

nung herrührenden Druck mit  $q$  bezeichnen. Legen wir durch die Flüssigkeit eine mit der Oberfläche parallele Ebene  $M'N'$ , so muß über dieser in der Röhre die Flüssigkeit so viel höher stehen als außerhalb, daß das Gewicht der über dem äußeren Niveau gehobenen Flüssigkeit gleich ist der Differenz zwischen dem vertikal abwärts gerichteten Drucke in einem dem Querschnitt der Röhre gleichen Flächenstücke des äußeren ebenen Niveaus und demselben in der Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre. Denn wir wissen, daß eine der Schwere unterworfenen Flüssigkeit nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn der Druck in allen Punkten einer horizontalen Schicht derselbe ist. Denken wir uns in  $c$  ein dem Querschnitt  $f$  der Röhre gleiches Flächenstück, so ist der dort wirkende Druck, wenn wir gleichzeitig mit  $s$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnen

$$s \cdot f \cdot cd + f \cdot K.$$

Im Punkte  $b$  senkrecht unter der Röhre wirkt das Gewicht der Flüssigkeitssäule  $ba$  vom Querschnitt  $f$ , das Gewicht des Meniskus, welcher über der durch  $a$  gelegten Ebene gehoben ist, das mit  $m$  bezeichnet werde, und die Vertikalkomponente des in der gekrümmten Fläche wirkenden Druckes. Um zunächst die letztere zu bestimmen, denken wir uns ein Flächenelement  $df$  in der Oberfläche, welches mit der Horizontalen den Winkel  $\varphi$  bildet. Der Normaldruck in diesem Elemente  $(K - q) df$  bildet mit der Vertikalen denselben Winkel  $\varphi$ , und die vertikale Komponente ist somit

$$\cos \varphi (K - q) df.$$

$\cos \varphi \cdot df$  ist aber die horizontale Projektion des Flächenelementes  $df$ , somit ist die vertikale Komponente des in dem Flächenelement wirkenden Druckes gleich dem Produkte aus diesem Drucke in die horizontale Projektion des Flächenelementes. Was für dieses Element gilt, gilt für alles, somit ist die vertikale Komponente des Druckes in der Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre einfach gleich  $(K - q) \cdot f$ , da der Querschnitt der Röhre die horizontale Projektion der Oberfläche in der Röhre ist.

Der in  $b$  wirksame Druck ist somit

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f,$$

und die Bedingung des Gleichgewichtes wird

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f = s \cdot f \cdot cd + f \cdot K$$

oder

$$s \cdot f (ab - cd) + m = q \cdot f,$$

Wird die Röhre von der Flüssigkeit nicht benetzt, tauchen wir z. B. eine Glasröhre in Quecksilber, so ist die Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre konvex (Fig. 116). Dadurch ist nach dem Früheren der vertikal abwärts gehende Druck im Innern der Röhre größer als außerhalb, und es ist klar, daß deshalb die Höhe der Flüssigkeit in der Röhre kleiner sein muß als außerhalb.

In ganz gleicher Weise wie vorhin folgt dann wieder, daß der Wichtsunterschied der Flüssigkeitssäulen  $cd \cdot s \cdot f$  und  $ab \cdot s \cdot f + m$  Differenz der vertikalen Drucke bei  $a$  und  $d$  gleich sei; es muß



$$s \cdot f(ab - cd) + m = -gf$$

Die Folgerungen lassen sich leicht durch den Versuch bestätigen. Wir tauchen eine enge Glasröhre in eine Flüssigkeit, welche die Röhren benetzt, so wird im Innern derselben die Oberfläche der Flüssigkeit und die Flüssigkeit erhebt sich bedeutend über das Niveau der Flüssigkeit. Umgekehrt zeigt sich eine Depression bei konvexer

Fig. 116

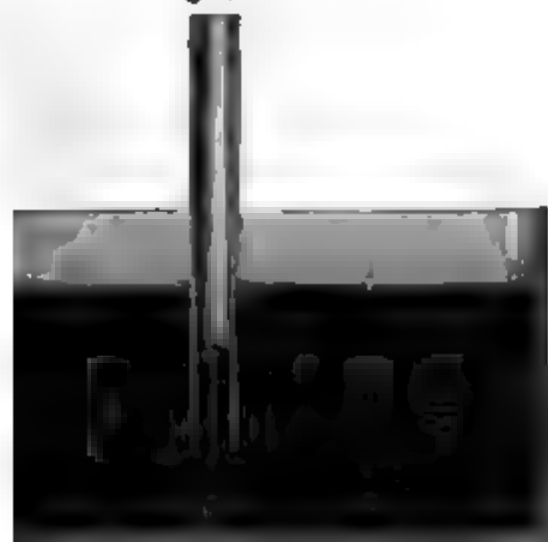


Fig. 117



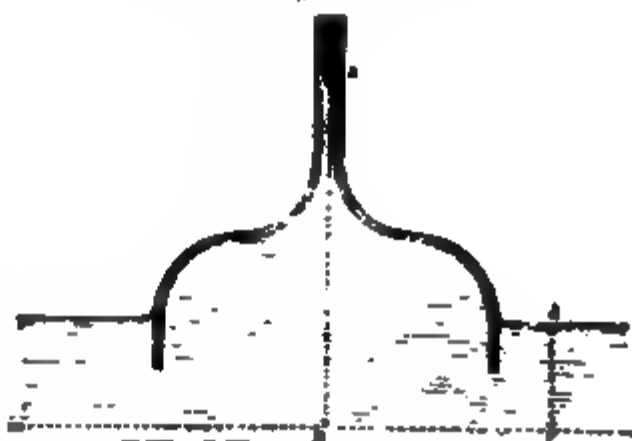
Fig. 118



beim Eintauchen einer Röhre in das sie nicht benetzende. Man kann diese Tatsache sehr anschaulich machen bei U-förmig gebogener Glasröhren (Fig. 117), deren einer sehr weit, der andere aber sehr eng ist. Füllt man ein solches Wasser, so sieht man, wie in Fig. 117, daß das Wasser in dem engen um vieles höher steht als im weiten, während die Oberfläche der Flüssigkeit in dem weiten eine viel geringere Krümmung in dem engen Rohre. Das zeigt sich, wenn man in das Glasrohr Quecksilber gießt. Quecksilber steht dann, wie im engen Rohre viel tiefer als im weiten Rohre.

Ein anderer Versuch kann sehr deutlich bestätigen, was wir soeben nachwiesen, daß die Depression bei benetzender Flüssigkeiten bei be-

Fig. 119



nur von der Krümmung der Oberfläche abhängig ist. Versieht man das Gefäß (Fig. 119) mit einer engen Röhre *a*, und taucht sie weit in Wasser, daß das untere Ende der engen Röhre unterhalb des Wassers reicht, so steigt das Wasser bis zu einer Höhe *h* über dem äußern Niveau; zieht man nun das Gefäß aus dem Wasser allmählich heraus, so muß in der engen Röhre das Wasser die Höhe *h* über dem Niveau des äußern Wassers besitzen, weil, wenn die Höhe, bis zu der die Flüssigkeit ansteigt, proportional

ist der durch die Krümmung der Oberfläche entstehenden Druck. Und das muß selbst der Fall sein, wenn ein Teil des weiten Gefäßes der Flüssigkeit hervorragt. Denn der Druck in  $b$  hängt, wie wir gesehen, nicht ab von der Form des Gefäßes, sondern nur von der Höhe der Flüssigkeit über  $b$ . Wie der Versuch zeigt, kann man auf diese ziemlich große Flüssigkeitssäulen heben.

Taucht man dieses Gefäß umgekehrt, wie in Fig. 120, in Quecksilber, so ist die Depression  $ab$  des Quecksilbers dieselbe, als wenn

FIG. 120



eine Glasröhre von der Weite des engen angesetzten Rohres in Quecksilber eintauchen würde, nach dem vorigen die Depression verlangt.

Einen noch evidenten Versuch führt La Place in „Théorie capillaire“ an.

Taucht man ein horizontales Glasröhrchen, wie  $ABC$ , senkrecht so tief in Wasser, daß der kürzere Schenkel ganz getaucht ist, so steigt die

Wasser in dem längern Schenkel bis zu einer gewissen Höhe  $a$  über der äußern Flüssigkeit  $AJ$ . Zieht man nun das Röhrchen heraus, so bildet sich bei  $A$  ein konvexer Tropfen, und sofort sieht man, wie die Wasser in dem längern Schenkel höher steigt bis  $b$ , weil jetzt in der Oberfläche bei  $A$  der vertikal abwärts gerichtete Druck größer ist, als in der ebenen Oberfläche der äußeren Flüssigkeit. Nimmt

Fig. 121



Fig. 122



man nun vorsichtig Tropfen vorsichtig fort, so wird die Krümmung bei  $A$  kleiner, und man sieht dementsprechend die Flüssigkeit sinkt. Hat man schließlich die Krümmung der Flüssigkeit in  $A$  durch fortgesetzte Wegnahme des Tropfens eben gemacht, ist die Höhe der Flüssigkeit in  $BC$  ebenso, wie sie war, als das Gefäß das Wasser eingetaucht war. Wenn man durch vorsichtiges Zulegen von Tropfen bei  $A$  die frühere Konvexität wieder herstellt, so steigt auch das Wasser in  $BC$  auf seine frühere Höhe an.

Einen ähnlichen Versuch gibt La Place an, um zu zeigen, daß die Depression und Erhebung der Flüssigkeit der gleichen Ursache zuzuschreiben ist.

Gießt man in eine Glasröhre (Fig. 122), bei welcher der eine Schenkel länger ist als der enge, Alkohol, so wird zunächst der Alkohol in dem engen Schenkel höher stehen als im weiten. Durch vorsichtiges Nachtropfen von Alkohol bewirkt man, daß die Krümmung in dem engen Schenkel gerade das Ende erreicht; zunächst ist die Oberfläche konkav, und der Alkohol steht im weiten Schenkel soviel tiefer als vorher. Durch weiteres vorsichtiges Nachtröpfeln

man bewirken, daß die Oberfläche der Flüssigkeit bei  $b$  erst eben, dann wie bei dem vorigen Versuche ein konvexer Tropfen wird. Man beobachtet auch, daß bei ebener Begrenzung in  $b$  die Flüssigkeit im weiten Schenkel nahezu die gleiche Höhe hat als im engen, und bei konvexer, daß die Flüssigkeit in dem weiten viel höher steht; ein Beweis, daß die Erhebung oder Depression in einer Röhre nur von der Gestalt der Oberfläche und somit von den in der Oberfläche vorhandenen Drucken abhängt.

### § 77.

**Steighöhen in verschiedenen Räumen.** Wir gelangten vorhin zu dem Resultat, daß in einer kapillaren Röhre das Gewicht der gehobenen oder deprimierten Flüssigkeit gleich sein muß der Druckdifferenz in der gekrümmten Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre und in einem dem Querschnitt der Röhre gleichen Flächenstücke der ebenen Oberfläche.

Behalten wir die vorhin gebrauchte Bezeichnung bei und setzen die Differenz  $ab - cd$ , die Steighöhe der Flüssigkeit gleich  $h$ , so erhalten wir zur Bestimmung derselben

$$sfh + m = \pm qf,$$

wobei zu beachten ist, daß  $q$  der mittlere Oberflächendruck der flüssigen Oberfläche in der Röhre ist, daß heißt der Oberflächendruck für die Einheit der Fläche, vorausgesetzt, daß dieselbe an allen Punkten der Oberfläche die gleiche ist. Wenn wir das Vorzeichen von  $q$  wie im § 73 bestimmen, also positiv setzen, wenn die Fläche konvex nach außen, dagegen negativ, wenn die Fläche nach außen konkav ist, können wir das doppelte Vorzeichen auf der rechten Seite fortlassen und schreiben

$$sfh + m = - qf.$$

Nehmen wir Rohren von kreisförmigem Querschnitt und solchem Durchmesser, daß die Oberfläche im Innern derselben ein Kugelsegment ist, so erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung des Oberflächendruckes

$$q = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

da in einer Kugel alle Krümmungsradien und an allen Stellen gleich und gleich dem Radius  $\varrho$  der Kugel sind,

$$q = \frac{H}{\varrho}.$$

so ist für das Gewicht der in einer solchen Röhre gehobenen Flüssigkeit

$$sfh + m = - \frac{H}{\varrho} f \dots \dots (1)$$

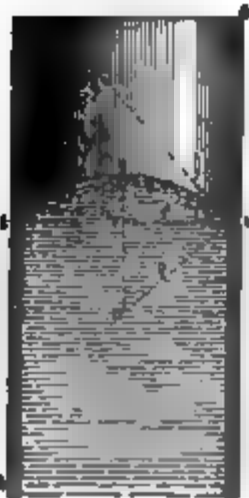
Das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit hängt somit ab von dem Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche und dem Querschnitt der Röhre. Dieser Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche läßt sich leicht aus dem Radius der Röhre bestimmen. Ist  $ab$  (Fig. 123) die

Röhre und  $ust$  die Oberfläche der Flüssigkeit,  $o$  der Mittelpunkt der kugelförmigen Oberfläche und der Radius der Röhre gleich  $r$ , so ist

$$ou = \varrho = \frac{uv}{\cos ouv} = \frac{r}{\cos ouv}.$$

Legen wir im Punkte  $u$  an die Oberfläche der Flüssigkeit eine Tangente, so bildet diese mit der Röhrenwand nach der Seite der Flüssigkeit hin den Winkel  $\vartheta$ , welcher für dieselbe Flüssigkeit und für Material der Röhrenwand konstant ist, da  $\vartheta$  der, wie wir sahen, unter dieser Voraussetzung konstante Winkel ist, unter dem die Oberfläche der Flüssigkeit die Wand der Röhre berührt. Da nun  $ou$  senkrecht zur Tangente und senkrecht zur Röhrenwand  $ua$  in  $u$  ist, so folgt, daß der Winkel  $vuo$  das Supplement von  $\vartheta$ , also gleich  $\Theta$  ist.

Fig. 173.



$$ou = \varrho = \frac{r}{\cos \Theta}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die oben abgeleitete Gleichung für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit, so wird

$$sfh + m = -H \cdot \cos \Theta \cdot \frac{f}{r} = H \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r}.$$

Die Gleichung zeigt unmittelbar, daß, wenn der Winkel  $\vartheta < 90^\circ$ , die Flüssigkeit in der engen Röhre steigt, da dann  $\cos \vartheta$  und damit  $h$  einen positiven Wert hat, daß wenn  $\vartheta > 90^\circ$  eine Depression der Flüssigkeit stattfindet.

Da der Querschnitt der Röhre

$$f = r^2 \pi,$$

so ist auch

$$sfh + m = H \cdot \cos \vartheta \cdot \pi \cdot r,$$

oder

$$\frac{shf + m}{2\pi r} = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta \quad \dots (3).$$

Der Nenner auf der linken Seite ist der innere Umfang der Röhre, der Zähler der Quotient aus dem Gewichte der gehobenen Flüssigkeit. Der Nenner des Quotienten auf der rechten Seite ist der halbe Röhrenumfang, können wir somit bezeichnen als das von der Länge der Berührungslinie zwischen Flüssigkeit und fester Wand. Der Quotient ist das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit, und gelangen dann zu dem Satze, daß dieses Verhältnis unabhängig ist von der Weite der Röhre und nur abhängt von der Schwerkraft der Flüssigkeit und derjenigen der festen Wand, das heißt von der Konstanten  $H$  und  $\vartheta$  nur von dieser abhängen.

Dividieren wir die Gleichung (2) durch  $f$ , so wird

$$sh + \frac{m}{f} = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{r};$$

bei den vorausgesetzten engen Röhren können wir das Gewicht der Röhre vernachlässigen und erhalten

$$sh = H \cdot \cos \vartheta \frac{1}{r}$$

$$h = \frac{H}{s} \cdot \cos \vartheta \frac{1}{r} = a^2 \cos \vartheta \frac{1}{r},$$

wenn wir, nach der von Poisson eingeführten Bezeichnung,  $\frac{H}{s} = a^2$  setzen.

Es folgt also, daß bei hinreichend engen zylindrischen Röhren desselben Materials die Steighöhen oder Depressionen einer Flüssigkeit dem Halbmesser der Röhren umgekehrt proportional sind.

Dieser Satz, den schon ältere Physiker aus ihren Beobachtungen ableiteten, so der Jesuit Honoratius Fabry<sup>1)</sup> um die Mitte des 17. Jahrhunderts, ist in neuerer Zeit durch sehr genaue Beobachtungen bestätigt worden, zunächst von Gay-Lussac, welcher auf Anregung von La Place Versuche zur Prüfung der Theorie anstellte<sup>2)</sup>. Die Röhren, welche Gay-Lussac anwandte, waren sorgfältig kalibriert und ihr Durchmesser aus dem Gewichte eines Quecksilberfadens von gemessener Länge folgendermaßen bestimmt. Ist die Länge des Quecksilberfadens in der Röhre gemessen gleich  $l$ , das Gewicht desselben gleich  $g$ , das spezifische Gewicht des Quecksilbers gleich  $s$  und der Radius der Röhre gleich  $r$ , so ist

$$g = r^2 \pi l s$$

$$r = \sqrt{\frac{g}{\pi l s}}.$$

Die Röhren, in welchen die Steighöhen verglichen wurden, waren gleich in einer durchbohrten Metallplatte befestigt, welche auf den eben geschliffenen Rand eines großen Glasgefäßes gelegt wurde. Das Gefäß wurde durch Stellschrauben so gerichtet werden, daß die Ebene, auf der die Metallplatte lag, genau horizontal und somit die Röhren genau vertikal waren. Nun wurde das Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, die Röhren im Innern durch mehrmaliges Aufsaugen der Flüssigkeit richtig benetzt und dann die Höhe der Flüssigkeitssäulen in den Röhren gemessen.

Die von Gay-Lussac erhaltenen Resultate sind folgende:

Flüssigkeit	Durchmesser der Röhre $2r$	Steighöhe $h$	$2rh$
Wasser . . . . .	$\left\{ \begin{array}{l} 1,294^{\text{mm}} \\ 1,903 \text{ „} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 23,379^{\text{mm}} \\ 15,903 \text{ „} \end{array}$	$\begin{array}{l} 30,262 \\ 30,263 \end{array}$
Alkohol vom spezif. Gew 0,8196	$\left\{ \begin{array}{l} 1,294 \text{ „} \\ 1,903 \text{ „} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 9,398 \text{ „} \\ 6,389 \text{ „} \end{array}$	$\begin{array}{l} 12,164 \\ 12,158 \end{array}$

Man sieht, daß die Werte für  $2rh$  bei den verschiedenen Beobachtungen fast genau dieselben sind, daß also wirklich die Steighöhen der Flüssigkeit in verschiedenen Röhren desselben Materials dem Durchmesser der Röhren umgekehrt proportional sind.

<sup>1)</sup> *Gehler's physikalisches Wörterbuch*. Artikel Kapillarität.

<sup>2)</sup> *Gay-Lussac, Versuche in La Place, Théorie capillaire. Supplément zum 1. Bande der Mécanique celeste. Gilberts Annalen. 33. p. 316 ff. 1809.*

Dasselbe Resultat bestätigen die Versuche von Brunner<sup>1)</sup>, De Bède<sup>2)</sup>, Simon<sup>4)</sup> u. a. für Röhren, deren Querschnitte hinreichend sind, so daß die Voraussetzung einer kugelförmigen Oberfläche erfüllt ist.

Die für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit erhaltene Gleichung

$$shf + m = -qf$$

können wir immer unmittelbar anwenden, wenn in kapillaren Röhren die Krümmung der Oberfläche und damit der Oberflächendruck an allen Stellen dieselbe ist; es ist das z. B. auch der Fall zwischen zwei einander nahe gegenübergestellten parallelen Platten. Dort ist die Flüssigkeitsoberfläche ein Teil einer Zylinderfläche, indem nach der einen Seite hin die Flüssigkeit gar keine Begrenzung hat. Ein durch die Flüssigkeitsoberfläche parallel den Platten gelegter Schnitt schneidet die Oberfläche demnach in einer geraden Linie, der Krümmungsradius dieses Schnitts ist unendlich groß. Ein senkrecht zu den Platten gelegter Schnitt schneidet die Oberfläche dagegen in einem Kreisbogen, dessen Radius  $\varrho$  die Gleichung für die Oberflächenspannung

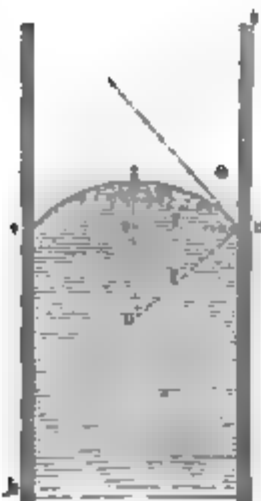
$$q = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)$$

geht daher in diesen Fällen über in

$$q = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Ist (Fig. 124)  $ab$  ein Durchschnitt senkrecht zur Ebene der Platten,  $os = ou = \varrho$  der Krümmungsradius des Schnittes,  $d$  der Abstand der Platten, so erhalten wir auch hier wieder

Fig. 124.



$$\varrho = \frac{ur}{\cos \theta} = \frac{d}{2 \cos \theta}$$

$$-q = H \cos \theta \frac{1}{d} = -H \cos \theta \frac{1}{d}$$

und das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit wird

$$shf + m = H \cos \theta \frac{1}{d} \cdot f.$$

Nehmen wir ein Stück von der Länge  $l$  zwischen den Platten eingeschlossenen Raumes,  $l \cdot d = f$  gleich dem Querschnitt des auf diese Weise eingeschlossenen Raumes, wird

$$\frac{shf + m}{2l} = \frac{H}{2} \cdot \cos \theta.$$

Da die Oberfläche der Flüssigkeit jede der beiden Platten Länge  $l$  berührt, bedeutet die linke Seite der Gleichung wieder das Gewicht der an der Längeneinheit der Berührungslinie gehobenen Flüssigkeit, es ergibt sich für diese somit derselbe Wert wie in kapillaren Röhren.

1) Brunner, Poggend. Ann. 70. 1847

2) E. Desains, Annales de chim. et de phys. 51. (3.) 1857.

3) Bède, Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles. 30. 18

4) Simon, Ann. de chim. et de phys. 32. (3.) 1851.

der nur von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und der festen Wand abhängt.

Für die Steighöhe  $h$  erhalten wir

$$h + \frac{m}{\rho s} = \frac{H}{s} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{d} = a^3 \cos \vartheta \frac{1}{d},$$

worauf für hinreichend kleine Werte von  $d$  das Gewicht  $m$  des Meniskus unberücksichtigt gelassen werden kann.

Die Steighöhe zwischen zwei parallelen Platten ist sonach umgekehrt proportional dem Abstände der beiden Platten; oder die Steighöhe zwischen unendlichen Platten ist halb so groß als in Röhren gleichen Durchmessers. Der Versuch bestätigt dies, denn Gay-Lussac fand bei den schon vorhin erwähnten Messungen für einen Abstand der Platten von  $1,069^{\text{mm}}$  die Steighöhe des Wassers gleich  $13,574^{\text{mm}}$ ; woraus das Produkt  $dh = 14,524$  sich ergibt, welches nur wenig von der Hälfte des Wertes von  $2rh = 30,262$  abweicht.

Ist die Krümmung der Oberfläche in einem Raume nicht an allen Stellen dieselbe, so läßt sich das Gewicht der ganzen gehobenen Flüssigkeit nicht einfach berechnen, wohl aber die Steighöhe an irgend einer Stelle dieses Raumes. Denn ist für irgend ein Flächenelement  $df$  der größte Krümmungsradius  $R$ , der kleinste  $R_1$ , so gilt für dieses unmittelbar die § 76 abgeleitete Gleichung

$$shdf = -\frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) df,$$

und wenn wir das Flächenelement uns unendlich klein denken, das Gewicht des Meniskus gleich Null ist: es ergibt sich daraus

$$sh = -\frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \quad h = -\frac{a^3}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Man kann hiernach z. B. sehr leicht die Steighöhen an den verschiedenen Stellen des Zwischenraumes zwischen zwei Platten erhalten, welche (s. Fig. 125) so aufgestellt sind, daß sie sich in einer vertikalen Linie schneiden, so daß also ihre einander gegenüberliegenden Flächen miteinander einen sehr kleinen Winkel bilden. Bezeichnen wir den Abstand eines Punktes  $a$  von der Halbierungsebene des Winkels mit  $r$ , den Abstand der Spitze des Winkels mit  $x$ , den Abstand  $d$  der Platten in einem Punkte

$$d = c \cdot r,$$

so bedeutet  $c$  eine Konstante, deren Wert von der Neigung der Platten gegeneinander abhängt. Da wir den Winkel, den die Platten bilden, als klein voraussetzen, so ist der Abstand der Platten überall so klein, daß wir den senkrecht zur Halbierungsebene des Winkels durch die Oberfläche geführten Schnitt als einen Kreisbogen

Fig. 125.





ansehen dürfen, dessen Radius gerade wie bei parallel gestellt gegeben ist durch

$$\varrho = \frac{d}{2 \cos \Theta} = \frac{cx}{2 \cos \Theta} = - \frac{cx}{2 \cos \Theta}.$$

Dieser Krümmungsradius ist überall der kleinste; die Halbierung des Winkels schneidet die Oberfläche nach der schwächsten Krümmung deren Radius ein überall so groß ist, daß wir seinen reziproken Wert gegenüber dem reziproken Wert des eben bestimmten kleinsten Krümmungsradius vernachlässigen dürfen. Dann ergibt sich für die Höhe  $h$  und den Abstand  $x$  von der Schnittlinie der Platten

$$h = \frac{a^2 \cos \Theta}{cx}.$$

Man ersieht daraus, daß die Steighöhen der Entfernung des betrachteten Punktes  $a$  von dem Scheitel des Winkels umgekehrt proportional sind oder daß die Halbierungsebene des Winkels die Oberfläche in einer Hyperbel schneidet, deren Asymptoten die Vertikale, die die Innenseiten der Platten sich schneiden, und die Horizontale, die in der Halbierungsebene des Winkels liegt. Denn es werden

$$\text{für } x = 0 \quad h = \infty \quad \text{und für } h = 0 \quad x = \infty$$

Eine Messung der zusammengehörigen Werte von  $h$  und  $x$  nach Fig. 125 dargestellten Zusammenstellung bestätigt diese Folgerungen.

In ähnlicher Weise können wir die Steighöhe an einer vertikalen Wand, die Gestalt der Oberfläche der an der Wand emporgehobenen Flüssigkeit und das Gewicht dieser Flüssigkeit halten. Sei Fig. 126  $AB$  ein Durchchnitt durch die Oberfläche der Wand emporgezogenen Flüssigkeit. Die Steighöhe  $h$  der Flüssigkeit in einem Punkte  $P$  ist

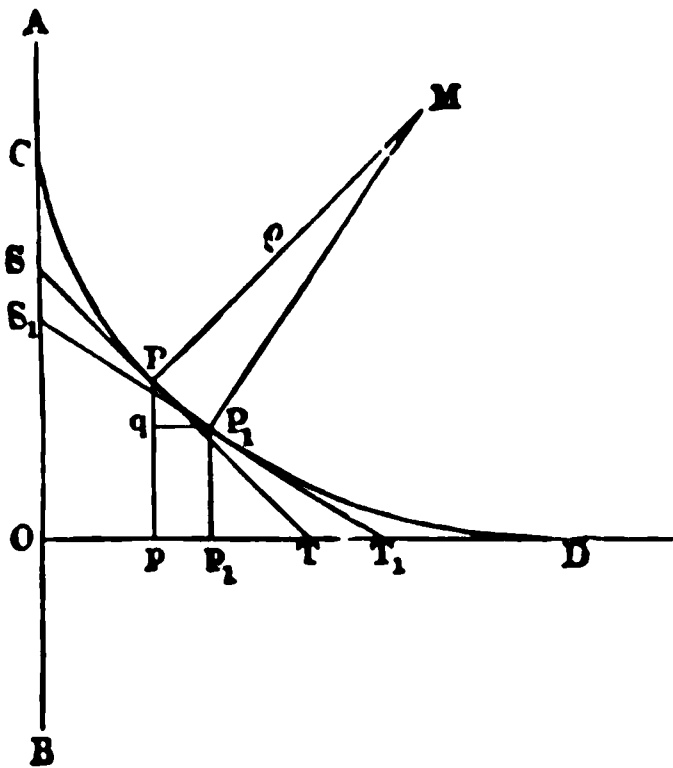
$$h = - \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Ist die Wand eben, so schneidet die Wand parallel geführter Schnitt die Oberfläche in einer geraden Linie, deren Krümmungsradius dieses Schnittes unendlich groß, sein reziproker Wert gleich Null. Wir erhalten dabei die Steighöhe im Punkte  $P$ , wenn

$$h = - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Beziehen wir die Schnittkurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Punkte  $O$  liegt, wo die horizontale Flüssigkeitsfläche die Wand schneiden würde, und wenn die horizontale  $OD$  und die vertikale  $OA$  sind, so würden wir die

Fig. 126.



des Schnittes  $CD$  und damit die der flüssigen Oberfläche erhalten, wenn wir den Krümmungsradius der Schnittkurve im Punkte  $P$  durch die Koordinaten dieses Punktes  $Pp = h$  und  $pO = x$  ausdrücken würden. Die Durchführung dieser Rechnung ist aber ohne ausgedehnte Anwendung der höhern Analysis nicht möglich; wir begnügen uns deshalb damit, die Steighöhe in einer etwas andern Weise auszudrücken, welche uns gestattet, die Steighöhe im Punkte  $C$ , wo die Schnittkurve die Wand schneidet, und das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit zu berechnen.

Wir drücken zu dem Ende den Krümmungsradius  $\varrho$  aus durch den Winkel  $\chi$ , welchen die im Punkte  $P$  an die Schnittkurve gelegte Tangente  $ST$  mit der Achse  $OA$  bildet, also durch den Winkel  $TSO$ . Für ein unendlich kleines zwischen den Punkten  $P$  und  $P_1$  gelegenes Stück  $d\sigma$  der Schnittkurve fällt dieselbe mit dem an  $P$  gelegten Krümmungskreise zusammen. Ist also  $M$  der Mittelpunkt des Krümmungskreises, und bezeichnen wir den Winkel  $MP_1P$ , den die beiden von  $M$  nach  $P$  und  $P_1$  gezogenen Radien miteinander bilden, mit  $d\tau$ , so ist

$$d\sigma = \varrho \cdot d\tau$$

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\tau}.$$

Legen wir in dem Punkte  $P_1$  die Tangente  $S_1T_1$  an die Schnittkurve, so ist, da die Tangenten eines Kreises zu den Radien senkrecht sind, der Winkel  $d\tau$ , den die beiden Radien miteinander bilden, gleich dem, welchen die beiden Tangenten miteinander bilden. Dieser Winkel ist aber gleich der Zunahme, welche der Winkel  $\chi$  erfährt, welchen die Tangente  $ST$  mit  $OA$  bildet, wenn dieselbe anstatt an den Punkt  $P$  an den folgenden Punkt  $P_1$  gelegt wird. Denn der Winkel  $T_1S_1O = \chi + d\chi$  ist Außenwinkel des von den beiden Tangenten gebildeten Dreiecks; der eine Gegenwinkel ist  $TSO = \chi$ , der andere Winkel  $d\tau$ , welchen die beiden Tangenten miteinander bilden. Es ist also

$$d\tau = d\chi,$$

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\chi}.$$

Ziehen wir von dem Punkte  $P_1$  die Senkrechte  $P_1q$  auf die Ordinate  $p$ , so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke  $PP_1q$  der Winkel  $qPP_1 = \chi$ , mit

$$\frac{Pq}{PP_1} = \cos \chi.$$

$Pq$  ist die Änderung der Steighöhe  $h$ , wenn wir in der Schnittkurve von einem Punkte zu dem nächstfolgenden übergehen. Setzen wir diese Änderung gleich  $dh$ , so wird, da  $PP_1 = d\sigma$ ,

$$\frac{dh}{d\sigma} = \cos \chi; \quad d\sigma = \frac{dh}{\cos \chi}.$$

Damit wird dann

$$\varrho = \frac{dh}{\cos \chi d\chi}$$

und

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\cos \chi d\chi}{dh},$$

oder

$$2 h \cdot dh = -a^2 \cos \chi d\chi.$$

Da sich nun  $h$  um  $dh$  ändert, wenn sich  $\chi$  um  $d\chi$  ändert, so aus dieser Gleichung nach schon mehrfach benutzten Sätzen der Einl und den Regeln E 1 und E 4

$$h^2 = C - a^2 \cdot \sin \chi.$$

Die Konstante  $C$  bestimmt sich, wenn wir beachten, daß dort, wo Flüssigkeit horizontal, somit  $\chi = 90^\circ$  ist, die Steighöhe  $h = 0$  ist,

$$0 = C - a^2; \quad C = a^2.$$

Damit wird

$$h^2 = a^2 (1 - \sin \chi).$$

In dem Punkte  $C$ , in welchem die Schnittkurve die Wand schneidet ist der Winkel  $\chi$  gleich dem Winkel  $\vartheta$ ; dort wird somit die Steighöhe

$$h_0 = a \cdot \sqrt{1 - \sin \vartheta} = \sqrt{\frac{H}{s}} (1 - \sin \vartheta).$$

Die Steighöhe hängt also nur ab von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und der festen Wand.

Das Volumen der an einer Wandstrecke von der Länge  $l$  gehaltene Flüssigkeit erhalten wir, wenn wir die Fläche  $CDO$  mit der Länge  $l$  multiplizieren. Die Fläche  $CDO$  ist gleich der Summe aller der unendlich kleinen Vierecke  $Ppp_1P_1$ , in welche wir die Fläche zerlegen, wenn wir von allen Punkten  $P$  der Kurve die Ordinaten  $Pp$  gezogen haben. Nennen wir die Abstände dieser Ordinaten  $dx$ , so ist  $h \cdot dx$  der Inhalt eines jeden solchen Vierecks und die Summe aller Produkte  $h \cdot dx$  wenn  $h$  von  $h_0$  dem Werte an der Wand bis zu Null abnimmt, liefert die ganze Fläche. Ersetzen wir in dem Produkte  $h dx$   $h$  durch den Wert der Gleichung

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \cos \chi \frac{d\chi}{dh}$$

sich ergebenden Wert, so wird

$$h \cdot dx = -\frac{a^2}{2} \cdot \cos \chi \cdot d\chi \cdot \frac{dx}{dh}.$$

In diesem Ausdrucke ist unter Beachtung, daß mit wachsender Höhe  $h$  kleiner wird, für ein positives  $dx$  also  $dh$  negativ ist,

$$\frac{dx}{dh} = \frac{qP_1}{qP} = -\tan \chi;$$

somit wird

$$h dx = \frac{a^2}{2} \cdot \cos \chi \cdot \tan \chi \cdot d\chi = \frac{a^2}{2} \sin \chi d\chi,$$

und die Fläche  $CDO$  wird

$$CDO = \int_{\chi=\vartheta}^{\chi=\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \sin \chi d\chi,$$

in dem Werte  $\chi = 0$  oder  $h = h_0$  der Wert  $\chi = \vartheta$  und dem Werte  $h = 0$  der Wert  $\chi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$  entspricht. Die Summe wird nach EVIII und E5

$$CDO = -\frac{a^2}{2} \{ \cos 90^\circ - \cos \vartheta \} = \frac{a^2}{2} \cdot \cos \vartheta.$$

Das für die Länge  $l$  gehobene Volumen erhalten wir, wenn wir diese Fläche mit  $l$  multiplizieren, und das Gewicht, wenn wir das Volumen mit der Dichtigkeit  $s$  der Flüssigkeit multiplizieren. Das für die Längeneinheit gehobene Flüssigkeitsgewicht wird demnach

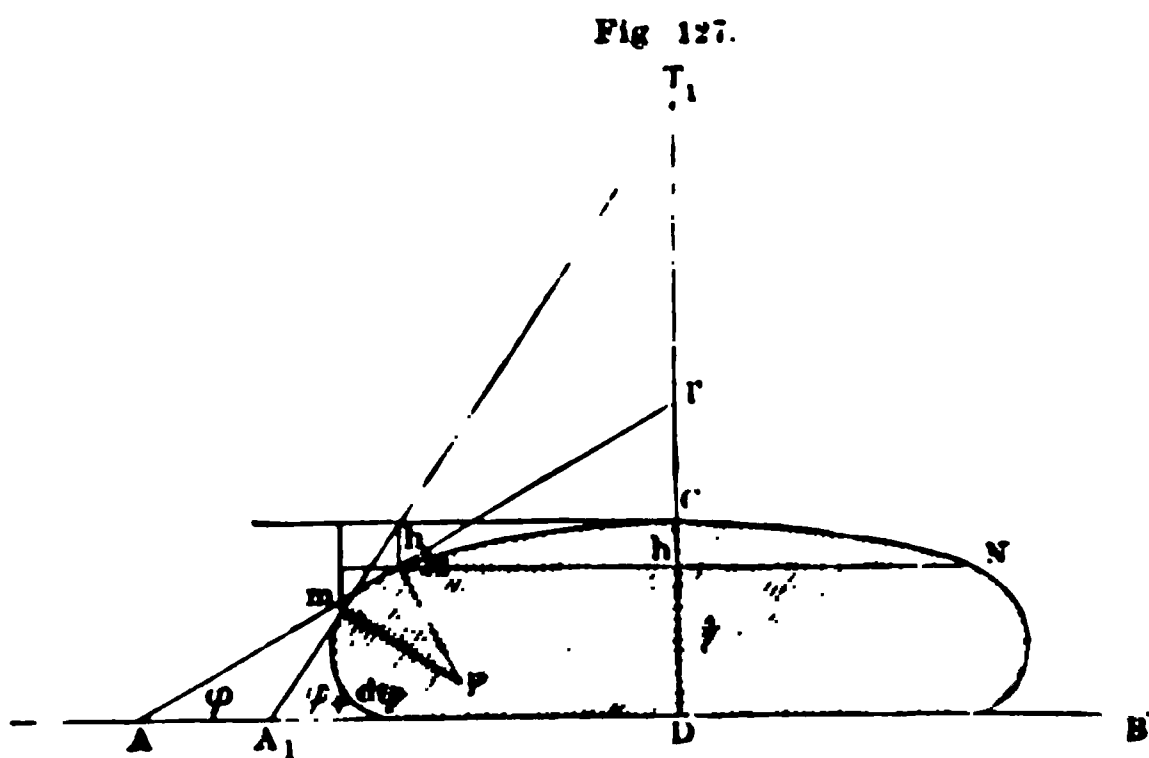
$$G = \frac{a^2 s}{2} \cdot \cos \vartheta = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta.$$

Wir gelangen also auch hier zu demselben Resultat, daß das Gewicht der an der Längeneinheit gehobenen Flüssigkeit nur von den beiden Konstanten  $H$  und  $\vartheta$  abhängig ist, ein Satz, der ganz allgemein gilt, welches auch die Gestalt des Raumes ist, in welchem die Flüssigkeit emporsteigt.

### § 78.

**Bildung von Tropfen auf horizontaler Ebene.** Wenn man auf eine horizontale Ebene eine Flüssigkeit möglichst langsam auffließen läßt, sammelt sich dieselbe auf der Ebene in Form von Tropfen an, deren Gestalt ebenfalls durch die Kohäsion der Flüssigkeit und ihre Adhäsion an der Substanz der Unterlage bedingt ist. Zunächst erkennt man leicht, daß ein solcher Tropfen durch der Ebene parallele Schnitte in Kreisen gehoben werden muß,

daß also seine Oberfläche eine Rotationsfläche sein muß; denn auch bei dem Tropfen ist die Bedingung des Gleichgewichtes, daß an allen Punkten der Oberfläche die normal dorthin gerichteten Kräfte einander das Gleichgewicht halten müssen. Betrachten wir uns durch



den Tropfen (Fig. 127) eine mit der Unterlage  $AB$  parallele Ebene  $MN$  gelegt, so ist in den Punkten der Oberfläche, welche von dem Schnitt getroffen werden, der von innen nach außen gerichtete Druck überall derselbe und zwar gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Höhe

gleich ist dem Abstände des höchsten Punktes  $C$  des Tropfens von der Ebene  $MN$ . Es muß deshalb auch in allen Punkten des Schnittes der normal nach innen gehende Druck derselbe, oder es muß die Oberfläche in allen Punkten des Schnittes  $MN$  gleich gekrümmt sein. Das ist aber nur der Fall, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Achse durch den Scheitel  $C$  des Tropfens geht.

Zur Untersuchung der Gestalt des Tropfens genügt es deshalb, die Gestalt einer durch die Achse  $CD$  des Tropfens gelegten Schnittkurve zu bestimmen.

Wir gelangen dazu in folgender Weise. Der im Punkte  $M$  gegen das Innere des Tropfens gerichtete Normaldruck ist bezogen auf die Flächeneinheit

$$P = K + \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Diesem Drucke hält der an derselben Stelle von innen nach außen gerichtete Druck das Gleichgewicht, der sich zusammensetzt aus dem Normaldruck in dem höchsten Punkte des Tropfens und dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist, und deren Höhe gleich ist dem vertikalen Abstände  $h$  des höchsten Punktes des Tropfens von dem Punkte  $M$ .

Ist der Tropfen nicht zu klein, so ist im Punkte  $C$  die Oberfläche des Tropfens eine horizontale Ebene; der Normaldruck ist somit gleich  $K$ . Ist die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich  $s$ , so ist der von innen nach außen gerichtete Druck

$$P = K + h \cdot s.$$

Damit wird die die Gestalt der Oberfläche liefernde Gleichgewichtsbedingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Ist die Tropfengröße ziemlich beträchtlich, so kann man den reziproken Wert des Krümmungsradius jenes Schnittes, den wir in  $M$  senkrecht zu dem Schnitte  $MCND$  legen, vernachlässigen; bezeichnen wir dann den Krümmungsradius des Schnittes  $MCND$  im Punkte  $M$  mit  $\rho$ , so wird die Gleichgewichtsbedingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Wir können nun, gerade so wie im vorigen Paragraphen, den Wert von  $\rho$  durch  $h$ , den Winkel  $\varphi$ , welchen die in  $M$  an den Schnitt gelegte Tangente mit der Horizontalen bildet, und den Zuwachs, welchen dieser Winkel  $\varphi$  erfährt, wenn wir vom Punkte  $M$  zu dem nachfolgenden Punkte  $m$  des Schnittes übergehen, dessen Tiefe unterhalb der an  $C$  gelegten Tangente  $h + dh$  ist, ausdrücken. Ist nämlich die Länge des Elementes  $Mm$  gleich  $d\sigma$ , und der Winkel, den die beiden nach  $M$  und  $m$  gezogenen Krümmungsradien im Krümmungsmittelpunkte miteinander bilden,  $d\tau$ , ist zunächst wieder

$$d\sigma = \rho d\tau.$$

Nun ist  $d\tau$  gleich dem Winkel, den die beiden Tangenten  $AT$

$L, T_1$  miteinander bilden, von denen die erste im Punkte  $M$ , die zweite im Punkte  $m$  an den Schnitt gelegt ist. Dieser Winkel ist aber gleich dem Zuwachs  $d\sigma$  des Winkels  $\varphi$ , den die Tangente mit der Horizontalen bildet. Demnach ist

$$d\sigma = \varphi d\varphi.$$

Andererseits ist aber

$$\frac{dh}{d\sigma} = \sin \varphi;$$

mit ist

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sin \varphi d\varphi}{dh},$$

und

$$2 h dh = \frac{H}{s} \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Daraus ergibt sich aber

$$h^2 = -\frac{H}{s} \cdot \cos \varphi + \text{const.}$$

Zur Bestimmung der Konstanten erhalten wir, da für den obersten Punkt des Tropfens, für welchen  $h = 0$  ist, auch der Winkel  $\varphi$  gleich 0 wird, weil die in  $C$  an den Schnitt gelegte Tangente horizontal ist,

$$0 = -\frac{H}{s} + \text{const.}$$

$$\frac{H}{s} = \text{const.},$$

mit

$$h^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \varphi).$$

Um die Höhe des ganzen Tropfens zu erhalten, müssen wir für  $\varphi$  den Winkel einsetzen, unter welchem der Schnitt des Tropfens die horizontale Ebene schneidet. Nach § 75 ist der Winkel, unter welchem eine Flüssigkeit die feste Wand schneidet, immer derselbe Randwinkel  $\theta$ , dort wo der Tropfen die Ebene schneidet, ist demnach

$$\varphi = \theta,$$

und wird die Höhe  $T$  des Tropfens gegeben durch

$$T^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \theta).$$

Für Flüssigkeiten, welche die Wand benetzen, ist der Winkel  $\theta$  immer kleiner als  $90^\circ$ , da diese Flüssigkeiten an einer vertikalen Wand eine konvexe Oberfläche bilden; es ist deshalb  $\cos \theta$  positiv, somit

$$T < \sqrt{\frac{H}{s}}.$$

Bei Flüssigkeiten, welche die Unterlage nicht benetzen, die also an der vertikalen Wand eine nach oben konvexe Oberfläche bilden, ist  $\theta$  größer als  $90^\circ$ , somit  $\cos \theta$  negativ und

$$T > \sqrt{\frac{H}{s}}.$$

Da nun bei solchen Tropfen der Winkel  $\varphi$ , welcher an der Kuppe des Tropfens gleich Null ist, stetig, wenn man auf die Schnittkurve bis zur Basis des Tropfens fortschreitet, bis zu dem Werte  $\varphi = \vartheta > 90^\circ$  wächst, so muß an einer Stelle der Schnittkurve  $\varphi = 90^\circ$  werden, also die Tangente senkrecht stehen. An dieser Stelle hat somit der Tropfen seinen größten Durchmesser. Nennen wir den vertikalen Abstand dieser Stelle von der Tropfenkuppe  $t$ , so ist dort

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

Aus den Werten von  $T$  und  $t$  erhält man somit

$$T^2 = t^2 (1 - \cos \vartheta)$$

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{T^2}{t^2}.$$

Die Beobachtung der Höhen  $T$  des ganzen Tropfens und  $t$  des Abstandes der Stelle, an welcher der Tropfen den größten Durchmesser hat, von der Kuppe des Tropfens, liefert also direkt und getrennt voneinander

die Werte der Größe  $a$  und des Winkels  $\vartheta$ , wenn die Flüssigkeiten die Wand nicht benetzen.

Dasselbe, was Tropfen für nicht benetzende Flüssigkeiten geben, liefern uns Luftblasen, welche wir unter einer ebenen horizontalen Fläche in einer benetzenden Flüssigkeit bilden. Ist  $AB$  (Fig. 128) etwa eine Glasfläche, welche auf Wasser sich befindet, und bringen wir eine Luftblase unter die Fläche, so muß diese Luftblase dieselbe Gestalt annehmen, welche ein in die

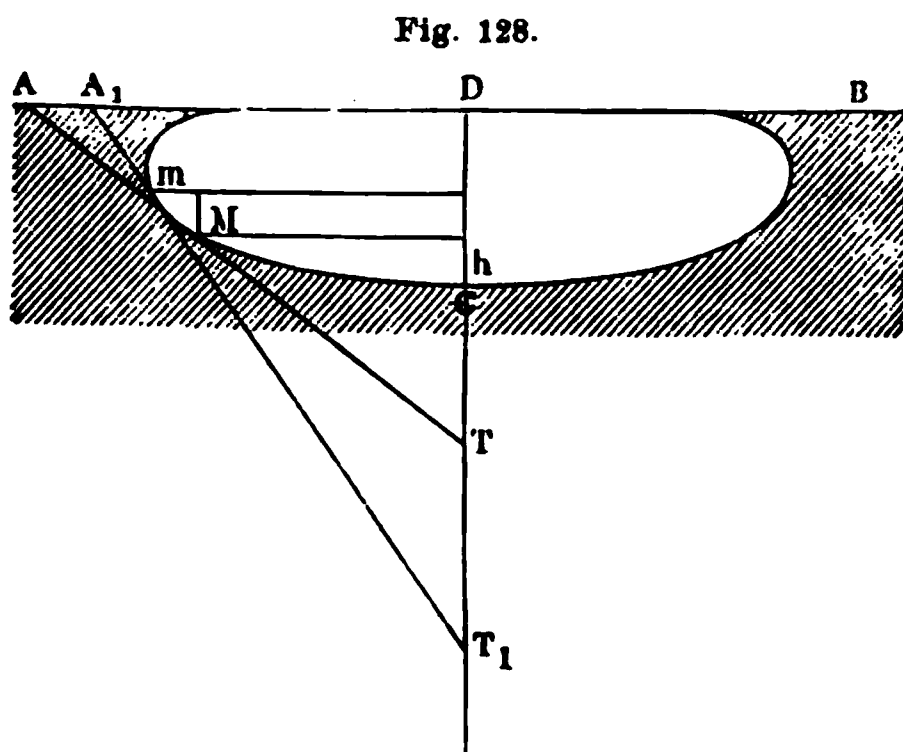


Fig. 128.

Unterlage nicht benetzender Tropfen annimmt, wie eine der im Beginn dieses Paragraphen gemachten ganz gleiche Überlegung ergibt. Die Gleichgewichtsbedingung für die Oberfläche ergibt sich in ganz ähnlicher Weise. Im Punkte  $M$  ist der gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Normaldruck

$$P = K - \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

In dem tiefsten Punkte  $C$  der Blase ist der Normaldruck, wenn die Blase nicht zu klein ist, gleich  $K$ ; bezeichnen wir die vertikale Erhebung des Punktes  $M$  über  $C$  mit  $h$  und die Dichtigkeit der Flüssigkeit mit  $s$ , so können wir diesen Druck  $K$  gleich setzen

$$K = P + h \cdot s,$$

da der Druck in  $C$  um das Gewicht der Flüssigkeitssäule von der Höhe



über sein muß als in dem um  $h$  höher liegenden Punkte  $M$ . Diese beiden Gleichungen liefern, genau wie bei dem Tropfen,

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Drücken wir den Krümmungsradius  $\varrho$  wieder durch den Winkel  $\angle D = \varphi$  aus, so wird ganz in derselben Weise wie vorhin

$$h^2 = -\frac{H}{s} \cdot \cos \varphi + \text{const.}$$

Dort wo die Grenzfläche der Blase die Platte  $AB$  schneidet, wird  $\varphi$  gleich dem Winkel  $\Theta$ , also in diesem Falle gleich dem Supplement des Randwinkels  $\vartheta$ . Für den tiefsten Punkt  $C$  der Blase wird  $h = 0$  und gleichzeitig  $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$ .

Demnach ist auch jetzt

$$-\frac{H}{s} + \text{const.} = 0,$$

$$\text{const.} = \frac{H}{s}.$$

Daraus ergibt sich

$$h^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \varphi).$$

Da die Wand der Blase die Fläche  $AB$  unter dem Winkel  $\Theta$  schneidet, wird die Höhe  $T$  der Blase

$$T^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \Theta) = \frac{H}{s} (1 + \cos \vartheta).$$

An der Stelle des größten Durchmessers wird  $\varphi = 90^\circ$ ;  $\cos \varphi = 0$ . Wenn wir den vertikalen Abstand dieser Stelle von der Kuppe der Blase  $t$ , so ist

$$t^2 = \frac{H}{s},$$

also

$$\frac{T^2}{t^2} = 1 + \cos \vartheta = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \frac{T}{t}.$$

Wie demnach aus der Beobachtung von Tropfen der Flüssigkeiten, die die Unterlage nicht benetzen, kann aus der Beobachtung von Luftblasen zwischen einer Ebene und einer dieselbe benetzenden Flüssigkeit die Größen  $H$  und  $\vartheta$  gesondert bestimmt werden.

Die Bildung von Tropfen bei nicht benetzenden Flüssigkeiten und auch bei benetzenden Flüssigkeiten ist noch in anderer Weise zur Bestimmung des Oberflächendruckes benutzt worden. A. König<sup>1)</sup> wandte gerade von von Helmholtz angegebene Versuchsanordnung an. Die

<sup>1)</sup> A. König, Wiedem. Ann. 16. p. 1. 1882. Die gleiche Methode wurde von Meyer, Wiedem. Ann. 53. p. 845. 1894; Sudentopf, Wiedem. Ann. 61. 1897; Stöckle, Wiedem. Ann. 64. p. 499. 1898 angewandt.

Anordnung zeigt Fig. 129. Eine ungefähr 10<sup>cm</sup> im Durchmesser halt Glasschale *a* ist an ein U-förmig gebogenes Rohr *b* angeschmolzen, & zweiter Schenkel bei *c* etwas höher als der obere Rand der Schale & winklig umbiegt und dann, nachdem er eine kurze Strecke horizontal gelaufen, wiederum U-förmige Gestalt annimmt. An den zweiten kürzeren Schenkel dieses Teiles ist ein Gefäß *n* angeschmolzen, dessen Durch-

Fig. 129.

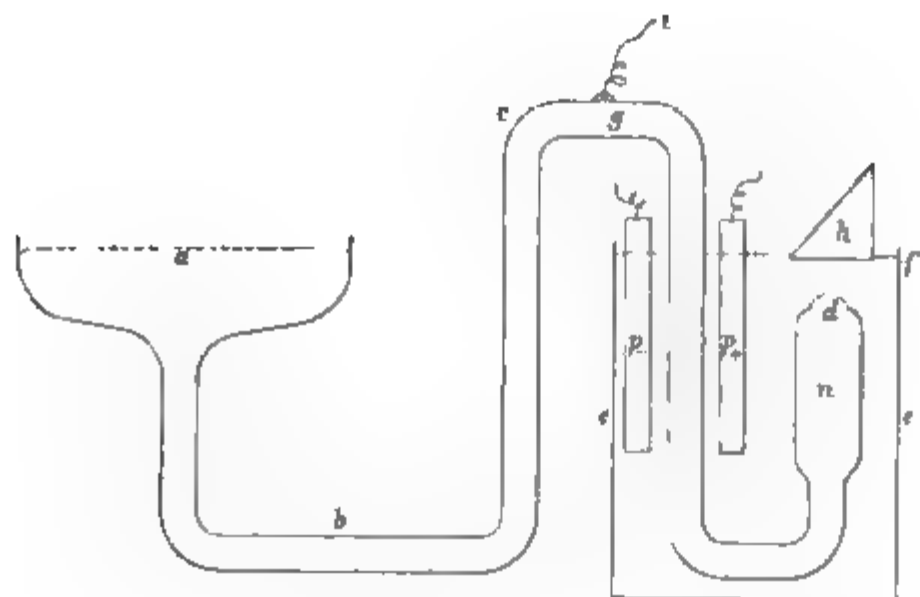


Fig. 130.



Fig. 130 in natürlicher Größe zeigt. Der scharfe Rand *oo* bildet einen Kreis von 0,9<sup>cm</sup> Durchmesser und liegt etwa 1,5<sup>cm</sup> tiefer als der Rand der Schale *a*. Mit Hilfe einer Dosenlibelle wird *oo* horizontal gemacht und dann der Apparat sorgfältig mit Quecksilber gefüllt, so daß in dem horizontalen Teil der Röhre bei *c* sich keine Luftblasen befinden. Ist die Schale fast vollständig gefüllt, so tritt bei *d* das Quecksilber kuppelförmig hervor; in die Schale tauchte eine durch Metallstücke beschwerte Glasflasche, die an einem Flaschenzuge hing und durch denselben gehoben oder gesenkt werden konnte. Eine Senkung der Flasche trieb die Kuppe

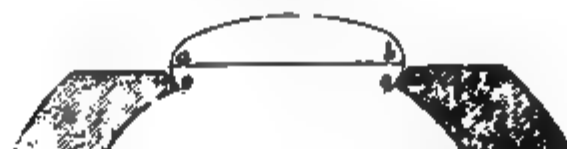
Fig. 131.



Fig. 132.



Fig. 133.



hervor. Ist die Kuppe nur sehr wenig hervorgetrieben, so ist wie Fig. 131 die Krümmung an der Kuppe der Oberfläche klein, die Kuppe bildet gewissermaßen einen Teil eines ideellen, auf einer Glasplatte liegenden Quecksilbertropfens, dessen größter Durchmesser bei *ab* zu denken ist. An der scharfen Kante *oo* der Oberflächelemente rücken sie nach innen. Wird die Kuppe mehr hervorgedrängt, so rückt *ab* näher

er werdend nach oben und kommt endlich in  $oo$  zu liegen (Fig. 132); eben die Oberflächenelemente bei  $oo$  senkrecht. Bei noch weiterm Andrängen der Kuppe neigen sich die Oberflächenelemente nach außen, der größte Durchmesser des Quecksilbertropfens liegt (Fig. 133) bei  $ab$ . Minimum des Tropfendurchmessers tritt demnach ein, wenn die Oberflächenelemente bei  $oo$  senkrecht stehen, und ist dann gleich dem Durchmesser der Öffnung  $oo$ .

Mit der Größe des Tropfendurchmessers ändert sich auch der Krümmungsradius im Scheitel des Tropfens, und die in den letzten drei Figuren erhaltenen Durchschnitte lassen schon erkennen, daß für das Minimum des Tropfendurchmessers auch die Krümmung im Scheitel des Tropfens die stärkste ist, oder daß in dem Falle der Krümmungsradius seinen kleinsten Wert hat. Das gleiche zeigt eine von Poisson<sup>1)</sup> abgeleitete Gleichung für den Krümmungsradius im Scheitel des Tropfens in seiner Abhängigkeit von dem Oberflächendruck und dem größten Tropfendurchmesser; sie liefert für den Krümmungsradius des Scheitels bei dieser Anordnung ein Minimum, wenn der größte Durchmesser des Tropfens ein Minimum ist.

Mit Hilfe der Poissonschen Gleichung läßt sich aus dem gemessenen Tropfendurchmesser bei nicht zu großen Werten desselben und Krümmungsradius im Scheitel des Tropfens die Kapillaritätskonstante berechnen. Die Messung des Krümmungsradius geschah mit dem Helmholtzschen Ophthalmometer, dessen Theorie und Anwendung wir im vierten Kapitel kennen lernen werden. Der Raum gestattet es nicht auf die ziemlich komplizierte Berechnung des Oberflächendrucks einzugehen, wir verweisen deshalb auf die Abhandlung von König, nur sei bemerkt, daß in der Rechnung der Randwinkel nicht eingeht<sup>2)</sup>.

In anderer Weise hat Cantor<sup>3)</sup> die Bildung von Tropfen an den Enden der scharfkantig abgeschnittenen Kapillarröhren bei nicht benetzenden Flüssigkeiten, die Bildung von Blasen bei benetzenden Flüssigkeiten zur Bestimmung der Oberflächenspannung benutzt. Ein sehr weites Glasrohr und eine Kapillare sind zu einem U-Rohr verbunden, welches mit derselben Flüssigkeit gefüllt wird. In der weiten Röhre soll der Einfluß der Kapillarität vernachlässigt werden können. Die Kapillare ist scharf abgesprengt, hat kreisförmigen Querschnitt und ist, wie Fig. 134 zeigt, von einer weiteren Röhre umgeben, welche Luft oder eine Flüssigkeit enthält, wenn

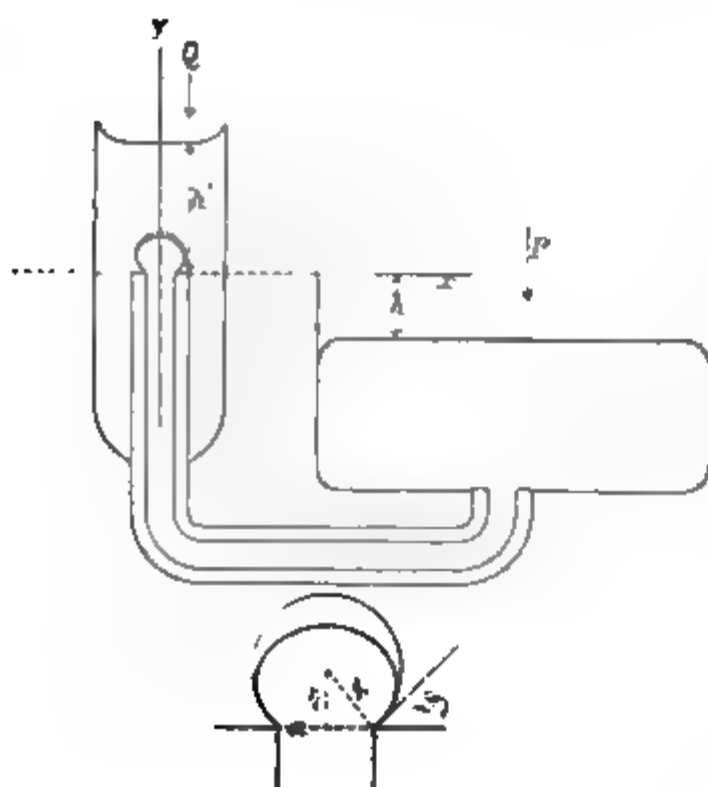
<sup>1)</sup> Poisson, Nouvelle théorie de l'action capillaire. p. 216. Paris 1831. Lohmann, Wiedem. Ann. 54. p. 713. 1895) gezeigt, daß die Poissonsche Formel zur Berechnung der Kapillaritätskonstanten nicht ausreicht; er hat eine andere Berechnung durchgeführt, welche die Ungenauigkeit der Poissonschen Formel vermeidet. Die Rechnung ist ziemlich umständlich. Leichter kommt man zum Ziel durch Benutzung des Werkes von Bashforth und Adams, An Account of the theories of capillarity actions. Cambridge 1883, in welchem der Weg der mechanischen Integration der Differentialgleichung, welche die Gestalt der Tropfen bedingt, für mittlere und kleinere Dimensionen der Tropfen berechnet und die Resultate in Tabellen zusammengestellt sind.

<sup>2)</sup> Man sehe über die Berechnung der Kapillaritätskonstanten außer Lohmann und Siedentopf, Wiedem. Ann. 61. p. 239. 1897; Stöckle, Wiedem. Ann. 66. 1898.

<sup>3)</sup> M. Cantor, Wiedem. Ann. 47. p. 399. 1892.

die Kapillaritätskonstante an der Grenze von Quecksilber und einer Flüssigkeit bestimmt werden soll. Die Kapillare wird vertikal gestellt, der Schnitt durch die Kapillarröhre bzw. deren Endfläche horizontal. Wird der Druck über der kapillaren Röhre hinreichend vermindert oder über der Quecksilberoberfläche im weiten Rohre hinreichend vermehrt, so tritt ein Tropfen Quecksilber aus der Kapillaren heraus. Die

Fig. 134



Größe und Form des Tropfens hängt ab von dem Drucke  $P$  auf der weiten Quecksilberoberfläche und den Drucken, welche den Tropfen wieder in die kapillare Röhre zurücktreiben wollen. Hat der Tropfen eine bestimmte Gestalt und Größe angenommen, so daß ein Gleichgewichtszustand erreicht ist, so müssen diese Drücke einander gleich sein. Sei der Druck auf der weiten Quecksilberoberfläche gleich  $P$ . Wir beziehen die kapillare Oberfläche auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen  $Y$ -Achse vertikal mit der Achse des kapillaren Rohres zusammenfällt, die positive Seite nach unten gerichtet, dessen  $X$ -Achse horizontal durch die Schnittfläche

des kapillaren Rohres geht; der Anfangspunkt des Koordinatensystems liege in dem Mittelpunkte der Schnittfläche. Ist  $Q$  der Druck auf die Oberfläche der Flüssigkeit in dem die Kapillare umgebenden Rohr,  $h'$  die Höhe der Flüssigkeit oberhalb der Schnittfläche der Kapillaren,  $h$  die Höhe dieser Schnittfläche über der Oberfläche des Quecksilbers in dem weiten Rohre,  $s$  das spezifische Gewicht des Quecksilbers,  $s'$  das der Flüssigkeit über dem kapillaren Tropfen, so ist die Bedingung des Gleichgewichts an einem Element der kapillaren Oberfläche des Tropfens, dessen Koordinaten  $x$  und  $y$ , und die beiden Krümmungsradien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  sind

$$P = Q + h's' - ys' + \frac{H}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) + ys + hs.$$

Setzt man

$$P - Q - (hs + h's') = p \quad s - s' = \sigma,$$

so wird

$$p = y\sigma + \frac{H}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right).$$

Um  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  durch die Koordinaten auszudrücken, ist zu beachten, daß der Tropfen eine Rotationsfläche ist, wir brauchen also nur die Verhältnisse an einer Meridiankurve zu untersuchen. In der analytischen Geometrie wird bewiesen, daß bei einer Rotationsfläche der Krümmungsradius des Schnittes senkrecht zum Meridianschnitt gleich ist der

male  $KT$ . Ist der Winkel, den die Tangente im Punkte  $T$  mit der  $X$ -Achse bildet, gleich  $\varphi$ , so ist der Winkel, den die Normale  $KT$  mit der  $Y$ -Achse bildet, ebenfalls gleich  $\varphi$ , und es folgt

$$KT = \varrho_1 = \frac{x}{\sin \varphi}.$$

Für den Krümmungsradius des Meridianschnittes erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung einer Kurve  $y = f(x)$

$$\varrho_2 = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{d^2y/dx^2},$$

wenn wir setzen  $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$

$$\varrho_2 = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{dx},$$

sonit

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\sin \varphi}{x} + \cos \varphi \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{x} \frac{d(x \sin \varphi)}{dx}.$$

Damit wird

$$p = \sigma y + \frac{H}{2x} \cdot \frac{d(x \sin \varphi)}{dx}.$$

Eine nähere Untersuchung dieses Ausdruckes für  $p$  ergibt, daß der Druck  $p$  ein Maximum hat, und nach einigen vereinfachenden Annahmen und Umformungen, wegen deren wir auf die zitierte Abhandlung von Cantor verweisen, ergibt sich, daß, wenn  $d$  den Radius der kapillaren Öffnung bedeutet, die-  
 es Maximum  $\bar{p}$  den Wert hat

$$p = \frac{H}{d} + \frac{\sigma d}{3} \left(2 + \frac{\sigma d}{\bar{p}}\right).$$

Für die Kapillarkonstante  $H$  ergibt sich daraus

$$H = \bar{p}d - \frac{\sigma d^2}{3} \left(2 + \frac{\sigma d}{\bar{p}}\right).$$

oder setzen wir  $\frac{\sigma d}{\bar{p}} = m$

$$H = \bar{p}d \left(1 - \frac{2m}{3} - \frac{m^2}{3}\right).$$

Beobachtet man demnach diesen Maximaldruck und mißt den Radius der kapillaren Röhre, so erhält man direkt den Wert von  $H$ , ganz unabhängig vom Randwinkel, da dieser in unserer Gleichung gar nicht eingeht.

Zur Messung des Maximaldrucks gab Cantor seinem Apparat die Form Fig. 136. Die Kapillare wird mit Hilfe eines Korkes in das untere

Fig. 135.

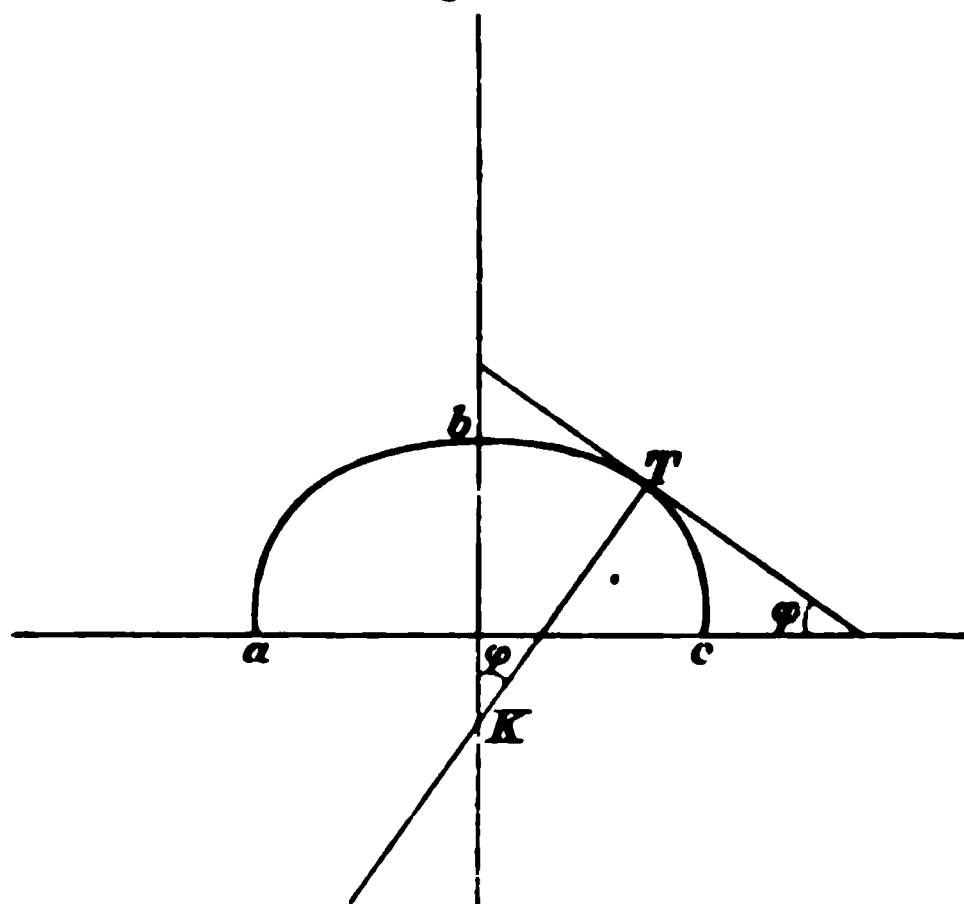
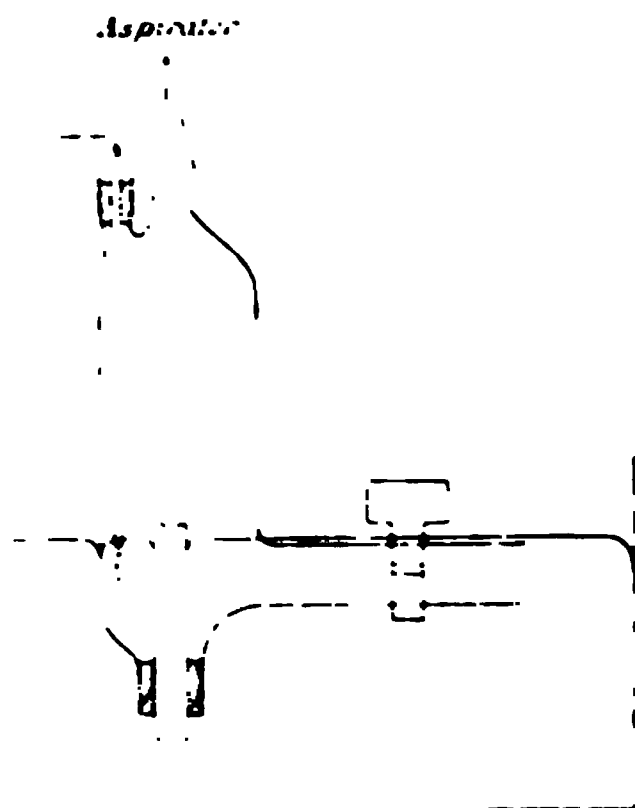


Fig. 136.



Ende einer weiten Glasröhre eingepaßt; letztere ist oben ausgezogen, so daß man dort einen Schlauch ansetzen konnte. Unten ist seitlich ein mit einem Hahn versehenes Rohr angesetzt. Der Apparat wird in eine weite Schale getaucht und in diese soviel Quecksilber gefüllt, daß das seitliche Rohr unter den Spiegel desselben zu liegen kommt. Der Apparat wird an einem Stativ befestigt, so daß das obere scharf und eben abgesprengte Ende der Kapillare horizontal ist. Ein Schlauch verband das obere Ende der weiten Röhre einerseits mit einem Aspirator, andererseits mit einem U-förmigen Rohre, das Wasser enthielt und so als Wassermanometer zur Messung des Druckes  $Q$  diente. Bei langsamer Verminderung des Druckes verfolgte man mit dem Kathetometer die Niveaudifferenz des Wassermanometers und konnte so das Maximum des Druckes bestimmen.

Bei benetzenden Flüssigkeiten muß man das scharf abgesprengte Ende der Röhre in die Flüssigkeit tauchen und durch passende Vermehrung des Druckes in dem kapillaren Rohre unter demselben eine Luftblase erzeugen.

### § 79.

**Kapillaritätskonstanten.** Die in den letzten Paragraphen dargelegte Theorie der Kapillarerscheinungen zeigt, daß dieselben wesentlich von den Größen  $a^2$  und  $\vartheta$  abhängig sind, von denen die erstere, oder genauer das Produkt derselben in die Dichtigkeit der Flüssigkeit, die Größe  $H$ , ein Maß für die Kohäsion dieser Flüssigkeit ist, da sie uns den Oberflächendruck in der Flächeneinheit einer Kugelfläche gibt, deren Radius der Einheit gleich ist; während die andere Größe, der Winkel  $\vartheta$ , von dem Verhältnisse der Adhäsion der Flüssigkeit an die feste Wand und der Kohäsion der Flüssigkeiten abhängig ist. Die Bestimmung dieser Konstanten aus den verschiedenen kapillaren Erscheinungen ist deshalb gleichzeitig eine experimentelle Bestätigung dieser Theorie, da die verschiedenen Erscheinungen zu denselben Werten von  $a^2$  oder  $H$  und  $\vartheta$  führen müssen.

Als erste Methode zur Messung von  $H$  fanden wir die von Dupré, van der Mensbrugghe und besonders von Sondhaus angewandte Messung der Oberflächenspannung von Lamellen. Wir sahen bereits, daß der von Sondhaus gefundene Wert der Oberflächenspannung für die Plateausche Glycerinflüssigkeit vortrefflich mit dem von Plateau gefundenen Werte des Oberflächendruckes übereinstimmt.

Für solche Flüssigkeiten, welche die Körper vollkommen benetzen, ist der Winkel  $\vartheta$  sofort gegeben, er ist gleich  $0^\circ$ . Denn bei einer Flüssigkeit, welche einen festen Körper vollkommen benetzt, haftet die letzte Flüssigkeit einfach an der Wand wie eine Haut, das letzte Flüssigkeitselement ist somit der Wand parallel. Da wir den Winkel  $\vartheta$  von der inneren, die Flüssigkeit tauchenden Seite der Wand gerechnet haben, so wird danach  $\vartheta = 0^\circ$ .

Für Flüssigkeiten, welche eine feste Wand vollkommen benetzen, können wir deshalb zunächst aus den Steighöhen in Röhren oder an einer festen Wand die Konstante  $a^2$  oder  $H$ , welche die Kohäsion der Flüssigkeiten mißt, ableiten.

In § 77 erhielten wir für das Gewicht der in einer Röhre vom Radius  $r$  gehobenen Flüssigkeit den Ausdruck

$$h \cdot s \cdot f + m = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r},$$

ein  $m$  das Gewicht des Flüssigkeitsmeniskus ist, welcher über dem festen Punkte der nach außen konkaven Flüssigkeitsoberfläche erhoben ist. Für den Fall, daß der Randwinkel  $0^\circ$  ist, läßt sich das Gewicht des Meniskus in solchen zylindrischen Röhren, in welchen die Oberfläche ein Kugelsegment ist, leicht bestimmen. Wenn nämlich die kugelmige Oberfläche die Röhrenwand unter einem Winkel von  $0^\circ$  schneidet, ist dieselbe eine Halbkugel, deren Radius gleich dem Radius der Röhre ist. Das Volumen des Meniskus ist somit gleich demjenigen eines Zylinders, dessen Querschnitt gleich ist dem Querschnitt  $f$  der Röhre, dessen Höhe sich dem Radius  $r$  der Röhre weniger dem Volumen der Halbkugel mit Radius  $r$ . Es ist somit

$$m = (f \cdot r - \frac{2}{3} r^3 \pi) s = f (r - \frac{2}{3} r) \cdot s = \frac{1}{3} f r \cdot s.$$

Damit wird die Gleichung für das gehobene Gewicht

$$h \cdot s \cdot f + \frac{1}{3} r \cdot s \cdot f = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r},$$

er. indem wir auf beiden Seiten durch  $s \cdot f$  dividieren,  $\vartheta = 0^\circ$  setzen,

$$h + \frac{1}{3} r = \frac{H}{s} \cdot \frac{1}{r} = a^2 \frac{1}{r}$$

$$r(h + \frac{1}{3} r) = a^2,$$

er die Kapillaritätskonstante  $a^2$  ist gleich dem Produkte aus der um ein Drittel des Radius vermehrten Steighöhe in den Radius der Röhre, wenn die Röhre so enge ist, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eine Kugelfläche ist. Darin, daß die Konstante hier als das Produkt zweier Dimensionen auftritt, liegt auch der Grund, daß sie als  $a^2$  bezeichnet ist. Wird der Radius  $r = 1^{\text{mm}}$ , so wird

$$a^2 = (h + \frac{1}{3}),$$

er die Konstante  $a^2$  kann auch als die um  $\frac{1}{3}^{\text{mm}}$  vermehrte Steighöhe in einem Rohre von  $2^{\text{mm}}$  Durchmesser definiert werden, vorausgesetzt, daß die kapillare Oberfläche eine Kugelfläche wäre.

Läßt man diese Annahme, die nur für sehr enge Röhren gilt, fallen, ergibt sich genauer nach Volkmann<sup>1)</sup>

$$a^2 = r \left( h + \frac{1}{3} r - 0,1288 \frac{r^3}{h} \right).$$

Da  $h$  mit wachsendem  $r$  abnimmt, so ist das dritte Glied um so mehr Einfluß, je größer  $r$  ist. Bis zu Röhren von  $2^{\text{mm}}$  Durchmesser fällt Einfluß des Korrektionsgliedes im allgemeinen erst in die zweite und dritte Dezimale.

Wir wollen hier indes sofort darauf aufmerksam machen, daß die Konstante  $a^2$  nur dann die Dimension einer Fläche hat, wenn wir die Kraft  $H$  und Gewichte messen, nicht im absoluten Maßsystem. Die Konstante  $H$ , doppelte Oberflächenspannung, ist, wie wir sahen, der Quotient einer

<sup>1)</sup> Volkmann, Wiedem. Ann. 11. p. 180. 1880.



Kraft und einer Länge, somit ist  $H = z [\mu \tau^{-2}]$ , wie wir es auch fanden. Das spezifische Gewicht ist der Quotient aus einer Masse, Gewichte und einem Volumen, somit  $s = z [\mu \lambda^{-3}]$ . Dividieren durch  $s$ , so wird

$$\frac{H}{s} = z [\lambda^3 \tau^{-2}].$$

Dasselbe ergibt obige Ableitung. Setzen wir  $\cos \vartheta = 1$ , so b

$$\frac{H}{r} \cdot f = z [\mu \tau^{-2} \lambda^{-1} \lambda^2] = z [\mu \lambda \tau^{-2}]$$

eine Kraft, denn  $\frac{H}{r}$  ist ein Druck, und ein Druck ist die auf die F einheit wirkende Kraft, also Druck mal Fläche ist eine Kraft. Setz

$$\frac{H}{r} \cdot f = fs (h + \frac{1}{2} r),$$

so setzen wir diese Kraft einem Gewichte, dem Gewichte der geh Flüssigkeit gleich; wollen wir  $H$  in absolutem Maße ausdrücken,  $s$  die rechte Seite der Gleichung mit der Beschleunigung  $g$  multi werden. Es wird

$$\frac{H}{r} \cdot f = g \cdot f \cdot s (h + \frac{1}{2} r),$$

$$\frac{H}{r} = gr (h + \frac{1}{2} r) = z [\lambda \tau^{-2} \lambda \lambda] = z [\lambda^3 \tau^{-2}],$$

wie wir es auch vorhin erhielten.

Für die Steighöhe an einer vertikalen Wand erhielten wir in den Ausdruck

$$h_0 = \sqrt{\frac{H}{s} (1 - \sin \vartheta)} = a \cdot \sqrt{1 - \sin \vartheta}.$$

Ist der Winkel  $\vartheta = 0^\circ$ , so ist  $\sin \vartheta = 0$ ; somit wird für vollk benetzende Flüssigkeiten

$$h_0 = a; \quad h_0^2 = a^2,$$

oder die Kapillaritätskonstante  $a^2$  ist ebenfalls gleich dem Quadra Steighöhe der Flüssigkeit an einer vertikalen ebenen Wand.

Zur Bestimmung der Konstanten  $a^2$  genügt es deshalb, die Ste einer Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr von bekanntem, ab kleinem Radius  $r$  oder an einer ebenen Wand, welche vollkommen v Flüssigkeit benetzt werden, zu messen, und in dieser Weise ist d für eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Flüssigkeiten unter Ben von Glasröhren und Glaswänden von Frankenheim<sup>1)</sup>, Mendél Bède<sup>3)</sup>, Quincke<sup>4)</sup>, Volkmann<sup>5)</sup>, Röntgen und Schneider<sup>6)</sup>, Se u. a. bestimmt worden.

1) *Frankenheim*, Kohäsionslehre. p. 79 ff. Breslau 1835.

2) *Mendéléeff*, Comptes Rendus. 50. p. 52. 1860. 51. p. 97. 1860.

3) *Bède*, Mémoires couronnés de Bruxelles. 30. p. 1. 1862.

4) *Quincke*, Poggend. Ann. 135. 1868; 139. 1870. Wiedem. Ann. 52. p. 1

5) *Volkmann*, Wiedem. Ann. 11. p. 177. 1880; 17. p. 353. 1882; 53. p. 68

6) *Röntgen und Schneider*, Wiedem. Ann. 29. p. 202. 1886.

7) *Schiff*, Liebigs Ann. 223. p. 47. 1884.

Für das Gewicht der von der Längeneinheit der Berührungslinieischen Flüssigkeit und fester Wand getragenen Flüssigkeit erhielten wir § 77 ganz allgemein

$$G = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta = \alpha \cdot \cos \vartheta.$$

Ist  $\vartheta$  gleich  $0^\circ$ , so wird

$$G = \frac{H}{2} = \alpha = \frac{1}{2} a^2 s.$$

Die Größe  $\frac{H}{2}$  ist, wie wir sahen, die Oberflächenspannung, dieselbe demnach gleich dem Gewichte, welches an vollkommen benetzter Wand,  $\vartheta = 0$ , von der Längeneinheit der Berührungslinie über das Niveau der Flüssigkeit erhoben wird.

Auch hier ist zu beachten, daß wir die Kraft durch Gewicht messen. Sollen wir die Oberflächenspannung in absolutem Maße messen, so müssen wir  $G$  als Quotienten eines Gewichtes und einer Länge bezeichnen und mit der Beschleunigung  $g$  bei dem freien Falle multiplizieren: es wird also

$$\frac{H}{2} = g \cdot \frac{m}{l} = g \cdot G,$$

wenn  $m$  das an der Länge  $l$  der Berührungslinie getragene Gewicht ist, und man erkennt, da  $g = z [\lambda \tau^{-2}]$ ,  $m = z [\mu]$ ,  $l = z [\lambda]$  ist, daß auch nach

$$\frac{H}{2} = z [\mu \tau^{-2}].$$

Wenn wir  $\alpha$  zunächst entsprechend der von den meisten Beobachtern gewandten Bezeichnung als ein Gewicht bezeichnen, haben wir dasselbe mit  $g$  zu multiplizieren, um die Größe im absoluten Maßsystem auszu-  
drücken.

Man kann die Konstante  $\alpha = \frac{H}{2}$  ebenso als die Konstante der Kapillarität einer Flüssigkeit bezeichnen, wie es in neuerer Zeit besonders von Wilhelmy und Quincke geschehen ist.

Wilhelmy<sup>1)</sup> hat diese Konstante nach einer sehr einfachen Methode bestimmt und gleichzeitig die nach der Poissonschen Theorie an den Wänden der eingetauchten Körper eintretende Verdichtung zu messen versucht. Wilhelmy hing feste Körper, planparallele Platten oder Zylinder, deren Dimensionen vorher genau gemessen waren, an den Enden einer feinen Wage und bestimmte ihr Gewicht. Er ließ diese Körper dann bis zu einer bestimmten Tiefe, so daß ein genau bekanntes Volumen derselben eintauchte, in die zu untersuchende Flüssigkeit hinabgehen. Nach der Methode, durch die Wilhelmy dieses Volumen bestimmte, weisen wir auf die Abhandlung selbst verweisen. Es wurde das Gewicht des eingetauchten Körpers beobachtet. Dieses Gewicht ist gleich dem Gewichte des Körpers in der Luft, weniger dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit plus dem Gewichte der kapillar gehobenen und der an der Oberfläche verdichteten Flüssigkeit. Denn diese beiden Flüssigkeitsmengen

<sup>1) Wilhelmy, Poggend. Ann. 119 1863; 121. 1864; 122 1864.</sup>

werden von dem Körper getragen. Ist demnach  $\Pi$  das Gewicht des eingetauchten Körpers,  $P$  sein Gewicht in der Luft,  $G$  das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, ferner  $\lambda$  der Umfang des festen Körpers im Niveau der Flüssigkeit, taucht weiter die Fläche  $O$  des festen Körpers ein und nennen wir  $\beta$  das Gewicht der an der Einheit der Oberfläche verdichteten Flüssigkeit, so ist

$$\Pi = P - G + \alpha \lambda + \beta O.$$

Um in dieser Weise die beiden gesuchten Größen  $\alpha$  und  $\beta$  zu bestimmen, wird bei weiteren Versuchen der Körper tiefer eingetaucht. Nennen wir die bei einem zweiten Versuche eingetauchte Oberfläche  $O_1$ , das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit  $G_1$ , so wird

$$\Pi_1 = P - G_1 + \alpha \lambda + \beta O_1.$$

Aus diesen beiden Beobachtungen ergibt sich

$$\beta = \frac{G_1 - G + \Pi_1 - \Pi}{O_1 - O},$$

und mit dem so bestimmten  $\beta$  erhalten wir dann  $\alpha$

$$\alpha = \frac{\Pi + G - P - \beta O}{\lambda}.$$

Wilhelmy schloß aus seinen Versuchen, daß in der Tat an der Oberfläche der festen Körper eine sehr wohl meßbare Verdichtung stattfindet, und daß dieselbe je nach der Natur des festen Körpers und der Flüssigkeit verschieden sei. Wilhelmy gibt folgende Werte von  $\beta$  in Milligrammen auf das Quadratmillimeter.

Flüssigkeiten	Werte von $\beta$ an					
	Glas	Platin	Silber	Messing	Zink	Aluminium
Äthylalkohol.	0,012 59	0,006 41	0,015 12	0,023 26	0,007 09	0,007 16
Amylalkohol.	0,012 42	0,004 49	0,011 60	0,004 97	0,007 86	0,006 57
Äther . . . . .	0,011 86	0,011 80	—	—	—	—
Aceton . . . . .	0,012 90	0,002 20	—	—	—	—
Essigsäure . .	0,008 75	0,001 69	—	—	—	—
Essigäther . .	0,000 51	0,005 21	—	—	—	—

Es zeigt sich hier keineswegs, was man zunächst hätte vermuten sollen, daß die Verdichtung mit der Dichtigkeit des festen Körpers zunimmt, im Gegenteil sind die Verdichtungskoeffizienten für den dichtesten Körper, das Platin, im allgemeinen am kleinsten.

Für die Konstante  $\alpha$  ergab sich nach diesen Versuchen ein verschiedener Wert je nach dem festen Körper, der in die Flüssigkeit eingetaucht war, trotzdem alle Körper von den untersuchten Flüssigkeiten benetzt wurden. Weiter schloß Wilhelmy, daß, der Theorie entgegen, selbst die Form der Körper, ob Platte, ob Zylinder auf den Wert von  $\alpha$  von Einfluß sei. Folgende Tabelle enthält einige von Wilhelmy für Äthylalkohol und Amylalkohol erhaltene Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  für verschiedene Platten und Zylinder.

no Körper	$\alpha$		$\beta$	
	Äthylalkohol	Amylalkohol	Äthylalkohol	Amylalkohol
.....	2,444	2,542	0,015 12	0,011 60
.....	2,410	2,396	0,004 67	0,004 05
.....	2,395	2,401	0,006 41	0,004 49
.....	2,325	2,407	0,012 59	0,012 42
.....	2,448	2,551	0,023 26	0,004 97
der mm				
er 14,945	2,983	3,098	0,024 95	0,028 27
8,009	2,858	2,477	0,020 05	0,015 23
1,529	2,801	2,299	0,009 00	0,006 75

ie von Wilhelmy aus seinen Versuchen gezogenen Schlüsse, Oberflächen der festen Körper eine so erhebliche Verdichtung iten stattfände, und daß der Wert der Konstante  $\alpha$  von der Oberflächen abhängig sei, sind später sehr erhebliche Einwände len. Röntgen<sup>1)</sup> bestimmte zunächst den Gewichtsverlust eines haltbaren Gipsstückes von 3900<sup>qmm</sup> Oberfläche bei dem Ein- Veingeist. Dieselbe Gipsplatte wurde dann in 11 einzelne lt, so daß jetzt die Oberfläche des eingetauchten Gipses um nahm. Nimmt man nun auch den kleinsten, von Wilhelmy hol gegebenen Verdichtungskoeffizienten, nämlich 0,005 an, dem letzten Falle der Gewichtsverlust 0,180<sup>g</sup> weniger be- Röntgen fand aber den Gewichtsverlust im letzten Falle demjenigen im ersten Falle, so daß er gar keine meßbare beobachten konnte. Dasselbe ergab ein Versuch mit Glas. selampe wurde Glas zu äußerst feinen Häutchen ausgeblasen. Häutchen hatte eine Gewichtsmenge von 0,730<sup>g</sup> nach einer ndestens 80000<sup>qmm</sup> Oberfläche. Mit dem von Wilhelmy ge- richtungskoeffizienten 0,01259 hätte diese Glasoberfläche etwa hol auf sich verdichten müssen. Setzt man das spezifische Glases gleich 2,5, das des Alkohols gleich 0,8, so verdrängt im Eintauchen in Alkohol etwa 250<sup>mg</sup> Alkohol. Die ver- gkeit hätte also etwa das Vierfache der verdrängten Flüssig- , oder dieses Glas hätte bei dem Eintauchen in Alkohol wiegen müssen, als in der Luft. Es ergab sich indes eine hme von 231<sup>mg</sup>, aus der sich das spezifische Gewicht des 2,53 berechnet, während sich für ein massives Stück desselben epezifische Gewicht 2,51 ergab. Es ließ sich also überhaupt be Verdichtung beobachten.

hen Resultaten gelangte Schleiermacher<sup>2)</sup> bei einer Unter- r die auf benetzten Körpern verdichtete Flüssigkeitsmenge, sie so groß ist, wie Wilhelmy sie annahm, auf spezifische mmungen von beträchtlichem Einflusse sein kann. Schleier- et, daß die Verdichtung der Flüssigkeiten höchstens 0,0001<sup>mg</sup>

en. Wiedem. Ann. 3 p. 321. 1878.

rmacher, Wiedem. Ann. 8. p. 52. 1879.

auf das Quadratmillimeter betragen könne, und daß sich ebenso wenig Unterschiede derselben für die verschiedenen Substanzen erkennen lassen

Volkmann<sup>1)</sup> hat dann die Folgerung Wilhelmys geprüft, daß die Gestalt des eingetauchten Körpers auf den Wert der Konstanten von Einfluß sei. Zunächst weist derselbe nach, daß die Verdichtung der Flüssigkeiten an den Oberflächen, welche Wilhelmys Versuche zu ergeben schienen, sich vollständig erklären lassen, wenn man annahme, daß Wilhelmys Bestimmung des spezifischen Gewichtes des Alkohols mit einem kleinen Fehler behaftet sei, und daß dieselbe Annahme auch die an verschiedenen Formen derselben Substanz gefundenen Werte von  $\alpha$  sich sehr viel näher bringe; weiter, daß die Annahme eines kleinen konstanten Einstellungsfehlers bei Bestimmung der Grenze, bis zu welcher die Körper eingetaucht seien, die Unterschiede der gefundenen Werte von  $\alpha$  fast zum Verschwinden bringe.

Um einen etwaigen Einfluß der Krümmung der Oberfläche zu untersuchen, bestimmte Volkmann mit der größten Sorgfalt die Steighöhen einiger Flüssigkeiten zwischen parallelen Platten, die in verschiedenen Abständen einander gegenüber standen und in Röhren verschiedenen Durchmessers. Wenn er annahm, daß die Flüssigkeiten nicht direkt von der Wand, sondern, wie es in sofort zu besprechender Weise aber auf Grund anderer Auffassung schon Wilhelmy getan hatte, von einer an der Wand haftenden Flüssigkeitsschicht, der Wandschicht, getragen werden, so ergaben sich aus diesen Beobachtungen für Platten und Röhren die genau gleichen Werte von  $a^2$ , so daß ein Einfluß der Krümmung sich nicht erkennen ließ. Die Dicke der Wandschicht, welche Volkmann annehmen mußte, fand sich allerdings zwischen Platten und in Röhren verschieden. Für jede Platte fand er mit Alkohol und Knochenöl 0,002<sup>mm</sup>, für Röhren deren Durchmesser zwischen 2,93 und 0,71<sup>mm</sup> betrug, dagegen 0,004. So erhielt Volkmann z. B. für Alkohol folgende Werte für  $a^2$ , berechnet aus den Steighöhen unter der Voraussetzung, daß  $\theta = 0$  sei. Die unter  $a^2$  berechnet angegebenen Werte sind aus den beobachteten erhalten, indem von den gemessenen Werten des Abstandes bzw. des Radius die oben angegebenen Größen 0,004 und 0,007 abgezogen wurden.

Platten			Röhren		
Abstand	$a^2$		Radius	$a^2$	
mm	Beobachtet	Berechnet	mm	Beobachtet	Berechnet
1,956	5,80	5,78	1,9655	5,83	5,80
1,519	5,84	5,81	1,6745	5,83	5,79
1,138	5,79	5,75	1,0655	5,845	5,80
0,438	5,89	5,78	0,503	5,885	5,80
			0,714	5,92	5,80

Der von Wilhelmy aus seinen Versuchen gefolgerte Einfluß der Substanz des festen Körpers auf das von der Längeneinheit der Berührung

1) Volkmann, Wiedem. Ann. 11. p. 177. 1880.

linie getragene Gewicht der kapillar gehobenen Flüssigkeit ist dagegen durch andere Beobachtungen bestätigt worden. So läßt sich zunächst ein solcher Einfluß, wie Quincke<sup>1)</sup> gezeigt hat, aus Versuchen von Guthrie<sup>2)</sup> über die Bildung von Tropfen folgern. Läßt man nämlich von einem festen Körper Tropfen einer Flüssigkeit, die denselben vollkommen benetzt, abfließen, so liefert das Gewicht des abfallenden Tropfens das Gewicht, welches an einer dem Umfange des Tropfens an der Berührungsstelle gleichen Kontaktlinie zwischen festem und flüssigem Körper getragen werden kann. Der Quotient aus dem Tropfengewichte und dem erwähnten Umfange muß deshalb der von uns mit  $\alpha$  bezeichneten Größe sehr nahe gleich sein. Kennt man den Umfang, so kann man aus dem Tropfengewichte den Wert  $\alpha$  berechnen. Man kann das erreichen, indem man von kleinen vollkommen benetzten Scheiben Tropfen abfallen läßt; der Umfang der Scheiben ist dann gleich dem obern Umfange des Tropfens. Handelt es sich nur um eine Vergleichung der Kapillaritätskonstanten, so braucht man den Tropfenumfang nicht zu kennen, wenn man die Tropfen verschiedener Flüssigkeiten von einem und demselben festen Körper abfließen läßt, oder wenn man bei Benutzung verschiedener fester Körper dieselben in Form von Kugeln gleicher Radien benutzt. Da die Umfänge der Tropfen bei benetzenden Flüssigkeiten dann gleich sind, so sind die Gewichte der Tropfen den Kapillaritätskonstanten proportional.

In dieser Weise hat Guthrie das Gewicht von Wassertropfen bestimmt, welche von Kugeln verschiedener Substanzen abfielen, deren Radien gleich 7<sup>mm</sup> waren. Die von Guthrie erhaltenen Zahlen enthält folgende kleine Tabelle, das Gewicht der Tropfen ist in Milligrammen gegeben.

Antimon . . . . .	119,8	Blei . . . . .	122,6
Schwefel . . . . .	120,2	Phosphor . . . . .	122,7
Kadmium . . . . .	121,8	Wismuth . . . . .	122,8
Zink . . . . .	122,5	Zinn . . . . .	124,2.

Von einer Glaskugel, deren Radius 7<sup>mm</sup>,1 betrug, fielen die Tropfen Gewicht 129,7 und von einer gleichen Messingkugel 132,2.

Die Unterschiede sind ähnlich wie bei den Versuchen von Wilhelmy; hier zeigt sich wie dort der Wert von  $\alpha$  bei Messing größer als bei Glas.

Diesen Einfluß der Körpersubstanz auf das getragene Flüssigkeitsgewicht glaubte Wilhelmy<sup>3)</sup> mit der Theorie vereinigen zu können, wenn man die Voraussetzung fallen läßt, daß bei allen benetzenden Flüssigkeiten der Randwinkel  $\vartheta = 0$  ist. Wilhelmy glaubt, wie es schon Poisson nahm, daß man als die Kapillarröhre, in welcher die Flüssigkeit aufliegt, die letzte an der Wand haftende Flüssigkeitsschicht ansehen müsse, welche je nach der Natur des festen Körpers mehr oder weniger verdichtet

Der Winkel  $\vartheta$ , der dann maßgebend ist, ist jener, unter welchem sich

1 Quincke, Berliner Berichte über die Fortschritte der Physik für das Jahr 1863. 21 p. 99.  
 2 Guthrie, On drops. Proceedings of Royal Society of London 13 1863.  
 3 Wilhelmy, Poggend. Ann. 119. 1863.

die kapillare Oberfläche der Wandschicht anschließt, und dieser ist je nach der Verdichtung der Wandschicht verschieden. Damit muß auch der beobachtete Wert von  $\alpha$  verschieden sein, da wir aus der Steighöhe oder dem gehobenen Gewicht die wahre Kapillaritätskonstante nur erhalten wenn  $\vartheta = 0^\circ$  ist.

Daß der Randwinkel  $\vartheta$  bei benetzenden Flüssigkeiten nicht ohne weiteres 0 ist, wurde durch die Beobachtungen von Quincke bestätigt indem er zunächst zeigte<sup>1)</sup>, daß die Steighöhe des Wassers an einer Glaswand verschieden ist, je nachdem man dieselbe gleich nach Herstellung des Meniskus oder längere Zeit nachher untersucht. Aus fünf Versuchsreihen, bei denen er die Höhe, bis zu welcher das Wasser an der vertikalen Wand einer vorher luftfrei gemachten Flasche emporstieg, bestimmte, fand er im Mittel

$$h_0 = a = 4,135$$

bei einer Temperatur von  $17^\circ$ . Bei Wiederholung desselben Versuchs, nachdem das Wasser mehrere Wochen mit Abschluß der Luft gestanden hatte, ergab sich bei derselben Temperatur

$$h_0 = a = 3,867,$$

also ein merklich kleinerer Wert, der beweist, daß der Winkel  $\vartheta$  größer als  $0^\circ$  geworden war.

Später hat Quincke<sup>2)</sup> direkt die Steighöhen in kapillaren Röhren mit den aus der Messung von Luftblasen sich ergebenden Werten der Konstanten verglichen, und nach den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen die Werte von  $H$  und  $\vartheta$  direkt bestimmt. Nach diesen Gleichungen ist die Höhe  $T$  der ganzen Luftblase

$$T = \sqrt{\frac{H}{s} (1 + \cos \vartheta)} = a \cdot \sqrt{1 + \cos \vartheta}$$

und der Abstand der Blasenkupe von dem Schnitte, in welchem die Blase den größten Durchmesser hat,

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

Für den Winkel  $\vartheta$  ergab sich schließlich

$$\cos \frac{1}{2} \vartheta = \frac{T \sqrt{\frac{1}{2}}}{t}.$$

Folgende kleine Tabelle enthält die von Quincke aus den Steighöhen in kapillaren Röhren abgeleiteten Konstanten  $a$ , sowie die aus Beobachtungen an Tropfen sich ergebenden Werte von  $a$  und  $\vartheta$ .

Die Beobachtung der Steighöhen geschah bei einer Temperatur von  $20^\circ$ , jene an Tropfen bei etwa  $25^\circ$  C.

1) Quincke, Poggend. Ann. 135. 1868.

2) Quincke, Poggend. Ann. 139. 1870.



Substanzen	Kapillaritätskonstanten $\alpha$ und $\vartheta$ aus			
	Steighöhen	Beobachtungen an Blasen		
	$\alpha = \sqrt{h \cdot r}$	$\alpha = t$	$T\sqrt{\frac{1}{t}}$	$\vartheta$
von unterschwefligsaurem				
ron in Wasser . . . . .	3,684	3,748	3,670	23°20'
F . . . . .	3,804	4,062	3,834	25°32'
elkohlenstoff . . . . .	2,296	2,270	2,185	32°16'
öl . . . . .	2,675	2,868	2,817	21°50'
tinöl . . . . .	2,497	2,615	2,475	37°44'
form . . . . .	1,916	—	—	—
. . . . .	2,586	2,850	2,705	36°20'
l . . . . .	2,379	2,564	2,503	25°12'

Die Kapillaritätskonstanten  $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot s$  ergeben sich daraus Werte:

Substanzen	Dichte $s$	aus Steighöhen $\alpha_1$ Milligr.	aus Blasen $\alpha$ Milligr.	$\alpha \cos \vartheta$
schwefligsaures Natron .	1,1248	7,636	7,903	7,256
. . . . .	1	7,235	8,258	7,449
elkohlenstoff . . . . .	1,2678	3,343	3,274	2,768
öl . . . . .	0,9136	3,271	3,760	3,490
tinöl . . . . .	0,8867	2,765	3,033	2,398
form . . . . .	1,4878	2,783	—	—
. . . . .	0,7977	2,566	3,233	2,604
l . . . . .	0,7906	2,273	2,599	2,352

Man sieht, stimmen außer für Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl die der zweiten und letzten Kolumne ziemlich gut überein, ein Beweis, daß man aus der Beobachtung kapillarer Steighöhen und unter Annahme  $\vartheta = 0^\circ$  im allgemeinen zu kleine Werte der Konstanten  $\alpha$  erhält.

Die Abweichungen bei Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl glaubt man einer chemischen Veränderung dieser Flüssigkeiten während der Versuche zuschreiben zu müssen.

Quincke, einer ausführlichen Untersuchung über den Randwinkel hat dann später denselben für eine Anzahl Flüssigkeiten und feste Körper an Tropfen, welche er auf Flächen derselben auffallen ließ, gemessen. Auf reinen Flächen, die indes nur schwierig und auf ganz kurze Zeit erhalten sind, glaubt er aus seinen Versuchen schließen zu können, daß der Randwinkel benetzender Flüssigkeiten gleich Null sei. Für gewöhnlich erhält man indes größere bei derselben Flüssigkeit und verschiedenen Körpern sowohl als bei demselben festen Körper und verschiedenen Flüssigkeiten verschiedene, von Null verschiedene Werte. Quincke meint, daß die feste Oberfläche mit einer unmerklich dünnen Schicht

einer andern Substanz, etwa adhärierenden Gases, überzogen sei, deren Dicke kleiner als der Radius der Wirkungssphäre der Moleküle sei. Die Dicke dieser Schicht hat auf die Größe des Randwinkels Einfluß. Deshalb findet man bei derselben Flüssigkeit, wie Wasser, Alkohol auf demselben festen Körper verschiedene Randwinkel. So erhielt er mit Wasser an reinen Oberflächen, je nachdem er 2 Minuten oder 10 Minuten nach Herstellung der reinen Oberfläche wartete, ehe er die Tropfen aufbrachte, folgende Werte von  $\vartheta$ :

	nach 2 Minuten	nach 10 Minuten
Platin . . . . .	$10^{\circ}43'$	$18^{\circ}13'$
Gold . . . . .	$4^{\circ}16'$	$8^{\circ}18'$
Silber . . . . .	$11^{\circ}32'$	$17^{\circ}58'$

Gegen die Annahme, daß auch bei benetzenden Flüssigkeiten der Randwinkel allgemein nicht Null sei, und daß man deshalb aus kapillaren Steighöhen die Kapillaritätskonstante  $a^2$  oder  $\alpha$  nicht mit Sicherheit bestimmen könne, ist mehrfach Einspruch erhoben.

Zunächst hob Volkmann<sup>1)</sup> hervor, daß wenn bei Wasser und Alkohol an Glas der Randwinkel nicht Null sei, das darin seinen Grund habe, daß die Flächen nicht vollkommen rein seien bzw. nicht vollkommen benetzt seien, daß man diese vollkommene Benetzung nicht nur, wie Quincke meine, auf kurze Zeit, sondern für eine hinreichende Zeitdauer herstellen könne, so zwar, daß man zwischen Platten und besser noch in kapillaren Röhren die Kapillaritätskonstante  $a^2$  mit Sicherheit unter der Annahme  $\vartheta = 0$  berechnen könne. Erforderlich sei dazu, daß man die Platten und Röhren vorher sorgfältig mit der Flüssigkeit benetze, ehe man aus der kapillaren Steighöhe die Kapillaritätskonstante ableite.

Einen Beweis für seine Ansicht findet Volkmann in folgendem: taucht man ein gereinigtes trockenes Glasrohr in Wasser, so gelingt es meist durch Heben und Senken des Rohres den Randwinkel zu ändern, ohne daß die Kontaktlinie ihre Lage im Glasrohre ändert. An derselben Stelle des Rohres kann man aber füglich nicht von einer verschiedenen Adhäsion der Flüssigkeit am Glase reden, durch welche ein verschiedener Randwinkel bedingt würde. Die Ursache jener Erscheinung ist vielmehr in dem großen Einfluß der Reibung an der Wandfläche zu suchen. Die Reibung wird vermieden, wenn für vollständige Benetzbarkeit Sorge getragen wird, bei jeder Erschütterung schwingt dann die Kontaktlinie mit dem ganzen Meniskus um die Gleichgewichtslage im Zustande der Ruhe.

Es scheint mir nicht, daß diese Beobachtung beweisend ist, denn während des Hebens und Senkens des Rohres stattfindende Änderung des Randwinkels zeigt eben nur, daß der Meniskus wegen der Reibung um die Kontaktlinie pendelt, während an der benetzten Fläche die Kontaktlinie nicht haftet und mit auf- und niedergeht. Ob in dem einen oder andern Falle der Kontaktwinkel dauernd von Null verschieden ist, läßt sich auf diese Weise nicht erkennen.

Der Randwinkel geht bei der Bestimmung der Kapillaritätskonstante  $a^2$  aus der Steighöhe nur ein, wenn man aus dem Radius der Röhre  $r$

1) Volkmann, Wiedem. Ann. 11. p. 177. 1880; 17. p. 353. 1882; 18. p. 11 1883; 28. p. 135. 1886

Krümmungsradius der Oberfläche ableiten will. Deshalb hat Magie<sup>1)</sup> neben der Steighöhe die Krümmung der Oberfläche direkt durch ein optisches Verfahren bestimmt. Er maß die Größe und den Abstand des Bildes, das die spiegelnde Oberfläche der Flüssigkeit von einem in gemessener Entfernung von der Oberfläche befindlichen Gegenstande bekannter Größe wirft, von eben dieser Oberfläche. Wie sich daraus die Krümmung des Spiegels ergibt, werden wir in der Lehre vom Lichte sehen.

Magie erhielt für Wasser unter andern folgende Werte für  $a^2$  aus der Steighöhe  $h$  und dem Krümmungsradius  $\rho$  bei einer Temperatur von  $19^{\circ},25$

$h$	$\rho$	$a^2$
38,23	0,3731	14,262
32,73	0,4573	14,968
23,23	0,6258	14,537

Als Mittel von neun Messungen erhielt Magie für  $19^{\circ},25$  C.

$$a^2 = 14,453,$$

der mit dem Brunnerschen Temperaturkoeffizienten für  $16^{\circ}$  C.

$$a^2 = 14,536.$$

Dieser Wert ist so erheblich kleiner als die von allen sonstigen Beobachtern gefundenen Werte, daß man ihn kaum als für reines Wasser geltend annehmen kann: die meisten Beobachter finden nämlich, worauf wohl zuerst Hagen<sup>2)</sup> ausdrücklich hinwies, daß eine geringe Verunreinigung des Wassers den Wert von  $a^2$  erheblich vermindert.

Quincke hat später<sup>3)</sup> neben der Steighöhe in kapillaren Röhren nicht nach einer optischen Methode den Randwinkel unter welchem die kapillare Oberfläche die Röhrenwand schneidet, gemessen, er findet denselben für Wasser bei neu hergestellten oder auch längere Zeit trocken bewahrten Röhren von Null verschieden. Die Werte sind indes erheblich kleiner, als sie sich aus der Beobachtung an Blasen ergaben, sie liegen zwischen  $3^{\circ}$  und  $9^{\circ}$ .

Gleichzeitig fand Quincke, daß die aus den Steighöhen berechnete Kapillaritätskonstante des Wassers von der Natur des Glases und der Weite der Röhre abhängig sei. So findet er für Röhren aus Jenaer Normalglas, an der Durchmesser von 0,3046 auf 1,425<sup>mm</sup> zunahm, eine Zunahme von  $a^2$  von 14,784 auf 15,693 bei  $18^{\circ}$  C., für englisches Flintglas bei 0,446 bis 1,576 wachsendem Durchmesser eine Zunahme von  $a^2$  von 14,446 auf 15,553. Bei thüringer Glas war die Zunahme sehr klein.

Quincke glaubt diese Verschiedenheit auf Verunreinigung der kapillaren Oberfläche durch aufgelöstes Glas oder Zersetzungsprodukte desselben zurückführen zu können. Da die Verunreinigung nur von der Wand der Röhre ausgehen kann, ist der Einfluß der Röhrenweite verständlich: in engeren Röhren ist das Verhältnis der kapillaren Oberfläche zur Kontaktfläche ein kleineres als bei größerer Röhrenweite, somit bei gleicher Glas-

1 Magie, Wiedem. Ann. 25. p. 421. 1885.

2 Hagen, Poggend. Ann. 67. p. 160. 1846.

3 Quincke, Wiedem. Ann. 52. p. 1. 1894.

sorte die aufsteigende kapillare Oberfläche stärker verunreinigt. . ist indes, daß sich die verschiedenen Gläser so verschieden ze schwerlösliche Gläser die Oberflächenspannung zum Teil stärker b als leichtlösliche Gläser.

Volkmann<sup>1)</sup> hat eine solche Abhängigkeit von  $\alpha^2$  von des Glases und der Röhrenweite bei sorgfältig mit Ätzkali und Wasser ausgewaschenen Röhren nicht erkennen können; er fand verschiedenen Glassorten und Röhren verschiedener Weite  $\alpha$  bei 18° C.

Gegen die von Quincke aus seinen Messungen an Tropfen u gezogenen Schlüsse machen Worthington<sup>2)</sup> und Magie<sup>3)</sup> da merksam, daß die im vorigen Paragraphen entwickelten Gleichu  $T$  und  $t$ , die von Quincke benutzt sind, nur für Tropfen von solc gelten, daß man deren Kuppe als eben betrachten und den Kr radius des durch den Bauch, die Stelle wo das Element des schnitts vertikal ist, geführten horizontalen Schnittes als unent annehmen dürfe. Für kleinere Tropfen treten wegen der so vert ten Krümmungen Korrektionsglieder in die Gleichungen, welche, unmittelbar erkennt, für die Kapillaritätskonstanten die Werte, v ersterer Voraussetzung sich ergeben, verkleinern. Indem Wort und Magie, letzterer nach einer Formel von Poisson, diese Ko anbringen, gelangen sie zu Werten der Kapillaritätskonstanten, Teil erheblich kleiner sind als die von Quincke berechneten un kapillaren Steighöhen sich ergebenden erheblich näher kommen.

Dem gegenüber weist Quincke darauf hin<sup>4)</sup>, daß er für W Alkohol sowie für Lösungen von Salzen in Wasser und Alkohol l an kleinen Luftblasen auf solche an großen Luftblasen reduzi Er beobachtete<sup>5)</sup> die Werte von  $T$  und  $t$  zunächst an Blasen v Durchmesser, bei welchen die vereinfachenden Voraussetzungen g verglich mit den so gefundenen Werten diejenigen an kleiner So ergeben sich z. B. aus vier Versuchsreihen bei den Durchm von Wasserblasen folgende Werte von  $T$  und  $t$

$2r$	$T$	$t$	$\frac{T}{T_{100}}$	$\frac{t}{t_{100}}$
mm	mm	mm		
100	5,613	3,975	1,0000	1,0000
47	5,806	4,077	1,0344	1,0261
30,1	5,821	4,147	1,0372	1,0433
20,1	5,738	4,022	1,0223	1,0121.

Mit diesen und andern Messungen wurde eine Tabelle entw welcher man für jeden Tropfendurchmesser die gemessenen Wer und  $t$  durch Division mit dem betreffenden Quotienten den Wer endlich große Durchmesser berechnen kann.

1) Volkmann, Wiedem. Ann. 53. p. 633. 1894; 66. p. 194. 1898.

2) Worthington, Philosoph. Magazin. 20. (5.) p. 54. 1885. Bei p. 710. 1886.

3) Magie, Wiedem. Ann. 25. p. 421. 1885.

4) Quincke, Wiedem. Ann. 27. p. 219. 1886.

5) Quincke, Poggend. Ann. 160. p. 354. 1877.

aus den für Wasser und Alkohol direkt an Blasen von 100<sup>mm</sup> Durchmesser gemessenen Werten

Wasser . . .	$T = 5,613$	$t = 3,975$	wird $a^2 = 15,80$	$\theta = 6^\circ 16'$
Alkohol . . .	3,448	2,434	5,92	0°.

Die Werte von  $a^2$  stimmen mit denen überein, welche Magie aus den Beobachtungen von Quincke mit der Poissonschen Formel berechnet. Die Bestimmung der kapillaren Steighöhe desselben Alkohols hatte Quincke den Wert 15,80 gegeben, der an der Blase gefundene Wert von  $a^2$  ist also etwas größer, obwohl sich aus  $T$  und  $t$  der Randwinkel Null ergibt. Lohstein<sup>1)</sup> hält das empirische Verfahren Quinckes nicht für haltbar, die Beobachtungen an kleinern Blasen auf unendlich große zu reduzieren, ebenso wie er die Poissonsche Formel zur Berechnung der Kapillarkonstanten aus Beobachtungen an Tropfen nicht für ausreißend hält. Er hat nach der von ihm entwickelten Methode einige Bestimmungen Quinckes berechnet und erhält erheblich kleinere Werte der Kapillarkonstanten wie Quincke. So erhält er für

$r = 100$ ,	$T = 5,613$ ,	$t = 3,975$ ,	$a^2 = 14,94$ statt 15,80,
$r = 88$ ,	$T = 5,628$ ,	$t = 4,112$ ,	$a^2 = 15,48$ „ 16,9.

Die aus Quinckes Beobachtungen an Blasen sich ergebenden Werte sind nicht größer als die nach andern Methoden gefundenen.

Contour<sup>2)</sup> erhielt nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Methode bei Beobachtung des Maximaldruckes in Tropfen  $a^2 = 15,28$  bei 19° C. Später hat Magie<sup>3)</sup> selbst Messungen an Blasen vorgenommen in der Weise wie Quincke und gelangt ebenfalls zu dem Resultate, daß für eine Reihe benetzender Flüssigkeiten der Randwinkel einen endlichen Wert hat, nicht Null, für Wasser, Essigsäure, Terpentin, Petroleum und Äther. Die von ihm gefundenen Werte des Randwinkels liegen zwischen 17° und 26°. Für Äthylalkohol, Chloroform, Benzin und Ameisensäure schließt Magie, daß der Randwinkel Null sei.

Die Methode von Sondhaus gibt nach den Beobachtungen von Timberg im allgemeinen größere Werte für die Konstante  $a^2$  als die Bestimmung an Blasen. So erhält Timberg für die Temperatur 16° folgende Werte von  $a^2$

	an Blasen,	an Lamellen
Alkohol . . . . .	5,817	6,360
Benzol aus Benzoesäure . .	6,571	7,573
Wasser . . . . .	15,837	15,773.

Die aus den Beobachtungen an Blasen sich ergebenden Werte der Kapillaritätskonstanten ändern sich nach den Beobachtungen Quinckes<sup>4)</sup> mit der Zeit, und ähnliches gibt Timberg für die Lamellenspannung an.

<sup>1)</sup> Lohstein, Wiedem. Ann. 53. p. 1070. 1894. Man sehe auch Heydrick, Wiedem. Ann. 65. p. 311. 1898.

<sup>2)</sup> Contour, Wiedem. Ann. 47. p. 420. 1892.

<sup>3)</sup> Magie, Philosoph. Magazin. 26. (5.) p. 162. 1888.

<sup>4)</sup> Timberg, Wiedem. Ann. 80. p. 545. 1887.

<sup>5)</sup> Quincke, Poggend. Ann. 160. p. 568. 1877.

Gleich nach Bildung der Luftblase ist die Kapillaritätskonstante erheblich größer als später, dieselbe scheint sich mit wachsender Zeit einem Maximum zu nähern. So gibt Quincke unter andern für Wasser und Alkohol sowie Quecksilber folgende Beobachtungsreihen:

Wasser.			Alkohol.		
Zeit	$a^2$	$\theta$	Zeit	$a^2$	$\theta$
0 <sup>h</sup>	16,89	30° 36'	0 <sup>h</sup>	5,818	0°
3 48'	16,39	24° 8'	0 14'	5,665	0°
21 20'	15,88	31°	1 44'	5,567	0°
bewegt	15,94	26° 34'	2 30'	5,554	0°
0 <sup>h</sup>	16,91	29° 14'	5 51'	5,546	0°
1 3'	16,84	28° 56'	Quecksilber		
17 23'	15,97	26° 48'	0 <sup>h</sup>	7,823	
21 4'	15,18	28° 24'	0 5'	7,783	
27 22'	14,67	25° 6'	0 10'	7,225	
41 17'	14,69	29° 32'	3	7,081	

Quincke fand diese Abnahme der Oberflächenspannung kleiner kleinen Tropfen als an großen Tropfen und sieht darin auch den Grund weshalb man eine solche Abnahme in kapillaren Röhren im allgemeinen nicht findet. Hiermit stimmt überein, daß er in Röhren von 5,5, 3,8, 2,1<sup>mm</sup> Durchmesser deutlich eine Abnahme erhielt, welche um so größer war, je kleiner der Durchmesser der Röhre war. Volkmann<sup>1)</sup> beobachtet ähnliches an einigen Salzlösungen auch in noch engeren Röhren. Quincke sieht in dieser Erscheinung eine Art elastischer Nachwirkung in Flüssigkeiten ähnlich der elastischen Nachwirkung in festen Körpern. Er meint, daß ähnlich wie die elastische Gleichgewichtslage der Teilchen eines festen Körpers erst allmählich oder nach unendlich langer Zeit eintritt, so auch die Gleichgewichtslage der Grenzteilchen einer Flüssigkeit sich allmählich einstellen.

Es läßt sich nicht leugnen, daß, wie auch Volkmann hervorhebt, diese Auffassung in der vollkommen freien Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen eine Schwierigkeit findet, man müßte denn annehmen, daß, was auch manches andere spricht, in der Oberflächenschicht eine eigentümliche Zähigkeit vorhanden ist. Volkmann möchte die Erscheinung eher auf einen eigentümlichen Einfluß der Luft auf die kapillare Oberfläche zuschreiben, da er zwischen Platten und auch in kapillaren Röhren die Erscheinung viel stärker bei luftfreiem, als bei mit Luft gesättigtem Wasser findet. Wenn Quincke die größere Konstanz der Erscheinung in kleinen Blasen und in Röhren dem Einflusse der festen Wand zuschreibt, indem die Adhäsion des Flüssigen am Festen die Moleküle hindert der elastischen Nachwirkung zu folgen, glaubt Volkmann, daß in engen Röhren die Luft in dem Maße einwirken könne. Welcher Art diese Einwirkung der Luft sein soll, darüber läßt sich Volkmann nicht aus<sup>2)</sup>).

1) Volkmann, Wiedem. Ann. 17. p. 361. 1882.

2) Volkmann, Wiedem. Ann. 17. p. 377. 1882.

3) Man sehe auch Fräulein Pockels, Nature. 46. p. 418. 1892. Ann. d. Phys. 8. p. 854. 1902.

Daß in der Tat kleine Verunreinigungen oder Verdichtung von Gasen den Oberflächen die Kapillarkonstanten wesentlich beeinflussen kann, zeigt besonders das Quecksilber. Die Konstanten desselben sind von verschiedenen Beobachtern und zu verschiedenen Zeiten sehr verschieden gefunden, und Quincke hat schon in seiner ersten Arbeit über die Kapillaritätskonstanten des Quecksilbers gezeigt, daß der aus der Messung an flachen Tropfen sich ergebende Wert von  $a^2$  mit wachsender Zeit kleiner wird.<sup>1)</sup> Gleiches gilt für die vorher angegebenen Zahlen. Gleich nach dem Auflegen ergab  $a^2 = 7,823$  oder  $\alpha = \frac{a^2 s}{2} = 52,96$ , nach drei Stunden aber  $a^2 = 7,085$  oder  $\alpha = 48,11$ .<sup>2)</sup> Noch etwas größere Werte als sofort nach dem Auflegen der Tropfen erhielt Quincke<sup>3)</sup> aus der Messung der Depression in engen Röhren und des Randwinkels, er fand  $\alpha = 54,08$  und  $55,78$  bei  $5^\circ \text{C}$ . Sämtliche übrige Beobachter fanden kleinere Werte. Cantor<sup>4)</sup> erhielt nach der Methode des Maximaldruckes  $\alpha = 45,89$ , G. Meyer<sup>5)</sup> nach der Methode von Helmholtz-König und nach der Berechnung von Lohnstein<sup>6)</sup>  $\alpha = 43,68$ . Siedentopf<sup>7)</sup> nach der gleichen Methode  $a^2 = 6,698$  oder  $\alpha = 45,4$ .

Stöckle<sup>8)</sup> und G. Meyer<sup>9)</sup> haben dann den Nachweis geliefert, daß die Veränderlichkeit der Kapillarkonstanten eine Folge der Verdichtung von Gasen an der Oberfläche des Quecksilbers ist. Stöckle beobachtete nach der Methode von Helmholtz-König, brachte aber die Röhre, aus deren Endquerschnitt der zu messende Tropfen herausgepreßt wurde, in einen luftdicht schließenden Raum, so daß er den Tropfen hervortreten lassen konnte, wenn die Umgebung desselben luftleer war, oder wenn diese mit Gasen unter verschiedenen Drucken gefüllt war. Der Tropfen wurde soweit aus dem Endquerschnitt herausgetrieben, daß die Krümmung der Tropfenkuppe ein Maximum war, die Berechnung der Konstanten geschah mit Hilfe der Seite 411 erwähnten Tabellen von Bashforth und Adams. Die von Stöckle erhaltenen Resultate sind folgende: Im luftleeren Raum gebildet und erhalten, zeigt der Quecksilbertropfen konstant  $a^2 = 44,4 \left( \frac{\text{millgr.}}{\text{mm}} \right)$  bei  $15^\circ$ ; dabei ist es gleichgültig, welches Gas vor dem Pumpen die Umgebung des Tropfens enthalten hat.

In mit Gasen erfüllten Räumen ergibt sich die Oberflächenspannung gewöhnlich höher als im leeren Raum, wenn man sie sobald wie möglich nach der Bildung des Tropfens bestimmt, sie nimmt dann aber mit wachsender Zeit erheblich ab und sinkt in allen Gasen nach etwa  $\frac{3}{4}$  Stunden nahezu den Wert, welchen sie auch im leeren Raum zeigt. Die Schnelligkeit der Abnahme ist verschieden für die verschiedenen Gase, am

1 Quincke, Poggend. Ann. 105. p. 1. 1858.

2 Quincke, Poggend. Ann. 160. p. 568. 1877.

3 Quincke, Wiedem. Ann. 52. p. 1. 1894.

4 Cantor, Wiedem. Ann. 47. p. 415. 1892.

5 G. Meyer, Wiedem. Ann. 53. p. 865. 1894.

6 Lohnstein, Wiedem. Ann. 54. p. 722. 1895.

7 Siedentopf, Wiedem. Ann. 61. p. 253. 1897.

8 Stöckle, Wiedem. Ann. 66. p. 499. 1898.

9 G. Meyer, Wiedem. Ann. 66. p. 523. 1898.



schnellsten erfolgt sie im Wasserstoff, am langsamsten im Stickstoff. geben in folgender Tabelle einige Resultate Stöckles an:

Name des Gases	Druck	Tempe- ratur	Anfangs- wert	End-
Vacuum . . . . .	0,0004—0,001	15°	44,4	44
Wasserstoff . . . . .	Atm.	21°	47,9	44
Wasserstoff gemischt mit trock- ner Luft. . . . .	"	"	48,4	44
Trockene Luft . . . . .	"	17°	48,5	44
Kohlensäure . . . . .	"	19°	49,0	44
Sauerstoff . . . . .	"	23°	48,7	44
Stickstoff. . . . .	"	16°	49,8	44
Stickstoff. . . . .	10 mm	"	49,9	44

Die Endwerte sind die eine Stunde nach Herstellung der T sich ergebenden Werte:

Stöckle weist zunächst durch Betrachtung des Ganges der Ab von  $\alpha$  nach, daß nicht die Ablagerung von Dämpfen, die aus der Fe der Hähne in den Röhren, die zur Luftpumpe führen oder die Umg des Tropfens mit verschiedenen Gasen füllen lassen, die Abnahme be kann. Da im leeren Raume dieser Niederschlag sich außerorde schnell bildet, während er bei Atmosphärendruck längere Zeit beanp müßte die Schnelligkeit der Bildung vom Drucke des Gases abhängig was, wie die beiden Beobachtungen mit Stickstoff zeigen, nicht da ist. Weiter aber zeigte Stöckle, daß der Gang der beobachteten von  $\alpha$  genau derselbe war, wenn man bei der Zusammenstellung Apparates jede Verwendung von Fett ausschloß und schließlich Stöckle darauf hin, daß auch an freier Luft, wo überhaupt keine dämpfe vorhanden sein können, die Abnahme der Oberflächenspannung obachtet sei; er sieht deshalb den alleinigen Grund der Abnahme Oberflächenspannung in der Verdichtung der Gase an der Oberfläche Tropfens.

Eine Erklärung dafür, daß in den Gasen der Endwert der Oberfl spannung derjenigen im leeren Raume gleich wird, ist hierdurch gegeben, im Gegenteil, diese experimentell konstatierte Tatsache biete das Verständnis unleugbar eine große Schwierigkeit.

Aus der Tatsache, daß die gefundenen Anfangswerte der Oberfl spannung im allgemeinen in denjenigen Gasen die kleineren sind welchen die Abnahme die schnellere ist, kann man den Schluß ziehen wenn man eine unendlich kleine Zeit nach Bildung des Tropfen Messungen machen könnte, sich ein Anfangswert für die Oberfl spannung ergeben würde, der größer sein müßte als der von Stö gefundenene. Diese Folgerung haben die Versuche von G. Meyer bestätigt Derselbe maß die Oberflächenspannung nach einer dynamischen Methode die wir im § 90 besprechen werden, bei welcher die Oberflächenspannung sofort nach Berührung von Quecksilber und Gas durch die Schwingung eines aus einer elliptischen Öffnung ausfließenden Strahles erhalten wird

1) Wir werden bei der Lehre von der schwingenden Bewegung noch

Die gefundenen Werte sind für die Oberflächenspannung in

Wasserstoff	Luft	Sauerstoff	Stickstoff	Kohlensäure
$\alpha = 56,5$	51,5	51,4	50,5	49,6

Die Zahlen sind sämtlich größer als die von Stöckle gefundenen Werte, scheinen aber in den verschiedenen Gasen nicht ganz übereinstimmen. Die Werte für Luft kommen denen Quinckes für frisch elege Tropfen oder in kapillaren Röhren sehr nahe; Meyer glaubt in der Art der Messung auch begründet. Quincke taucht in eine Quecksilbermasse eine oben zugeschmolzene Kapillarröhre und st dann das zugeschmolzene Ende ab, das Quecksilber steigt dann aus Innern einer größern Masse, also ohne mit Luft in Berührung gekommen zu sein, in der Röhre auf, ferner wird sich in der Achse der Röhre das Quecksilber am schnellsten bewegen und sich somit fortwährend an den Wänden zurückbleibende legen. Damit ist die Bedingung für die Bildung einer Oberfläche gegeben, auf der keine Luft verdichtet ist. Mit der Auffassung von Stöckle und G. Meyer stimmt auch überein, daß die aus den verschiedenen Methoden der Messung sich ergebenden Werte der Oberflächenspannung des Quecksilbers fast sämtlich zwischen 44 und etwa 55 liegen, nur wenige Werte gehen unter 40 herunter.<sup>1)</sup> Da ähnliche Einflüsse bei andern Substanzen nicht ausgeschlossen werden kann, wird man sich nicht wundern können, wenn die nach verschiedenen Methoden gefundenen Werte der Oberflächenspannung für ein und dieselbe Substanz nicht vollständig übereinstimmen.

### § 80.

**Zahlenwerte; Einfluß der Temperatur.** Wir stellen hiernach im Folgenden einige Zahlenresultate gemessener Kapillaritätskonstanten zusammen. Die Zahlenwerte gelten, wie schon erwähnt, stets nur für die gegebene Temperatur. Wie nämlich zuerst Frankenheim und Sondhaus<sup>2)</sup> erkannt haben, nimmt die Kapillarkonstante mit steigender Temperatur erheblich ab. Aus Beobachtungen in kapillaren Röhren erhielt Sondhaus für Wasser als Wert von  $a^2$  bei der Temperatur  $t$

$$a^2 = 15,373 - 0,02983 t,$$

Abnahme war also der Temperaturzunahme proportional. Zu dem

noch eine dynamische Methode kennen lernen, die von Lord Kelvin angegeben und von Lord Rayleigh, Matthiessen, Grunmach u. a. benutzt worden ist

<sup>1)</sup> Bashforth,  $\alpha = 34$ , An attempt to test the theory of capillary action. London 1883; Sauter,  $\alpha = 39,23$ , Journal de phys. 9. 2. p. 384 1890; Kahlne nach der Methode von Lord Kelvin bei frisch hergestellter Oberfläche 44,01 und 42,17, nachdem die Oberfläche 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub> Stunden an der Luft gestanden 42,42 und nach weiteren 35 Min. 37,57 (Ann. d. Physik. 8. p. 440. 1902; Grunmach, Ann. d. Physik. 9 p. 1278. 1902, findet nach der Methode von Lord Kelvin Werte die bis etwa  $\alpha = 33$  heruntergehen; für ganz frische Quecksilberoberflächen unmittelbar nach ihrer Herstellung wurde  $\alpha$  etwa gleich 50 und nahm nach einer Stunde auf 41,26 ab.

<sup>2)</sup> Sondhaus und Frankenheim nach Sondhaus, Poggend. Ann. Erg.-Bd. VIII. p. 157n.

gleichen Resultate und fast genau dem gleichen Wert der Konstanten für Wasser gelangten später Brunner<sup>1)</sup> und Wolf<sup>2)</sup>, es erhielt

Brunner	Wolf
$a^2 = 15,332 - 0,02864 t$	$a^2 = 15,592 - 0,02934 t,$

letzterer Wert ist das Mittel aus drei in Röhren verschiedener Weite durchgeführten Beobachtungsreihen, deren Zahlen sehr nahe übereinstimmen.

Eine etwas raschere Abnahme zeigen die von Sondhaus durch Messung der Lamellenspannung für Wasser gefundenen Werte, die indes wenig zahlreich sind.

Timberg<sup>3)</sup> hat die Änderung der Oberflächenspannung mit der Temperatur sowohl durch Messungen an Blasen als auch durch Messung der Lamellenspannung und Wägung der bei verschiedenen Temperaturen aus einer Röhre fallenden Tropfen verfolgt; durch Messungen an Blasen fand Timberg

$$a^2 = 16,347 - 0,03190 t,$$

durch Messung der Lamellenspannung

$$a^2 = 16,413 - 0,04063 t.$$

Wenn auch die Bestimmung der Kapillaritätskonstanten durch das Gewicht der von einer Röhre fallenden Tropfen unsicher ist, da es schwierig ist, den Umfang, also die Länge der Linie, an welcher der Tropfen im Augenblicke des Abfallens hängt, genau zu bestimmen, so ist doch das Gewicht der fallenden Tropfen stets der Oberflächenspannung proportional. Ist demnach  $P_0$  und  $P_t$  das Gewicht der abfallenden Tropfen bei  $0^\circ$  und  $t$ , und  $\alpha_0$  und  $\alpha_t$  die Oberflächenspannungen, so ist

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_0} = \frac{P_t}{P_0}.$$

Wird demnach beobachtet

$$P_t = P_0 (1 - \nu t)$$

so ist auch

$$\alpha_t = \alpha_0 (1 - \nu t)$$

und da allgemein  $\alpha_t = \frac{1}{2} a^2 s_t$ , wenn  $s_t$  das spezifische Gewicht bedeutet

$$\frac{\alpha_t}{s_t} = \frac{1}{2} a_t^2 = \frac{1}{2} a_0^2 \frac{s_0}{s_t} (1 - \nu t),$$

oder indem wir beachten, daß  $s_t = \frac{s_0}{1 + \gamma t}$  oder  $s_0 (1 - \gamma t)$  gesetzt werden kann und daß wir für  $(1 - \nu t) (1 - \gamma t)$ , da  $\nu$  und  $\gamma$  kleine Zahlen sind, schreiben können  $1 - \mu t$

$$a_t^2 = a_0^2 (1 - \mu t).$$

1) Brunner, Poggend. Ann. 70. p. 507. 1878.

2) C. Wolf, Poggend. Ann. 102. p. 571. 1857. Das Mittel ist von Sondhaus berechnet a. a. O.

3) Timberg, Wiedem. Ann. 80. p. 545. 1887.

Timberg fand in dieser Weise für Wasser  $\mu = 0,002\,252$ ; die beiden ersten Methoden ergeben  $\mu = 0,001\,951$  und  $0,002\,475$ , während die Gleichung von Sondhaus den in dieser Weise berechneten Temperaturkoeffizienten zu  $0,001\,940$  ergibt.

Volkmann<sup>1)</sup> gibt die Werte von  $\alpha$  aus beobachteten Steighöhen von  $6^\circ$  bis  $10^\circ$  C. in einer Tabelle. Die Werte lassen sich sehr gut darstellen durch die Gleichung

$$\alpha = 7,695 (1 - 0,00198 t),$$

während Weinberg<sup>2)</sup> für  $a^2$  nach der Methode von Sondhaus erhält

$$a^2 = 16,3 (1 - 0,001\,975 t).$$

Also bestimmten Temperaturkoeffizienten stimmen darnach recht gut überein.

Riess<sup>3)</sup> erhält nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen erwähnten dynamischen Methode von Lord Kelvin einen mit der Temperatur abnehmenden Temperaturkoeffizienten, während Ochsé eine solche Abnahme des Koeffizienten nur zwischen  $0^\circ$  und  $8^\circ$ , darüber hinaus den Koeffizienten konstant findet. Von  $0^\circ$  bis  $8^\circ$  erhält er

$$a^2 = 16,46 - 0,183 t + 0,006 t^2,$$

über hinaus

$$a^2 = 15,906 - 0,0666 t.$$

Der Temperaturkoeffizient ist also mehr als doppelt so groß, als er von anderen Beobachtern nach den verschiedensten Methoden gefunden ist.

Brunner hat außer für Wasser auch für Äthyläther und Olivenöl die Temperaturkoeffizienten bestimmt, er findet

$$\text{Äthyläther} \quad a^2 = 5,3536 - 0,028\,102 t = 5,3536 (1 - 0,005\,21 t)$$

$$\text{Olivenöl} \quad a^2 = 7,4640 - 0,010\,486 t = 7,4640 (1 - 0,001\,40 t).$$

Wolf findet als Änderung der Steighöhe in einem Rohre, dessen Durchmesser er nicht angibt, für Äthyläther

$$h = 38,0819 - 0,175\,436 t = h_0 (1 - 0,004\,61 t)$$

gibt er nur wenig kleineren Temperaturkoeffizienten wie Brunner. Seine Beobachtungen reichen bis  $100^\circ$ , Brunners bis  $35^\circ$ .

Timberg findet für Äthyläther

$$a^2 = 5,192 - 0,023\,42 t = 5,192 (1 - 0,004\,510 t)$$

aus Beobachtungen an Blasen, einen Temperaturkoeffizienten, der dem von Wolf gefundenen fast genau gleich ist.

Für Benzol aus Benzoesäure findet Timberg aus Beobachtungen an Blasen

$$a^2 = 6,960 - 0,024\,31 t = 6,960 (1 - 0,003\,493 t)$$

aus Beobachtungen nach der Methode von Sondhaus

$$a^2 = 7,972 - 0,024\,96 t = 7,971 (1 - 0,003\,123 t),$$

Temperaturen reichten bis gegen  $70^\circ$ .

Für Alkohol erhält Timberg nach den beiden Methoden

1) Volkmann, Wiedem. Ann. 56. p. 483. 1895.

2) Weinberg, Zeitschr. f. physikal. Chemie. 10. p. 49. 1892.

3) Riess, Exner Repertorium 24. p. 122. 1890.

$$a^2 = 6,074 - 0,016\,91\,t = 6,074 (1 - 0,002\,784\,t)$$

$$a^2 = 6,603 - 0,015\,21\,t = 6,603 (1 - 0,002\,304\,t).$$

Volkman<sup>1)</sup> erhält zwischen 12<sup>o</sup>,5 und 17<sup>o</sup>,5 C.

$$\text{für Benzol} \dots a^2 = 7,176 - 0,025\,t$$

$$\text{für Toluol} \dots a^2 = 7,048 - 0,019\,t$$

$$\text{für Anilin} \dots a^2 = 9,09 - 0,018\,t$$

Timberg und Ochsé haben die Änderung der Kapillaritätskonstanten für eine Anzahl Salzlösungen verfolgt, es ergibt sich für diese eben, daß die Abnahme der Oberflächenspannung innerhalb der Grenzen der Beobachtungstemperaturen der Temperatur proportional ist, für Salzlösungen sind die Temperaturkoeffizienten kleiner als für Wasser und nehmen mit steigender Konzentration der Lösung ab<sup>2)</sup>. In sehr ausgedehnter Weise hat H. Schiff<sup>3)</sup> die Kapillaritätskonstanten von organischen flüssigen Verbindungen und deren Änderung mit der Temperatur gemessen, und verglichen die Kapillarkonstanten bei der Siedetemperatur miteinander zu vergleichen. Schiff maß bei seinen Versuchen die kapillaren Steighöhen bei niedrigen Temperaturen und bei solchen, welche der Siedetemperatur der Flüssigkeit nahe liegen. Zur Vergleichung mit den anderweitig gefundenen Werten mögen folgende dienen:

$$\text{Äthylalkohol} \dots a^2 = 6,044 - 0,0161\,t$$

$$\text{Benzol} \dots a^2 = 6,974 - 0,0235\,t,$$

Zahlen, welche mit den von Timberg durch Beobachtung an Blasen gefundenen Werten sehr nahe übereinstimmen.

Als allgemeines Resultat in betreff der Temperaturkoeffizienten der Kapillarkonstanten, daß dieselben bei homologen Flüssigkeitsreihen mit steigendem Molekulargewicht abnehmen. So sind dieselben für

$$\text{Benzol } C_6H_6 - 0,0235, \quad \text{Toluol } C_7H_8 - 0,0213, \quad \text{Xylol } C_8H_{10} - 0,0189, \\ \text{Propylbenzol } C_9H_{12} - 0,0189, \quad \text{Cymol } C_{10}H_{14} - 0,0183.$$

In folgender Tabelle stellen wir einige der vorhin bereits angegebenen Werte in absolutem Maße zusammen. Die Oberflächenspannung ist im Zahlenwerte gleich dem Drucke auf der Flächeneinheit; wir geben sie in Milligrammen angegeben. Wir führen sie in absolutes Maß über, indem wir sie mit  $g = 9810^{\text{mm}}$  multiplizieren. Da ein Milligramm  $0,001^{\text{g}}$  ist, geben wir die Werte im gr cm sec Systeme an, wenn wir die gefundenen Zahlen mit 1000 dividieren. Die von uns angegebenen Werte von  $\alpha$  werden also in das gr cm sec System übergeführt, wenn wir sie mit 9,81 multiplizieren.

Die Richtigkeit dieser Rechnung gibt uns die früher erkannte Relation der Oberflächenspannung  $\sigma [\mu\tau^{-2}]$  sofort. Ist die Oberflächenspannung durch  $G$  milligr. gegeben, so ist sie in absoluten Einheiten

1) Volkman, Wiedem. Ann. 56. p. 487. 1895.

2) Man sehe auch P. de Heen, Bulletin de l'acad. de Bruxelles. 5. (3) 492 u. 505.

3) H. Schiff, Liebigs Ann. 223. p. 47. 1884. Man sehe auch H. Schiff, Liebigs Ann. 228. p. 96. 1885 und Schiff's Erwiderung, Liebigs Ann. 230. p. 1885.

$$9810 G [\text{milgr sec}^{-2}]$$

dennach im Grammsystem

$$9810 G \left[ \frac{\text{gr}}{1000} \text{sec}^{-2} \right] = 9,810 G [\text{gr sec}^{-2}].$$

Wir gelangen zu dem gleichen Resultate durch folgende Überlegung. Die Größe  $\alpha$  gibt uns den Druck in Milligrammen auf  $1 \text{ mm}^2$  einer Kugel vom Radius  $1^{\text{mm}}$ . Im Gramm — Zentimetersystem müssen wir zunächst den Druck auf  $1 \text{ cm}^2$  bei einem Radius von  $1^{\text{cm}}$  einführen. Da die Fläche die hundertfache, der Krümmungsradius aber der zehnfache ist, so ist der Druck zehnmal so groß, wie unsere Werte ihn ergeben. Um den Druck in Grammen auszudrücken, haben wir den zehnfachen Wert durch 1000, unsere Zahlen also durch 100 zu dividieren. Um nicht Gramme als Druckeinheit zu wählen, sondern jenen Druck, der der Masse Gramm die Beschleunigung  $1^{\text{cm}}$  in der Sekunde gibt, haben wir den letztern Quotienten mit 981, also unsere Zahlen mit 9,81 zu multiplizieren.

Die Oberflächenspannung, also die Größe  $\frac{H}{2}$ , nennt man jetzt vielfach Kohäsion der Flüssigkeit.

Die Größe  $a^2$ , welche Quincke die spezifische Kohäsion nennt, erhalten wir durch Division der doppelten Oberflächenspannung mit dem Gewichte der Volumeinheit. Wir haben also die in absolutem Maße gegebenen Werte von  $2\alpha$  durch das spezifische Gewicht zu dividieren, es folgt somit, daß wir die Werte von  $a^2$  in absolutem Maße erhalten und zwar im  $\text{gr cm sec}$ -System, wenn wir die früher angegebenen Werte mit 9,81 multiplizieren. Es stimmt das damit, daß  $a^2$  nach der Länge im absoluten Maßsystem von der dritten Dimension ist. Denn da wir die im Gewichtssystem in Milligrammen etc. angegebenen Größen mit 9810 multiplizieren müssen, um sie in das absolute Gaußsche System überzuführen, müssen wir eine der Länge nach die dritte Dimension habende Größe  $a^2 = z [\text{g}^3 \text{cm}^{-3} \text{sec}^{-2}]$  durch  $10^3 = 1000$  dividieren um sie in unser  $\text{gr cm sec}$  überzuführen, es bleibt also die Multiplikation mit 9,81.

Die in folgender Zusammenstellung (s. Seite 136) angegebenen Werte von Quincke und Timberg sind durch Messungen an Blasen erhalten, die übrigen durch Messung der Steighöhen, der von Rayleigh für Wasser angegebene Wert ist der nach der Bemerkung am Schlusse des vorigen Paragraphen durch die dynamische Methode von Lord Kelvin (W. Thomson) gefundene. Die in der Tabelle für dieselbe Substanz angegebenen Werte zeigen den Unterschied der nach der Messung an Blasen und der Messung der kapillaren Steighöhe sich ergebenden Werte der Kapillaritätskonstanten deutlich hervortreten.

Während die bisher besprochenen Messungen wesentlich den Zweck hatten, die Kapillaritätstheorie zu prüfen, hat man in neuerer Zeit begonnen, systematisch die Kapillarkonstanten von Substanzen zu untersuchen, um Beziehungen zwischen den Kapillarkonstanten und sonstigen Eigenschaften zu finden.

Zunächst hat Quincke die Kapillaritätskonstanten geschmolzener Substanzen, geschmolzener Metalle und Salze untersucht<sup>1)</sup>. Er bestimmte zu

<sup>1)</sup> Quincke, Poggend. Annalen 134. p. 356. 1868; 135. p. 634. 1868; 138. 141. 1869.

Tabelle von Kapillaritätskonstanten.

Substanz	Spez. Gew.	$\alpha \frac{\text{gr}}{\text{sec}^2}$	$a^2 \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}^2}$	Temp.	Beobachter
Wasser <sup>1)</sup> . . . . .	1,000	77,499	154,998	17°	Quincke
„ . . . . .	„	74,000	148,000	18°	Rayleigh
„ . . . . .	„	73,869	147,738	16°	Volkman
Olivenöl . . . . .	0,9136	36,585	80,090	25°	Quincke
„ . . . . .	„	32,473	71,092	25°	Brunner
Steinöl . . . . .	0,798	31,716	79,488	25°	Quincke
Steinöl rektif. . . .	0,767	25,591	66,210	17°	Rodenbeck <sup>2)</sup>
Schwefelsäure. . . .	1,849	62,126	67,182	14,5°	Frankenheim
Amylalkohol . . . .	0,8181	23,985	58,636	18—24°	Mendéléeff
Äthylalkohol . . . .	0,7904	23,039	58,434	17°	Quincke
„ . . . . .	0,7939	22,695	57,123	15°	Schiff <sup>3)</sup>
Äthyläther. . . . .	0,7217	18,528	51,346	15°	Brunner
„ . . . . .	0,7446	17,692	47,539	13°	Timberg
Chloroform . . . . .	1,488	26,810	36,826	25°	Quincke
„ . . . . .	1,494	27,224	36,473	17°	Rodenbeck <sup>2)</sup>

dem Zwecke entweder das Gewicht von Tropfen, welche von den Drähten der betreffenden Metalle, deren Enden in der Flamme eines Lötrohres geschmolzen wurden, oder welche aus engen Glasröhren, in denen die Substanzen geschmolzen wurden, herabfielen, oder er goß die geschmolzenen Substanzen auf horizontalen Unterlagen aus, welche von den Substanzen nicht benetzt wurden. In letzterem Falle bildeten die Substanzen Tropfen, welche auch nach dem Erstarren dieselbe Gestalt behielten, die sie flüssig im Momente des Erstarrens besessen hatten. Die Gestalt dieser Tropfen war somit bedingt durch die Oberflächenspannung bei der Schmelztemperatur, und der Abstand der Tropfenkuppe von dem Schnitte, wo der Tropfen seinen größten Durchmesser hatte, lieferte bei großen Tropfen sofort die Konstante  $a$ .

Für das Quadrat dieser Konstanten  $a^2 = \frac{H}{s}$ , also den Quotienten aus der doppelten Oberflächenspannung und der Dichte der betreffenden Substanz, der spezifischen Kohäsion, ergibt sich aus diesen Versuchen das interessante Resultat, daß dieselbe in Quadratmillimetern ausgedrückt für alle untersuchten Körper sich als ein einfaches Vielfaches der Zahl 4,8 oder später<sup>4)</sup> von 8,5 darstellen ließ, mit Abweichungen, die innerhalb der Grenzen der bei diesen Versuchen unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen. Quincke findet folgende Werte von  $a^2$ :

- $a^2 = 1 \cdot 8,5$  für Quecksilber, Blei, Wismuth, Antimon
- $2 \cdot 8,5$  „ Iridium, Platin, Gold, Silber, Zinn, Aluminium, Wasser,
- $3 \cdot 8,5$  „ Palladium, Rhodium, Kupfer, Nickel, Kobalt, Eisen, Zink,
- $4 \cdot 8,5$  „ Kalium,
- $7 \cdot 8,5$  „ Natrium.

1) Eine Zusammenstellung der verschiedenen für Wasser gefundenen Werte gibt Weinberg, Ztschr. für physikalische Chemie. 10. p. 34. 1892 und Kallib Ann. der Physik. 7. p. 467. 1902.

2) Rodenbeck, Beiblätter. 4. p. 104. 1881.

3) H. Schiff, Liebigs Ann. 223. p. 69. 1884.

4) Quincke, Wiedem. Ann. 61. p. 280. 1897.



Siedentopf<sup>1)</sup> hat später in hinreichend hoch erhitzten Räumen nach Methode von Helmholtz-König die spezifische Kohäsion einiger Metalle bestimmt; er findet für Blei 9,78, Wismuth 8,76, n 17,87, Zahlen, die im allgemeinen die Quinckesche Gruppierung erkennen lassen.

Für geschmolzene chemische Verbindungen ergab sich der Satz: Geschmolzene Substanzen von ähnlicher chemischer Zusammensetzung haben selbe spezifische Kohäsion bei einer Temperatur, die ihrem Schmelzakte möglichst nahe liegt.

Kohlensaure und schwefelsaure (wahrscheinlich auch phosphorsaure) zeigten im geschmolzenen Zustande dieselbe spezifische Kohäsion wie Wasser.

Salpetersaure Salze, Chlormetalle, Zuckerarten und Fette zeigten dieselbe spezifische Kohäsion wie das Quecksilber.

Brom- und Jod-Metalle, sowie Selen, Brom, Schwefel und Phosphor gaben eine halb so große spezifische Kohäsion wie das Quecksilber.

Inwieweit die von Quincke direkt beobachteten Zahlen mit diesen übereinstimmen, möge an folgender Reihe angedeutet werden, welche Werte  $a^2$  für die untersuchten Nitrate und Chloride angibt.

Natriumnitrat . . .	$a^2 = 8,55$	Kaliumchlorid . . .	$a^2 = 8,76$
Kaliumnitrat . . .	8,35	Kalciumchlorid . .	8,49
—	—	Strontiumchlorid .	8,18
Lithiumchlorid . .	8,53	Bariumchlorid . .	8,29
Natriumchlorid . .	8,41	Silberchlorid . . .	8,18

Wie man sieht, weichen diese Zahlen nur wenig von dem für Quecksilber gefundenen Werte ab.

Quincke scheint zu der Annahme zu neigen, daß für alle reine Substanzen die spezifische Kohäsion sich in dieses System einfüge, wenn man dieselbe in der Nähe des Schmelzpunktes untersuche.

H. Schiff<sup>2)</sup> hat später eine große Zahl organischer Substanzen in gewöhnlicher Temperatur und in der Nähe des Siedepunktes untersucht und dem er in dem letztern Zustande, dem Siedepunkte unter dem Druck der Atmosphäre die Substanzen als in vergleichbarem physikalischen Zustande ansah, die spezifischen Kohäsionen der verschiedenen Substanzen verglichen. Nachdem schon früher Wilhelmy einige Beziehungen zwischen den Kapillarkonstanten und der Zusammensetzung der chemischen Verbindungen angegeben, gelangt Schiff aus seiner Untersuchung von weit über 100 Substanzen zu sehr interessanten Beziehungen zwischen den Kapillaritätskonstanten und der chemischen Zusammensetzung der Flüssigkeiten.

Schiff knüpft seine Betrachtungen an eine von dem bisherigen etwas

<sup>1)</sup> Siedentopf, Wiedem. Ann. 61. p. 262. 1897. Betreffs der Messungen an erstarrenden Tropfen sehe man auch Heydeweyer, Wiedem. Ann. 62. p. 694. 1897; G. p. 314. 1898; Herzfeld, Wiedem. Ann. 62. p. 450. 1897; Gradenwitz, Wiedem. Ann. 67. p. 467. 1899.

<sup>2)</sup> H. Schiff, Liebigs Annalen. 223 p. 47. 1884. Gazzetta chimica Italiana. 14 p. 266. 1884.

abweichend definierte Kapillarkonstante. Ist  $m$  das Molekulargewicht einer Substanz, so setzt er

$$N = \frac{a^2 s}{2m} = \frac{a^2}{2 \frac{m}{s}} = \frac{a^2}{2v}.$$

Die Definition von  $N$  ist folgende. Es bedeutet  $\frac{a^2}{2} s$  das Gewicht, also  $\frac{a^2}{2}$  das Volumen der pro Längeneinheit der Kontaktlinie gehobenen Flüssigkeit; ist  $m$  das Molekulargewicht der Substanz, so bedeutet  $\frac{m}{s}$  das Molekularvolumen, somit  $N$  die Anzahl der gehobenen Moleküle. Um nicht mit zu kleinen Zahlen operieren zu müssen, gibt Schiff das Molekulargewicht in Tausendstel der gewöhnlichen Zahlen oder setzt, wenn  $m$  wie gewöhnlich geschrieben wird

$$N = 1000 \frac{a^2}{2v}.$$

Betreffs der Zahl  $N$  gelangt nun Schiff zunächst zu dem Resultate, daß dieselbe für Substanzen die gleiche sei, in deren Molekül zwei Wasserstoffatome durch ein Kohlenstoffatom oder drei Wasserstoffatome durch ein Sauerstoffatom ersetzt werden. So ist z. B. für

Hexan . . . . .	$C_6 H_{14}$	$N =$	16,1
Orthoxylol . . . . .	$C_8 H_{10}$	$N =$	16,0
Metaxylol . . . . .			15,0
Paraxylol . . . . .			15,8
Äthylbenzol . . . . .			16,2
Isobutylformiat . . . . .	$C_5 H_{10} O_2$	$N =$	15,8
Propylacetat . . . . .			15,6
Äthylpropionat . . . . .			15,6
Methylbutyrat . . . . .			15,9
Methylisobutyrat . . . . .			15,7.

Ebenso findet er, daß ein Atom Chlor 7 Atome Wasserstoff im Molekül ersetzen kann, so daß  $N$  denselben Wert behält, so ist für

Dimethylacetat	$C_4 H_{10} O_2$	$N =$	18,4
Chloroform . .	$C H Cl_3$	$N =$	18,6.

Die 3 Atome Chlor ersetzen in kapillarer Beziehung 3 C, 9 H und 20, also nach der früher gefundenen Äquivalenz 21 H.

In gleicher Weise entsprechen sich

$$1 \text{ Brom} = 13 H, \quad 1 \text{ Jod} = 19 H,$$

wonach in bezug auf die Kapillarität die Halogene sich um je 6 H unterscheiden.

Hiernach gelang es die Werte von  $N$  für die verschiedensten Substanzen durch eine empirische Gleichung darzustellen; bedeutet  $x$  die Anzahl Wasserstoffatome, welche den das Molekül einer Substanz zusammensetzenden Atomen in kapillarer Beziehung äquivalent ist, so ergibt sich aus der Gleichung

$$N = \frac{1}{x} e^{2.48292x - 0.01676x \cdot x}$$

Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bedeutet. In Logarithmen wird die Gleichung

$$\log N = 2,8155 - 0,00728 \cdot x - \log x.$$

les einige Substanzen sich dieser Gleichung nicht unterordnen metameren Substanzen die Zahlen nicht genau übereinstimmen, chiff, daß auch die Stellung des Atoms im Molekül auf die kapillarer Beziehung von Einfluß sei.

er Wert der Kapillarkonstanten durch die chemische Konsti-Moleküls bedingt sein kann, hat Feustel<sup>1)</sup> durch Untersuchung n Methylderivate von Toluol, Phenol und Anilin, also ortho-ylol, ortho-meta-para-Kresol und ortho-meta-para-Toluidin nach-Es zeigte sich, daß in allen Fällen der Substituent in der ng den größten, in der para-Stellung den kleinsten, in der g einen mittleren Wert gab. So war bei 45° für

met.-Kresol	p.-Kresol	o.-Toluidin	met.-Toluidin	p.-Toluidin
3,72	3,70	4,07	3,85	3,72

ür

o.-Xylol	met.-Xylol	p.-Xylol
$\alpha = 3,28$	3,15	3,08

ay und Shields<sup>2)</sup> sowie Ramsay und Aston<sup>3)</sup> haben für eine organischer Verbindungen Messungen der Oberflächenspannung auf welche wir noch an anderer Stelle zurückkommen werden. sgedehnter Weise sind die Kapillaritätskonstanten von Salz-Valson<sup>4)</sup>, Quincke<sup>5)</sup>, Volkmann<sup>6)</sup>, Rother<sup>7)</sup>, Röntgen und n, Traube<sup>8)</sup> und von Forch<sup>10)</sup> untersucht worden; Quincke dem Resultate, daß, während die Steighöhe im allgemeinen als bei reinem Wasser, die Größe  $\alpha$ , die von Quincke als die ohäsion der Flüssigkeit bezeichnet wird, dem Salzgehalte pro-unimmt. Nennt man  $y$  die Anzahl von Äquivalenten eines he in 100 Äquivalenten Wasser gelöst sind, so findet Quincke ssung kapillarer Steighöhen für alle Chloride in Milligrammen

$$\alpha = 7,35 + 0,1783 y,$$

Äquivalente der Chloride einwertiger Metalle doppelt genommen, p.  $K_2Cl_2$  usw., werden müssen. Aus Messungen flacher Tropfen

$$\alpha = 8,30 + 0,1870 y.$$

del, Ann d Physik. 16. p. 61. 1905.

way und Shields, Zeitschr. für physikal. Chemie. 12. p. 33. 1893.

way und Aston, Zeitschr. für physikal. Chemie. 15. p. 89. 1894.

son, Ann. de chim. et de phys. 20 (4.) p. 361. 1870.

cke, Poggend. Ann. 160. p. 337. 1877.

kmann, Wiedem. Ann. 17. p. 353. 1882.

her, Wiedem Ann 21 p. 576. 1884.

ngen und Schneider, Wiedem. Ann. 29. p. 252. 1886.

ube, Berichte der chemischen Gesellschaft. 17. p. 2294. 1884.

ch, Wiedem Ann. 67. p. 801. 1899.

Für andere Salze werden die Werte des Koeffizienten von  $\gamma$  andere; indes sind nach Volkmann und Rother die Werte für die Salze gleicher Säuren sehr nahe gleich, nur kohlensaures Kali und kohlensaures Natrium haben sehr verschiedene Werte der Quotienten,  $K_2CO_3$  gibt 0,190,  $Na_2CO_3$  dagegen 0,112.

Nach den Messungen Forchs gilt indes der Satz von Quincke nicht allgemein. Für Lösungen von Salpetersäure und die Säuren von der Fettsäurereihe ist der Wert  $\alpha$  kleiner als für Wasser, auch sind die Abnahmen nicht dem Gehalt an Säure proportional.

Traube<sup>1)</sup> hat Lösungen organischer Substanzen in Wasser und Mischungen organischer Flüssigkeiten, wie letztere schon früher von Duclaux<sup>2)</sup> untersucht waren, und Rodenbeck<sup>3)</sup> verschiedene Mischungen, Alkohol-Wasser, Alkohol-Chloroform, Steinöl und Chloroform und mehrere andere untersucht. Allgemeine Sätze haben sich aus diesen Messungen nicht ergeben, so interessant auch einzelne Resultate sind, so gestattet uns hier der Raum nicht darauf näher einzugehen, wir verweisen deshalb auf die Arbeiten selbst.

## § 81.

**Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten. Plateaus Versuche.** Wenn man zwei Flüssigkeiten miteinander mischt, so beobachtet man, daß die Anziehung der Flüssigkeiten aufeinander sehr verschieden ist. Man findet nämlich entweder, daß die Flüssigkeiten, wenn sie ein verschiedenes spezifisches Gewicht haben, einfach sich übereinander lagern ihrer Schwere gemäß, oder, daß die Flüssigkeiten sich mischen, daß die eine die andere vollständig durchdringt, und so die schwerere in die leichtere gehoben und verbreitet und die leichtere in die schwerere hinabgezogen wird. So mischen sich z. B. Wasser und Weingeist in allen Verhältnissen, während Wasser und Öl sich nicht mischen, sondern ihrer Schwere gemäß sich übereinander lagern.

Ein Flüssigkeitsgemisch ist eine ganz homogene Flüssigkeit, deren einzelne Bestandteile sich nicht durch mechanische Mittel, sondern nur durch eine Veränderung des Aggregatzustandes trennen lassen. Dadurch unterscheidet sich das Gemische wesentlich von einem Gemenge, wie man es herstellen kann, wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen spezifischen Gewichtes in einem Gefäße zusammengießt und stark schüttelt.

Bei der Mischung zweier Flüssigkeiten zeigt sich in den meisten Fällen auch eine Kontraktion des Gemisches, indem das Volumen der Mischung kleiner und somit ihre Dichtigkeit größer ist als die Summe der Volumina der Bestandteile bzw. deren mittlere Dichtigkeit. Wir haben bereits bei Besprechung der Alkoholmetrie für die am genauesten untersuchten Gemische, diejenigen von Wasser und Alkohol, einige Zahlen angegeben.

Wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen spezifischen Gewichtes zusammengießt, die sich nicht mischen, so z. B. Öl in ein Gemische

1) Traube a. a. O.

2) Duclaux, Ann. de chim. et de phys. 18. (5.) p 76. 1878.

3) Rodenbeck, Beiblätter. 4. p. 104. 1880.

Öl und Wasser bringt, so beobachtet man, daß sich die Flüssigkeiten nicht unregelmäßiger Weise durcheinander lagern, sondern die eine in der andern, so das Öl in dem Gemische in Gestalt kugelförmiger Tropfen vorkommt.

Das beweist dies, daß die beiden nicht sich mischenden Flüssigkeiten, eine sich in der andern befindet, ebenso einen Normaldruck und eine Oberflächenspannung haben, wie die freie Oberfläche einer Flüssigkeit. Nennen wir den Normaldruck des im Alkoholgemische schwimmenden Öls  $K'$  und die Oberflächenspannung desselben  $H'$ , so muß das im Alkoholgemische der Wirkung der Schwere entzogene, also nur den Molekularkräften unterworfen Öl eine solche Gestalt annehmen, daß für jeden Punkt der Oberfläche der von außen nach innen gerichtete Druck der gleiche ist. Da nun

$$P = K' + \frac{H'}{r} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right),$$

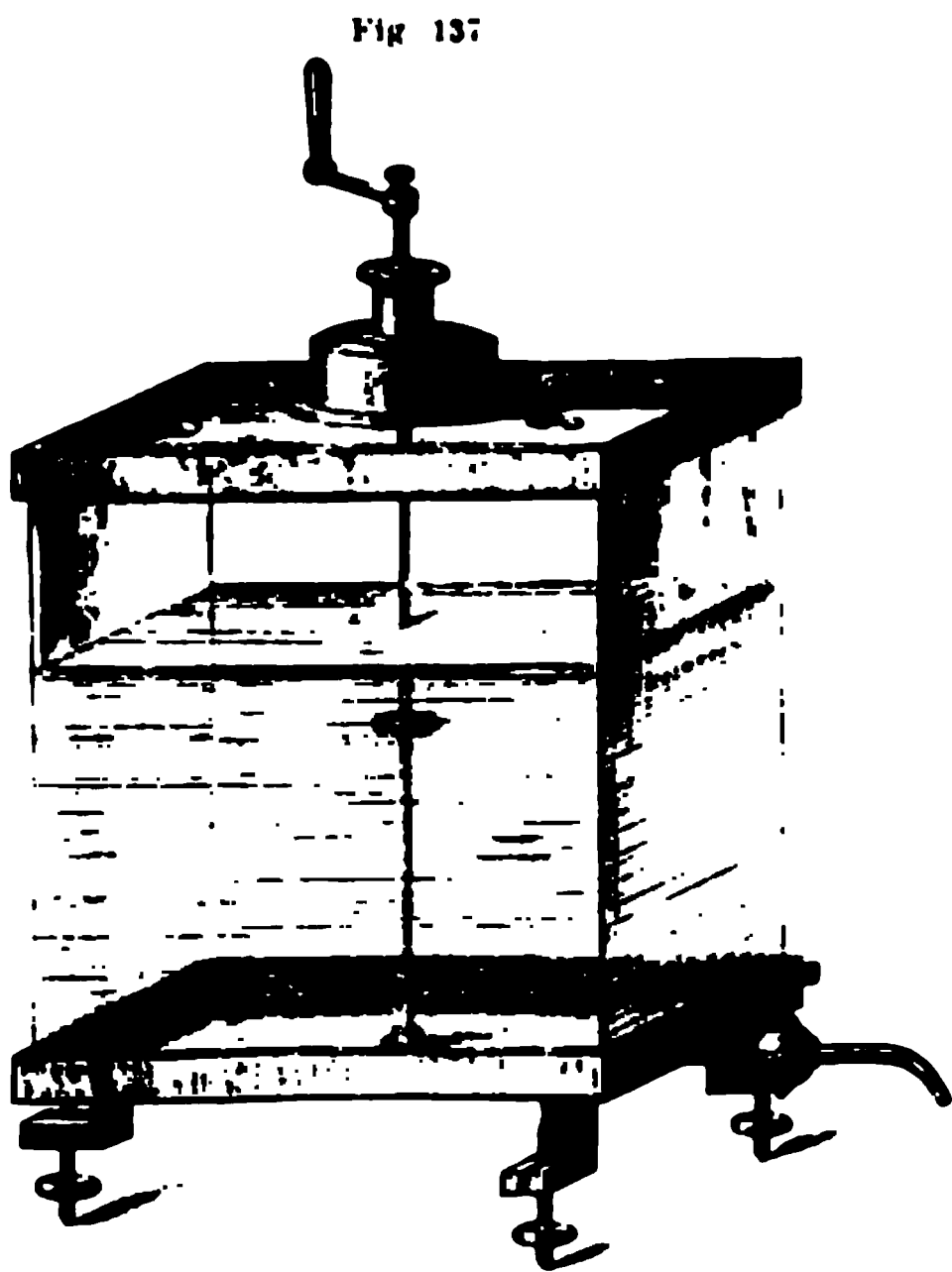
so muß der Öltropfen nur im Gleichgewicht sein, wenn die Summe der reziproken Werte der Hauptkrümmungsradien überall die gleiche ist, und das ist der Fall, wenn der Tropfen die Gestalt einer Kugel annimmt.

Wird man auf den gewichtslosen Tropfen noch andere Kräfte wirksam, indem man ihn an feste Körper adhärieren macht, so kann er noch andere Gestalten annehmen, für deren freie Oberflächen aber die allgemeine Bedingung beibehalten muß

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \text{const.}$$

Plateau<sup>1)</sup> hat über die Bedingungen, welche Flüssigkeiten annehmen, um in einem andern von gleichem spezifischem Gewichte anzufließen, vielfache Versuche angestellt. Um zwei Flüssigkeiten von gleichem spezifischen Gewichte zu stellen, wählte er ein Gemisch von Alkohol und Wasser, welches das gleiche spezifische Gewicht hatte wie Öl, und setzte also ein Öltropfen an die Stelle dieses Gemisches, um zu sehen, ob es im Gleichgewicht bleibt.

Seine Versuche werden in einem parallelepipedischen Glasgefäße (Fig. 137) angestellt, das aus mehreren ebenen Glasplatten besteht, die mit ihren Rändern zusammengekittet sind.

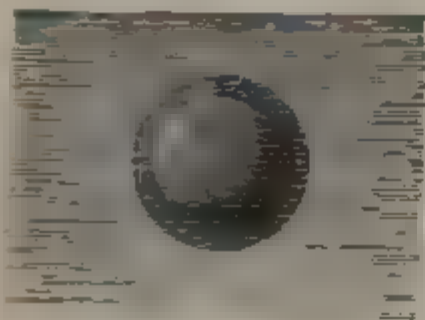


In der Bodenplatte ist ein Hahn angebracht, um das Gemisch ausströmen zu können.

<sup>1)</sup> Plateau, in verschiedenen Jahrgängen der Bulletins de l'Academie des Sciences, daraus Poggend. Ann. 55. 1842; 56. 1842. Erg.-Bd II. 1848; 88. 1851.

bracht, um die Flüssigkeiten abzulassen, und in der Deckplatte verschiedene Öffnungen, um die Flüssigkeiten und einige bei den Versuchen benutzte Apparate hineinzubringen. Nachdem der Kasten mit dem Weingeistgemisch angefüllt ist, bringt man mittels einer kleinen Pipette, welche mit einem etwas gefärbten Öle angefüllt ist, in die Mitte der Flüssigkeit etwas Öl, welches sich an dem Ende der Pipette in Form eines großen Tropfens an-

Fig. 138



sammelt. Zieht man dann die Pipette, nachdem man sie oben mit dem Finger verschlossen hat, vorsichtig heraus, so bleibt der Tropfen in Form einer Kugel ruhig an seinem Platze stehen, wie es die Theorie verlangt. Denn ist der Tropfen sich selbst überlassen, so daß nur die Oberflächenspannung auf ihn einwirkt, so muß diese an allen Stellen gleich sein, und das ist, wie wir sahen, der Fall, wenn die Krümmung der Oberfläche an allen Stellen dieselbe ist.

Wenn man den Tropfen an gewissen Stellen mittels vorher mit bestrichener Eisendrähte fixiert, so adhärirt der Tropfen an diesen und dort wirkt dann außer der Kohäsion des Öles die Adhäsion am Eisen. Die Gestalt der Oberflächen muß demnach eine andere werden, indem an gewissen Stellen die Oberflächenspannung modifiziert wird; für die freien Oberflächen muß aber auch in diesem Falle  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} = \text{const}$  sein.

Legt man den Tropfen in einen Ring von Eisendraht, so nimmt die Gestalt einer bikonvexen Linse an (Fig. 139), deren beide Flächen Kugelsegmente von gleichem Radius sind. Für die freien Oberflächen wird dadurch die Bedingung erfüllt  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} = \text{const}$ . Wenn man den in Drahtringe schwebenden Tropfen vorsichtig herabläßt, bis er unten einen

Fig. 139



Fig. 140.



Drahtring berührt, so berührt sich auch an diesen Stellen, und wenn man dann den an Dreifuß befestigten Draht ring wieder aufzieht, während man Öl in den Tropfen nachfließen läßt, bleibt der Tropfen an dem Drahte haften. Zwischen den beiden Drahten bildet sich ein kleinerer Krümmungsradius (Fig. 140), welcher oben und unten von Kugelsegmenten gleichen Radius begrenzt ist.

Der eine Krümmungsradius des Zylinders in einer durch die A parallel derselben geführten Ebene ist unendlich, da diese Ebene die Zylinderfläche in einer geraden Linie schneidet, deshalb ist

$$\frac{1}{\rho} = 0$$



der andere Krümmungsradius ist der Radius des Zylinders. Da die Oberflächenspannung an allen Punkten der freien Oberflächen gleich sein muß, wenn wir mit  $\varrho_1$  den Radius der Kugelflächen bezeichnen,

$$K' + \frac{H'}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = K' + H' \cdot \frac{1}{\varrho_1},$$

$$\frac{1}{2\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}; \quad \varrho_1 = 2\varrho;$$

Es demnach der Radius der Kugelsegmente doppelt so groß sein als der Radius des Zylinders. Eine Messung der Höhe der Kugelsegmente und Krümmung ergibt in der Tat  $\varrho_1 = 2\varrho$ .

Mittels Drahtfiguren von verschiedener Gestalt ist es Plateau gelungen, noch eine Reihe Flüssigkeitsfiguren herzustellen, so Würfel, Oktaeder, mit konvexen, ebenen und konkaven Oberflächen, je nach der Art, welche er zwischen die Drahtnetze brachte.

Fig. 141

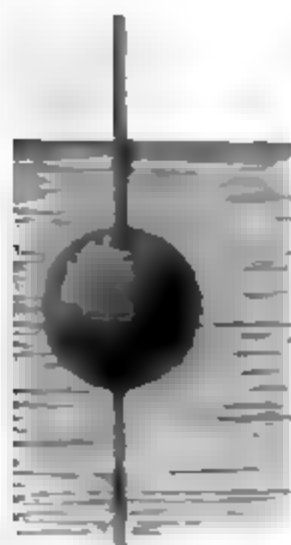


Fig. 142

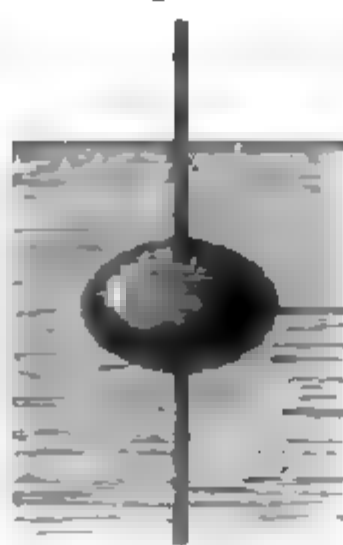
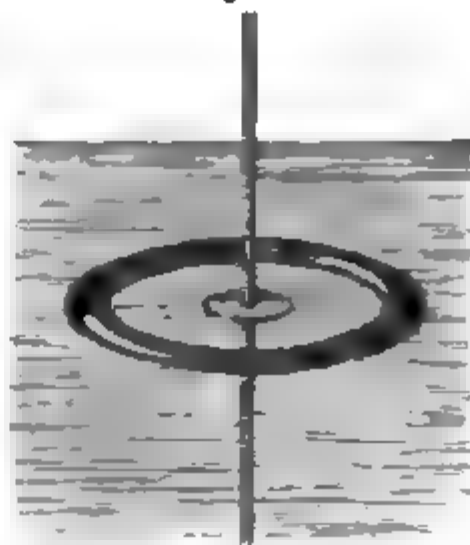


Fig. 143



Wenn man auf die Tropfen noch andere als die innern Kräfte der Kohäsion und Adhäsion wirken läßt, so wird auch dadurch die Gestalt derselben eine andere. Plateau bewirkte zu dem Ende, daß der Tropfen an dem in Fig 137 abgebildeten, in der Mitte des parallelepipedischen Gefäßes herabgehenden Metalldraht anlegte, welcher mittels der Kurbel in Rotation versetzt werden konnte. Die in der Mitte des Drahtes befindliche Kugel war vorher mit Öl bestrichen, und nun mittels eines Eisendrahtes eine Kugel, von 6<sup>cm</sup> Durchmesser, so an die Scheibe geführt, daß sie symmetrisch um Scheibe und Draht herumlegte (Fig 141). Wenn nun die Handhabe langsam dreht, so sieht man zunächst, wie die Kugel allmählich an den Polen, durch welche die Drehungsachse geht, abgeplattet und am Äquator anschwillt (Fig 142). Dreht man rascher, so wird die Kugel von unten und oben hohl und dehnt sich mehr in horizontaler Richtung aus; endlich verläßt sie die Scheibe und verwandelt sich in einen vollkommen regelmäßigen Ring (Fig 143). Diese Erscheinungen erklären sich leicht durch die zur Molekularanziehung der Flüssigkeit auf sich selbst hinzutretende Zentrifugalkraft. Der an dem Drahte und der Scheibe adhärierende Tropfen wird mit in Rotation versetzt, und die einzelnen Teile desselben erhalten dadurch eine

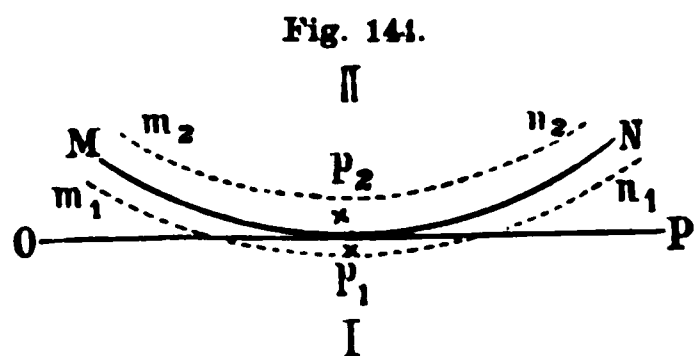


von der Drehungsachse fortgerichtete zentrifugale Beschleunigung, welche in der Nähe des Äquators am stärksten ist. Dadurch suchen die Teile in der Nähe des Äquators sich am stärksten von der Achse zu entfernen. Anfangs wird dieser zentrifugalen Beschleunigung durch eine verstärkte Oberflächenspannung das Gleichgewicht gehalten, und es tritt nur eine Abplattung des Tropfens an den Polen, eine Aufhäufung und verstärkte Krümmung am Äquator ein. Überwiegt die zentrifugale Beschleunigung, so reißt sich die ganze Masse von der Achse los und umgibt dieselbe in der Form eines Ringes, der eine Zeitlang besteht, dann aber, da sich die Rotationsgeschwindigkeit durch die Reibung des Öls am Alkohol stetig vermindert, wieder zusammenfließt und sich als kugelförmiger Tropfen wieder um die Achse legt.

Durch besondere Kunstgriffe gelang es Plateau<sup>1)</sup>, es auch dahin zu bringen, daß sich nur ein Teil des Tropfens als Ring loslöste, während ein anderer Teil in Gestalt eines abgeplatteten Sphäroids an der Achse haften blieb, also eine Erscheinung hervorzurufen, welche mit der des Saturn im Weltenraum die größte Ähnlichkeit hat.

Alle diese Versuche, welche unsere Sätze über die Oberflächenspannung in so schöner Weise vor Augen führen, zeigen die an der Grenze zweier Flüssigkeiten vorhandene Oberflächenspannung.

Über die Größe dieser Oberflächenspannung können wir uns durch folgende von F. E. Neumann<sup>2)</sup> durchgeführte Betrachtung Rechenschaft



geben. Es sei  $MN$  Fig. 144 die Grenzfläche zweier Flüssigkeiten, nach oben konkav, indem wir annehmen, die Flüssigkeit I ist die schwerere, also unten. Die molekularen Kräfte, welche in der Grenze im Spiel treten, sind die Anziehungen der Teilchen der Flüssigkeit I aufeinander, der Flüssigkeit II aufeinander und die An-

ziehungen der verschiedenen Flüssigkeiten I und II aufeinander. Um den auf die Grenzfläche nach dem Innern der Flüssigkeit I gerichteten wirksamen Druck zu erhalten, haben wir die Summe der vier Wirkungen, die sich hiernach ergeben, zu bilden.

Wir nennen Normaldruck und doppelte Oberflächenspannung, herrührend von der Wirkung der Teilchen der Flüssigkeit I aufeinander  $K_1$  und  $H_1$ , der Teilchen der Flüssigkeit II  $K_2$  und  $H_2$ , der Wirkung der Teilchen I auf II  $K_{12}$  und  $H_{12}$ , der Teilchen II auf I  $K_{21}$  und  $H_{21}$ .

Wir setzen den in der Grenzfläche nach unten wirkenden Druck positiv; für den von der Flüssigkeit I herrührenden Druck, welcher derselbe ist, wie wenn die andere Flüssigkeit nicht da wäre, haben

$$K_1 = \frac{H_1}{2} \left( \frac{1}{e} + \frac{1}{e_1} \right),$$

1) Plateau, Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. 1848.

2) Volkmann, Wiedem. Ann. 16. p. 321. 1882. Die im folgenden vorgenommene Bestimmung der Kapillarkonstanten zweier Flüssigkeiten rührt F. E. Neumann. Man sehe Quincke, Poggend. Ann. 139. p. 59. 1870; Paul Bois Reymond, Poggend. Ann. 139. p. 262. 1870.

wann  $\rho$  und  $\rho_1$  die beiden Hauptkrümmungsradien sind. Ebenso erhalten wir für die Flüssigkeit II

$$-K_2 - \frac{H_2}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right),$$

denn die Flüssigkeit I ist nach außen konkav, die Flüssigkeit II nach außen konvex.

Um die Anziehung der Flüssigkeit I auf II auszuwerten, dürfen wir nicht lediglich die Wirkung auf die in der geometrischen Grenze liegenden Moleküle ins Auge fassen, sondern müssen die auf alle Moleküle  $p_2$  wirkenden Kräfte in betracht ziehen, welche innerhalb der Grenze der Wirkungssphäre oberhalb der Oberfläche liegen.

Stellt uns  $m_2 n_2$  die Grenze der Wirkungssphäre dar, so sind also alle innerhalb dieser Grenze liegenden Moleküle zu beachten. Die unterhalb der Ebene  $OP$  liegenden Teilchen bewirken den Normaldruck  $K_{12}$  nach unten hin. Die in der geometrischen Grenze  $MN$  liegenden Teilchen der Flüssigkeit II werden von den ebenfalls in der Grenze liegenden Teilchen der Flüssigkeit I nach unsern frühern Betrachtungen einen Zug nach oben erhalten. Anders aber die höher liegenden Teilchen  $p_2$ ; dieselben erhalten in der zwischen  $OP$  und  $MN$  befindlichen Flüssigkeit I einen Zug, der nach unten gerichtete Resultierende hat. Da das für die weitaus größte Anzahl der Teilchen in der Wirkungssphäre innerhalb II gilt, wird ganz in der Oberfläche ein nach unten resultierender Zug entstehen  $\frac{H_1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right)$ , da die Menge der oberhalb  $OP$  liegenden und diesen Zug wirkenden Moleküle der Flüssigkeit I mit der Krümmung der Fläche  $MN$  stimmt. Für den von der Wirkung der Teilchen I auf die Teilchen II resultierenden nach unten gerichteten Druck erhalten wir demnach

$$K_{12} + \frac{H_1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right).$$

Die Wirkung der Flüssigkeit II auf die Teilchen der Flüssigkeit I wird

$$- \left( K_{21} - \frac{H_2}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \right).$$

Die innerhalb der Wirkungssphäre unter  $MN$  liegenden Teilchen  $p_1$  werden von der Flüssigkeit II, wenn dieselbe bis zur Ebene  $OP$  reichte, einen Zug nach oben erhalten, der zu dem Normaldrucke  $K_{21}$  führte. Nun enthält aber der zwischen  $MN$  und  $OP$  liegende Raum keine Flüssigkeit II, deshalb fehlt die Anziehung dieser Flüssigkeit, wir müssen demnach von  $K_{21}$  die von dieser Flüssigkeit, wenn sie vorhanden wäre, ausgeübte Anziehung abziehen. Die Begründung für die Form des abzuziehenden Gliedes derselbe wie in dem vorigen Falle.

Für den in der gemeinsamen Grenze nach unten, also gegen die Flüssigkeit I wirkenden Druck erhalten wir demnach

$$p = K_1 - K_2 + K_{12} - K_{21} - \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) \left( \frac{H_1}{2} + \frac{H_2}{2} - \frac{H_{12}}{2} - \frac{H_{21}}{2} \right).$$

Für den in der Grenze  $MN$  nach oben hin wirkenden Druck erhalten wir selbstverständlich, wenn wir jetzt den gegen das Innere der Flüssigkeit II

wirkenden Druck positiv setzen, alle einzelnen Werte dem eben gefunden gleich, nur haben alle das entgegengesetzte Vorzeichen. Derselbe wird

$$P = K_2 - K_1 + K_{21} - K_{12} + \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right) \left(\frac{H_1}{2} + \frac{H_2}{2} - \frac{H_{12}}{2} - \frac{H_{21}}{2}\right)$$

Setzen wir die algebraische Summe der  $K$  gleich  $K'$  und jene der  $H$  gleich  $H'_{12}$ , so wird

$$P = K' \pm \frac{H'_{12}}{2} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

also ganz die frühere Gleichung mit nur durch die jetzige Betrachtung gegebener Deutung der Konstanten.

Von den in unsern Gleichungen vorkommenden Größen werden wir

ohne weiteres nach dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion setzen können.

$$K_{21} = K_{12}, \quad H_{12} = H_{21},$$

so daß wird

$$H'_{12} = H_1 + H_2 - 2H_{12}.$$

Um zu erkennen, inwieweit und in welcher Weise wir die Konstanten unserer Gleichung bestimmen können, wollen wir

einen Tropfen einer Flüssigkeit in einer andern also etwa Quecksilber in Wasser betrachten. Sei  $DCE$  der Tropfen und setzen wir wie § 78 den Tropfen so groß voraus, daß derselbe in  $C$  eben und daß wir in dem durch  $A$  gelegten Horizontalschnitt den Krümmungsradius der Tropfenfläche in  $A$  als unendlich ansehen können, so daß die Krümmung in  $A$  durch den Krümmungsradius  $\varrho$  des Vertikalschnittes gegeben wäre, so ist der von außen nach innen gerichtete Druck in  $A$

$$P = K' + \frac{H'_{12}}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

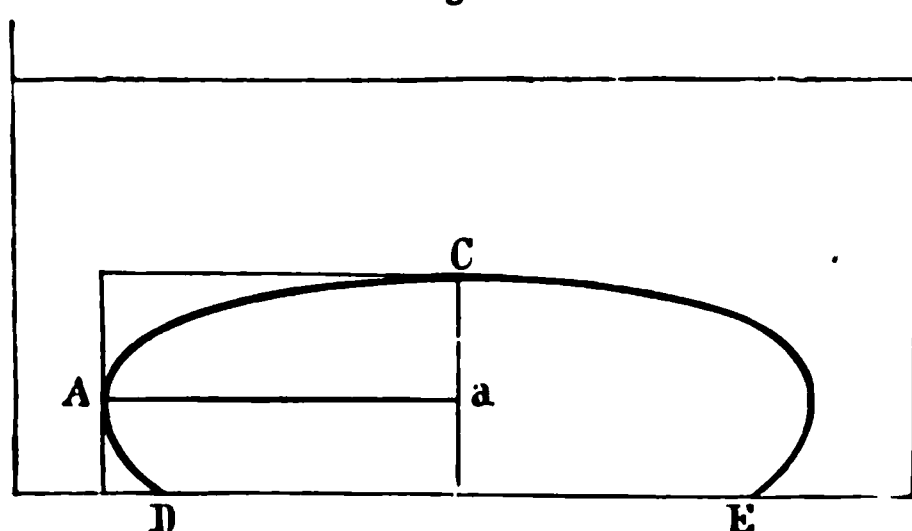
Diesem Drucke hält das Gleichgewicht der in  $C$  vorhandene Normaldruck vermehrt um die Differenz der hydrostatischen Drucke des Quecksilbers und des Wassers einer Säule von der Höhe  $Ca = h$ . Nennen wir das spezifische Gewicht des Quecksilbers  $s_1$ , jenes des Wassers  $s_2$ , so erhalten wir demnach

$$K' + h(s_1 - s_2) = K' + \frac{H'_{12}}{2} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

$$h(s_1 - s_2) = \frac{H'_{12}}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = \alpha'_{12} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Wir erhalten demnach genau dieselbe Gleichung wie in § 78, tritt an die Stelle des spezifischen Gewichtes  $s$  der einen Flüssigkeit die Differenz der spezifischen Gewichte der beiden Flüssigkeiten  $s_1 - s_2$ , an Stelle der Kohäsion  $\alpha$  der einen Flüssigkeit die zusammengesetzte Konstante, die wir vorhin ableiteten.

Fig. 115.



Nennen wir wie im § 78  $T$  die Höhe des ganzen Tropfens und  $\vartheta_{12}$  den Randwinkel, so erhalten wir auch jetzt

$$T^2 (s_1 - s_2) = H'_{12} (1 - \cos \vartheta_{12})$$

und ist  $l$  der vertikale Abstand des vertikalen Meridianelementes von der Tropfenkuppe, so ist

$$l^2 (s_1 - s_2) = H'_{12} = 2 \alpha'_{12}.$$

Ganz ebenso können wir den Tropfen einer spezifisch leichteren Flüssigkeit, welcher auf einer spezifisch schwereren Flüssigkeit schwimmt, zu den Messungen benutzen, derselbe nimmt die Form der im § 78 besprochenen an, und die dort gegebenen Entwicklungen gelten auch hier.

Quincke<sup>1)</sup> hat in dieser Weise eine große Zahl Konstanten  $\alpha'_{12}$  gemessen. Unsere Gleichung für  $H'_{12}$  können wir auch schreiben, indem wir das Glied durch 2 dividieren,

$$\alpha'_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 - 2 \alpha_{12}$$

Wir können dann aus der Messung von  $\alpha'_{12}$  und den bekannten Kohäsionen der einzelnen Flüssigkeiten die Anziehung  $\alpha_{12}$  der einen Flüssigkeit auf die andere berechnen. In nachfolgender Tabelle sind einige der Messungen von Quincke angeführt und aus denselben

$$\alpha_{12} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha'_{12}}{2}$$

berechnet. Wir geben die  $\alpha$  in Milligrammen, wie es auch Quincke an hat.

Substanz	$s_1$	$s_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha'_{12}$	$\alpha_{12}$
Quecksilber in unterschweflig-saurem Natron	13,543	1,125	55,03	7,90	45,11	8,91
„ in Wasser	„	1	55,03	8,25	42,58	10,35
„ in Alkohol	„	0,7906	55,03	2,60	40,71	8,46
„ in Chloroform	„	1,4878	55,03	3,12	40,71	8,72
„ in Schwefelkohlenstoff	„	1,2687	55,03	3,27	37,97	10,15
„ in Olivenöl	„	0,9136	55,03	3,760	34,19	12,30
„ in Steinöl	„	0,7977	55,03	3,233	28,94	14,66
„ in Terpentinöl	„	0,8867	55,03	3,030	25,54	16,26
Schwefelkohlenstoff in Wasser	1,2687	1	3,27	8,25	4,26	3,63
Steinöl	0,7977	1	3,23	8,25	3,83	3,82
Chloroform	1,4878	1	3,12	8,25	3,01	4,18
Olivenöl	0,9136	1	3,76	8,25	2,10	4,96
Terpentinöl	0,8867	1	3,03	8,25	1,18	5,05
Olivenöl in wässrigem Alkohol	0,9136	0,9231	3,76	2,91	0,69	2,99
„ in Alkohol	0,9136	0,7906	3,76	2,599	0,23	3,06

Da alle Werte  $\alpha$ , wie wir sie eingeführt haben, positiv sind, so folgt, wie Volkmann hervorhebt, daß  $\alpha'_{12}$  kleiner oder höchstens gleich  $\alpha_1 + \alpha_2$  ist.

1 Quincke, Poggend. Ann. 189. p. 1. 1870.

sein kann, letzteres wenn  $\alpha_{12}$  gleich Null wäre, daß aber ebendeshalb  $2\alpha_{12} < \alpha_1 + \alpha_2$  sein muß. Die Beobachtungen bestätigen das,  $\alpha'_{12}$  ist stets kleiner als  $\alpha_1 + \alpha_2$  und ebenso ist  $2\alpha_{12} < \alpha_1 + \alpha_2$ . Da ferner  $\alpha_{12}$  stets größer ist als der kleinere der beiden Werte  $\alpha$ , so ist  $\alpha'_{12}$  stets kleiner als die Differenz  $\alpha_1 - \alpha_2$ . Die Erfahrung, daß  $\alpha_{12}$  stets größer ist als der kleinere der beiden Werte  $\alpha_1$  oder  $\alpha_2$ , zeigt, daß die Bedingung der Nichtmischbarkeit die ist, daß die Kohäsion einer der beiden Flüssigkeiten größer ist als die Anziehung der beiden aufeinander.

In noch anderer Weise hat Quincke die Konstante  $\alpha'_{12}$  gemessen, indem er zwei Flüssigkeiten übereinander schichtete und in dieselbe eine Kapillarröhre brachte, so daß dieselbe, wenn sie in die untere Flüssigkeit tauchte, gleichzeitig von der obern bedeckt war. Es bedarf nach dem vorherigen wohl keines besondern Nachweises, daß, wenn  $h$  die Höhe ist, bis zu welcher die untere Flüssigkeit I in dem kapillaren Rohre, dessen Radius gleich  $r$  ist, aufsteigt, und  $s_1$  und  $s_2$  die spezifischen Gewichte der beiden Flüssigkeiten sind, die Gleichung besteht

$$rh(s_1 - s_2) = 2\alpha'_{12} \cos \vartheta_{12},$$

wenn  $\vartheta_{12}$  der Randwinkel ist, unter welchem die gemeinsame Oberfläche die Röhrenwand schneidet.

Zur Durchführung der Versuche mit Wasser und Terpentinöl z. B. füllte Quincke in ein Becherglas Wasser als Flüssigkeit I bis zu einer gewissen Höhe. Darauf wurde eine ziemlich hohe Schicht Terpentinöl gebracht, indem man dasselbe vorsichtig an den Wänden des Glases herabrinne ließ, so daß die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten ganz scharf war. In ein reines kapillares Rohr ließ man dann Wasser einsteigen und schmolz es oben nahe der Wasseroberfläche zu. Unterhalb der Wasseroberfläche versah man das Rohr mit einem Feilstrich und tauchte jetzt das passend befestigte Rohr in die Flüssigkeiten, so daß das untere Ende in das Wasser tauchte und der Feilstrich sich unter Terpentinöl befand. Darauf wurde die kapillare Röhre am Feilstrich abgebrochen. Das Wasser in derselben sank und wurde in dem oberen Teile der Röhre durch Terpentinöl ersetzt. Die kapillare Oberfläche in der Röhre war demnach die gemeinsame Oberfläche Wasser — Terpentinöl. Der kapillare Meniskus sank in der mit Wasser benetzten Röhre hinab. Quincke fand

$$rh \frac{s_1 - s_2}{2} = \alpha'_{12} \cos \vartheta_{12} = 1,26,$$

während die Messung an auf Wasser liegenden Terpentinöltropfen  $\alpha'_{12} = 1,1$  ergeben hatte. Der Randwinkel  $\vartheta_{12}$  war also Null. Bei den Versuchen mit auf Wasser unter einer Spiegelglasplatte liegenden Terpentinöltropfen hatte sich  $\vartheta_{12} = 47^\circ$  ergeben; fast den gleichen Wert fand Quincke, wenn er den Versuch mit der kapillaren Röhre insofern umkehrte, daß er in das Kapillarrohr vorher Terpentinöl einsteigen ließ und es dann in das mit Wasser und Terpentin gefüllte Becherglas brachte. Der kapillare Meniskus stieg dann nach Abbrechen des oberen Endes des kapillaren Rohres in das mit Terpentin benetzte Rohr empor. Es ergab sich

$$\alpha'_{12} \cos \vartheta_{12} = 0,809 = 1,18 \cos 50^\circ.$$

Randwinkel und damit die Steighöhe in einem kapillaren Rohre anders, wenn die Wand mit Wasser, als wenn sie mit Terpentinöl ist.

## § 82.

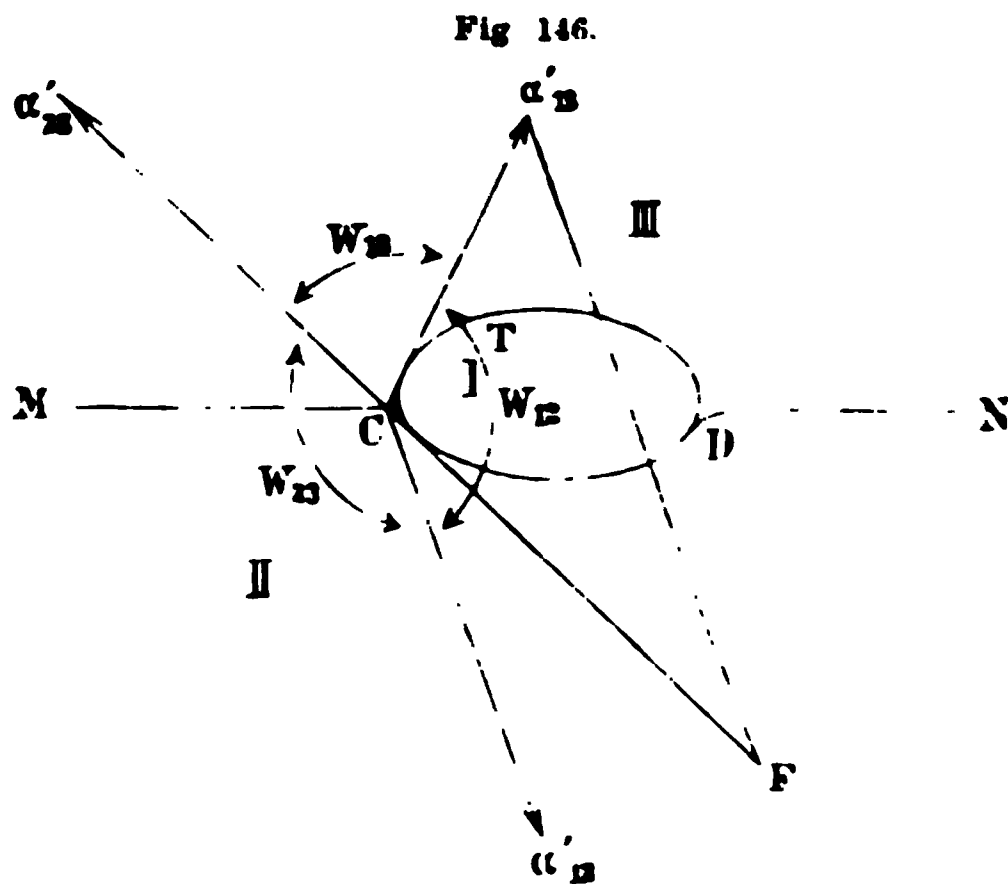
### Ausbreitung von Flüssigkeiten auf festen Körpern und Flüssigkeiten.

Wenn man einen Tropfen einer Flüssigkeit auf eine horizontale Unterlage oder auf die Oberfläche einer spezifisch schwereren Flüssigkeit, so ist das Verhalten des Tropfens je nach den Kapillaritätsverhältnissen ein sehr verschiedenes. Entweder legt sich der Tropfen in Form einer Linse auf die Unterlage, wie Quecksilber auf Glas, oder fette Terpentinöl auf Wasser, welches längere Zeit an der Luft steht, oder es breitet sich der Tropfen über der Oberfläche immer mehr und weiter zu einer immer dünner werdenden Flüssigkeitsschicht aus.

Die Bedingung, unter welcher das erstere oder letztere eintritt, läßt sich allgemein leicht erkennen; damit ein Tropfen als solcher auf einer Unterlage sich halten kann, muß der Randwinkel, unter welchem die Oberfläche die Unterlage schneidet, größer als Null sein. Ist der Randwinkel gleich Null oder geben gar die Verhältnisse der Kapillaritätskonstanten unmöglichen Winkel, so muß die Flüssigkeit sich über die Unterlage ausbreiten.<sup>1)</sup> Die Abhängigkeit des Randwinkels  $\theta$  von den ins

stehenden kapillaren Eigenschaften ist nach der Angabe von Du Bois Reymond in der Vorlesung von F. Neumann folgender Weise dargestellt. Wir wollen im allgemeinsten Fall die Stelle Fig. 146 betrachten. Ein Tropfen I vor, von dem wir annehmen, er besteht aus einer Flüssigkeit I, welche auf einer Unterlage II, dieselbe kann ein fester Körper sein, liegt. Die Flüssigkeit II ist wie der Tropfen I von einer Flüssigkeit III be-

deckt, welche selbstverständlich auch Luft sein kann. Der Punkt C' sei der Schnittpunkt des Meridianschnittes des Tropfens an der Stelle, wo die Oberfläche die Flüssigkeit II trifft, so daß also dort alle drei Medien zusammenstoßen. An dem zur Ebene der Zeichnung senkrechten Elemente der Schnittlinie der Oberfläche des Tropfens und der Unterlage II wirken dann parallel der Tangente an der Oberfläche die Oberflächenspannungen, welche wir wie im vorigen Paragraphen mit  $\alpha'_1$ ,  $\alpha'_2$ ,  $\alpha'_3$  bezeichnen.



<sup>1)</sup> Du Bois Reymond, Poggend. Ann. 104. p. 193. 1858; 139. p. 262. 1870. 2. Auflage, Poggend. Ann. 189. p. 58. 1870.

Da der Tropfen notwendig in die Flüssigkeit etwas einsinkt, so die in  $C$  an die Oberfläche II III gelegte Tangente und damit die Richtung, nach welcher der Zug  $\alpha'_{23}$  ausgeübt wird, die Richtung  $Ca'_{23}$  ist. Ebenso sei  $Ca'_{13}$  die Richtung der Tangente an dem letzten Element Oberfläche des Tropfens in der Flüssigkeit III, nach welcher der Zug wirkt, und die Richtung der Tangente des an  $C$  stoßenden Oberflächenelements in der Flüssigkeit II, somit auch die Richtung, nach welcher die Kraft  $\alpha'_{12}$  wirkt, sei  $Ca'_{12}$ . Soll zwischen den drei Kräften Gleichgewichts vorhanden sein, so müssen sich die drei Kräfte verhalten wie die drei Seiten eines Dreiecks, dessen Winkel die Nebenwinkel der Winkel sind, welche die drei Krafrichtungen miteinander bilden, wie wir bereits § 75 sahen. Man erkennt, indem wir  $\alpha'_{13}F$  parallel  $Ca'_{12}$  ziehen und  $Ca'_{23}$  rückwärts bis  $F$  verlängern, daß der Winkel bei  $F$  der Nebenwinkel von  $w_{13}$ , der Winkel bei  $C$  der Nebenwinkel von  $w_{12}$  und der Winkel bei  $a$  der Nebenwinkel von  $w_{23}$  gegenüberliegt.

Die Gleichgewichtsbedingung ist somit

$$\frac{\alpha'_{13}}{\sin w_{23}} = \frac{\alpha'_{12}}{\sin w_{13}} = \frac{\alpha'_{23}}{\sin w_{12}},$$

da die Sinus der Winkel gleich dem Sinus der Nebenwinkel sind.

Hieraus folgt zunächst, daß die drei Winkel längs des ganzen Verlaufes der Schnittlinie des Tropfens mit der Flüssigkeit II dieselben sein müssen, da  $\alpha'_{12} \alpha'_{13} \alpha'_{23}$  überall denselben Wert haben. Der Tropfen ist daher ein Rotationskörper sein, dessen Oberfläche  $MN$  parallel der Schnittlinie also auch der durch  $CD$  gelegte muß ein Kreis sein. Die Erfahrung bestätigt das, ein Quecksilbertropfen auf ganz reiner absolut horizontalen Ebene, ein Öltropfen auf Wasser, das länger an der Luft gestanden hat, besitzen eine solche Form.

Projizieren wir die Kräfte  $\alpha'_{13}$  und  $\alpha'_{12}$  auf die Richtung der Kraft  $\alpha'_{23}$ , so muß die Summe der beiden ersten Projektionen gleich sein der Kraft  $\alpha'_{23}$ . Nennen wir den Nebenwinkel von  $w_{13}$  jetzt  $\vartheta_{13}$  und setzen den Nebenwinkel von  $w_{23}$  gleich  $\vartheta_{23}$ , so muß

$$\alpha'_{23} = \alpha'_{13} \cos \vartheta_{13} + \alpha'_{12} \cos \vartheta_{23}$$

oder

$$\cos \vartheta_{13} = \frac{\alpha'_{23} - \alpha'_{12} \cos \vartheta_{23}}{\alpha'_{13}}.$$

Nehmen wir zunächst an Stelle der Flüssigkeit II eine horizontale feste Platte, so wird dieselbe vom Tropfen nicht eingedrückt, die Richtung  $\alpha'_{23}$  fällt also in die Oberfläche der Platte, somit ist der Winkel  $\vartheta_{23}$  der Randwinkel  $\vartheta$ , in welchem die Oberfläche des Tropfens die Oberfläche der Platte schneidet. Auch die Richtung von  $\alpha'_{12}$  fällt in die Oberfläche der Platte, da der Tropfen auf der ebenen Platte liegt, also die Berührungsebene des Tropfens und der Platte die Oberfläche der Platte ist, somit  $\vartheta_{23} = 0$  und wir erhalten für den Randwinkel  $\vartheta$

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha'_{23} - \alpha'_{12}}{\alpha'_{13}}.$$



Nun ist

$$\alpha'_{23} = \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_{23}; \quad \alpha'_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_{12}; \quad \alpha'_{13} = \alpha_1 + \alpha_3 - 2\alpha_{13}.$$

Die Flüssigkeit III sei Luft, bzw. der leere Raum, so ist

$$\alpha_3 = 0 \quad \alpha_{23} = 0 \quad \alpha_{13} = 0$$

und

$$\cos \vartheta = \frac{2\alpha_{12} - \alpha_1}{\alpha_1}$$

Ein Ausdruck, der den von uns früher gefundenen Wert für den Randwinkel noch näher präzisiert, er ist gleich der Differenz der Anziehung der festen Wand auf die Flüssigkeit und der Oberflächenspannung der Flüssigkeit dividiert durch die Oberflächenspannung der Flüssigkeit.

So lange

$$2\alpha_{12} - \alpha_1 > \alpha_1,$$

existiert kein Winkel  $\vartheta$ , welcher der Gleichgewichtsbedingung Genüge leistet. Die Flüssigkeit kann also auf der festen Unterlage nicht im Gleichgewicht sein, sie breitet sich aus.

Ebenso ist keine bestimmte Gleichgewichtslage vorhanden, wenn

$$2\alpha_{12} - \alpha_1 = \alpha_1 \text{ somit } \vartheta = 0,$$

sonst sowie ein begrenzter Flüssigkeitstropfen vorhanden wäre, würde  $\vartheta > 0$  sein.

Genau dieselben Gleichungen müssen auch gelten, wenn sich eine Flüssigkeit auf einer andern ausbreiten soll. Denn wenn die Flüssigkeit I auf der Flüssigkeit II schwimmenden Tropfen bildet, so sinkt die-  
be nicht in die Flüssigkeit II ein — es wird also die Spannung  $\alpha'_{23}$  sowie der Oberfläche parallel — und es wird demnach ebenso der spitze Winkel  $\vartheta$  gegeben durch

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha'_{23} - \alpha'_{12}}{\alpha'_{13}}$$

und ist die Flüssigkeit III Luft

$$\cos \vartheta = \frac{2\alpha_{12} - \alpha_1}{\alpha_1}.$$

Da die Ausbreitung verlangt, daß der Winkel  $\vartheta$  unmöglich oder Null ist, so ist die Bedingung der Ausbreitung

$$\alpha'_{23} - \alpha'_{12} \geq \alpha'_{13} \quad \text{oder wenn III Luft ist } 2\alpha_{12} - \alpha_1 \geq \alpha_1.$$

Nach den Untersuchungen von Quincke ist, wie wir sahen, selbst für Flüssigkeiten, welche das Glas benetzen, in Luft der Randwinkel  $\vartheta$  im allgemeinen größer als Null, nur für Alkohol fanden wir aus den Messungen an großen Blasen den Randwinkel Null. Es dürften sich daher nur benetzende Flüssigkeiten außer Alkohol auf Glas nicht ausbreiten.

Das ist in der Tat, wie Quincke<sup>1)</sup> gezeigt hat, in der Regel auch der Fall. Jedoch kommt Quincke zu dem Resultate, daß das seinen Grund darin habe, daß die Oberfläche des Glases und überhaupt aller fester

<sup>1</sup> Quincke, Wiedem. Ann. 2. p. 169, 176. 1877.

Körper, welche von der Flüssigkeit ~~her~~ ~~aus~~ ~~der~~ ~~flüssigen~~ Schichten einer fremden Substanz ~~her~~ ~~aus~~ ~~der~~ ~~flüssigen~~ hindert.

Wie sehr selbst sonst ~~unverändert~~ ~~die~~ ~~Ausbreitung~~ ~~ändern~~, zeigten ~~die~~ ~~großen~~ ~~Quecksilbertropfen~~ ~~als~~ ~~Flüssigkeit~~ ~~II~~ ~~und~~ ~~Wasser~~ ~~als~~ ~~Flüssigkeiten~~ ~~im~~ ~~vorigen~~ ~~Paragraphe~~

$$2\alpha_1 = 20,70 \quad \alpha_1 = 8,35$$

Der Winkel  $\theta$  ist somit ~~unverändert~~ ~~alle~~ ~~in~~ ~~der~~ ~~Tabelle~~ ~~genannten~~ ~~mit~~ ~~Flüssigkeiten~~ ~~sich~~ ~~auf~~ ~~Quecksilber~~ ~~Verföhrung~~, daß man auf Quecksilber kann.

Wendet man indes sorgfältig Spuren einer fremden Flüssigkeit Öl enthält, so breitet sich das Quecksilber her, indem er dasselbe zentrierter Schwefelsäure, dem waren, digerierte, und dann ~~unlöslichen~~ ~~Salzen~~ ~~zu~~ ~~trennen~~, ~~mit~~ ~~Papier~~ ~~mit~~ ~~einer~~ ~~nicht~~ ~~zu~~ ~~enger~~ ~~bar~~ ~~reine~~ ~~Quecksilber~~ ~~läßt~~ ~~mit~~ ~~Schreibpapier~~, in den man eine in Schalen fließen, die heißen Wasser trennt man das Quecksilber Schreibeapiertrichter mit enger des Wassers einen Trichter aus warme trockne Porzellanschale

Bringt man von diesem Quecksilber ein großes Tropfen, so ~~läßt~~ ~~das~~ ~~Quecksilber~~ ~~aus~~.

Berührt man die reine Quecksilber Glasfaden von 0,1<sup>mm</sup> oder kleiner eine Spur Olivenöl oder Terpentin zu einem linsenförmigen Tropfen zeitig ändert der Wassertropfen von der Seite, wo die Berührung fortgetrieben. Je mehr Öl man ~~zu~~ ~~dem~~ ~~Tropfen~~ ~~zusetzt~~ ~~wird~~ ~~der~~ ~~Durchmesser~~ ~~des~~ ~~Tropfens~~

Die Erscheinung ist Folge des Quecksilbers, die feine Ölschicht ist an der Oberfläche geworden, und der Wassertropfen an dieser Seite einen enden daher an dieser Seite des Tropfens der Seite, wo das Quecksilber ~~nicht~~

1) Quincke, Poggend. Ann. 139. p. 100

wichen. Ist die ganze Fläche des Quecksilbers mit Öl überzogen, so nimmt der Tropfen eine linsenförmige Gestalt an.

Ähnliches zeigt sich auch bei andern Flüssigkeiten. Für Öl als Flüssigkeit I und Wasser als II ist  $2\alpha_{12} = 9,92$ ,  $\alpha_1 = 3,76$ . Es muß sich das Öl also ausbreiten; auf ganz reinem Wasser breitet sich in der Tat das Öl aus. Hat das Wasser indes lange Zeit offen an der Luft gestanden, so kann ein Öltropfen auf dem Wasser ruhig liegen bleiben.

Die Beobachtungen über die Ausbreitung von Flüssigkeiten auf andern von Paul Du Bois Reymond<sup>1)</sup>, Lüdltge<sup>2)</sup>, Marangoni<sup>3)</sup> und besonders von Quincke<sup>4)</sup> haben, wie Quincke gezeigt hat, die Folgerungen der Theorie im allgemeinen bestätigt.

Ein sehr sicheres Mittel, um die Ausbreitung von Flüssigkeiten auf der Oberfläche einer andern zu erkennen, ist die Herstellung einer Luftblase in einer Flüssigkeit II unter einer Spiegelglasplatte. Bringt man diese Blase auf die Oberfläche der Flüssigkeit II eine Spur einer Flüssigkeit I, so erkennt man die Ausbreitung der Flüssigkeit I sofort an der Gestaltsänderung der Blase, da für die Gestalt der Blase jetzt die oberflächenspannung  $\alpha'_{12}$  maßgebend ist. Auf diese Weise konnte Quincke feststellen, daß alle in der Tabelle des vorigen Paragraphen mit Wasser versuchten Flüssigkeiten sich auf Wasser ausbreiten.

Am leichtesten lassen sich die Verhältnisse für mischbare Flüssigkeiten übersehen. Für diese ist

$$\alpha'_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_{12}$$

wird Null also  $2\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$ ; damit wird, wenn wir als Flüssigkeit III Luft voraussetzen

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Der Winkel  $\vartheta$  wird unmöglich, wenn  $\alpha_2 > \alpha_1$ , somit muß bei mischbaren Flüssigkeiten stets die mit kleinerer Oberflächenspannung sich auf der mit größerer Oberflächenspannung ausbreiten. Im allgemeinen gilt dieser Satz auch für nicht mischbare Flüssigkeiten.

Schichtet man auf eine Flüssigkeit II eine Flüssigkeit III, so kann auch auf der Grenze eine Flüssigkeit ausbreiten. Die Bedingung der Ausbreitung gibt unsere Gleichung

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha'_{23} - \alpha'_{12}}{\alpha'_{13}}; \quad \alpha'_{23} - \alpha'_{12} > \alpha'_{13}.$$

Man erkennt ohne weiteres, daß eine Flüssigkeit sich an der Grenze zweier anderer ausbreitet, wenn sie sich auf jeder der beiden ausbreitet. Terpentinöl breitet sich auf Wasser und auf Olivenöl aus, schichtet man Olivenöl auf Wasser und bringt in die Grenzfläche Terpentinöl, so breitet sich dasselbe aus.

1) *P. Du Bois Reymond*, Poggend. Ann. 104. p. 193. 1858; 139. p. 262. 1870.

2) *Lüdltge*, Poggend. Ann. 137. p. 362. 1869.

3) *Marangoni*, Poggend. Ann. 143. p. 337. 1871.

4) *Quincke*, Poggend. Ann. 139. p. 28, 68. 1870. Wiedem. Ann. 2. p. 145.

Ebenso breitet sich eine Flüssigkeit notwendig an der gemeinsamen Grenze zweier anderer aus, wenn sie sich mit beiden mischt.

Quincke hat die Ausbreitung von Flüssigkeiten an der gemeinsamen Grenze zweier anderer zum Gegenstande eines ausführlichen Studiums gemacht. Von besonderem Interesse sind in der Beziehung periodische Bewegungen, welche entstehen, wenn man an die Grenze zweier Flüssigkeiten etwa auf die Oberfläche eines in einer andern Flüssigkeit schwimmenden Tropfens periodisch kleine sich auf der gemeinsamen Oberfläche ausbreitende Flüssigkeiten bringt. Läßt man z. B. auf die Oberfläche eines Tropfens, welcher in einem Gemische von Alkohol und Wasser schwimmt, durch ein enges Glasröhrchen kleine Tröpfchen einer Lösung von kohlensaurem Natron fallen, so bildet sich eine lösliche Seife, welche auf der Oberfläche des Tropfens sich ausbreitet. Es zeigen sich dabei rasch übergehende Zuckungen des Tropfens, Bewegungen, welche an manchen der organischen Natur vorkommenden Bewegungen erinnern und zu deren Erklärung führen.<sup>1)</sup> Der Raum gestattet uns leider nicht näher auf diese Untersuchungen einzugehen.

### § 83.

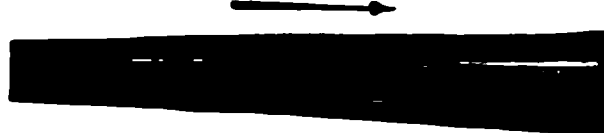
**Bewegungen infolge von Kapillarwirkung.** Durch die bisher betrachteten Gesetze der Oberflächenspannung erklären sich eine Anzahl fallender Erscheinungen, von denen wir einige Bewegungserscheinungen ableiten wollen.

Wenn man zwischen zwei unter einem spitzen Winkel zusammenstoßende Platten oder in ein konisches Glasröhrchen einen Flüssigkeitstropfen bringt, der die Röhrenwände benetzt, so sieht man, daß der Tropfen sich gegen den Scheitel des Winkels hinbewegt; ein die Röhrenwände nicht benetzender Tropfen dagegen bewegt sich von dem Scheitel des Winkels

Fig. 147.



Fig. 148.



oder der Spitze der Röhre fort. Diese Bewegung erklärt sich unmittelbar aus den vorhin erkannten Gesetzen der Oberflächenspannung. Die Grenzflächen der Flüssigkeit sind in dem ersten Falle konkav; an der engern Seite der Röhre (Fig. 147), oder gegen den Scheitel des Winkels hin ist wegen des kleinern Abstandes der Wände die Krümmung der Oberfläche stärker als an der entgegengesetzten Seite. Deshalb ist der Druck gegen das Innere der Flüssigkeit an der weiten Stelle der Röhre größer, und diesem Drucke folgend, muß sich der Tropfen gegen das engere Ende der Röhre hin bewegen.

Umgekehrt ist es im zweiten Falle (Fig. 148); die Oberfläche ist hier konvex, die Krümmung an der engen Seite, und damit der Druck gegen das Innere

1) Quincke, Wiedem. Ann. 85. p. 580. 1888. Man sehe auch O. Lohmann, Wiedem. Ann. 56. p. 771. 1895; J. Stark, Wiedem. Ann. 65. p. 287. 1899.

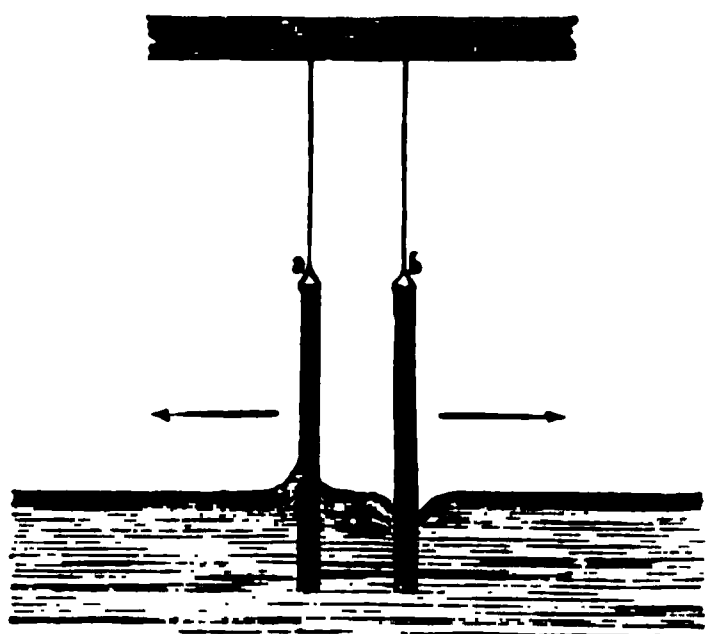


Dasselbe ist in der Anordnung Fig. 150 der Fall. Durch eine ähnliche Entwicklung erhält man, daß die über  $a$  liegenden Punkte der die außerhalb höher stehende Flüssigkeit einen nach innen gerichteten Druck erfahren. Unterhalb  $a$  sind die Drucke nach innen und außen gleich, da die Flüssigkeiten innerhalb und außerhalb der Platten im Gleichgewicht sind; bei  $b$  aber wirkt nach außen der Druck der Luft, nach innen der Seitendruck der Flüssigkeit, welcher gleich ist dem Drucke der Luft, vermehrt um das Gewicht der über  $b$  vorhandenen Flüssigkeitsschicht, der letztere Teil des Seitendruckes muß demnach die Platten gegeneinander drücken.

Wäre der nach innen und außen gleich wirkende Druck  $P$  der Luft auch nicht vorhanden, so bleibt doch in beiden Fällen der nach innen gerichtete Druck übrig, nur daß wir ihn im ersten Falle nicht als den Überschuß des äußeren über den inneren Druck auffassen müßten, sondern als die Anziehung zwischen Wand und Flüssigkeit, welche eben den von innen nach außen wirkenden Druck in unserer vorigen Betrachtungsweise vermindert.

Wenn die eine der Platten von der Flüssigkeit benetzt wird, die andere nicht, so steigt die Flüssigkeit an der einen auf, an der andern nicht, wie

Fig. 151.



in Fig. 151; man beobachtet dann eine Abstoßung. Diese läßt sich aus denselben Prinzipien ableiten. An der benetzten Platte  $a$  muß dann die Flüssigkeit außerhalb höher ansteigen als im Zwischenräume der beiden Platten, weil die Flüssigkeit außen so hoch steigen muß, da die durch die konkave Krümmung verminderte Oberflächenspannung durch die gehobene Flüssigkeit äquilibriert wird. Im Innern dagegen zwischen  $a$  und  $b$  ist die Oberfläche der Flüssigkeit doppelt gekrümmt, indem die Flüssigkeit an  $a$  konkav, an  $b$  aber konvex anlegt.

Oberflächenspannung wird daher in der einen Hälfte der Flüssigkeit vermindert, in der andern gegen  $b$  liegenden dagegen verstärkt, und deshalb ist die Verminderung an  $a$  nicht so groß wie außerhalb; die Flüssigkeit kann also im Innern an  $a$  nicht so hoch steigen. Aus eben diesem Grunde muß sie an  $b$  außen eine stärkere Depression erhalten als zwischen den Platten.

Aus dieser Gruppierung ergibt sich dann nach der Entwicklung der beiden vorigen Fälle, daß sowohl  $a$  als auch  $b$  einen Antrieb von innen nach außen erfährt, die Platten müssen sich also voneinander entfernen.

Eine genauere Untersuchung der gekrümmten, zwischen den Platten vorhandenen Oberfläche der Flüssigkeit hat La Place zu dem Resultat geführt, daß bei sehr großer Annäherung der Platten die Abstoßung in eine Anziehung übergeht, ein Resultat, das Versuche von Haüy<sup>1)</sup> bestätigen.

1) Haüy, a. a. O. Gilberts Annalen. 33. p. 308. 1809.

## § 84.

**Größe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte.** Die Größe der Entfernung, bis auf welche hin die Moleküle aufeinander einwirken, galt früher für unmeßbar klein. Je kleinere Größen die fortschreitenden Meßmethoden zu messen gestatteten, um so näher lag die Frage, ob es denn nicht doch möglich sei, die Grenze der Wirkungssphäre der Molekularkräfte in den uns gewohnten Maßen anzugeben.

Der erste, welcher eine solche Messung wirklich durchzuführen versuchte, war Plateau<sup>1</sup>). Er benutzte dazu den am Schlusse des § 74 beschriebenen Versuch, durch welchen er den Oberflächendruck einer Lamelle in Seifenflüssigkeit direkt maß. Aus einem kleinen Trichter, dessen passend verlängertes Ausflußrohr U-förmig gebogen und mit Wasser gefüllt war, wurde durch ein seitlich angesetztes verschließbares Rohr eine Seifenblase geblasen und das Ansatzrohr geschlossen. Der Oberflächendruck bzw. der Unterschied des auf der konvexen Seite der Kugel vorhandenen Oberflächendrucks gegenüber dem auf der konkaven Seite vorhandenen wurde durch ein Wassermanometer gemessen; wie wir § 74 sahen, ist, wenn  $p$  die Druckdifferenz am Wassermanometer,  $R$  der Radius der Seifenblase ist,

$$pR = 2H,$$

wo  $H$  wie immer die doppelte Oberflächenspannung hier in der Seifenlamelle bedeutet.

Nun machte Plateau darauf aufmerksam, daß diese Relation nur so lange ihre Gültigkeit habe, als die Dicke der Blasenlamelle mindestens gleich dem doppelten Radius der Wirkungssphäre der Moleküle ist, indem er für den Oberflächendruck abgeleiteten Gleichungen

$$P = K \pm \frac{H}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)$$

für eine flüssige Masse gelten, bei der also sämtliche innerhalb des Radius der Wirkungssphäre liegenden Teilchen ihre Wirkung ausüben.

Bei einer sich mehrere Tage haltenden Blase, welche durch allmähliches Herabrinnen der Flüssigkeit zur Ansatzstelle der Blase und durch Verdunstung nach und nach dünner wurde, ließ sich eine Verminderung des Oberflächendrucks bis zu dem Augenblicke, in welchem die Blase zerbrach, nicht erkennen, so daß die Dicke der Blase bis zu diesem Augenblicke nicht kleiner war als der doppelte Radius der Wirkungssphäre der Moleküle. Die Dicke der Blase ergab sich nach einer optischen, in der man ihre vom Licht zu besprechenden Methode aus der Farbe der Blase<sup>2</sup>) als  $0,0001135^{\text{mm}}$ . Daraus würde folgen, daß der Radius der Wirkungssphäre keinesfalls größer ist als  $0,000057^{\text{mm}}$ . Würde man annehmen, daß die Blase nicht länger bestehen kann, als bis ihre Dicke dem doppelten Radius der Wirkungssphäre gleich ist, so würde diese Größe etwa dem Radius der Wirkungssphäre gleich sein.

<sup>1</sup> Plateau, Mém. de l'Acad. de Bruxelles. 33. Poggend. Annalen. 114. 1857. 1861.

<sup>2</sup> Man sehe in der Lehre vom Licht: „Farbe dünner Blättchen“.



Reinold und Rücker<sup>1)</sup> sowie Drude<sup>2)</sup> haben indes gezeigt, daß Lamellen von Seifenlösung noch ganz erheblich dünner werden und sich lange Zeit stabil halten können. Wenn man in der Weise, wie Sondhaus es ausführte, zwischen zwei konzentrischen Platinringen von etwa 33<sup>mm</sup> Durchmesser aus Plateauscher Seifenflüssigkeit in geschlossenen Glaskästen, welche Seifenflüssigkeit enthalten, 30—40<sup>mm</sup> hohe zylindrische Lamellen bildet, und diese sich selbst überläßt, so werden die Wände des Zylinders oben dünner und es erscheint ein allmählich sich nach unten ausbreitender schwarzer Ring, d. h. ein Ring, der nicht mehr die Farben dünner Blättchen, sondern das sogenannte Schwarz erster Ordnung der Newtonschen Farbenskala zeigt. An der Grenze des schwarzen Ringes werden die Lamellen plötzlich dicker.

Drude erhielt derartig dünne Lamellen, indem er aus Seifenflüssigkeit auf hohlen vertikal stehenden Glaszylindern horizontale Lamellen bildete; er erhielt so unter geeigneten Versuchsbedingungen, welche das sind, gibt er nicht an, kreisrunde schwarze Flecke von 5<sup>cm</sup> Durchmesser. Indem Reinold und Rücker die Oberflächenspannungen verschiedener Lamellen mit und ohne schwarzen Ring verglichen, kamen sie zu dem Resultate, daß die Oberflächenspannung bis zu der Dicke des schwarzen Ringes nicht kleiner wurde. Drude kam zu demselben Resultate, indem er durch einen kleinen Überdruck in dem Gefäße, auf dessen oberem Rande die Lamelle gebildet war, der Lamelle die Gestalt eines flachen Kugelsegmentes gab und die Krümmungsradien der Lamelle an den verschiedenen Stellen maß. Er bestimmte zu dem Zwecke die Größe des Bildes, welche die konvexe spiegelnde Fläche der Lamelle von einem in bestimmter Entfernung von derselben aufgestellten Gegenstande entwarf. Durch Aufstellen einer Blende konnte er bewirken, daß er das von einem Flächenstücke der Lamelle, welches einem Kreis von 2,5<sup>mm</sup> Durchmesser entsprach, gespiegelte Bild beobachtete. Wie die Gesetze der Reflexion an kugelförmigen Spiegeln zeigen, wird das Bild kleiner, wenn der Krümmungsradius der Fläche kleiner wird. Es ließ sich keine Änderung des Krümmungsradius erkennen, wenn man von dickern zu dünnern Stellen der Lamelle überging.

Da an Stellen kleinerer Oberflächenspannung der Krümmungsradius hätte kleiner sein müssen, so folgt, daß in der ganzen Oberfläche der Lamellen an dickern und dünnern Stellen die Oberflächenspannung die gleiche war.

Reinold und Rücker finden durch zwei verschiedene Methoden, einer elektrischen und einer optischen, die Dicke des schwarzen Ringes zu 12 Millionteilen, Drude nach einer optischen Methode zu 17 Millionteilen eines Millimeters.

Drude nimmt an, die Dicke der Lamelle in der schwarzen Schicht sei gleich dem doppelten Radius der Wirkungssphäre, während Reinold und Rücker der Ansicht sind, daß die Dicke der Schicht erheblich kleiner sei, als der Radius der Wirkungssphäre.

Nach Drude ist nämlich die Lamelle ihrer ganzen Oberfläche nach

1) Reinold und Rücker geben in Wiedem. Ann. 44. p. 778. 1891 eine kurze Zusammenstellung ihrer Versuche mit Angabe der einzelnen Abhandlungen.

2) Drude, Wiedem. Ann. 48. p. 158. 1891.

zähen Oberflächenschicht bedeckt, dort wo dieselbe dicker ist, die obere und untere Schicht noch Flüssigkeit ein, welche nicht berflächenschicht gehört. Das Dünnerwerden der Lamelle tritt nicht etwa dadurch ein, daß an den Außenwänden die Flüssigkeit, sondern daß die Flüssigkeit zwischen diesen Schichten hinab die oberflächlichen Schichten zur Berührung kommen. Darin der Grund gegeben für das plötzliche Dickerwerden der Lamelle, tritt dort ein, wo die oberflächlichen Schichten noch nicht zur gekommen sind.

Auffassung Reynolds und Rückers würde zu der Folgerung daß die schwarze Schicht aus einer Flüssigkeit mit größerer Oberflächenspannung bestehe als der übrige Teil der Lamelle. Würde die Lamelle Herabrinnen der Flüssigkeit an einer Stelle eine Dicke erhalten, die geringer ist als der Radius der Wirkungssphäre, so würde an dieser Stelle die Oberflächenspannung, wie W. Thomson (jetzt Lord Kelvin) nachgewiesen hat<sup>1)</sup>, kleiner werden; die notwendige Folge wäre ein weiteres Dünnerwerden an der Stelle und baldiges Zerreißen, bis die Oberflächenspannung durch eine Änderung der Flüssigkeitsoberfläche zunähme und der Spannung an den dickern Stellen dadurch gleich würde. Eine solche Verstärkung der Oberflächenspannung könnte etwa dadurch eintreten, daß an den dünnern Stellen die Dampfdichte kleiner würde, daß somit aus der feuchten Umgebung Wasserdampf an den dünnern Stellen niederschläge und dadurch die Oberfläche dort wasserreicher mache als an den dickern Stellen. Größerer Dampfdruck würde die Oberflächenspannung vergrößern, es müßte deshalb zur Erhaltung des Gleichgewichtes die Lamelle soweit unter die Dicken des Radius der Wirkungssphäre verdünnt werden, daß durch die Zunahme der Oberflächenspannung der wasserreichern Oberfläche der dünnern dickeren aber wasserärmeren Lamelle gleich würde.

Es ist nach einer Entwicklung von Warburg<sup>2)</sup> dieser Zustand der Gleichgewichtsfläche. Es ergibt sich nämlich, wie Warburg zeigt, aus einem Satze von Thomson, den wir in der Wärmelehre kennen lernen werden, daß eine Lamelle, welche dünner ist als der doppelte Radius der Wirkungssphäre, mehr Wasser verdampfen muß, als von der dickern Lamelle, es sei die Oberfläche also nicht wasserreicher werden, somit kann sich der Gleichgewichtszustand nicht mehr entwickeln, die Lamelle muß ab-

nehmen nicht aus einer andern Ursache als Zunahme des Wassergehaltes in den dünnern Stellen der Lamelle eine Zunahme der Oberflächenspannung tritt, so müssen wir aus den Beobachtungen von Reinold und Warburg sowie Drude schließen, daß der Radius der Wirkungssphäre in Lamellen nicht größer ist als 6, oder nach Drude 8,5 Million-Millimeters.

Drude hat den Radius der Wirkungssphäre in anderer Weise direkt gesucht<sup>3)</sup>. Bringt man auf eine Glasplatte sehr dünne keil-

<sup>1)</sup> Thomson, Nature. 3. 1870.

<sup>2)</sup> Warburg, Wiedem. Ann. 28. p. 399. 1886

<sup>3)</sup> Drude, Poggend. Ann. 187. p. 402. 1869. Ann. d. Physik. 2. 414. 1900.

förmige Schichten einer andern Substanz, so wird der Randwinkel einer Flüssigkeit an den verschiedenen Stellen verschieden sein, wenn die Dicke der keilförmigen Schicht nicht so groß ist als der Radius der Wirkungssphäre, er wird konstant erst an der Stelle der keilförmigen Schicht, von der ab ihre Dicke gleich ist dem Radius der Wirkungssphäre. Denn der Randwinkel hängt, wie wir sahen, ab von dem Verhältnis der Adhäsion des flüssigen an den festen Körper und der Kohäsion der Flüssigkeit. Ist demnach die Adhäsion der Flüssigkeit an das Glas eine andere als an die auf das Glas gebrachte Schicht, was immer dann der Fall sein wird, wenn die Flüssigkeit die beiden Substanzen nicht vollkommen benetzt, so muß, so lange die Schicht eine so kleine Dicke hat, daß das Glas durch sie noch hindurchwirkt, der Randwinkel ein anderer sein als dort, wo der Abstand der Flüssigkeit vom Glase gleich oder größer ist als der Radius der Wirkungssphäre.

Derartige keilförmige Schichten lassen sich auf Glas sehr gut durch Silber erzeugen<sup>1)</sup>, indem man auf eine Glasplatte eine an verschiedenen Stellen verschieden dicke Schicht einer Versilberungsflüssigkeit bringt. Quincke brachte zwischen eine ebene Glasplatte und darauf gelegte Zylinderfläche von Spiegelglas, welche einen Radius von 120<sup>mm</sup> besaß, Martinsche Versilberungsflüssigkeit, aus welcher eine doppelt keilförmige Silberschicht sich absetzte, welche in der Mitte, dort wo die Zylinderfläche die Glasplatte berührte, am dünnsten war. Zwei solcher Platten wurden vorsichtig abgespült, dann durch dünne Glasplättchen getrennt mit den versilberten Flächen einander gegenüber gestellt, so daß etwa gleich dicke Schichten Silber einander gegenüber lagen. Eine schwache Metallfeder drückte die beiden Platten gegeneinander. Dieselben wurden in einen Trug mit destilliertem Wasser so aufgestellt, daß die Schneiden der Silberkeile vertikal standen. Das Wasser hob sich in dem kapillaren Raum zwischen den parallelen Silberlamellen bis zu einer Höhe  $h$ , welche an der dünnsten Stelle des Silbers am höchsten war und sich verminderte, je dicker das Silber wurde. Da der Abstand  $d$  der Platten überall der gleiche war, so folgt aus der Gleichung für die Steighöhe zwischen den Platten

$$h = \frac{H}{s} \cos \vartheta \frac{1}{d} = a^2 \cos \vartheta \frac{1}{d}$$

$$\cos \vartheta = \frac{h d}{a^2},$$

daß mit zunehmender Silberdicke der Winkel  $\vartheta$  immer größer wird.

Folgende Tabelle enthält eine Beobachtungsreihe von Quincke; die Dicke der Silberschicht wurde nach einer optischen Methode, wie sie auch von Plateau benutzt wurde, bestimmt. Die Winkel  $\vartheta$  sind aus obiger Gleichung abgeleitet, in der Quincke  $a^2$ , die spezifische Kohäsion des Wassers gleich 15 einsetzte. Die mit  $x$  überschriebene Kolumne gibt die Abstände der Stellen, denen die Steighöhe  $h$  entspricht von der dünnsten Stelle der Silberschicht,  $\varepsilon$  ist die Dicke der Silberschicht.

1) Man sehe Quincke, Poggend. Ann. 129. p. 44. 1866.

$$d = 0^{\text{mm}},633$$

$r$	$z$	$h$	$\theta$
mm	mm	mm	
0	0,000 0040	13,74	54° 33'
1	0,000 0052	13,58	55° 2'
2	0,000 0080	13,33	55° 44'
3	0,000,0130	13,10	56° 26'
4	0,000 0142	12,82	57° 15'
5	0,000 0200	11,92	59° 48'
6,5	0,000 0284	9,73	65° 38'

Man sieht, wie  $h$  mit wachsender Silberschicht ganz beträchtlich abnimmt. Diese Abnahme dauerte selbst an den dicksten Stellen der Silberschichten, die noch durchsichtig waren, fort, Stellen, welche eine Dicke zu  $0^{\text{mm}},0000542$  besaßen, so daß der Radius der Wirkungssphäre bei Silber-Wasser noch etwas größer anzunehmen ist.

Mit Quecksilber kann man ähnliche Beobachtungen machen, indem man Silberschicht durch Behandeln mit Schwefelwasserstoff in Schwefelsilber führt, und dann direkt durch Spiegelung die Stelle aufsucht, wo der Winkel, unter welchem das Quecksilber die vertikal gestellte Platte schneidet, konstant wird, oder wo die Depression des Quecksilbers an der vertikalen einen konstanten Wert erhält. Derartige Versuche lieferten Quincke den Radius der Wirkungssphäre den Wert  $0^{\text{mm}},0000483$ . Nach Übertragung des Silbers in Jodsilber fand Quincke den Winkel bei einer Schichtdicke von  $0^{\text{mm}},000059$  konstant werden. Als die Glasplatte mit einer Kollodiumschicht überzogen war, fand sich die Dicke der Schicht, wo der Randwinkel des Quecksilbers konstant wurde, kleiner als  $0^{\text{mm}},00008$ , genauere Bestimmung war in diesem Falle wegen des optischen Verhältnisses der Kollodiumschicht nicht möglich.

Aus Quinckes Versuchen würde man also für den Radius der Wirkungssphäre zu rund 50 Milliontheilen eines Millimeters gelangen, also zu einem Werte, der 6mal so groß ist als der aus den Versuchen von Drude erhaltene.

Noch nach einer dritten Methode hat man die Größe der Wirkungssphäre zu bestimmen gesucht, und zwar durch Messung der Dicke, welche eine auf einer andern Flüssigkeit sich ausbreitende Flüssigkeitshaut hat, im Augenblicke, in dem sie aufhört kontinuierlich zu sein. Die ersten anzielenden Messungen rühren von Sohnke her<sup>1)</sup>.

In dem Augenblicke, in dem man ein am Ende eines Drahtes hängendes kleines Öltröpfchen mit einer reinen Wasseroberfläche in Berührung bringt, zerfällt das Öl mit großer Geschwindigkeit sich zu einer zusammenhängenden kreisförmigen Haut auszubreiten. Sie hat innerhalb eines Bruchteils einer Sekunde einen Halbmesser von einigen Zentimetern erreicht, ist dabei fast farblos, nämlich ganz gleichmäßig bläulichgrau gefärbt und zerfällt sofort in eine große Zahl sehr kleiner Tröpfchen oder Bläschen, welche noch eine kurze Zeit ihre zentrifugale Bewegung beibehalten. Das Öltröpfchen muß, wie gesagt, sehr klein und die Wasser-

<sup>1)</sup> Sohnke, Wiedem. Ann. 40. p. 345 1890

fläche hinreichend groß sein, wenn die Erscheinung in der geschilderten Weise erfolgen soll.

Aus der an allen Stellen gleichen Farbe der Ölhaut gleich vor dem Zerfall folgt aus der Theorie der Farben dünner Blättchen, daß die Haut überall dieselbe Dicke hat, und das gleiche läßt sich daraus schließen, daß der Zerfall in Tröpfchen gleichzeitig an allen Stellen der Haut erfolgt, nicht in der Nähe des Randes früher als in der Nähe des Zentrums. Sohnke schließt, daß die Dicke der Haut in dem Augenblicke des Zerreißen gleich dem doppelten Radius der Wirkungssphäre sei, denn an der Grenze der zunächst nicht zerrissenen Ölscheibe dauern die Bedingungen der Ausbreitung fort, auf den ganzen Umfang des Ölkreises wirkt ein nach außen gerichteter Zug von derselben Stärke. In dem Augenblicke, in welchem die Dicke der Ölschicht gleich dem doppelten Radius der Wirkungssphäre geworden ist, nimmt die Oberflächenspannung des Öles ab und um so mehr, je dünner die Ölschicht wird; es muß also plötzlich die Ausbreitungsgeschwindigkeit wachsen und infolgedessen die Ölschicht zerreißen.

Zur Bestimmung der Dicke der Ölschicht in dem Augenblicke des Zerreißen bestimmte Sohnke durch Wägung die Menge des auf das Wasser gebrachten Öles. Das auf das Wasser zu bringende Öl befand sich an einem dünnen Platindraht; der Platindraht mit dem daran haftenden Öl wurde gewogen; es wurde dann der Platindraht, bzw. das an ihm haftende Öl mit dem Wasser in Berührung gebracht, und die Menge des auf das Wasser übergegangenen Öles durch den Gewichtsverlust des mit dem Öl bedeckten Platindrahtes bestimmt. Da die Öltröpfchen nach dem Zerreißen der Ölhaut noch einige Zeit in der im Augenblicke der Zerreißen eingenommenen Lage oder nahe derselben verharrten, so konnte der Durchmesser des Ölkreises gemessen werden. Ist  $r$  der Radius des Ölkreises, so ist  $r^2 \pi d \cdot s$ , worin  $d$  die Dicke der Ölschicht,  $s$  das spezifische Gewicht des Öles ist, gleich dem Gewichte  $p$  des Öles. Man erhält daraus unmittelbar die Dicke  $d$  der Ölschicht aus dem Quotienten

$$d = \frac{p}{r^2 \pi s}.$$

In dieser Weise fand Sohnke für

$$\begin{array}{ll} \text{Olivenöl} \dots d = 111,5 \mu\mu, & \rho = 55,75 \mu\mu \\ \text{Rüböl} \dots d = 93,6 \mu\mu, & \rho = 46,8 \mu\mu, \end{array}$$

worin das Zeichen  $\mu\mu$  die milliontel Millimeter bedeuten soll, entsprechend der neuerdings angenommenen Bezeichnung  $\mu$  für tausendstel und  $\mu\mu$  für milliontel Millimeter.

Sohnke gelangt somit ebenso wie Quincke aus ganz andern Beobachtungen zu dem gleichen Werte von etwa  $50 \mu\mu$  für den Radius der Wirkungssphäre. Die Schlüsse Sohnkes sind zweifelhaft geworden durch die Beobachtungen von Lord Rayleigh<sup>1)</sup>, Röntgen<sup>2)</sup>, Oberbeck<sup>3)</sup> und Fischer<sup>4)</sup>, nach welchen Ölschichten von erheblich geringerer Dicke eine Wasserfläche kontinuierlich bedecken können.

1) Lord Rayleigh, Proceedings of Royal Society. 48. p. 281, 364. 1891.

2) Röntgen, Wiedem. Ann. 41. p. 321. 1890.

3) Oberbeck, Wiedem. Ann. 49. p. 366. 1893.

4) Fischer, Wiedem. Ann. 68. p. 414. 1899.

Bringt man kleine Stückchen Kampfer auf eine reine Wasseroberfläche, so nehmen diese eine lebhafte Bewegung an. Wenn man die Oberfläche des reinen Wassers mit Öl verunreinigt, so werden die Bewegungen

Kampfers träger und hören mit Dickerwerden der auf dem Wasser liegenden Ölschicht ganz und gar auf. Nach einem dem Sohnkeschen ähnlichen Verfahren findet Rayleigh, daß die Dicke der Ölschicht, welche die Bewegung des Kampfers ganz zum Aufhören bringt,  $2\mu\mu$  beträgt.

Könnte hiernach das Wasser von einer zusammenhängenden Ölschicht bedeckt sein, welche nur 0,02 derjenigen Dicke besitzt, welche Sohnke gefunden hat.

Zu ganz ähnlichem Resultate gelangte Röntgen aufgrund einer andern Beobachtung. Hält man eine offene mit Äthyläther nicht voll gefüllte Flasche dicht über einem großen Gefäße mit reinem Wasser und neigt die Flasche so, wie wenn man Äther aus der Flasche ausgießen sollte, so fließen, ehe der flüssige Äther ausfließt, Ätherdämpfe aus, welche auf das Wasser niedersinken. Infolge der Einwirkung der Ätherdämpfe und deren teilweiser Absorption durch das Wasser entstehen auf dem Wasser Wellen.

Schöner wird die Erscheinung, wenn man über dem Wasser einen Trichter aufstellt, so daß dessen Mündung sich nahe über der Wasseroberfläche befindet, und einen recht lockern mit Äther getränkten Wattebausch in den Trichter legt. Stellt man das Wassergefäß so auf, daß man die Oberfläche im reflektierten Himmelslicht beobachten kann, so sieht man, wenn die Wasseroberfläche rein ist, unter der Trichtermündung im Wasser eine kleine Vertiefung, von welcher sich konzentrische Wellen ausbreiten. Bringt man dann eine Spur von Fett oder Öl auf die Oberfläche des Wassers, so hören die Wellen auf. Die Vertiefung unter der Trichtermündung ist geblieben, an Stelle der sich ausbreitenden Wellen zeigt sich aber ein scharf begrenzter, von der umgebenden Wasseroberfläche sich unterscheidender Kreis, dessen Durchmesser bei gegebener Ölmenge konstant ist. Die Bewegung des Wassers scheint aufgehört zu haben; verfolgt man aber die Bewegung von kleinen im Wasser suspendierten Teilchen, welche häufig im Innern des Kreises an die Oberfläche kommen, so sieht man, daß diese in genau radialer Richtung nach auswärts geschleudert bis an den Rand der kreisförmigen Fläche getrieben werden. Sind sie dort angekommen, so sinken sie mit wirbelnder Bewegung wieder in die Flüssigkeit ein. Entfernt man den Trichter, so zieht sich der Kreis rasch zusammen. Der Durchmesser des Kreises nimmt mit wachsender Ölmenge ab, schließlich verschwindet er ganz und es bleibt nur die kleine zentrale Vertiefung über.

Röntgen deutet die Erscheinung in folgender Weise: die aus der Trichteröffnung niedersinkenden Dämpfe durchbrechen die oberflächliche Fettschicht, so lange dieselbe eine gewisse Dicke nicht erreicht hat, und werden dann von dem Wasser teilweise gelöst. Die konzentrierte Ätherung breitet sich auf der Oberfläche des Wassers rasch nach allen Seiten aus und drängt die Fettschicht zurück. Da aber das Öl sich ebenfalls auszubreiten und eine zusammenhängende Schicht zu bilden strebt, so wird die Ausbreitung und der dadurch bedingten Verdünnung der Ätherung in einiger Entfernung von dem Mittelpunkt sich Gleichgewicht



zwischen der Ausbreitung der Ätherlösung und des Öls herstellen, der Durchmesser des von Öl freien Kreises wird konstant.

Mit diesem von ihm als Ätherprobe bezeichneten Verfahren suchte Röntgen die Schichtdicke zu bestimmen, welche auf einer Wasseroberfläche als zusammenhängende Ölschicht sich verbreiten kann. Er nahm quadratische Wannen, welche er mit Wasser füllte, das eine reine Oberfläche hatte. Um solch reine Wasseroberflächen zu erhalten, genügt es, etwa das Wasser einer Wasserleitung mit kräftigem Strahle einige Zeit in die Wanne fließen zu lassen, daß es über den Rand der Wanne abfließt. Röntgen brachte in der einen Ecke der quadratischen Wasseroberfläche ein abgewogenes, an einem Platindraht hängendes Öltröpfchen mit dem Wasser in Berührung, das dann vollständig an das Wasser überging. In der gegenüber liegenden Ecke war der mit dem Wattebausch versehene Trichter aufgestellt. Röntgen schließt, daß wenn dort der Ätherdampf die Ölschicht nicht mehr durchbrechen konnte, daß dann die Wasseroberfläche mit einer zusammenhängenden Ölschicht bedeckt war. Er benutzte Knochenöl vom spezifischen Gewicht 0,9, und fand in dieser Weise, daß bei einer Wasseroberfläche von  $1800 \text{ cm}^2$   $0,3^{\text{mg}}$  Öl genügten, so daß an der andern Ecke der Wasseroberfläche die Ölschicht von den Ätherdämpfen nicht mehr durchbrochen wurde. Als Dicke der das Wasser bedeckenden Ölschicht ergibt sich daraus  $1,8 \mu\mu$ .

Oberbeck hat die Dicke der auf Wasser sich ausbreitenden Ölschicht mit Hilfe eines gegen die Oberfläche des Wassers unter einem Winkel von etwa  $30^\circ$  geneigten Luftstromes untersucht. Auf die Oberfläche des reinen Wassers wurde etwas Schwefelblumen gebracht. Das Pulver wurde durch den Luftstrom fortgetrieben und sammelte sich in schmaler Zone an der dem Luftstrom entgegenstehenden Wand. Wurde etwas Öl auf die Oberfläche des Wassers gebracht, so wurde zunächst die Ölschicht durch den Luftstrom zerrissen und das Schwefelpulver wurde mit der Ölschicht fortgetrieben, die Zone, in welcher es sich an der dem Luftstrom entgegenstehenden Wand ansammelte, wurde breiter. Bei einer gewissen Dicke der Ölschicht wurde diese nicht mehr zerrissen, es wurde das in der Ölschicht schwimmende Pulver durch den Luftstrom in eine rotierende Bewegung gesetzt, so zwar, daß es in der Mitte der kreisförmigen Oberfläche sich in der Richtung des Luftstromes bewegte, an dem Umfange des Gefäßes in der entgegengesetzten. Bei allen von Oberbeck untersuchten fetten Ölen trat dieser Endzustand ein, wenn die Dicke der Ölschicht etwa  $2 \mu\mu$  erreicht hatte. Bei ätherischen Ölen mußte die Dicke der Ölschicht, bis dieser Endzustand eintrat, erheblich größer sein.

Fügt man, nachdem bei den fetten Ölen die Schicht die Dicke von  $2 \mu\mu$  erhalten hat, weiteres Öl hinzu, so verändert sich zunächst das Verhalten der Oberfläche nicht. Ist aber die Ölmenge so groß geworden, daß sie bei gleichmäßiger Ausbreitung eine Schichtdicke von etwa  $18 \mu\mu$  bilden würde, so wird die Verteilung des Öles über die Wasseroberfläche unregelmäßige. An einzelnen Stellen sind oder bleiben größere Ölmenge einige Zeit in Tröpfchen angehäuft, während der größere Teil durch eine dünnere Ölschicht bedeckt ist.

Die Beobachtungen von Rayleigh, Röntgen und Oberbeck würden demnach auf etwa  $1 \mu\mu$  als Radius der Wirkungssphäre führen, wenn man



Röntgen schließt, daß es sich hier um eine zusammenhängende Ölschicht handelt. Das scheint mir, wie auch Oberbeck hervorhebt, nicht ja nach Versuchen von Lord Rayleigh nicht richtig zu sein. Schon Quincke hat in seiner mehrfach angezogenen Abhandlung über die Ausbreitung der Flüssigkeiten darauf hingewiesen, daß auch nicht mischbare Flüssigkeiten sich in begrenzter Menge gegenseitig lösen, er bemerkt<sup>1)</sup>, daß die Oberflächenspannung an der gemeinsamen Oberfläche gleich nach dem Zusammenfallen der Tropfen am größten sei, dann aber die Flüssigkeiten sich mischen, also an der Grenzfläche auch sich ähnlicher werden, wodurch die Oberflächenspannung abnehmen muß. Aus den Messungen ging diese Abnahme deutlich hervor. Es ist demnach sehr möglich, daß es sich bei den Versuchen von Rayleigh, Röntgen und Oberbeck gar nicht um eine zusammenhängende Ölschicht handelt, sondern daß es sich dort um eine an der Oberfläche befindliche Lösung von Öl in Wasser handelt.

Dafür sprechen Messungen der Oberflächenspannung von Rayleigh an Ölen auf Wasserflächen. Wenn in der Tat festgehalten wird, daß eine zusammenhängende Ölschicht eine Dicke verlangt, die mindestens gleich dem Radius der Wirkungssphäre, so muß die Oberflächenspannung auf Ölen mit Öl bedeckten Wasserflächen unabhängig sein von der Dicke der Ölschicht und zwar muß sie gleich derjenigen des Öls werden.

Rayleigh<sup>2)</sup> hat die Oberflächenspannung von reinem und mit Olivenöl gesättigtem Wasser nach der dynamischen Methode von W. Thomson gemessen; er findet noch eine erhebliche Abnahme der Oberflächenspannung, wenn er auf einer Wasseroberfläche, auf welcher sich kein Kampfer mehr befindet, noch Olivenöl sich ausbreiten ließ. Die Angaben Rayleighs sind folgende:

Oberflächenspannung reinen Wassers . . . . .	$\alpha = 7,55$ mllgr.
„ Wasser mit soviel Öl, daß Kampfer	
sich nicht mehr bewegt . . . . .	5,44 „
„ Wasser mit Öl gesättigt . . . . .	4,07 „

Für Olivenöl erhielt Quincke 3,77, Brunner 3,31.

Wir werden darnach schließen müssen, daß die Beobachtungen von Rayleigh und Röntgen nicht in dem Sinne gedeutet werden dürfen, daß es dort mit einer zusammenhängenden Schicht reinen Öls zu tun ist, sondern, daß wir aus denselben keinen Schluß über den Radius der Wirkungssphäre ziehen dürfen.

Man könnte nun noch vermuten, daß die von Oberbeck beobachtete Unregelmäßigkeit der Schicht, 18  $\mu$  etwa, bei welcher die erwähnte Unregelmäßigkeit in der Ausbreitung des Öles, es zeigen sich kleine Tröpfchen auf einer unteren Ölschicht bedeckten Fläche, auftritt, als die doppelte Dicke der Wirkungssphäre angesehen werden könnte. Dem gegenüber hat Quincke, der die Ausbreitung von Öl und einigen anderen Flüssigkeiten auf Silber untersuchte, gezeigt, daß eine solche Unregelmäßigkeit in der Verteilung des Öles, er bezeichnet sie als Zerfall der Ölschicht, bei

<sup>1)</sup> Quincke, Poggend. Ann. 139. p. 18. 1870.

<sup>2)</sup> Lord Rayleigh, Philos. magazin. 30. (5.) p. 386. 1891.

jeder Dicke derselben kürzere oder längere Zeit nach Bildung der Schicht eintritt, gleichviel ob die Häutchen nur 2 oder bis etwa  $200\ \mu\mu$  dick sind.

Man hat deshalb bei der Ausbreitung einer Flüssigkeit auf einen andern kein Kennzeichen, welche Dicke der Schicht dem Radius der Wirkungssphäre entspricht.

Wie dem auch sei, diese Versuche beweisen, daß der Radius der Wirkungssphäre nicht unmeßbar klein, sondern daß er eine Größe der Ordnung hunderttausendstel Millimeter hat.

## § 85.

**Lösung und Diffusion.** Im § 81 sahen wir, daß, wenn die Oberflächenspannung an der gemeinsamen Oberfläche zweier Flüssigkeiten nicht ist, eine Mischung der beiden Flüssigkeiten bzw. eine Lösung der einen in der andern stattfindet.

Erfahrungsgemäß können auch feste Körper in Flüssigkeiten gelöst werden; die Bedingung dieses Vorganges ist, daß die Anziehung des flüssigen zum festen größer ist als die Kohäsion des festen. Daß in diesem Falle kein Gleichgewichtszustand eintreten kann, ergibt sich aus den Betrachtungen des § 75. Die Anziehung des flüssigen auf das feste ist wesentlich durch die dort als  $F_s$  bezeichnete Kraft gegeben, welche aber jetzt als auf die Teile der festen Wand wirkend gegen die Flüssigkeit hin gerichtet einführen müssen. Die in der Grenze der festen Wand liegenden Teile des festen werden gegen die Wand hin gezogen. Betrachten wir die zur Wandfläche senkrechten Komponenten, so muß das Teilchen in der Grenze sich in die Flüssigkeit hinein bewegen, wenn die zur Wand senkrechte Komponente der Anziehung des flüssigen auf das feste größer ist als die Kraft, mit welcher das feste gegen das Innere des festen Körpers hingezogen wird. Das feste löst sich in dem flüssigen. Hat die gelöste ein größeres spezifisches Gewicht als das Lösungsmittel, so sinkt dasselbe zunächst nieder und legt sich als konzentrierte Lösung unter dem Lösungsmittel, so daß eine Schichtung eintritt, bei welcher das spezifisch leichtere Lösungsmittel sich über der die gelöste Menge des festen tragenden Lösung befindet. Eine ebensolche Schichtung erhält man, wenn man zunächst in ein Gefäß eine Lösung schüttet, und dann durch langsame Eingießen das Lösungsmittel, etwa indem man dasselbe an den Wand des Gefäßes herabrinnen läßt, auf die spezifisch schwerere Lösung bringt.

Ganz in derselben Weise kann man überhaupt zwei mischbare Flüssigkeiten von verschiedenem spezifischen Gewicht übereinander schichten.

Hat man in dieser Weise zwei Flüssigkeiten übereinander geschichtet, so dauert diese Schichtung nur eine mehr oder weniger kurze Zeit; nach dem Zusammenschichten findet eine allmähliche Mischung der Flüssigkeiten statt, indem wegen der stärkern Anziehung der einen Flüssigkeit auf die Moleküle der andern eine Mischung zunächst in der Grenze der beiden Flüssigkeiten eintritt, und aus dieser die Moleküle der Flüssigkeit weiter in die andere verbreitet werden. Man bezeichnet das Durchdringen der Flüssigkeiten mit dem Namen der Diffusion. Je länger oder kürzere Zeit vergeht, ehe die Mischung der Flüssigkeiten

diese Weise vollständig wird, schreibt man ihnen eine kleinere oder größere Diffusionsgeschwindigkeit zu.

Am genauesten ist die Diffusion gelöster Substanzen untersucht worden. Der erste, welcher sich näher damit beschäftigte, war Graham<sup>1)</sup>; derselbe benutzte Gefäße, welche mit verschiedenen konzentrierten Lösungen der zu untersuchenden Salze gefüllt waren, in größere Gefäße mit Wasser und verglich die Salzquantitäten, welche in gleichen Zeiten in das umgebende Wasser hinüber gegangen waren. Er fand, daß bei nicht zu konzentrierten Lösungen diese Mengen der Konzentration der angewandten Lösungen bzw. den Mengen des in gleichen Volumen derselben gelösten Salzes proportional waren, daß bei gleicher Konzentration indes die Mengen verschiedener Salze sehr verschieden waren, so daß man den verschiedenen Salzen eine sehr verschiedene Diffusionsgeschwindigkeit zuschreiben muß.

Bald nach den Versuchen Grahams gab Fick<sup>2)</sup> eine einfache Theorie der Diffusion, durch welche man zu einer präzisen Definition des Begriffes der Diffusionsgeschwindigkeit gelangt. Fick nimmt an, daß die Menge  $s$  in der Zeiteinheit aus einer Schicht in die nächstfolgende übergehenden ~~das~~ der Konzentrationsdifferenz der beiden Schichten proportional ist. Machen wir uns nun ein zylindrisches Rohr, welches unten geschlossen ist und auf seinem Boden eine Schicht Salzlösung von der Konzentration  $c_0$  enthalte, wo  $c_0$  die im Kubikzentimeter Lösung vorhandene Menge Salz bedeuten soll. Über diese Schicht sei zunächst reines Wasser gebracht. Nach irgend einer Zeit  $t$  wird ein Teil des Salzes in das Wasser diffundiert sein und eine Schicht in der Höhe  $x$  über dem Boden hat zu der Zeit die Konzentration  $c$ . Eine um  $dx$  höhere Schicht hat die Konzentration  $c + dc$ ; während der unendlich kleinen Zeit  $dt$  ist die aus der ersteren in die folgende übergehende Salzmenge nach der Annahme von Fick

$$ds = - xqdc \cdot dt,$$

wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen schreiben müssen, da der Salzstrom nach der Richtung der abnehmenden Konzentration stattfindet. Es bedeutet in der Gleichung  $q$  den Querschnitt des Gefäßes und  $x$  eine nur von der Natur des Salzes abhängige Konstante, welche die Menge des durch die Flächeneinheit übertretenden Salzes sein würde, wenn die Differenz der Konzentration zweier benachbarter Schichten gleich der Einheit wäre. Anstatt der Konstanten  $x$ , welche sehr groß sein würde, da der Konzentrationsunterschied zweier benachbarter Schichten immer sehr klein ist und zudem, da wir den Unterschied  $dc$  niemals wirklich angeben können, nicht bestimmbar wäre, führen wir besser eine andere Konstante  $k$  ein, welche wir dann als das Maß der Diffusionsgeschwindigkeit erhalten.  $k$  welche bezeichnen wir die Salzmenge, welche in der Zeiteinheit durch eine Querschnittseinheit geht, wenn zwei um die Längeneinheit voneinander

<sup>1)</sup> Graham, Phil. Trans. of London R. Soc. 1850 part. I. p. 1. Liebigs Ann. 1. 1851; Phil. Trans. of London R. Soc. 1850 part. II. p. 85. Liebigs Ann. 80. 51; Phil. Trans. of London R. Soc. for 1861. 151. p. 183. Liebigs Ann. 121. 1862.

<sup>2)</sup> Fick, Poggend. Ann. 94. 1855. Die Theorie der Diffusion von Nernst. Grundlage der von van t'Hoff entwickelten Theorie der Lösung werden wir im nächsten Kapitel nach Vorführung der kinetischen Gastheorie besprechen. Siehe § 125.

entfernte Querschnitte die Konzentrationsdifferenz 1 haben, voraus daß die Konzentrationsabnahme von Querschnitt zu Querschnitt, um  $dx$  voneinander entfernt sind, immer denselben Wert hat. Konzentrationsabnahme in zweien um  $dx$  entfernten Querschnitten gleich  $\frac{dc}{dx}$ , so ist sie in zweien um die Längeneinheit entfernten gleich  $\frac{dc}{dx}$ , Einführung der Konstanten  $k$  erhalten wir für die in der Zeit einem Querschnitte zu dem folgenden übergehende Salzmenge

$$ds = -kq \frac{dc}{dx} dt.$$

Dieser aus der Fickschen Annahme sich ergebende Ausdruck im Zeitelement  $dt$  übergehende Salzmenge gestattet uns zunächst die eintretende Konzentrationsänderung zu berechnen. In derselben Zeit  $dt$  der durch den Querschnitt  $x$  diese Salzmenge  $ds$  in den Raum zwischen  $x$  und  $x + dx$  tritt, wandert eine andere Salzmenge  $ds'$  durch den Querschnitt  $x + dx$  aus diesem Raum weiter. Nennen wir die Konzentrationsänderung zwischen dem Querschnitt  $x + dx$  und  $x + 2dx$  in dem betrachteten Zeitelement  $dc'$ , so erhalten wir für  $ds'$

$$ds' = -kq \frac{dc'}{dx} dt,$$

somit

$$ds - ds' = -kq \frac{dc - dc'}{dx} dt.$$

Diese Salzmenge wandert in den zwischen  $x$  und  $x + dx$  vorhandenen Raum mehr zu als aus demselben fort. Nach unserer Definition der Konzentration ist somit die Konzentrationsänderung, die Zunahme der Konzentration in der Volumeinheit

$$\frac{ds - ds'}{q dx},$$

da  $q dx$  der Raum ist, in welchem die Salzmenge um  $ds - ds'$  zunimmt. Bezeichnen wir auch diese in der Zeit  $dt$  stattfindende Zunahme der Konzentration mit  $dc$ , so wird

$$\frac{dc}{dt} = -k \frac{dc - dc'}{dx^2} = -k \frac{d^2c}{dx^2},$$

wenn wir die Differenz der beiden Konzentrationsänderungen  $dc - dc'$  in zwei um  $dx$  entfernten Schichten als  $d^2c$  bezeichnen. Die Entwicklung zeigt uns, daß die Konzentration  $c$  zu einer gegebenen Zeit abhängig von dem Abstände  $x$  des betrachteten Querschnittes von dem untern Ende des Rohres, daß sie also eine Funktion von  $x$  ist. Gleichzeitig ändert sich aber an allen Stellen mit der Zeit, sie ist also eine Funktion der Zeit  $t$ . Nach den Entwicklungen der Einleitung erkennen wir dann, daß die Ficksche Annahme eine Beziehung liefert zwischen dem ersten Differentialquotienten von  $c$  als Funktion der Zeit und dem zweiten Differentialquotienten als Funktion des Abstandes des betrachteten Querschnittes vom untern Ende des Zylinders.

Die allgemeine Behandlung dieser Gleichung, das heißt die Bestimmung der Funktion, welche die Konzentration  $c$  von der Zeit  $t$  und von

liche Schwierigkeiten<sup>1)</sup>. In gewissen einfachen Fällen können wir die-  
 es indes auflösen, und damit Versuchsmethoden erhalten, durch welche  
 die Theorie prüfen können.

Wir bringen auf den Boden des Zylinders eine Menge festen Salzes,  
 daß dort, so lange auch der Versuch dauert, immer eine konzentrierte  
 ung des Salzes ist. Dann setzen wir den Zylinder, dessen Länge  $l$  sei,  
 ein großes Gefäß mit Wasser, so daß selbst wenn alles Salz in dieses  
 asser hinüberdiffundiert wäre, die Konzentration doch eine so kleine ist,  
 ß wir sie gleich Null setzen dürfen. Die Konzentration ist so an dem  
 tern Ende des Zylinders für  $x = 0$  für die ganze Dauer des Versuches  
 nstant und gleich  $c_0$  der Konzentration der konzentriertesten Salzlösung,  
 i obern Ende für  $x = l$  dagegen gleich Null. Läßt man die Diffusion  
 reichend lange stattfinden, so muß sich schließlich ein stationärer Zu-  
 und herstellen, sobald nämlich der letzte Querschnitt des Zylinders in  
 icken Zeiten ebensoviel an die Umgebung abgibt, als er von den darunter  
 genden Querschnitten erhält. Daß dies nach einiger Zeit eintreten muß,  
 gibt die Überlegung, daß mit Zunahme der Konzentration in der letzten  
 icht die Menge des in gegebener Zeit an die Umgebung abgegebenen  
 utes zunimmt, dagegen diejenige des von der tiefern Schicht herkommen-  
 a Salzes abnimmt, da in der Tiefe die Konzentration konstant ist. Ist  
 er der letzte Querschnitt von einer konstanten, sich mit der Zeit nicht  
 ar ändernden Konzentration, so müssen es auch alle tiefer liegenden sein,  
 eben der letzte Querschnitt nur dann eine konstante Konzentration haben  
 an, wenn auch der vorletzte sie hat und so fort. Ist aber die Konzen-  
 tion in jedem Querschnitte eine mit der Zeit sich nicht mehr ändernde  
 worden, so ist

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

nd die Gleichung, welche uns die Abhängigkeit der Konzentration von  $x$   
 bt. wird

$$k \frac{d^2c}{dx^2} = 0.$$

Nach unserer mathematischen Einleitung ist der zweite Differential-  
 quotient der erste des ersten Differentialquotienten, oder

$$\frac{d^2c}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dc}{dx}\right)}{dx}.$$

Daraus, daß der zweite Differentialquotient von  $c$  nach  $x$  gleich Null  
 t, folgt nach E 1, daß der erste Differentialquotient eine konstante, von  
 icht abhängige Größe ist, oder es ist

$$\frac{dc}{dx} = a.$$

Hieraus folgt unter Beachtung von E 1

$$c = ax + b.$$

---

1. Die allgemeine Behandlung geben Wild und Simmler, Poggend. Ann.  
 . p. 217. 1857.

Die beiden Konstanten  $a$  und  $b$  ergeben sich daraus, daß für  $x=0$  die Konzentration  $c=c_0$  ist, somit

$$b = c_0,$$

ferner, daß für  $x=l$ ,  $c=0$ , also

$$0 = al + c_0, \quad a = -\frac{c_0}{l},$$

somit wird

$$c = c_0 - \frac{c_0}{l} x,$$

oder die Konzentration nimmt dem Abstände von dem untern Ende des Zylinders proportional ab.

Man hätte diesen Satz auch einfach aus der Überlegung ableiten können, daß der stationäre Zustand nur eintreten kann, wenn durch jeden Querschnitt in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Salzes wandern, was nur möglich ist, wenn die Konzentrationsdifferenz je zweier aufeinander folgender Querschnitte durch den ganzen Zylinder dieselbe ist. Ist das aber der Fall, so muß auch die Konzentrationsdifferenz je zweier gleich weit entfernter Querschnitte die gleiche sein, oder die Konzentration muß jedesmal um die gleiche Größe abnehmen, wenn wir in dem Zylinder um gleiche Strecken aufsteigen, was eben unsere Gleichung für  $c$  darstellt.

Fick hat diese Folgerung der Theorie zu prüfen versucht, indem er in einem in der angegebenen Weise hergestellten Zylinder, dessen Boden kristallisiertes Kochsalz enthielt, den Diffusionsvorgang wochenlang dauern ließ, und dann durch vorsichtig eingesenkte, mit einem äußerst feinen Drahte an einer Wage hängende Glaskügelchen das spezifische Gewicht der Lösung in verschiedenen Höhen  $x$  über dem Boden bestimmte. Die aus den gefundenen spezifischen Gewichten sich ergebenden Konzentrationen entsprachen der Gleichung so genau, als es bei der Schwierigkeit dieser Methode, wo das Einsenken des Kügelchens jedenfalls eine geringe Mischung verschiedener Schichten zur Folge hat, nur erwartet werden kann.

Um nach dieser Methode die Diffusionsgeschwindigkeit  $k$  zu bestimmen, gehen wir zu der Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = -kq \frac{dc}{dx}$$

zurück. Die linke Seite bedeutet die in der Zeiteinheit von einer Schicht zur nächstfolgenden wandernde Salzmenge, da  $ds$  die in der Zeit  $dt$  übergehende Menge ist. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist das einfach die in der Zeiteinheit aus dem Zylinder in das umgebende Wasser austretende Salzmenge. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist

$$-\frac{dc}{dx} = \frac{c_0}{l}.$$

Nennen wir die Menge des in der Zeiteinheit austretenden Salzes  $S$ , so wird

$$S = kq \frac{c_0}{l},$$

oder es muß die in gleichen Zeiten aus den Röhren austretende Salzmenge der Länge der Röhren umgekehrt proportional sein.

Auch diesen Satz fand Fick bestätigt, indem er in der vorhin an-  
 genommenen Weise drei Röhren sehr verschiedener Länge herstellte und nun  
 Eintritt des stationären Zustandes die Menge des im Laufe eines  
 in das äußere Wasser übertretenden Salzes durch eine chemische  
 Analyse des Wassers, welche an in bestimmten Zeiträumen genommenen  
 Proben desselben ausgeführt wurde, bestimmte. Er erhielt für  $k$  nach der  
 Gleichung

$$k = \frac{l \cdot S}{q \cdot c_0}$$

Versuchen mit der

längsten	mittleren	kürzesten Röhre	Temperatur
$k = 1,071$	$k = 1,108$	$k = 1,050$	$18^\circ - 19^\circ$

Zahlen, die mit Berücksichtigung der unvermeidlichen Fehlerquellen  
 als Tat als gleich zu betrachten sind.

Die Zahlen bedeuten in Gramm die Salzmenge, welche im Laufe  
 eines Tages durch einen Querschnitt von  $1 \text{ cm}^2$  geht, wenn zwei um  $1 \text{ cm}$  von-  
 einander entfernte Schichten eine solche Konzentrationsdifferenz haben, wie  
 im Unterschied von  $1^\circ$  Salz im Kubikzentimeter Lösung entspricht.  
 Die Dimensionen des Diffusionskoeffizienten ergeben sich unmittelbar  
 aus der ihn definierenden Gleichung

$$k = \frac{l S}{q c_0},$$

l eine Anzahl Längeneinheiten,  $S$  die in der Zeiteinheit austretende  
 Menge der Quotient aus einer Anzahl Masseneinheiten durch eine An-  
 zahl Zeiteinheiten,  $q$  ein Querschnitt, Quadrat einer Anzahl Längeneinheiten,  
 $c_0$  Konzentration, Gewicht in der Volumeinheit, Quotient aus Gewicht und  
 dritten Potenz einer Länge, also

$$k = z \frac{\lambda \mu \lambda^3}{\lambda^3 \mu \tau} = z \frac{\lambda^2}{\tau}.$$

Die Masse kommt in  $k$  nicht vor. Wollen wir die Ficksche Zahl in  
 das C.G.S. System übersetzen, so haben wir den Fickschen Wert durch  
 mit der Anzahl der Sekunden für einen Tag zu dividieren. Wir er-  
 halten

$$k = 1,076 \frac{\text{cm}^2}{\text{Tag}} = 12,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec.}}$$

Durch Abwarten des stationären Zustandes erreicht man, daß die  
 Konzentration in dem Diffusionsgefäß nicht mehr eine Funktion der Zeit,  
 sondern nur eine Funktion des Abstandes einer Schicht vom Boden des  
 Gefäßes ist; durch eine andere von Jolly angegebene Versuchsanordnung  
 (Zellstein<sup>1)</sup>) es dahin zu bringen gesucht, daß die Konzentration in  
 einem runden Diffusionsgefäß an allen Stellen die gleiche aber mit der Zeit  
 abnehmende ist. Die Lösung wurde in eine etwa  $6 \text{ cm}$  lange Glasröhre  
 (No. 52) gefüllt, welche unten umgebogen und an ihrer Umbiegung so  
 gehalten war, daß das Niveau der Mündung möglichst nahe über dem  
 Mittelpunkt der Umbiegung war; am oberen Ende war das Gläschen



etwas ausgezogen und durch einen eingeriebenen Glasstöpsel verschlossen. Um das Gläschen zu füllen, wurde es in ein Becherglas ganz in untergetaucht, und während die obere Öffnung mit der Lösung war, mit dem Stöpsel verschlossen. Das gefüllte Gläschen wurde eines durchbohrten Korkes in ein Brettchen gesteckt, welches an horizontalen Rande eines mit Wasser gefüllten Gefäßes lag, so daß die untere Öffnung des Gläschens einige Millimeter unter der Oberfläche des Wassers befand. Es wurde die Konzentration der Lösung zu

Fig 152



Beginne des Versuches bestimmt, und wieder, nachdem der Versuch ein oder zwei Tage gedauert hatte. Der Versuch war in einem Kellerraum von konstanter Temperatur aufgestellt. Die Wassermenge war so groß, daß die Konzentration stets gleich Null gesetzt werden konnte.

Infolge der Diffusion wurde die Lösung zunächst in der Umbiegung verdünnt, aber die Lösung in dem ganzen Gefäß konzentrierter, somit spezifisch schwerer. Nimmt Beilstein an, daß stets das Sinken der konzentrierteren Lösung in die Mischung stattfindet, so daß zu jeder Zeit innerhalb des Gläschens und an der Oberfläche dieselbe, aber infolge der Diffusion eine mit der Zeit abnehmende, Konzentration vorhanden

sein wird. Ganz wird dieser Zustand allerdings nicht erreicht werden, da die in der Biegung befindliche Lösung als die tiefstliegende Mischung nicht teilnehmen kann. Annähernd wird aber die Voraussetzung erfüllt sein.

Nennen wir die in einem gegebenen Momente in dem Gläschen der Grenzfläche vorhandene Konzentration  $c$ , so können wir die Zeitelement  $dt$  durch den Querschnitt  $q$  der Öffnung nach außen verfließende Salzmenge, da das Wasser die Konzentration Null hat, setzen

$$dS = Kqcdt,$$

worin  $K$  der von uns definierten Diffusionsgeschwindigkeit proportional, nicht derselben gleich ist, da hier nicht die Abnahme  $c$  auf Null, sondern in einer kleinern allerdings nicht bekannten Konzentration stattfindet. Nennen wir das Volumen des Gefäßes  $V$ , so können wir in dem gegebenen Momente in dem Gefäße vorhandene Salzmenge

$$S = V \cdot c, \quad dS = -Vdc$$

setzen, wo wir das negative Vorzeichen auf der rechten Seite nur um anzudeuten, daß durch Fortwandern der Salzmenge  $dS$  die Konzentration  $c$  des Gefäßes um  $dc$  abnimmt. Damit wird

$$-dc = \frac{Kq}{V} cdt; \quad -\frac{dc}{c} = \frac{Kq}{V} dt.$$

Um die zur Zeit  $t$  vorhandene Konzentration zu erhalten, haben wir auf beiden Seiten die Summen zu bilden von  $t = 0$  bis  $t = t$ . Nennen wir bei Beginn des Versuches in dem Gefäße vorhandene Konzentration  $c_0$ , wird

$$-\int_{c_0}^c \frac{dc}{c} = \int_0^t \frac{Kq}{V} dt = \frac{Kq}{V} \cdot t$$

Nach E VIII und E 2 wird dann

$$\log c_0 - \log c = \frac{Kq}{V} t$$

$$K_1 = \frac{Kq}{V} = \frac{1}{t} (\log c_0 - \log c).$$

Es muß demnach der Quotient aus der Differenz der Logarithmen zu Beginn und am Ende des Versuches in dem Gläschen vorhandenen Konzentrationen dividiert durch die Dauer des Versuches konstant sein.

In der Tat geben die Beobachtungen Beilsteins dieses Resultat, mit Abweichungen, welche hinreichend dadurch erklärt werden, daß die Voraussetzungen der Berechnung, eine in dem ganzen Diffusionsgefäß überall gleiche Konzentration, nicht streng erfüllt sind.

So erhielt Beilstein unter andern folgende Werte von  $K_1$  für verschieden konzentrierte Lösungen, und bei Versuchen, die teils einen, teils zwei Tage dauerten. Die Temperaturen waren stets 5—7° C. Als Zeiteinheit ist dabei der Tag angenommen.

Salpetersaures Kali:

$c_0 = 0,0197$	$K_1 = 0,184$	$K'_1 = 0,189$	} Mittel 0,1845.
0,0393	0,192	0,190	
0,0962	0,176	0,176	

Doppeltchromsaures Kali:

$c_0 = 0,0199$	0,146	0,146	} Mittel 0,1480.
0,0394	0,153	0,149	

Chlorkalium:

$c_0 = 0,0394$	0,208	0,198	} Mittel 0,2010.
----------------	-------	-------	------------------

Die Werte  $K'_1$  sind aus den Versuchen mit zweitägiger Dauer berechnet.

Später haben Voit<sup>1)</sup> und Johannisjanz<sup>2)</sup> die Richtigkeit der Theorie geprüft und für einige Substanzen die Diffusionsgeschwindigkeiten zu bestimmen gesucht, indem sie auf den Boden eines zylindrischen oder prismatischen Gefäßes Lösung und auf diese Wasser brachten, und dann die Konzentration  $c$  in verschiedenen Höhen über der ursprünglichen Trennungsoberfläche in ihrer Abhängigkeit von der Zeit beobachteten. Wie indes Stefan<sup>3)</sup> gezeigt hat, sind die von diesen beiden Physikern angewandten optischen

1 Voit, Poggend. Ann. 180. p. 227. 1865.

2 Johannisjanz, Wiedem. Ann. 2. p. 24. 1877.

3 Stefan, Wiener Berichte. 78. p. 957. 1878; eine optische Methode von Senner, Wiedem. Ann. 49. p. 105. 1893, welche durch Stefans Einwürfe nicht ruhen wird, werden wir im 4. Bande bei Besprechung der krummen Strahlen kennen lernen.

Beobachtungsmethoden nicht zur Erlangung richtiger Resultate geeignet. Stefan hat dann an den Versuchen Grahams die Theorie bestätigt und aus denselben eine Anzahl Diffusionsgeschwindigkeiten verschiedener Salze berechnet<sup>1)</sup>.

Spätere Beobachtungen, zunächst von F. Weber<sup>2)</sup>, Schuhmeister<sup>3)</sup> und Long<sup>4)</sup> haben indes doch eine Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeit von der Konzentration ergeben. Weber erhielt nach einer Methode, die wir hier nicht auseinandersetzen können, für Zinkvitriol und die Konzentrationen

$$c = 0,214 \quad k = 0,2403; \quad c = 0,318 \quad k = 0,2299$$

bei der Temperatur  $18^{\circ}$ , also einen mit steigender Konzentration abnehmenden Wert von  $k$ . Die Werte von  $k$  sind in den vorhin definierten Einheiten, Tag als Zeiteinheit, gegeben<sup>5)</sup>.

Schuhmeister führte entweder über einen mit Salzlösung gefüllten Zylinder einen langsamen Wasserstrom, in den das Salz aus dem Zylinder diffundierte und bestimmte die Menge des ausgetretenen Salzes aus der Konzentration der Lösung vor Beginn und nach Beendigung des Versuches, oder er stellte auf einen mit Salzlösung gefüllten Zylinder einen zweiten von genau gleichem Querschnitt und gleicher Länge, der mit Wasser gefüllt war. Nach Beendigung des Versuches konnten die beiden Zylinder ohne Mischung des Inhaltes voneinander getrennt werden und in jedem einzelnen die Konzentration bestimmt werden. Für die aus dem untern Zylinder in der Zeit  $t$  austretende Salzmenge ergibt die allgemeine Gleichung nach den Entwicklungen Stefans<sup>6)</sup> in dem

ersten Falle

$$S = 2c_0q \sqrt{\frac{kt}{\pi}}$$

zweiten Falle

$$S = c_0q \sqrt{\frac{kt}{\pi}},$$

wenn  $c_0$  die anfängliche Konzentration,  $q$  den Querschnitt des Zylinders und  $\pi$  die Ludolphische Zahl bedeutet.

So erhielt Schuhmeister z. B. für Chlorkalium bei einer Temperatur  $18^{\circ},8$  C.

$$\text{für } c_0 = 0,08409 \quad k = 1,319; \quad c_0 = 0,18437 \quad k = 1,406 \\ c_0 = 0,28974 \quad k = 1,464.$$

Es zeigte sich somit hier, und das gleiche zeigten fast alle Versuche, entgegen der Beobachtung Webers eine Zunahme der Diffusionsgeschwindigkeit mit steigender Konzentration, ein Resultat, das sich auch aus den Versuchen von Long folgern läßt, welche indes die absoluten Werte von  $k$  nicht zu berechnen gestatten.

Zum gleichen Schlusse wie Schuhmeister gelangte Wroblewski

1) Stefan, Wiener Berichte. 79. p. 161. 1879.

2) F. Weber, Wiedem. Ann. 7. p. 469. 1879.

3) Schuhmeister, Wiener Berichte. 79. 1879.

4) Long, Wiedem. Ann. 9. p. 613. 1880.

5) Über die Methode von F. Weber sehe man auch Seitz, Wiedem. Ann. 6 p. 759. 1898.

6) Stefan, Wiener Berichte. 78. p. 957. 1878.

der Untersuchung der Diffusion von Kochsalz<sup>1)</sup>. Wroblewski stellte eine große Wanne auf einen Untersatz mit Salzlösung bekannter Konzentration gefüllte dünnwandige zylinderförmige Glasgefäße von 2—8 cm Durchmesser und 3,5—5 cm Höhe. Die Wanne wurde mit Wasser so weit gefüllt, daß die Oberfläche des Wassers ein wenig höher war, als der obere Rand der Zylinder, und beim Einfüllen des Wassers so verfahren, daß die Oberfläche des Wassers sich über der Salzlösung zusammenschloß, ohne irgend welche Strömung der Lösung zu bewirken. Der Apparat wurde in einem Raume konstanter Temperatur kürzere oder längere Zeit stehen gelassen, darauf das Wasser aus der Wanne herausgenommen und schließlich der Salzgehalt des Zylinders nach beendeter Diffusion bestimmt. Die während der Diffusion fortgewanderte Salzmenge ist dann durch die Werte der beiden vorhin angegebenen Gleichungen bestimmt, somit ist

$$k = \frac{S^2 \pi}{4 c_0^2 q^2 t}.$$

In dieser Weise findet Wroblewski bei einer Temperatur von 8°,5 C. für  $k$  in  $\text{cm}^2 \text{sec}^{-1}$

$$c_0 = 0,00668, \quad k = 7,68 \cdot 10^{-6}, \quad c_0 = 0,0610, \quad k = 8,08 \cdot 10^{-6}, \\ c_0 = 0,2008, \quad k = 8,89 \cdot 10^{-6},$$

keine erhebliche Zunahme mit wachsender Konzentration.

Während von Wroblewski glaubte, daß seine und Schuhmeisters Beobachtungen mit denen Webers in Widerspruch seien, fand Scheffer<sup>2)</sup>, daß in der Tat bei einigen Substanzen eine Zunahme der Diffusionsgeschwindigkeit mit der Konzentration, bei andern eine Abnahme eintrete. Für Kochsalz und Chlorbaryum findet er den Diffusionskoeffizienten fast konstant, für Natriumhyposulfit und Magnesiumsulfat nimmt, wie Weber für Zinkvitriol fand, der Diffusionskoeffizient mit wachsender Konzentration ab, für Salpetersäure, Salzsäure, Schwefelsäure, Calciumchlorid mit wachsender Konzentration zu.

Wiedeburg<sup>3)</sup> hat die Resultate Scheffers bestätigt, er erhielt, indem er nach der Methode von von Wroblewski beobachtete, für Kaliumchromat und Kupfersulfat mit steigender Konzentration abnehmende Werte von  $k$ .

Wiedeburg hat deshalb, da die Abhängigkeit des Wertes  $k$  von der Konzentration nicht mehr zu bezweifeln ist, die einfache Ficksche Gleichung durch eine kompliziertere ersetzt, indem er annimmt

$$k = K(1 + \alpha c).$$

Die allgemeine Gleichung für die Diffusion nimmt dann folgende Form an. Es wird

1 von Wroblewski, Wiedem. Ann. 13. p. 606. 1881.

2 Scheffer, Zeitschr. für physikal. Chemie. 2. p. 390.

3 Wiedeburg, Wiedem. Ann. 41. p. 675. 1890. Man sehe über die Arbeit von Wiedeburg die Abhandlung von Arrhenius, Zeitschr. für phys. Chemie. 10. 51 1904, auf welche wir im nächsten Kapitel bei Besprechung der Theorie der Diffusion von Nernst zurückkommen. § 124.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -Kq(1 + \kappa c) \frac{dc}{dx}, \\ \frac{ds'}{dt} &= -Kq(1 + \kappa(c + dc)) \frac{dc'}{dx}, \\ \frac{dc}{dt} &= -K(1 + \kappa c) \frac{dc}{dx} - \frac{dc'}{dx} + K\kappa \frac{dc}{dx} \frac{dc'}{dx}.\end{aligned}$$

Setzen wir  $dc - dc'$  wieder  $d^2c$  und im letzten Gliede  $dc = dc'$ , was wegen des kleinen Unterschiedes gestattet ist, so wird

$$\frac{dc}{dt} = -K(1 + \kappa c) \frac{d^2c}{dx^2} + K\kappa \left(\frac{dc}{dx}\right)^2.$$

Die Rechnung liefert für die von von Wroblewski gewählte Anordnung an Stelle der von von Wroblewski benutzten Gleichung

$$S = 2qc_0 \sqrt{\frac{K \left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \kappa c_0 \right\}^2 t}{\pi}}.$$

Beobachtet man somit für verschiedene Konzentrationen  $c_0$  die Diffusion, so kann man  $K$  und  $\kappa$  aus der Gleichung

$$k = K \left( 1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \kappa c_0 \right)^2$$

berechnen.

Für die beiden von ihm untersuchten Salze und aus von Wroblewskis Beobachtungen für Kochsalz fand Wiedeburg für die Temperatur von  $18^\circ \text{C}$ .

für $K_2Cr_2O_7$	$K = 121,26 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$	$\kappa = -13,48$
$CuSO_4$	$K = 44,79 \cdot 10^{-7} \text{ „ „}$	$\kappa = -3,467$
$NaCl$	$K = 102,26 \cdot 10^{-7} \text{ „ „}$	$\kappa = +2,118$

Da  $\kappa c_0$  die Dimension einer reinen Zahl haben muß, hat  $\kappa$  die reziproken Dimensionen einer Konzentration, ist also  $\text{gr}^{-1} \text{cm}^3$ .<sup>1)</sup>

Der genauen Messung der Diffusionskoeffizienten bietet die starke Veränderlichkeit derselben mit der Temperatur eine erhebliche Schwierigkeit. Der erste, der eine exakte Messung der Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten von der Temperatur durchführte, war F. Weber<sup>2)</sup>, er fand dieselbe für Zinkvitriol bei der Temperatur

$\vartheta = 1^\circ,2$	$18^\circ,55$	$44^\circ,7$
$k = 0,1252$	$0,2421$	$0,4146,$

Werte, welche sich sehr gut darstellen lassen durch

$$k = 0,1187 (1 + 0,0557 \vartheta) = k_0 (1 + 0,0557 \vartheta).$$

1) Die Arbeiten von Arrhenius, Zeitschr. für physikal. Chemie. 10. p. 21. 1892, Abegg, Zeitschr. f. physikal. Chemie. 11. p. 248. 1892, Kowalki, Wiedem. Ann. 52. p. 166. 1892; 59. p. 637. 1896, werden wir im 3. Bande bei den Beziehungen zwischen elektrischer Leistungsfähigkeit und Diffusion der Elektrolyten besprechen.

2) F. Weber, Wiedem. Ann. 7. p. 549. 1879.

Einige Jahre später hat de Heen<sup>1)</sup> für fünf Salze die Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt. Die von ihm für die Diffusionskoeffizienten gegebenen Gleichungen haben die Form

$$k = k_{60}(1 - \beta\tau),$$

wenn  $k_{60}$  den Diffusionskoeffizienten bei 60° und  $\tau$  die Anzahl Grade unter 60° bedeuten, für welche der Wert  $k$  angegeben werden soll. De Heen hat für

$MgSO_4$	$KNO_3$	$NaCl$	$Na_2HPO_4$	$K_2CO_3$
$\beta = 0,0119$	0,0127	0,0121	0,0128	0,0127,

Zahlen, die so nahe gleich sind, daß sie zu dem Schlusse berechtigen, die Temperaturkoeffizienten seien für alle Salze dieselben, und zwar als Mittel dieser Zahlen in der de Heenschen Schreibweise gleich 0,0125. De Heens Versuche erstrecken sich über die Temperatur 12°—63°. Die Werte stimmen recht gut mit den von F. Weber. Führen wir den Wert  $k_0$  ein und setzen  $\tau = 60 - \theta$ , so können wir schreiben

$$k_0(1 + \alpha\theta) = k_0(1 + \alpha 60)(1 - \beta)(60 - \theta),$$

voraus man leicht erhält

$$\alpha = \frac{\beta}{1 - 60\beta}, \quad \text{demnach} \quad = \frac{0,0125}{1 - 60 \cdot 0,0125} = 0,050.$$

Der größte von de Heen gefundene Wert würde auf  $\alpha = 0,0552$  führen, also dem Weberschen fast genau gleich werden.

Wir werden hiernach  $\alpha = 0,051$  setzen können, und zwar für alle Lösungen gleich.

Ein hohes Interesse bieten die Untersuchungen Voigtländers<sup>2)</sup>, welche zeigen, daß die Diffusion von Salzlösungen nur wenig geändert wird, wenn man durch Hinzufügen geringer Mengen einer gelatinierenden Substanz das Wasser in eine Gallerte verwandelt, ihm also seinen flüssigen Zustand nimmt. Voigtländer stellte dieselbe durch Versetzen des Wassers mit Agar-Agar, einer im Handel vorkommenden und neuerlich zu vielen Zwecken verwandten längs der Küsten des ostindischen Archipels wachsenden Tangal, und Erwärmen des Gemenges auf 100° her. Fügt man zu Wasser mehr wie 1, Prozent der Substanz und erwärmt das Gemenge auf 90°, so erstarrt die Masse bei dem Abkühlen gleichmäßig zu einer festen Gallerte. Mehr als fünf Teile Agar-Agar zu 95 Teilen Wasser werden nicht aufgenommen.

Voigtländer benutzte wesentlich 1 Prozent Gallerte, und es zeigte sich, daß Säuren und Salze ebenso gut in dieselbe diffundierten wie in das freie Wasser.

Zur Messung der Diffusionskonstanten wurden Glaszylinder mit der Gallerte gefüllt; da die Gallerte nicht direkt am Glase haftete, wurde nach dem Vorschlage Ostwalds die Innenseite passend langer, an dem einen Ende geschlossener Glaszylinder mit Chromgelatine überzogen und dem Sonnenlichte ausgesetzt, ehe die flüssige Gallerte eingegossen wurde. Die

1. de Heen, Bull. de l'acad. royale de Belgique. 8. p. 219. 1884.

2. Voigtländer, Zeitschr. f. physikal. Chemie. 8. p. 316. 1889.



flüssige Masse wurde durch künstliche Verlängerung des Glaszylinders mit Papier so hoch eingefüllt, daß die erstarrte Masse einige Zentimeter über dem Röhrenrande hervorsah. Nach dem Erstarren wurde sie an dem offenen eben geschliffenen Röhrenrande scharf abgeschnitten, und konnte nun, ohne daß der Gallertzylinder aus der Röhre herausrutschte, mit dem offenen Ende nach unten, in ein Becherglas gehängt werden. Das Becherglas wurde mit der zur Diffusion dienenden Lösung gefüllt. Die Lösung in dem Becherglas wurde durch stetes Zufließen frischer Lösung und Fortnahme einer entsprechenden Menge auf konstanter Konzentration gehalten und die Diffusion stets nur solange fortdauern gelassen, daß das obere Ende des Gallertzylinders nicht von dem Salze erreicht war. Man konnte deshalb den Gallertzylinder als von unendlicher Länge ansehen, in welchen aus einer Schicht konstanter Konzentration das Salz übertrat. In dem Falle gilt die Gleichung von Stefan

$$S = 2 q c_0 \sqrt{\frac{kt}{\pi}}.$$

Nach Beendigung des Versuches wurde der Gallertzylinder durch Erwärmen flüssig gemacht und mit der sechsfachen Menge Wasser verdünnt, wodurch das Wiedererstarren der Agarmasse verhindert wurde, und der Gehalt an Salz durch Analyse bestimmt.

Voigtländer fand so bei einer Temperatur von 20° folgende Werte von  $k$ , wenn er die Salze in Gallerten von verschiedenem Gehalte von Agar diffundieren ließ, die Werte  $k$  sind in  $\text{cm}^2$  und Tag angegeben

Substanz	Konzentration	$k$		
		1% Agar	2% Agar	3% Agar
$\text{NaCl}$	0,010	1,04	1,03	1,03
$\text{HCl}$	0,0075	2,04	—	2,04
$\text{N}_2\text{O}_5$	0,0093	2,05	—	2,07
$\text{MgCl}_2$	0,0086	0,75	—	—

Wie man sieht, nimmt der Diffusionskoeffizient mit wachsendem Gehalt an Agar-Agar nicht ab, er ist jedenfalls sehr annähernd gleich dem für Salz und reines Wasser. Für Kochsalz z. B. erhielt Scheffer 1,16, Graham nach Stefans Berechnung 1,25, von Wroblewski, wenn man dessen mittleren Wert  $8,08 \cdot 10^{-6}$  nehmen, 0,700.

Die Zahlenwerte der Diffusionskonstanten sind nach dem dargelegten noch ziemlich unsicher, besonders da man dieselben nur in wenigen Fällen in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration kennt. Es wird daher überflüssig sein noch andere Zahlen, als schon angegeben sind, hier mitzuteilen.

## § 86.

**Endosmose.** Die Diffusion der Flüssigkeiten beschränkt sich nicht auf den soeben betrachteten Fall, wenn zwei Flüssigkeiten sich direkt berühren, sondern sie findet auch dann statt, wenn die beiden Flüssigkeiten durch eine poröse Membran voneinander getrennt sind. Füllt man eine Röhre, welche an ihrem untern Ende durch eine tierische Membran geschlossen ist, mit Alkohol und taucht sie dann in Wasser, so daß



er die Membran berührt, so zeigt sich ein Austausch der beiden Flüssigkeiten, indem durch die Membran hindurch Wasser zum Alkohol und umgekehrt Alkohol zum Wasser übergeht. Ganz dasselbe zeigt sich, wenn man in die Röhre eine Salzlösung bringt und sie dann in Wasser eintaucht, es geht Salz zum Wasser und Wasser durch die Membran in die Röhre, so lange, bis die Flüssigkeiten auf beiden Seiten der Membran gleich hoch geworden sind.

In den meisten Fällen beobachtet man dabei an der einen Seite der Röhre eine Zunahme der Flüssigkeitsmenge, indem z. B. bei dem Vermischen von Alkohol und Wasser mehr Wasser durch die Membran zum Alkohol in die Röhre dringt, als umgekehrt Alkohol zum Wasser; ebenso, wenn man Wasser und eine Salzlösung durch eine poröse Zwischenwand trennt, findet man stets, daß eine größere Quantität Wasser zur Salzlösung hinzieht, als umgekehrt. Enthält deshalb die Röhre Wasser, so sinkt das Niveau in ihr, enthält sie die Salzlösung, so steigt es.

Dieser Umstand deutet schon darauf hin, daß die Scheidewand von osmotischem Einfluß ist, und daß wir hier nicht eine einfache, nur durch die Membran vermittelte Diffusion der Flüssigkeiten vor uns haben, denn in dem Falle würde eine Veränderung des Niveau in der Weise nicht stattfinden können.

Noch deutlicher zeigt sich das bei Anwendung verschiedener Membranen, indem mit Änderung der porösen Zwischenwand sich die Niveaudifferenzen oft geradezu umkehren. So zeigt sich z. B., wenn man Wasser und Weingeist durch eine tierische Membran trennt, daß der stärkere Weingeist von dem spezifisch schwereren Wasser zum leichteren Weingeist geht, das Niveau des Weingeistes steigt, jenes des Wassers fällt. Wird Weingeist und Wasser durch Kautschuk getrennt, so zeigt sich umgekehrt, das Niveau des Weingeistes sinkt, während das des Wassers steigt.

Man unterscheidet daher die Diffusion der Flüssigkeiten durch feuchte Membranen von der vorhin betrachteten, und bezeichnet sie mit dem Namen Endosmose.

Um die Endosmose messend zu verfolgen und die sie bedingenden Umstände aufzufinden, bedarf es der Untersuchung, in welchem Verhältnis der Austausch verschiedener Stoffe durch poröse Scheidewände geschieht, wie, bei Salzlösungen z. B., der Austausch erfolgt, wenn man verdünnte und dichte Lösungen derselben Substanz unter sonst gleichen Umständen der Endosmose unterwirft.

Die älteren Versuche beschränkten sich darauf, die Volumzunahme zu messen, welche auf der einen Seite der Scheidewand eintrat, und glaubten, diese Volumzunahme ein Maß des endosmotischen Vorganges zu erhalten. Daraufhin gab Dutrochet<sup>1)</sup> einen Meßapparat, das sogenannte Endosmometer an, welches in weiter nichts bestand als in einer getheilten, trichterförmig erweiterten und mit einer Membran geschlossenen Röhre.

In diese wurde die eine Flüssigkeit, z. B. eine Salzlösung, bis zu einer bestimmten Höhe eingefüllt und dann die trichterförmige Erweiterung der Röhre in die zweite Flüssigkeit, z. B. Wasser, getaucht. Die Volum-

<sup>1)</sup> Dutrochet, Ann. de chim. et de phys. 35. 1827.

zunahme wurde an der Teilung der Röhre abgelesen. Mit diesem oder einem ähnlichen Apparate untersuchten Jerichau<sup>1)</sup>, Brücke<sup>2)</sup>, Vierordt<sup>3)</sup> die Endosmose verschiedener Stoffe durch verschiedene Membranen.

Indes kann diese Methode nicht zu genauen Resultaten führen, da sie nur die Volumänderung der einen Flüssigkeit, also nur den Diffusionsstrom nach der einen Richtung berücksichtigt. Diese Methode würde z. B. in dem Falle, wo die beiden entgegengesetzt gerichteten Ströme, welche den Austausch der Flüssigkeiten vermitteln, ganz gleiche Stärke haben, also eine Volumänderung nicht eintritt, zu dem ganz falschen Schlusse führen, daß gar keine Diffusion eingetreten sei; in diesem Falle würde sie gar nicht messen können. Aus diesem Grunde waren auch die Resultate dieser Beobachter mehr qualitativer Natur, es ergaben sich aus ihnen die Tatsachen, welche wir vorher angeführt haben.

Jedoch folgerten Dutrochet und Vierordt schon aus ihren Versuchen, daß die Stärke der Endosmose bei Lösungen unter sonst gleichen Verhältnissen der Dichtigkeit der Lösungen proportional sei, d. h. daß die Wassermengen, welche in gleichen Zeiten durch die Membran in die Röhren dringen, in demselben Verhältnisse zueinander stehen, wie die Dichtigkeit der Lösungen in der Röhre.

Jolly<sup>4)</sup> wandte ein anderes Verfahren an; er maß nicht die Volumänderungen, sondern die Gewichtsänderungen der Endosmometer, denen er dazu auch eine sehr einfache Form gab. Eine zylindrische Glasröhre von vielleicht zwei Dezimeter Länge und  $1\frac{1}{2}$  Zentimeter Weite wurde einfach an ihrem Ende mit einem Stücke einer feuchten frischen Blase geschlossen und dann mit einer abgewogenen Menge des zu untersuchenden Stoffes gefüllt und in reines Wasser getaucht. Der leichteren Übersichtlichkeit im Versuche wegen wurde dann dafür gesorgt, daß die äußere Flüssigkeit stets Wasser war, indem die Röhre in ein großes Gefäß mit Wasser getaucht wurde, in welchem das Wasser von Zeit zu Zeit erneuert wurde.

Zunächst ließ Jolly den endosmotischen Vorgang solange dauern, bis im Innern der Röhre nur mehr reines Wasser vorhanden war, indem er so lange die Röhre in Wasser tauchen ließ, bis sich keine Gewichtsänderung der Röhre mehr zeigte. Da dann die Substanz ganz aus der Röhre getreten war, so erhielt er in der Gewichtszunahme der Röhre die Menge Wasser, welche den ausgetauschten Stoff ersetzt hatte.

Jolly schloß aus seinen Versuchen, daß bei gleicher Membran und gleich bleibender Temperatur für eine gewisse Menge des der Endosmose ausgesetzten Stoffes stets die gleiche Menge Wasser eintrat, einerlei ob ursprünglich in die Röhre trocknes Salz oder die gleiche Menge in konzentrierter oder verdünnter Lösung hineingebracht hatte. So fand Jolly, daß durch eine Schweinsblase für jedes Gramm Kochsalz, welches austrat, etwa über 4<sup>0</sup> Wasser in die Röhre hinübertrat.

Die für 1<sup>0</sup> austretendes Salz eintretende Wassermenge nennt Jolly das endosmotische Äquivalent des Salzes. Für verschiedene Membranen

1) Jerichau, Poggend. Ann. 34 p. 613. 1835

2) Brücke, De Diffusione humorum per septa. Berlin 1841. Darans Poggend. Ann. 58 p. 77. 1843

3) Vierordt in Archiv von Roser und Wunderlich 6 1847

4) Jolly, Zeitschr. f. die rationelle Medizin von Henle und Pfeuffer 7

selbst für verschiedene Stücke einer und derselben Schweinsblase, fällt der Zahlenwert des Äquivalents verschieden aus.

Ferner schloß Jolly aus seinen Versuchen, indem er die Menge des ausgetretenen Salzes in ihrer Abhängigkeit von der Zeit verfolgte, daß die Geschwindigkeit der Endosmose der in der gleichen Wassermenge gelösten Salzmenge proportional sei. Bei konstant gehaltenem Salzgehalt der Lösung sollte darnach also die Menge des in gleichen Zeiten austretenden Salzes dem Salzgehalte proportional sein.

Die Schlüsse von Jolly haben sich durch die spätern sorgfältigen Versuche von W. Schmidt<sup>1)</sup> und Eckhard<sup>2)</sup> nicht vollauf bestätigt.

Schmidt untersuchte die Endosmose des Glaubersalzes durch den Lendentel eines Kindes; er wandte, um in kurzer Zeit größere Salzmen gen zum Austreten zu bringen, Membranstücke von 10,3<sup>cm</sup> Durchmesser an, und während er im übrigen wie Jolly verfuhr, bestimmte er die Konzentration seiner Lösungen vor Beginn und am Ende der Versuche. Schmidt untersuchte gleichzeitig den Einfluß der Temperatur.

Für die Geschwindigkeit der Endosmose findet Schmidt, daß sie bei gleicher Membran sehr nahe der Konzentration der Lösung proportional ist, wenn er als solche die in 100 Gewichtsteilen Lösung vorhandene Salzmenge, nicht wie Jolly die in 100 Gewichtsteilen Wasser gelöste Salzmenge, bezeichnet. Mit steigender Temperatur nimmt sie stark zu, und war ebenso wie die später zu besprechende Geschwindigkeit des Durchflusses von Wasser durch kapillare Röhren.

Das endosmotische Äquivalent ist nicht ganz konstant, sondern steigt langsam für abnehmende Werte der Konzentration; für sehr geringe Werte der Konzentration steigt es erheblich und ebenso, wenn man auf die Membran kristallisiertes Salz legt.

Zu ähnlichen Resultaten gelangt Eckhard, er findet bei gleichgehaltener Temperatur, daß die Menge des in gleichen Zeiten übertretenden Salzes nahezu der Konzentration proportional ist, daß sie jedoch nicht ganz so schnell zunimmt wie die Konzentration. Die Menge des zu dem Salze übertretenden Wassers wächst dagegen rascher als die Konzentration der Lösung und infolgedessen ist das endosmotische Äquivalent für konzentrierte Lösungen größer als für verdünnte. Eckhard hat wesentlich mit Kochsalz beobachtet; in bezug auf die Abhängigkeit des Äquivalentes von der Konzentration würde sich demnach Kochsalz anders verhalten als Glaubersalz.

In neuerer Zeit sind die osmotischen Untersuchungen nach einer ganz andern Richtung geführt worden, man hat wesentlich die Frage in betracht gezogen, bis zu welcher Differenz des Druckes auf beiden Seiten der Membran, wobei auf Seiten der Salzlösung der höhere Druck sein soll, das Wasser noch durch die Membran zur Salzlösung hinüberwandert. Unter Anwendung der gewöhnlichen tierischen und pflanzlichen Membranen ist eine exakte Beantwortung dieser Frage nicht möglich, da durch solche Membranen nicht nur das Wasser zur Salzlösung hinüberwandert, sondern auch umgekehrt das Salz zum Wasser, und da bei einigermaßen hohem

1 W. Schmidt, Poggend. Ann. 102 p. 122 1857.

2 Eckhard, Poggend. Ann. 128. p. 61. 1866.

Druck auf Seite der Salzlösung nach Versuchen von Schmidt<sup>1</sup>, die Salzlösung als solche durch derartige Membranen hindurch filtrieren.

Dieser Frage konnte man erst näher treten, als es M. Traube<sup>2</sup>, gelang Membranen herzustellen, welche wohl das Wasser, nicht aber die gelösten Substanzen durchlassen. Derartige Membranen, welche Traube Niederschlagsmembranen nennt, erhält man, wenn man Lösungen gewisser Stoffe, welche Niederschläge miteinander bilden, so zusammenbringt, daß sie übereinander geschichtet sind. An der Grenze bilden sich dann die Schichten des Niederschlages, welche das Wasser hindurchlassen, und gelöste Substanzen aber nicht.

Traube erhielt solche Membranen in folgender Weise. Ein Glasröhrchen, an beiden Seiten offen, wurde an dem einen Ende mit einer luftdicht an das Röhrchen schließenden Kautschukschlauch versehen. Das an seinem andern Ende durch einen Quetschhahn verschlossen war. Durch Zusammendrücken des Kautschukschlauches wurde etwas Luft aus dem Röhrchen ausgetrieben, und dann das untere Ende des Röhrchens in die eine der beiden zur Berührung zu bringenden Lösungen eingetaucht. Laß man den Druck auf den Kautschukschlauch aufhören, so wurde durch den Luftdruck eine gewisse Quantität der Lösung in das Röhrchen hinaufgetrieben. Der Kautschukschlauch wurde dann über das Röhrchen so weit hinweggeschoben, daß die Lösung genau mit der untern Mündung des Röhrchens abschneidet, so daß, wenn jetzt das Röhrchen vorsichtig in die zweite Lösung getaucht wurde, zwischen den beiden Lösungen keine Luftblase vorhanden war. An der Mündung der Röhre bildete sich dann die Niederschlagsmembran.

Um zu prüfen, ob gelöste Substanzen durch diese Niederschlagsmembran hindurchgingen, wurde Lösung derselben zu der ersteren der beiden die Membran bildenden Lösungen hinzugefügt, und nach einiger Zeit untersucht, ob in der zweiten sich diese gelöste Substanz nachweisen ließ.

Derartige Lösungen, welche Membranen bilden, sind z. B. flüssiger Leim und Gerbsäure. Wurde dem flüssigen Leim z. B. Ferrocyankalium zugesetzt und in der oben angegebenen Weise verfahren, so ließ sich die Gerbsäure selbst nach 20stündiger Dauer des Versuches keine Spur von Ferrocyankalium nachweisen. Chlorammonium zur Leimlösung hinzugefügt diffundirte durch die Membran hindurch.

Ferrocyankalium in das Röhrchen gebracht und dann in der angegebenen Weise in eine Lösung von essigsäurem Kupfer getaucht, bildete eine Niederschlagsmembran. Wurde dem Ferrocyankalium Chlorammonium hinzugefügt, so diffundirte dasselbe nicht in die äußere Lösung hinüber. Chlorammonium dagegen ging hindurch.

Mit Hülfe derartiger Membranen, welche er auf die Innenwand von Tonzellen antlagerte, hat Pfeffer<sup>3</sup> die osmotischen Verhältnisse untersucht, wenn nur ein Strom des Lösungsmittels zu der Lösung, sprich Wassers zur Lösung stattfindet. Die Anordnung des von Pfeffer benutzten Apparates zeigt Fig. 153. Die mit der Niederschlagsmembran

1. W. Schmidt, Poggend. Ann. 99 p. 337. 1856.

2. M. Traube, Archiv für Anatomie und Physiologie p. 87. 1867.

3. W. Pfeffer, Osmotische Untersuchungen. Studien zur Zellmechanik. Leipzig bei Engelmann. 1877.



zelle  $z$  hat eine Höhe von  $46^{\text{mm}}$ , einen lichten Durchmesser und eine Wandstärke von  $1,25\text{--}2^{\text{mm}}$ . In dieselbe ist das Glas-Siegellack eingekittet, und in dieses ebenso das Rohr  $t$ . Der wurde zu den Versuchen bei höherer Temperatur umgelegt und zwischen  $r$ , der Tonzelle und dem Glasrohr  $e$  mit einem in der Temperatur nicht schmelzbaren Kitt ausgegossen. In die obere Rohres  $t$  wurde, luftdicht und kapillares Rohr  $g$  eingesetzt, einigen Versuchen gerade oben offen war, bei andern oben geschlossen war, wie es die Figur zeigt. Die Öffnung von  $t$  diente, wie gesagt, zur Aufnahme eines Manometers im Innern des Apparates den Druck zu messen; bei andern wurde dasselbe geschlossen. Die Zellen waren, ehe der Apparat angesetzt wurde, zuerst mit Kalilösung und dann mit verdünnter Salpetersäure behandelt und nachher mit Wasser wieder vollkommen

zur Herstellung der Niederschlags-

wurde die Tonzelle zunächst in

Wasser gesetzt, und indem

innern des Apparates wiederholt

Luftpumpe die Luft verdünnte,

mit Wasser getränkt und dann

in eine 3prozentige Lösung von

Kupfervitriol gestellt, während

die Zelle mit dieser Lösung

gefüllt wurde. Darauf wurde die Ton-

zelle, einigemal mit Wasser aus-

gewaschen und durch eingeführte Streifen

Filterpapier inwendig getrocknet

außerlich etwas getrocknet. Man

ließ die Zelle einige Zeit an der Luft

trocknen, bis sie sich eben noch feucht an-

sah. In die Zelle wurde eine 3pro-

zentige Lösung von Ferrocyankalium ein-

gefüllt, die Zelle wieder in die Kupfer-

lösung hineingestellt. Nach 26 bis 48 Stunden wird der Apparat

mit Ferrocyankaliumlösung vollständig angefüllt und in der Fig. 153

angegebene Weise geschlossen. Es entsteht ein gewisser Überdruck, da

er zum Ferrocyankalium als zum Kupfervitriol strömt. Die

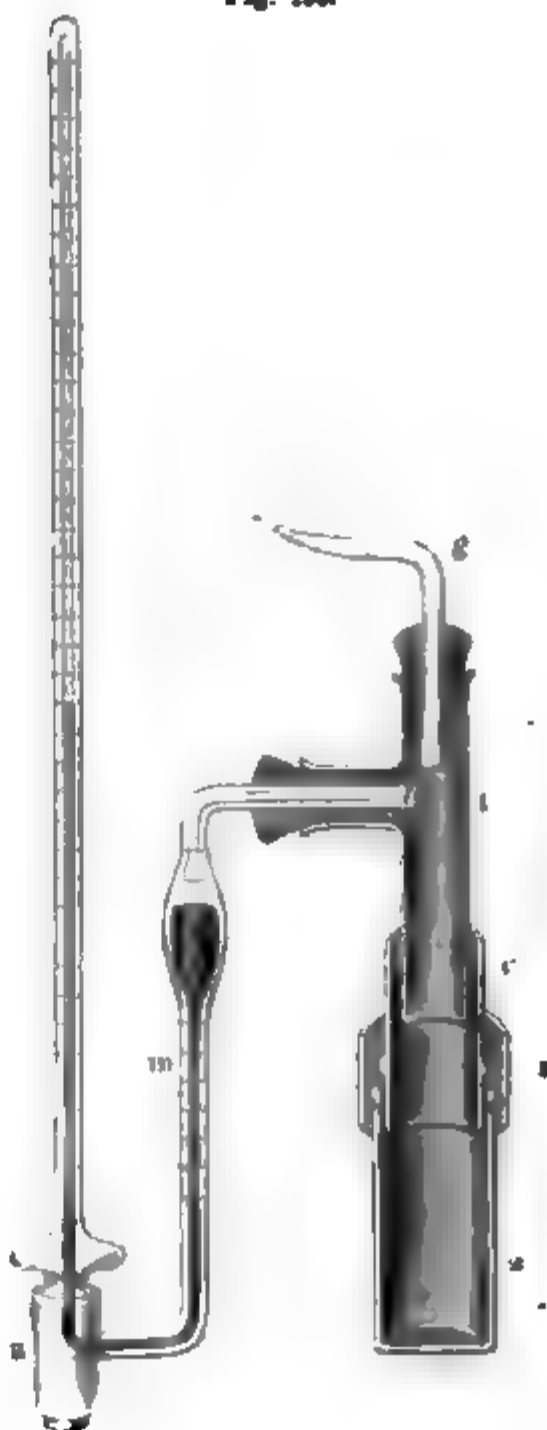
Apparate so 24 bis 48 Stunden stehen gelassen. Der Apparat wird

geöffnet und statt der Lösung von Ferrocyankalium mit einer

einer 3prozentigen Lösung von Ferrocyankalium und einer

gleichzeitigen Lösung von Kalisalpeter gefüllt und, nachdem er wieder

Fig. 153.



geschlossen, erneuert in Kupfervitriollösung gestellt. Jetzt wächst der Druck im Apparat auf 3 Atmosphären und infolgedessen wird die Niederschlagsmembran auf der ganzen Innenwand der Tonzelle gleichmäßig und fest aufgepreßt.

Pfeffer untersuchte zunächst, wie sich die Geschwindigkeit des Wasserstroms änderte bei verschiedener Konzentration der Lösung. Zu diesem Zwecke wurde die das Manometer aufnehmende Öffnung des Apparates Fig. 153 geschlossen und ein gerades, oben offenes Kapillarrohr in *g* eingesetzt. Die Stärke oder Geschwindigkeit des Wasserstroms wurde gemessen durch die Höhe, um welche das Flüssigkeitsniveau in der kapillaren Röhre *g* in der Stunde anstieg. Die Menge des eintretenden Wassers war dabei so gering, daß die Konzentration der Lösung dadurch nicht geändert wurde.

Versuche mit Rohrzucker ergaben, daß die Geschwindigkeit des Wasserstromes zunächst mit wachsender Konzentration abnahm, dann bei weiterer Vergrößerung der Konzentration, wie es Eckhard für Kochsalzlösung gefunden, erheblich rascher zunahm als die Konzentration. Folgende Tabelle, das Mittel aus vier Versuchsreihen, läßt diesen Gang deutlich erkennen. Unter *c* ist die Konzentration in Gewichtsprozenten, Gramm in 100<sup>er</sup> Lösung, unter *e* die Stärke des Wasserstromes, jene für die 1 prozentige Lösung als eins gesetzt, unter  $\frac{e}{c}$  der Quotient aus der Stärke des Wasserstromes und der Konzentration und unter  $\frac{e}{cs}$  der Quotient aus der Stärke des Wasserstromes und der Konzentration, dieselbe ausgedrückt als Gramm in 100<sup>er</sup> Lösung angegeben.

<i>c</i>	<i>e</i>	$\frac{e}{c}$	$\frac{e}{cs}$
1	1	1	1
2	1,95	0,98	0,97
6	5,77	0,96	0,94
10	11,6	1,16	1,11
16	20,0	1,25	1,17
20	25,5	1,27	1,17
32	48,4	1,54	1,35

Ähnlich war der Gang, als in die Zelle Lösungen von Gummi arabicum eingeführt wurden, während für Salpeter die Geschwindigkeit des Wasserstromes mit steigender Konzentration stets abnahm.

Wurde das Rohr *g* geschlossen und das Manometer *m* eingesetzt, so ergab sich, daß das Wasser nur bis zu einem bestimmten Überdrucke, dem osmotischen Drucke der Lösung in die Zelle eindringen konnte. Für Zucker und Gummi arabicum, für welche die Niederschlagsmembran ganz undurchgängig war, ergab sich dieser osmotische Druck der Konzentration der Lösung proportional, wie folgende Tabelle für Zuckerlösungen zeigt. *c* ist die Konzentration der Lösung, unter *O* die Druckhöhe, welche im Innern der Zelle durch das Eindringen des Wassers entstand, in cm Quecksilber angegeben.

$c$	$O$	$\frac{O}{c}$
1	53,8	53,8
1	53,2	53,2
2	101,6	50,8
2,74	151,8	55,4
4	208,2	52,0
6	307,5	51,3
1	53,5	53,5.

ei einer 6prozentigen Lösung stieg somit der Druck im Innern bis  
r Atmosphären.

ür Gummi arabicum war die Druckhöhe für eine 1prozentige Lösung  
2<sup>cm</sup> Quecksilber.

ür Salpeter nahm der Druck langsamer zu als die Konzentration;  
ses Salz war die Niederschlagsmembran nicht ganz undurchgängig,  
mierte nach Pfeffers Ausdrucksweise, die Konzentration wurde dem-  
m Schlusse des Versuches bestimmt. Es ergab sich

$c$	$O$	$\frac{O}{c}$
0,80	130,4	163
1,43	218,5	153
3,3	436,8	132
0,86	147,5	171.

feffer sieht hierin nicht einen Beweis gegen die Folgerung, daß der  
che Druck allgemein proportional der Konzentration sei, im Falle  
öste Substanz gar nicht diosmiert, er sieht vielmehr den Grund  
langsamern Zunahme eben in dem Durchgange des Salpeters durch  
nmembran. Werden Zucker und Gummi arabicum durch eine Zelle von  
ontpapier oder eine Tierblase abgesperrt, so steigt für 6prozentige  
en bei Pergamentpapier der osmotische Druck bei einer Temperatur  
° für Zucker nur auf 29<sup>cm</sup>, also auf nicht ein Zehntel des früher  
nen, bei Tierblase nur auf 14,5<sup>cm</sup>; Salpeter erhält in Pergament-  
und bei 6prozentiger Lösung 20,4, in Tierblase nur 8,9<sup>cm</sup>.

an könnte dem gegenüber einwenden, daß der geringere osmotische  
der sich für die gelösten Stoffe bei für sie durchlässigen Mem-  
zeigt, nicht in dieser Durchlässigkeit, sondern in der spezifischen  
der Membran seinen Grund habe, daß also überhaupt auch für  
nen, welche die gelösten Stoffe nicht diosmieren, der osmotische  
verschieden sein könne.

is ist indes nicht möglich, weil das dem Prinzip der Erhaltung der  
widersprechen würde, wie Ostwald<sup>1)</sup> durch folgende Betrachtung  
hat. Es sei eine Röhre mit zwei Tonplatten  $AB$  und  $CD$  ver-  
welche den Raum  $ABCD$  flüssigkeitsdicht absperren. Die Platten  
mit verschiedenen Niederschlagsmembranen versehen, welche aber  
ie in der den Raum  $ABCD$  ausfüllenden Lösung vorhandene Sub-  
urhaus nicht durchlassen. Der osmotische Druck für  $AB$  sei aber

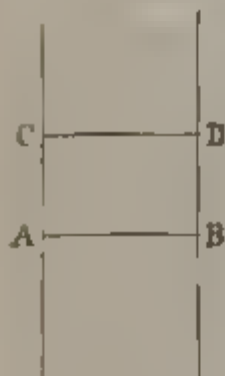
<sup>1)</sup> Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie. 1. p. 661.



$P$ , für  $CD$  dagegen  $p < P$ . Das heißt ist  $CD$  mit Wasser in  $B$  so fließt so lange Wasser durch die Membrane zur Lösung, bis  $p$  in  $ABCD$  gleich  $p$  geworden ist, wird der Druck in  $ABCD$   $p$ , so fließt Wasser durch die Membran in den Raum über  $p$ .

Nun werde das Rohr in Wasser getaucht, so daß  $AB$  berührt, und sei auch  $CD$  mit einer Wasserschicht bedeckt. Es

Fig. 164.



solange im Innern der Druck kleiner als  $p$  ist, durch Membranen Wasser in  $ABCD$  hinein, sobald der erreicht ist, kann durch  $CD$  kein Wasser mehr durch  $AB$  tritt aber Wasser ein, so lange der Druck als  $P$  ist. Es wird demnach in  $ABCD$  der Druck  $P$ . Sofort aber tritt durch  $CD$  Wasser nach oben, und ein stationärer Zustand bei einem Drucke  $p_1$  ein, welchem ebensoviel Wasser durch  $CD$  austritt als durch  $AB$  eintritt. Der Zustand kann sich nicht ändern, wir oberhalb  $CD$  das Wasser abfließen lassen, so daß der Druck nicht zunimmt. Es fließt stetig infolge der Verschiedenheit der osmotischen Drucke Wasser durch

$CD$  nach oben hin. Das oben abfließende Wasser würden wir die Bewegung eines Wasserrades verwenden können; es würde demnach Arbeit gewonnen ohne irgend einen Arbeitsaufwand, was dem Prinzip der Erhaltung der Arbeit widerspricht.

Den Einfluß der Durchlässigkeit der Membran können wir so fassen, daß der sich langsam herstellende, einer bestimmten Konzentration entsprechende Druck nicht erreicht werden kann, weil ehe derselbe entwickelt hat die Konzentration schon abnimmt.

Die Schwierigkeit Membranen herzustellen, welche eine große Zahl verschiedener Salze nicht durchlässig machen, begründet auch die Unmöglichkeit die Abhängigkeit des osmotischen Druckes von der Natur der Salze zu bestimmen.<sup>1)</sup>

Dahin gerichtete Versuche sind von de Vries<sup>2)</sup> und Tammann<sup>3)</sup> geführt. Beide maßen nicht direkt den osmotischen Druck der Lösungen, sondern sie bestimmten die Konzentration je zweier Lösungen, welche den gleichen osmotischen Druck hatten.

Das Verfahren von Tammann war folgendes. Bringt man eine Lösung eines Salzes einen Tropfen einer Lösung eines zweiten Salzes, mit dem erstern einen unlöslichen Niederschlag bildet, so überlagert man den Tropfen mit einer Niederschlagsmembran, welche mehrfach nicht durch sich hindurchläßt, aus welchen sich die Niederschlagsmembran gebildet hat. Man erkennt das daran, daß die sofort nach dem Einbringen des Tropfens stets durchscheinende Membran bei längerer Dauer undurchsichtig wird. Es ist das nach Tammann der Fall, wenn man eine Cyankaliumlösung in die Lösung eines Kupfer- oder Zinksalzes bringt.

1) Eine ausführliche Untersuchung über die Durchlässigkeit einer Anzahl von Niederschlagsmembranen hat Walden ausgeführt. Zeitschr. f. Chemie 10 p 692 1892.

2) de Vries, Pringsheims Jahrbücher f. wissenschaftliche Botanik. 11 Zeitschrift für physikal. Chemie. 2 p 415, 1896 6; 3 p 103, 1896 7.

3) Tammann, Wiedem. Ann 84. p 299 1888.

Ist der osmotische Druck der im Innern des Tropfens vorhandenen Lösung gleich dem der äußern Lösung, so findet kein Übergang des Wassers durch die Membran statt, weder von innen nach außen noch umgekehrt. Ist aber der osmotische Druck der innern Lösung größer als der der äußern, so tritt eine Wasserströmung von außen nach innen ein, in der Umgebung des Tropfens muß also die Lösung konzentrierter werden, ist der osmotische Druck der äußern Lösung ein größerer, so geht der Wasserstrom aus dem Tropfen in die äußere Lösung, die Lösung in der Umgebung des Tropfens muß verdünnter werden. Die Konzentrationsänderung läßt sich nach der in der Lehre vom Licht zu besprechenden Schlierenmethode deutlich erkennen, indem nach dieser die kleinsten Unterschiede der Brechbarkeit des Lichtes in der Flüssigkeit, in welcher der Tropfen schwimmt, wahrnehmbar sind. Man sieht deshalb, wenn die Lösung um den Tropfen verdünnter wird, die verdünntere Lösung in der Umgebung aufsteigen, wird sie konzentrierter, so sieht man die konzentriertere Lösung nieder sinken. Indem man in die Lösung des Kupfersalzes verschieden konzentrierte Lösungen des Ferrocyankalium bringt, kann man so die Konzentration recht genau bestimmen, bei welcher kein osmotischer Strom vorhanden ist.

In dieser Weise konnte Tammann zunächst die osmotischen Drucke der verschiedenen Kupfer- und Zinksalze mit denen des Ferrocyankaliums, so auch miteinander vergleichen. Mit Hilfe derselben Membranen konnte er aber noch einen Schritt weiter gehen. Er fand nämlich noch eine Anzahl anderer Substanzen, welche nicht durch diese Niederschlagsmembranen durchgehen. Es setzte deshalb den Kupferlösungen oder denen der Zinksalze bekannter Konzentration gemessene Quantitäten einer solchen Substanz, welche gegen das Kupfersalz chemisch indifferent war, hinzu und bestimmte die Konzentration der Ferrocyankaliumlösung, welche mit diesem Gemische gleichen osmotischen Druck hatte. Unter der Voraussetzung, daß die osmotischen Drucke zweier gemischten Salze sich summieren, konnte er dann die Konzentration der Ferrocyankaliumlösung berechnen, welche mit dem zugesetzten Salze gleichen osmotischen Druck hatte, wie folgendes Beispiel zeigt. Die Konzentrationen der Lösungen sind in Gramm Molekülen pro Liter Wasser angegeben, das heißt die Konzentration der Lösung wird gleich 1 gesetzt, wenn in 1000<sup>cc</sup> Wasser soviel Gramme des Salzes gelöst sind, als das Molekulargewicht des Salzes Einheiten hat. Das Molekulargewicht des Kupfersulfats ist 159,5; die Konzentration einer Kupferlösung ist gleich 1, welche diese Anzahl Gramme Salz zu 1000<sup>cc</sup> Wasser enthält, die Konzentration ist 0,1, wenn zu 1000<sup>cc</sup> Wasser 15,95<sup>g</sup> Salz gefügt sind. In dieser Weise ergab sich z. B., wenn das Gleichheitszeichen gleichen osmotischen Druck bedeutet,

$$0,125 \text{ CuSO}_4 = 0,049 \text{ K}_4\text{CyFeCy}_2$$

$$0,058 \text{ MgSO}_4 + 0,125 \text{ CuSO}_4 = 0,068 \text{ K}_4\text{CyFeCy}_2,$$

oder

$$0,058 \text{ MgSO}_4 = 0,019 \text{ K}_4\text{CyFeCy}_2.$$

Für Gemische von Zinksulfat und Magnesiumsulfat ergab sich

$$0,210 \text{ ZnSO}_4 = 0,080 \text{ K}_4\text{CyFeCy}_2$$

$$0,086 \text{ MgSO}_4 + 0,210 \text{ ZnSO}_4 = 0,108 \text{ K}_4\text{CyFeCy}_2,$$

somit

$0,086 \text{ MgSO}_4 = 0,028 \text{ K}_4\text{CyFeCy}_2.$

Die erste Beobachtung ergibt, daß bei Magnesiumsulfat die Konzentration 3,07, die zweite, daß sie 3,05 der Konzentration des Ferrocyankaliums sein muß, wenn der osmotische Druck der beiden Lösungen derselbe sein soll.

Die Beobachtungen Tammanns bestätigen den Schluß Pfeffers, nach welchem der osmotische Druck einfach der Konzentration der Lösungen proportional sein soll, nicht. Wäre dieser Schluß allgemein gültig, so müßte das Verhältnis der Konzentrationen der Lösungen, welche gleichen osmotischen Druck haben, unabhängig von der Konzentration sein. Das ist im allgemeinen nicht der Fall; nur bei wenigen organischen Substanzen ist das Verhältnis der Konzentration zu der Konzentration des Ferrocyankaliums, welche gleichen osmotischen Druck hat, unabhängig von der Konzentration. Da nach den Versuchen Pfeffers der osmotische Druck der Zuckerlösungen der Konzentration proportional ist, so würde, da für diese das Verhältnis konstant zu sein scheint, auch für Ferrocyankaliumlösung der osmotische Druck der Konzentration proportional sein.

In folgender Tabelle sind einige der Beobachtungen Tammanns zusammengestellt. Für jede Substanz sind zwei Zahlenreihen angegeben, unter  $n$  die Konzentration der Substanz, unter  $\frac{n}{n_1}$  das Verhältnis der Konzentration der Substanz zu jener der Ferrocyankaliumlösung, welche mit der erstern gleichen osmotischen Druck hat.

$\text{CuSO}_4$		$\text{CuCl}_2$		$\text{ZnSO}_4$		Rohrzucker		Harnstoff		Propylalk.	
$n$	$\frac{n}{n_1}$	$n$	$\frac{n}{n_1}$	$n$	$\frac{n}{n_1}$	$n$	$\frac{n}{n_1}$	$n$	$\frac{n}{n_1}$	$n$	$\frac{n}{n_1}$
0,094	2,6	0,043	1,30	0,101	1,7	0,032	2,5	0,160	1,7	0,045	2,4
0,170	2,6	0,094	1,09	0,266	2,1	0,068	2,5	0,309	1,7	0,113	2,4
0,204	2,6	0,236	1,02	0,425	2,4	0,109	2,7	0,483	2,0	0,225	2,1
0,339	2,9	0,313	0,98	0,851	2,6	0,194	2,4	0,756	2,1	0,451	2,3
0,675	2,8	0,379	0,95	1,022	2,5	0,228	2,5	1,150	2,2	0,677	2,3
0,842	2,7	0,476	0,93	1,280	2,3	0,373	2,4			0,903	2,4

Man sieht, das Konzentrationsverhältnis scheint für Kupfersulfat konstant zu sein, für Kupferchlorid nimmt es mit wachsender Konzentration ab, für Zinksulfat zu. Konstant ist es ebenfalls für Rohrzucker und Propylalkohol, während es für Harnstoff zu wachsen scheint.

Da die den Quotienten  $\frac{n}{n_1}$  gleichen Konzentrationen mit der Konzentration 1 des Ferrocyankaliums gleichen osmotischen Druck haben, so können wir den Druck der Konzentration proportional setzen können, so zeigen obige Zahlen, daß für  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{ZnSO}_4$ , Rohrzucker, Harnstoff, Propylalkohol mit großer Annäherung der gleichen Anzahl gelöster Moleküle der gleiche osmotische Druck zukommt. Annähernd gilt das für alle von Tammann untersuchten organischen Substanzen und ebenso für  $\text{MgS}$  während für  $\text{CuCl}_2$ ,  $\text{ZnCl}_2$ ,  $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$  bereits bei annähernd der Hälfte der gelösten Moleküle der osmotische Druck der gleiche ist.

Nach De Vries sollen chemisch ähnliche Stoffe bei gleicher molekularer Konzentration denselben osmotischen Druck zeigen; in den Zahlen ammanns findet man für die Sulfate der zweiwertigen Metalle einerseits und für die Chloride und Nitrate derselben andererseits annähernd die gleichen Werte der Konzentration für denselben osmotischen Druck.

Nach den Beobachtungen Pfeffers nimmt der osmotische Druck mit steigender Temperatur zu; die von Pfeffer für Rohrzucker beobachteten Zahlen sind indes zu schwankend, als daß man aus denselben einen Temperaturkoeffizienten für die Druckzunahme ableiten kann. Schreibt man den osmotischen Druck bei der Temperatur  $t$  in der Form

$$p_t = p_0 (1 + \alpha t),$$

ergeben Pfeffers Versuche mit Rohrzucker für  $\alpha$  Werte zwischen 0,004 und 0,006, für Gummi arabicum 0,002, für zwei Lösungen von wein- oder Kali-Natron 0,003 und 0,0035.

Nach Versuchen von Donders und Hamburger<sup>1)</sup> soll der Temperaturkoeffizient für die verschiedenen Substanzen im allgemeinen der gleiche sein, indem dieselben fanden, daß Lösungen, welche bei niedriger Temperatur gleichen osmotischen Druck zeigen, dieselbe Gleichheit auch in höhern Temperaturen bewahren.

Auf die Theorie der osmotischen Erscheinungen gehen wir an dieser Stelle nicht ein, wir werden sie im nächsten Kapitel nach Vorführung der kinetischen Theorie der Gase im Zusammenhange mit der kinetischen Theorie der Lösungen und in der Wärmelehre besprechen.

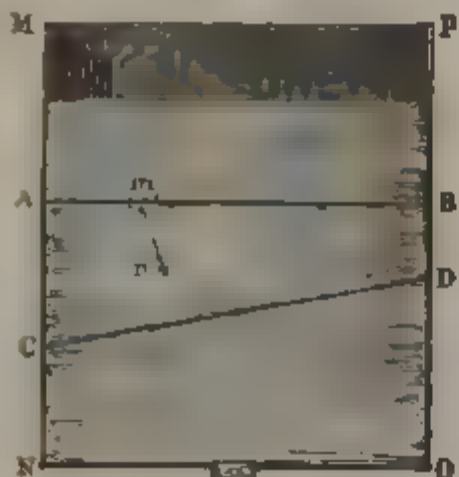
## § 87.

**Ausfluß der Flüssigkeiten. Toricellis Theorem.** Wenn man in einem Boden oder die Seitenwand eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäßes eine Öffnung macht, so fließt die Flüssigkeit mit einer gewissen Geschwindigkeit daraus hervor, welche um so größer ist, je höher das Niveau der Flüssigkeit über der Ausflußöffnung ist. Um diese Geschwindigkeit zu bestimmen, wollen wir uns ein Gefäß denken, in welchem trotz des Ausflusses durch regelmäßiges Nachfließen die Flüssigkeit auf demselben Niveau gehalten wird. Da die unten in der Öffnung ausfließende Flüssigkeit sofort durch nachsinkende Flüssigkeit wieder ersetzt wird, so muß die Flüssigkeit im Gefäß über der Ausflußöffnung befindliche Flüssigkeit in Bewegung geraten und sich mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen die Ausflußöffnung hin bewegen. Dabei muß sich dann ferner sofort nach Beginn des Ausfließens in dem ganzen Gefäß ein stationärer Zustand einstellen, d. h. es muß durch jeden Querschnitt des Gefäßes in gleichen Zeiten die gleiche Menge von Flüssigkeit hindurchgehen. Denn ist  $AB$  (Fig. 155) ein Querschnitt durch die Flüssigkeit des Gefäßes  $MNOP$  und  $CD$  irgend ein anderer Querschnitt, so ist die zwischen diesen beiden Querschnitten vorhandene Flüssigkeitsmenge immer dieselbe; es muß daher in gleichen Zeiten in den zwischen den Querschnitten gelegenen Raum durch  $AB$

<sup>1)</sup> Donders und Hamburger nach Angabe von Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie. 2. Aufl. 1. p. 669.

ebensoviel Flüssigkeit eintreten, wie ihn durch den Querschnitt  $Q$  verläßt. Nennen wir nun die mittlere senkrecht gegen  $AB$  Komponente der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen im Moment sie  $AB$  passieren,  $u$ , und die Größe des Querschnitts  $Q$ , so ist die Flüssigkeit, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt  $AB$  passiert,  $Qu$ . Wir bezeichnen  $u$  als die mittlere senkrecht gegen  $AB$  gerichtete

Fig. 155



geschwindigkeitskomponente, denn in der Zeiteinheit werden sich weder alle Teilchen senkrecht gegen  $AB$ , noch alle mit derselben Geschwindigkeit bewegen. Aber welches Element der Flüssigkeit in der Zeiteinheit durch  $AB$  hindurchgeht, kann man sich vorstellen, dessen Basis der Querschnitt  $Q$  ist und dessen Höhe  $u$  ist; diese Höhe  $u$  ist die mittlere gegen  $AB$  senkrechte Geschwindigkeit der Flüssigkeit, denn wenn alle Flüssigkeitsteilchen mit dieser Geschwindigkeit den Querschnitt  $AB$  durchflossen, würde

ebensoviel Flüssigkeit durch  $AB$  hindurchgehen, als wirklich hindurchgeht.

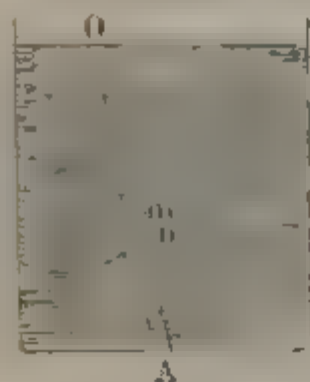
Hat  $u'$  dieselbe Bedeutung für den Querschnitt  $C'D$ , dessen Fläche gleich  $Q'$  sei, so ist die in der Zeiteinheit durch diesen hindurchgehende Flüssigkeit gleich  $Q'u'$ . Es ergibt sich somit

$$Q \cdot u = Q' \cdot u' \quad (1),$$

oder die mittleren Geschwindigkeiten, mit welchen die Flüssigkeit die verschiedenen Querschnitte passieren, verhalten sich umgekehrt proportional der Größe der Querschnitte.

Der stationäre Zustand ist ferner dadurch charakterisiert, daß seiner Dauer durch irgend ein beliebiges Element eines Querschnitts

Fig. 156



Flüssigkeit immer mit derselben Geschwindigkeit nach derselben Richtung hindurchgeht, daß alle Flüssigkeitsteilchen sich immer in denselben Zustand bewegen; wird also das Element  $m$  einmal durch die Flüssigkeit mit einer gewissen Geschwindigkeit in der Richtung  $mu$  durchsetzt, so bewegt sich der ganze Zustand der Flüssigkeit in der gleichen Weise hindurch. Es ist einfach daraus, daß es immer genau dieselben sind, welche die Flüssigkeit bewegen, und die Bewegung immer unter denselben Umständen stattfindet.

Dieser Satz gestattet uns das Gesetz zu finden, nach welchem sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Inneren des Gefäßes ändert und dann mit Hilfe von Gleichung (1) die Geschwindigkeit in der Ausflußöffnung zu berechnen.

Ist nämlich  $AO$  der Weg, den ein Flüssigkeitselement von der Oberfläche bis zur Ausflußöffnung zurücklegt, so werden alle bei  $O$  die Oberfläche verlassenden Flüssigkeitselemente denselben Weg mit der



geschwindigkeit zurücklegen, es wird also der Kanal stetig mit Flüssigkeit erfüllt sein, die sich in der Richtung dieses Kanals bewegt. Sei nun bei  $m$  in der Tiefe  $h$  unter der Oberfläche ein Querschnitt des Kanals gleich  $q$ , und sei  $v$  die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit den Querschnitt durchsetzt, so wird in der Zeit  $dt$  ein Flüssigkeitsvolumen  $qvdt$  durch diesen Querschnitt durchfließen. Dabei, während also jedes Flüssigkeitsvolumen den Weg  $vdt$  zurücklegt oder von dem Querschnitt  $m$  zu dem  $n$  in der Entfernung  $r$  gelangt, nimmt die Geschwindigkeit um  $dv$  zu, so daß der Querschnitt  $n$  mit der Geschwindigkeit  $v + dv$  passiert wird. Diesen Geschwindigkeitszuwachs, den das Flüssigkeitsvolumen  $qvdt$  in der Zeit  $dt$  erhält, können wir mit Hilfe der die Flüssigkeit bewegenden Kräfte bestimmen. Ist  $s$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist also  $s$  die Masse der Volumeinheit der Flüssigkeit, so ist  $sqvdt$  die in der Zeit  $dt$  durch  $m$  passierende Flüssigkeitsmasse, welche auf dem Wege  $m$  zu  $n$  in der Zeit  $dt$  den Geschwindigkeitszuwachs  $dv$  erhält. Die in der Zeit  $dt$  dieser Masse durch die wirksamen Kräfte erteilte Bewegungsgröße ist somit

$$sqvdt \cdot dv.$$

Diese Bewegungsgröße muß gleich dem Produkte aus der diesen Geschwindigkeitszuwachs bewirkenden Kraft in die Zeit  $dt$  sein. Diese bewirkende Kraft ist zunächst die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Schwere der herabsinkenden Masse. Das Gewicht dieser Masse ist  $sqvdt$ , somit die bewegende Kraft  $gsqvdt$ ; ist  $\alpha$  der Winkel, den die Verbindungslinie der beiden Schnitte  $m$  und  $n$  mit der vertikalen bildet, so ist die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Kraft

$$gsqvdt \cdot \cos \alpha.$$

Da  $r$  der Abstand der beiden Schnitte  $m$  und  $n$  ist, so ist  $r \cdot \cos \alpha$  der vertikale Abstand des Schnittes  $n$  von  $m$ , oder der Zuwachs, den die in der Oberfläche gerechnete Tiefe  $h$  erfährt, wenn die Flüssigkeit von dem Schnitte  $m$  zu dem Schnitte  $n$  herabsinkt; setzen wir diese gleich  $dh$ , so wird die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Schwere

$$gsqdh.$$

In der Schicht  $m$  wirkt ferner auf die Flüssigkeit ein gewisser Druck, der für die Flächeneinheit gleich  $gp$  sei; in der tiefer liegenden Schicht  $n$  ist dieser Druck ein größerer, setzen wir ihn  $g(p + dp)$ . Da die Flüssigkeit sich von einer Stelle geringeren zu einer solchen größeren Druckes bewegt, so wirkt diese Vergrößerung des Druckes der Bewegung entgegen, d. h. es wirkt auf die Fläche  $q$  wirkender Gegendruck  $gqdp$ . Die während der Zeit  $dt$  auf die Flüssigkeit wirkende Kraft ist somit

$$g(sqdh - qdp).$$

Da die durch diese Kraft der Flüssigkeit erteilte Bewegungsgröße ein Produkt aus der Kraft in die Zeit, in welcher sie der Flüssigkeit erteilt hat, gleich sein muß, so folgt

$$sqvdrdt = g(sqdh - qdp)dt,$$

oder wenn wir auf beiden Seiten durch  $q dt$  dividieren,

$$s v dv = g(s dh - dp).$$

Diese Gleichung liefert uns die Zunahme der Geschwindigkeit, wenn die Flüssigkeit um die Höhe  $dh$  herabsinkt. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Oberfläche, in welcher  $h = 0$ , der Druck  $gp = gp_0$  etwa gleich dem Drucke der Atmosphäre ist, verläßt, mit  $v_0$ , so erhalten wir die Geschwindigkeit  $v$  in der Tiefe  $h$ , wo der Druck gleich  $gp$  ist, wenn wir für alle zwischen der Oberfläche und der Tiefe  $h$  liegenden Schichten den Wert  $dv$  bestimmen und dann alle diese Ausdrücke summieren, also in der Summe

$$\int_{v_0}^v s v dv = g \int_{h=0}^h s dh - g \int_{p_0}^p dp.$$

In schon mehrfach gezeigter Weise sind diese Summen

$$\frac{1}{2} s(v^2 - v_0^2) = g(sh - (p - p_0)) \dots \dots \dots (II),$$

eine Gleichung, welche uns, wenn wir  $v_0$ ,  $p$  und  $p_0$  kennen, die Geschwindigkeit  $v$  in der Tiefe  $h$  zu berechnen gestattet.

Wir haben bei dieser Entwicklung einen Flüssigkeitsfaden vom Querschnitt  $q$  von übrigens beliebiger Lage vorausgesetzt und für ihn nur die Bedingung gemacht, daß er die Bahn eines Elementes der Flüssigkeit von der Oberfläche bis zur Ausflußöffnung sei. Da wir über die Lage dieses Flüssigkeitsfadens keine weitere Voraussetzung gemacht haben, so gilt diese Gleichung für alle Flüssigkeitsfäden, oder für die ganze ausströmende Flüssigkeit, so daß uns obige Gleichung ganz allgemein die Geschwindigkeit  $v$  in der Tiefe  $h$  unter der Oberfläche liefert.

Ist  $H$  die Tiefe der Ausflußöffnung unter dem Niveau,  $p_1$  der Druck in derselben, welcher der Bewegung der Flüssigkeit entgegenwirkt, so erhalten wir die Ausflußgeschwindigkeit  $v_1$  aus der Gleichung

$$v_1^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) = 2gH - 2 \frac{g}{s} (p_1 - p_0).$$

Um in dieser Gleichung noch den Quotienten  $\frac{v_0^2}{v_1^2}$  zu bestimmen, dient die Gleichung (I). Ist die Oberfläche horizontal, somit in ihr ein überall gleicher vertikaler Druck vorhanden, so ist die Bewegung dort in allen Punkten eine vertikal abwärts gerichtete, es ist also  $v_0$  gleichzeitig die mittlere senkrecht gegen den Querschnitt der Flüssigkeit gerichtete Geschwindigkeit. Setzen wir weiter eine Ausflußöffnung voraus, deren Querschnitt gegen den des Gefäßes nur klein ist, so werden wir auch in diesem die Geschwindigkeit als senkrecht gegen die Ausflußöffnung gerichtet und als überall gleich ansehen dürfen, einerlei ob die Öffnung im Boden oder in derselben Tiefe  $H$  unter dem Niveau der Flüssigkeit in einer Seitenwand sich befindet. Ist dann  $Q_0$  der Querschnitt des Gefäßes in der Oberfläche der Flüssigkeit,  $q_1$  der der Ausflußöffnung, so ist nach Gleichung (I)

$$Q_0 v_0 = q_1 v_1, \quad \frac{v_0^2}{v_1^2} = \frac{q_1^2}{Q_0^2},$$



$$v_1^2 \left(1 - \frac{q_1^2}{Q_0^2}\right) = 2gH - 2 \frac{g}{s} (p_1 - p_0).$$

ndet der Ausfluß in freier Luft statt, und wirkt auf die Oberfläche nur der Druck der Atmosphäre, so ist  $p_1 = p_0$ , da der Druck der Atmosphäre auf die Flüssigkeitsoberfläche und die Ausflußöffnung dann gleich ist, und es wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\bar{H}}{\left(1 - \frac{q_1^2}{Q_0^2}\right)}}.$$

, wie wir voraussetzen,  $q_1$  gegen  $Q_0$  sehr klein, so ist der Nenner im Wurzelzeichen nicht merklich von 1 verschieden, und dann gehen wir zu dem Ausdruck

$$v_1 = \sqrt{2g\bar{H}}.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel aus der Druckhöhe direkt proportional, oder gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper in der Höhe der Flüssigkeit durchfallender Körper im Niveau der Ausflußöffnung erlangt hat, ein Satz, der schon von Toricelli erkannt und der den Namen des Toricellischen Theorems führt.

Die wichtige Folgerung dieses Satzes ist die, daß die Ausflußgeschwindigkeit einer Flüssigkeit durchaus unabhängig ist von der Natur derselben, so wie alle Körper gleich schnell fallen, daß dieselbe nur abhängig von der Druckhöhe im Niveau der Flüssigkeit ist.

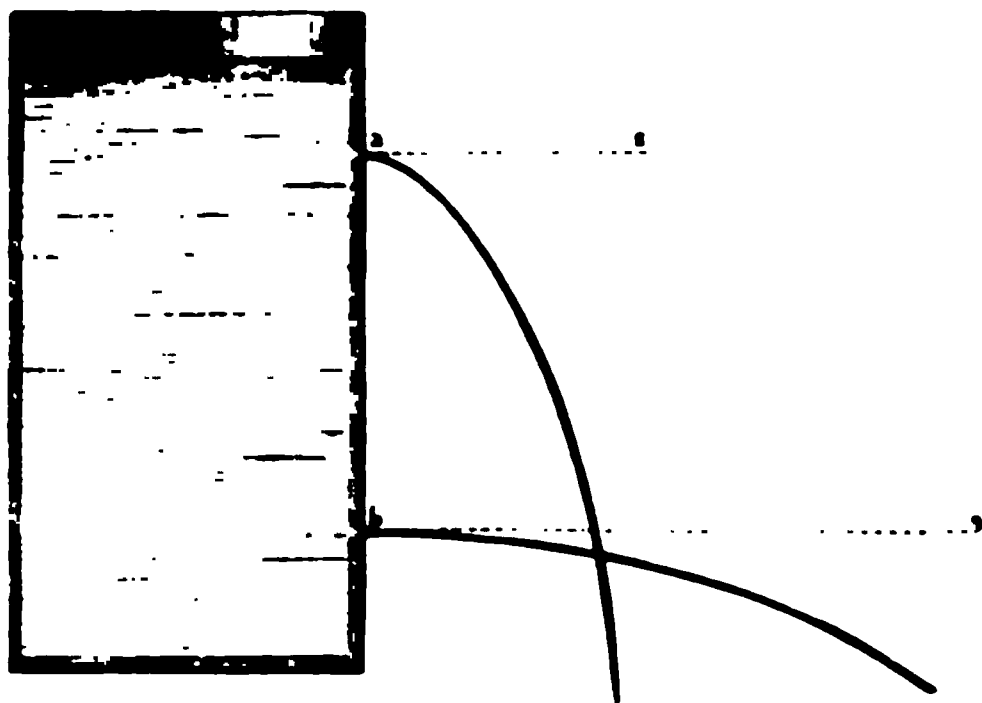
Diese Folgerung hat eine auffallende Bestätigung, wenn man

versucht, daß bei gleichen Druckhöhen bei schwereren Flüssigkeiten auch in demselben Verhältnis die Masse der bewegenden Flüssigkeit zunimmt, wie wegen des Druckes der drückenden Flüssigkeit der Druck zunimmt.

Dieses Gesetz experimentell zu bestätigen, gehen wir die Flüssigkeit bei einer bestimmten Druckhöhe aus einer kleinen Öffnung eines Gefäßes

ausfließen zu lassen. Da jedes Flüssigkeitsteilchen dann die Öffnung mit einer konstanten horizontalen Geschwindigkeit verläßt, so verhält es sich gerade wie ein horizontal geworfener Körper. Es gelten daher die Gesetze, welche wir § 9 für geworfene Körper entwickelten. Der Strahl muß die Gestalt einer Parabel haben (Fig. 157), deren Punkte man für jede Zeit leicht bestimmen kann. Gehen wir von einem Punkte  $a$  oder  $b$  aus, und nennen den horizontalen Abstand des Wassers von der Wandfläche zur Zeit  $t$ ,  $y$ , und den vertikalen Abstand von der Höhe  $b$ ,  $x$ , so muß zugleich für jedes Wasserteilchen

Fig. 157.



$$y = \sqrt{2gH} \cdot t, \quad x = \frac{g}{2} t^2$$

sein, das heißt, in einem horizontalen Abstand  $\sqrt{2gH} \cdot t$  muß das Teilchen um  $\frac{g}{2} t^2$  unter der Öffnung liegen. Die zusammengehörigen  $x$  und  $y$  erhalten wir dadurch, daß wir  $t$  eliminieren

$$t^2 = \frac{y^2}{2gH} \quad t^2 = \frac{2x}{g}$$

$$y^2 = \frac{4gHx}{g} = 4Hx.$$

Man kann sich bei Unterhaltung eines kontinuierlichen Wasserstrahles davon überzeugen, daß die Gestalt desselben der Theorie entspricht.

Die Gleichung (II) läßt noch eine bemerkenswerte Folgerung zu über die Verteilung des Druckes im Innern einer fließenden Flüssigkeit, sie zeigt, daß der Druck in derselben ein ganz anderer ist, als er in einer ruhenden Flüssigkeit sich nach den Gesetzen der Hydrostatik ergibt. Lösen wir nämlich die Gleichung (II) nach  $p$  auf, so erhalten wir für den in der Tiefe  $h$  vorhandenen Druck  $gp$

$$gp = gp_0 + gsh - \frac{1}{2}s(v^2 - v_0^2).$$

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite geben den im Niveau  $h$  in ruhender Flüssigkeit vorhandenen hydrostatischen Druck, man sieht also unmittelbar, daß der Druck in der fließenden Flüssigkeit kleiner ist, um eine Größe, die dem Quadrate der Strömungsgeschwindigkeit proportional ist. Man bezeichnet diesen Druck  $gp$  als den hydraulischen Druck.

Die Größe dieses Druckes läßt sich leicht auswerten in Gefäßen von solcher Form, daß die Geschwindigkeit  $v$  gleichzeitig die gegen die Querschnitte senkrechte Geschwindigkeit ist, also in nicht zu engen Röhren etwa, welche aus einem größern Reservoir vertikal absteigen. Ist der Querschnitt des Reservoirs gegen jenen der Röhren hinreichend groß, so können wir zunächst  $v_0 = 0$  setzen. Ist dann  $H$  die Tiefe der Ausflußöffnung,  $q_1$  der Querschnitt der Ausflußöffnung und  $q$  der Querschnitt der Röhre in der Tiefe  $h$  unter der Oberfläche, so ist

$$qv = q_1 v_1,$$

somit

$$gp = gp_0 + gsh - \frac{1}{2}s\left(\frac{q_1}{q}\right)^2 v_1^2$$

und wenn die Röhren nicht zu enge sind und der Ausfluß in freier Luft erfolgt,

$$v_1^2 = 2gH$$

$$p = p_0 + sh - s\left(\frac{q_1}{q}\right)^2 H$$

$$p = p_0 + s\left(h - \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 H\right).$$

Je nach dem Verhältnis der Querschnitte  $q_1$  und  $q$  kann das rechte Glied auf der rechten Seite positiv, Null oder negativ werden. Ist  $1$

$0,25 H$  und  $q = 2q_1$ , so wird das zweite Glied Null, der dort vorhandene Druck ist also einfach gleich dem auf der Oberfläche der Flüssigkeit lastenden Drucke. Fließt also die Flüssigkeit in freier Luft aus, so kann man an einer solchen Stelle die Gefäßwand durchbohren können, daß dort Flüssigkeit austräte, oder daß die Bewegung der Flüssigkeit im geringsten gestört wird.

Ist  $q_1 = q$ , fließt also die Flüssigkeit durch hinreichend weite zylindrische Röhren, deren unterster Querschnitt die Ausflußöffnung ist, aus einem größeren Reservoir aus, so wird

$$p = p_0 - s(H - h),$$

also in allen Punkten dieser Röhren der Druck kleiner als der auf der Oberfläche der Flüssigkeit wirkende Druck, der Druck wird um so kleiner, je größer  $H - h$  ist. Anwendungen dieses Satzes werden wir im nächsten Kapitel in der Sprengelschen Luftpumpe und den dieser ähnlichen konstruierten Apparaten kennen lernen.

### § 88.

**Ausflußmenge.** Wie wir im vorigen Paragraphen erwähnten, läßt das Toricellische Theorem durch Beobachtung der parabolischen Bahn eines horizontal ausfließenden Wasserstrahls experimentell nachweisen. Auf einen ersten Blick scheint es, man könne dieses Theorem noch in anderer Weise prüfen, indem man die Menge der aus einer kleinen Öffnung von einem bestimmten Querschnitt ausfließenden Flüssigkeit mißt, und diese mit der aus dem Toricellischen Theorem gegebenen vergleicht. Ist die Ausflußgeschwindigkeit gleich  $\sqrt{2gH}$  und der Querschnitt der Öffnung gleich  $q_1$ , tritt in der Zeit  $t$  aus der Öffnung ein Zylinder hervor, so ist dessen Volumen dasjenige der in der Zeit  $t$  austretenden Flüssigkeitsmenge  $m$ ; also ist gleich

$$m = q_1 t \sqrt{2gH}.$$

Bezeichnen wir mit  $s$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist das Gewicht  $G$  der ausgeflossenen Flüssigkeit

$$G = sm = sq_1 t \sqrt{2gH}.$$

Sammelt man nun aber die ausgeflossene Flüssigkeitsmenge in einem Gefäß von bekanntem Gewicht, und bestimmt man die wirklich ausgeflossene Menge durch Wägung, so findet man dieselbe stets kleiner, und zwar so, daß das Gewicht derselben  $G'$

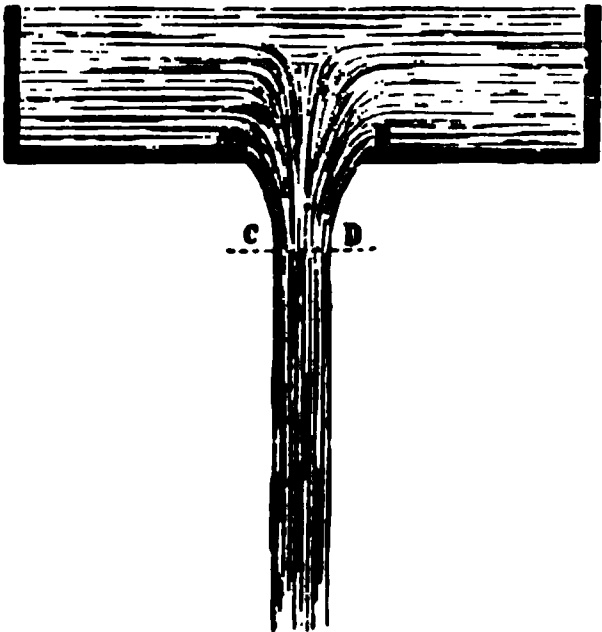
$$G' = 0,62 \cdot G,$$

ausgeflossene Menge also nicht ganz  $\frac{2}{3}$  der theoretisch berechneten beträgt.

Dieses Resultat, welches sich unmittelbar aus den Beobachtungen ergibt, steht demnach mit der Theorie in Widerspruch. Jedoch ist dieser Widerspruch nur scheinbar, denn die Voraussetzungen, unter denen wir die Ausflußmengen theoretisch entwickelten, sind nicht vollständig; wir haben einige störende Umstände vernachlässigt, welche uns eine genauere Betrachtung des ausfließenden Strahles kennen lehrt.

Wenn man nämlich den aus einer Bodenöffnung ausfließenden aufmerksam betrachtet, so findet man, daß er nicht, wie wir es v setzten, zylindrisch ist, sondern daß er sich sehr rasch unter der Ö zusammenzieht und eine kegelförmige Gestalt annimmt (Fig. 158) u von  $CD$  ab mit nahezu zylindrischer Form weiter herabfällt. Dies traktion haben wir bisher außer acht gelassen. Denn nach unsere

Fig. 158.



herigen Betrachtungen dürfte nur eine g und an dem ganzen Strahle, soweit i sammenhängt, regelmäßige Zusammenzi des Strahles stattfinden, die sich leicht bestimmen läßt. Nach dem Verlassen de flußöffnung wird nämlich die Bewegung Flüssigkeit durch die Wirkung der St eine gleichmäßig beschleunigte.

Eine Schicht, welche die Öffnung n Geschwindigkeit  $v_1$  verlassen hat, durc demnach in der Zeit  $T$  die Strecke  $S$

$$S = v_1 T + \frac{g}{2} T^2.$$

Nach der Zeit  $T$  verläßt eine Schicht die Öffnung, welche von der ersten um  $S$  entfernt ist. Abstand muß sich aber vergrößern; denn betrachten wir ihn nac Zeit  $t$ , so ist der Abstand der ersten Schicht von der Öffnung zu  $T + t$  gleich  $S + S'$

$$S + S' = v_1 (T + t) + \frac{g}{2} (T + t)^2,$$

der Abstand der zweiten Schicht  $S'$  aber

$$S' = v_1 t + \frac{g}{2} t^2.$$

Der Abstand beider Schichten daher

$$S + S' - S' = v_1 (T + t) - v_1 t + \frac{g}{2} \{ (T + t)^2 - t^2 \},$$

$$S + S' - S' = v_1 T + \frac{g}{2} T^2 + g T t = S + g T t.$$

Der Abstand der Schichten wächst demnach proportional  $T$ ; so Strahl zusammenhängend sein, so muß er in eben dem Verhältnis werden, also regelmäßig und nahezu in demselben Verhältnis, als e von der Öffnung entfernt. Statt dessen beobachtet man sehr nahe der Öffnung eine sehr rasche Zusammenziehung des Strahles, so zw der Querschnitt desselben in einem Abstände von der Öffnung, d gefähr dem Halbmesser der Öffnung gleich ist, nur mehr gleich dem Querschnitte der Öffnung ist. Von da an zieht sich der Stral mehr in der Weise zusammen, wie er es nach unseren obigen E lungen tun muß, bis er in Tropfen zersplittert.

Diese anomale Kontraktion des Strahles, welche man als *Con venae* bezeichnet, vermindert also den Querschnitt desselben so, d

als  $\frac{2}{3}$  der Ausflußöffnung wird; sie ist für größere Öffnungen und Drucke sogar noch bedeutender.<sup>1)</sup>

Es ist klar, daß dadurch die Ausflußmenge eine kleinere werden wird. Die Erfahrung hat ergeben, daß diese sich gerade so verhält, wie die engste Stelle des Strahles dort, wo die Contractio venae auftritt, zur wirklichen Ausflußöffnung. Die Erfahrung ergibt nämlich, wie wir oben sahen, daß die wirkliche Ausflußmenge  $G'$  ist

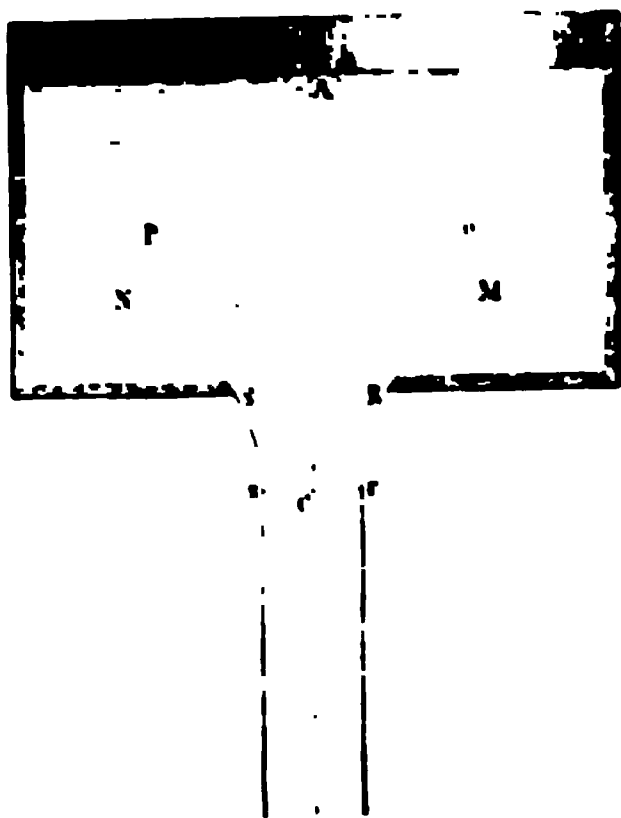
$$G' = 0,62 G,$$

$$G' = 0,62 s q_1 t \sqrt{2gH}.$$

Die vielfachen Versuche, die Störungen, welche die Kontraktion verursacht, mit in Rechnung zu ziehen, und so auch die Menge  $G'$  theoretisch zu berechnen, haben noch zu keinem befriedigenden Resultate geführt. Wir wollen uns doch über die Gründe Rechenschaft geben, welche die Kontraktion veranlassen. Es ist nicht, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, die Geschwindigkeit aller die Öffnung passierenden Flüssigkeitsteile, die auch senkrecht gegen die Öffnung gerichtet.

Es bewegen sich nämlich nicht nur die senkrecht über der Öffnung  $SR$  befindlichen Flüssigkeitsteile (Fig. 159), sondern wegen der freien Beweglichkeit auch die seitlich liegenden gegen die Ausflußöffnung hin. Es bewegen sich z. B. die Wasserteilchen rechts von der Öffnung in der Richtung  $OR$  und  $OC'$ , die Teilchen links in  $NS$  und  $PC'$  sich bewegen. Die in  $M$  und  $O$ ,  $N$  und  $P$  gelegenen Wasserteilchen haben daher eine gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwindigkeit. Der Strahl besteht aus einer konischen Hülle, welche ausströmenden Flüssigkeitsfäden gebildet wird. Hierdurch tritt für die Mitte des ausströmenden Strahles eine Verzögerung ein, die mit dem Abstande von der Öffnung der Strahl wächst. Die Geschwindigkeiten in der Mitte ist kleiner; mit dem Abstande von der Öffnung der Strahl wächst. Die Geschwindigkeiten im ganzen Querschnitt des Strahles sind die gleichen.<sup>2)</sup> Dort, wo diese aus entgegengesetzter Seite kommenden Flüssigkeitsteile sich treffen, muß die nicht von der ungleichmäßigen Bewegung herrührende Geschwindigkeitsverminderung, die eigentliche Contractio venae, ihr Ende erreichen, indem die seitlichen Geschwindigkeiten der von entgegengesetzter Seite kommenden Wasserteilchen sich aufheben und eine vertikal herabgehende Resultierende entstehen. Demnach ist eigentlich nicht die Öffnung  $SR$  der Querschnitt der

Fig. 159.



<sup>1)</sup> Bazin findet für quadratische Öffnungen von 20 cm Seitenlänge und Druckhöhe von 20 und 10 cm Durchmesser bei einer Druckhöhe von 1 m  $0,598$  für eine rechteckige Öffnung von 80 cm Länge und 20 cm Breite aber  $0,598$  Comptes Rendus. 118. p. 1031. 1894.

<sup>2)</sup> Bazin, Comptes Rendus. 118. p. 1033. 1894.

Ausflußöffnung, sondern der durch die Kontraktionsstelle  $C$  geführt schnitt, da erst von dort an die Flüssigkeit unserer Annahme gemäß vertikal herab bewegt, also von dort erst die Voraussetzungen der Berechnungen stattfinden. Da nun die Kontraktion an dieser Stelle so stark ist, daß der Querschnitt bei  $sr$  gleich ist 0,62 der Öffnung, so auch die Ausflußmenge nur 0,62 der vorhin berechneten sein.

Aus dieser Erklärung läßt sich auch leicht der Einfluß von Röhren an die Ausflußöffnung ableiten. Wenn man nämlich die Flüssigkeit anstatt durch eine einfache Wandöffnung durch kurze Röhren ausströmen läßt, so wird dadurch die Ausflußmenge je nach der Gestalt der Röhre verschieden modifiziert. Hat die Ausflußröhre eine konische Gestalt, so wie sie sich der Gestalt des ausfließenden Strahles auszeichnet, so wird durch, wenn wir als Ausflußöffnung die der Wand des Gefäßes annehmen, die Ausflußmenge nicht modifiziert; sehen wir aber als Ausflußöffnung den Querschnitt der Röhre an ihrem Ende an, so wird die Ausflußmenge vergrößert, da sie so groß ist, als das Toricellische Theorem ohne Berücksichtigung der Kontraktion verlangt.

Wendet man aber eine zylindrische Röhre an, welche von der Flüssigkeit benetzt wird, oder setzt man an das erste konische Rohr ein zweites konisches Rohr an, welches sich wieder erweitert und allmählich in einen Zylinder übergeht von der Weite der Ausflußöffnung, so wird die Ausflußmenge der ausfließenden Flüssigkeit bedeutend gesteigert, so daß 0,8 – 0,9 der theoretischen Ausflußmenge ausfließt. Das ist jedoch nur dann der Fall, wenn der Strahl rings an den Wänden des Zylinders adhärirt, tut er das nicht, so wird die Ausflußmenge nicht geändert.

Durch die konischen Ansatzröhren, welche sich der Gestalt des Strahles annähern, wird die Bewegung der Flüssigkeiten nicht geändert, höchstens durch Reibung an der Rohrenwand um ein geringes verzögert; in zylindrischen Ausflußröhren wird aber durch die Adhäsion der Flüssigkeit an den Wänden des Zylinders der kontrahierte Strahl wieder verbreitert und nahezu zylindrisch gemacht. Dadurch würde der Strahl zerreißen und im Innern des Rohres ein leerer Raum entstehen müssen. Dem wirkt aber die Kohäsion des Wassers und der äußere Luftdruck entgegen, der zum Teil die Flüssigkeit in der Röhre nachtreibt, zum Teil den Ausfluß verzögert. Dadurch aber, daß der ausfließende Strahl nahezu zylindrisch wird, vermehrt sich die Menge der ausfließenden Flüssigkeit.

Wenn man sich auch zum Teil über diese die Ausflußmenge betreffenden Tatsachen Rechenschaft geben kann, so sind wir doch noch weit entfernt, dieselben vollständig verstehen und aufklären zu können. In den meisten Fällen, besonders wenn der Ausfluß anstatt aus einfachen Wandöffnungen aus Röhrensystemen erfolgt, welche noch dazu zum Teil gekrümmt sind, finden wir uns auf die Resultate der Erfahrung angewiesen, um die Mengen der ausfließenden Flüssigkeit zu bestimmen, da die theoretische Behandlung zu viele Schwierigkeiten bietet. Wir verweisen deswegen auf die Lehrbücher der Hydraulik, z. B. auf das betreffende Kapitel von A. Ritter, Ingenieurmechanik. Leipzig, Baumgartners Verlag. VI. Auflage 1892.



## § 89.

**ng der Flüssigkeiten.** Die am Schlusse des vorigen Paragraphen vorgehobene Abweichung in dem Verhalten der Flüssigkeiten von uns für die einfachsten Fälle abgeleiteten Gesetzen kann bedeutend sein, da wir bei unserer Ableitung zwei Umstände außer Acht gelassen haben. Zunächst haben wir die Flüssigkeiten als vollkommen gleichartig vorausgesetzt, das heißt angenommen, daß die Bewegung der Flüssigkeit durch benachbarte Flüssigkeit nicht alteriert wird, was nur annähernd richtig sein kann. Denn da die Schichten der Flüssigkeit einander anziehen, so muß eine bewegte Schicht an einer ruhenden oder langsamer sich bewegenden Flüssigkeit vorüberfließende Reibung erfahren, welche ihre Geschwindigkeit verkleinert.

Wenn dann gleichzeitig, wegen der sehr leichten Beweglichkeit der Schichten, die ruhende Schicht eine Bewegung im Sinne der bewegten Schicht erfährt, so wird die langsamer sich bewegende eine Beschleunigung im gleichen Sinne erfahren, und die Beschleunigung der langsameren wird gleich sein der Beschleunigung der schneller sich bewegenden Schicht. Die Reibung wirkt auf die rascher bewegte Schicht wie eine die Bewegung verzögernde Kraft, auf die langsamer sich bewegende wie eine dieselbe beschleunigende Kraft. Die Größe dieser Kraft werden wir annehmen dürfen, daß sie der Differenz der parallelen Geschwindigkeiten proportional ist, um so mehr, je größer die Geschwindigkeitsdifferenz benachbarter Schichten immer nur äußerst gering sein kann. Außerdem wird die Kraft der Flächenausdehnung proportional sein, mit der sich die Schichten berühren; Annahmen über die Größe der Reibung, welche schon Newton gemacht hat. Weiter nimmt man an, daß diese Kraft unabhängig ist von dem Drucke, der im Innern der Flüssigkeit vorhanden ist<sup>1)</sup>.

Da wir nun von uns bei der Ableitung der Ausflußgesetze außer Acht gelassen haben, daß die Reibung, welche die bewegte Flüssigkeit an der Wand des Gefäßes erfährt. Wir wissen, daß zwischen den festen und flüssigen Körpern stets molekulare Kräfte tätig sind, infolge deren die Flüssigkeit mehr oder weniger fest an den Körpern haften; infolgedessen jedes an einer festen Wand vorüberbewegte Flüssigkeitsteilchen eine Verzögerung erfahren. Die diese Verzögerung bewirkende Kraft können wir proportional der Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit der festen Wand vorbeigeht, und der Flächenausdehnung proportional setzen, mit der die Flüssigkeitsschicht die feste Wand berührt. Bezeichnen wir mit  $\epsilon$  eine Konstante, so können wir die Verzögerung  $K$ , welche die Flüssigkeit an der festen Wand mit der Geschwindigkeit  $v$  die Wand in der Fläche  $f$  erfährt, setzen

$$K = \epsilon f v.$$

Die Konstante  $\epsilon$  bezeichnet man als den Koeffizienten der äußeren

<sup>1)</sup> siehe darüber *Hagenbach*, Poggend. Ann. 109. p. 385. 1860; *E. Hagenbach*, Poggend. Ann. 113. p. 55. 1861; *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akademie. 507. 1860; *Stefan*, Wiener Berichte. 46. p. 8. 1862; *Stokes*, Cambridge Transactions. 8. 1849.



Reibung; sie bedeutet die in der Flächeneinheit der Schicht wirksame Kraft, wenn die Flüssigkeitsschicht mit der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vorübergeht, oder was dasselbe ist, die Kraft, welche erforderlich ist, um die Flüssigkeitsschicht mit gleichförmiger Bewegung und der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vorüber zu führen; dieselbe hängt nur ab von der Natur der Flüssigkeit und der festen Wand, ebenso wie der Randwinkel, unter welchem die Flüssigkeit die feste Wand schneidet. In dem Falle, in welchem die feste Wand von der Flüssigkeit vollkommen benetzt wird, kann man den Wert dieses Koeffizienten sofort angeben; denn in dem Falle haftet die letzte Schicht einfach fest an der Wand, ohne an der Bewegung der übrigen Flüssigkeit teilzunehmen. Die Geschwindigkeit der Bewegung an der Wand ist also immer gleich Null, die Verzögerung ist unendlich groß, es muß also  $\varepsilon$  unendlich groß sein.

Ganz derselbe Ausdruck, der die Verzögerung an einer festen Wand darstellt, liefert uns auch die Verzögerung, welche eine Flüssigkeit erfährt, wenn sie sich an einer andern hinbewegt, wie z. B. Wasser über einer Quecksilberschicht, oder Quecksilber unter einer Wasserschicht; die Konstante  $\varepsilon$  bedeutet dann die Reibung zweier Flüssigkeiten aneinander.

Um ganz ebenso die Verzögerung, welche die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht durch die umgebende mit ihr, jedoch langsamer bewegte Flüssigkeit erfährt, ausdrücken zu können, denken wir uns einen Zylinder, durch welchen die Flüssigkeit fließe. In dem ersten Querschnitt des Zylinders mögen alle Flüssigkeitsteilchen die gleiche der Zylinderachse parallele Geschwindigkeit haben; in einiger Entfernung von diesem Querschnitt hat dann aber die zunächst an der Wand befindliche Schicht eine gewisse Verzögerung erfahren, welche sich somit langsamer bewegt als die nach der Achse des Zylinders zu folgende Schicht; diese erfährt dann ebenso eine Verzögerung und wirkt infolgedessen wieder verzögernd auf die nächstliegende innere Schicht und so fort. Es wird sich somit die Geschwindigkeit in irgend einem zur Achse des Zylinders, also zur Strömungsrichtung senkrechten Querschnitte stetig ändern, sie wird, wenigstens dann, wenn die Flüssigkeit die Wand benetzt, wahrscheinlich aber immer, vom Rande gegen die Mitte stetig zunehmen. Daraus folgt dann weiter, daß die Geschwindigkeit zweier benachbarten, das ist nur um die Distanz der Flüssigkeitsmoleküle voneinander entfernten Flüssigkeitsschichten nur unendlich wenig voneinander verschieden sein kann. Nennen wir deshalb die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsschicht im Abstände  $x$  von der Achse des Zylinders  $v$ , die Geschwindigkeit der nächstfolgenden, von der erstern um den Abstand  $dx$  zweier Moleküle entfernten Schicht  $v + dv$ , so würde nach den vorhin gemachten Annahmen die Kraft, welche auf die schneller bewegte Schicht verzögernd einwirkt,

$$K = \varepsilon_1 f dv,$$

wenn  $f$  die Fläche ist, in welcher sich die Schichten berühren, und  $\varepsilon_1$  eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Konstante bedeutet, welche die äußere Reibung bedingenden Konstanten  $\varepsilon$  entspricht.

Die Bestimmung dieser Konstanten  $\varepsilon_1$  würde indes nicht ausführlich sein, da man den Wert von  $dv$  niemals angeben kann, ebensowenig den Wert von  $dx$ , den Abstand der Moleküle. Man definiert deshalb

Konstante der innern Reibung etwas anders. Nach der vorhin gemachten Entwicklung ist die Geschwindigkeit  $v$  abhängig von dem Abstände der betrachteten Schicht von der Achse des Zylinders, also eine Funktion von  $x$ . Wie wir nun in der Einleitung sahen, läßt sich dann, wenn  $v = f(x)$ , das Differential  $dv$  stets darstellen durch

$$dv = f'(x) dx,$$

wenn wir den ersten Differentialquotienten der Funktion mit  $f'(x)$  bezeichnen. Setzen wir diesen Wert für  $dv$  ein und schreiben gleichzeitig  $K$  für  $f'(x)$  das ihm gleiche  $\frac{dv}{dx}$ , so wird

$$K = \epsilon_1 dx \cdot f' \frac{dv}{dx}.$$

Da  $dx$  den Abstand zweier Moleküle der Flüssigkeit bedeutet, so ist für jede Flüssigkeit  $\epsilon_1 dx$  ebensogut eine Konstante wie  $\epsilon_1$ , bezeichnen wir sie mit  $\eta$ , so wird

$$K = \eta \cdot f' \frac{dv}{dx}.$$

Diese Konstante  $\eta$  bezeichnet man als den Koeffizienten der innern Reibung oder auch kurz als die Reibungskonstante<sup>1)</sup>. Ihre Bedeutung läßt sich leicht angeben, es ist die Kraft, welche auf die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht verzögernd einwirkt, wenn sie die benachbarte langsamere Schicht in der Flächeneinheit berührt, und wenn  $\frac{dv}{dx}$  der Einheit gleich ist. Da nun  $dv$  der Unterschied der Geschwindigkeiten zweier um  $dx$  voneinander entfernter Schichten ist, so bedeutet  $\frac{dv}{dx}$  den Geschwindigkeitsunterschied zweier Schichten, welche um die Längeneinheit voneinander entfernt sind, vorausgesetzt, daß jedesmal, wenn wir von einer Schicht zur nächstfolgenden um  $dx$  von ihr entfernten Schicht übergehen, der Geschwindigkeitsunterschied  $dv$  derselbe ist. Denn da  $dx$  der Abstand zweier Schichten ist, so ist  $\frac{1}{dx} = n$  die Anzahl der in der Längeneinheit vorhandenen Schichten, somit ist, wenn  $dv$  der Unterschied in der Geschwindigkeit je zweier benachbarter Schichten ist,  $dv \cdot \frac{1}{dx} = dv \cdot n$ , der Unterschied der Geschwindigkeit der ersten und  $n$ -ten Schicht, also der um die Längeneinheit voneinander entfernten Schichten.

Aus der Definition des Reibungskoeffizienten ergibt sich sofort dessen Dimension im absoluten Maßsystem. Das Produkt desselben mit einer Fläche und dem Quotienten einer Geschwindigkeit dividiert durch eine Länge ist eine Kraft, somit

$$\eta \cdot \lambda^2 \cdot \frac{\lambda}{\tau \cdot \lambda} = z [\mu \lambda \tau^{-2}]$$

$$\eta = z [\mu \lambda^{-1} \tau^{-1}].$$

Man erkennt leicht, daß die innere und äußere Reibung der Flüssigkeiten die von uns berechnete Ausflußgeschwindigkeit verkleinern müssen,

<sup>1)</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann 118. 1861.

aber auch gleichzeitig, daß es sehr schwierig ist, dieselben in Rechnung zu ziehen, selbst wenn man die Reibungskonstanten kennt, da man dann das Gesetz kennen muß, nach welchem sich die einander parallelen Geschwindigkeiten in einem zur Geschwindigkeitsrichtung senkrechten Querschnitt ändern.

In einem Falle lassen sich die Rechnungen vollständig durchführen, nämlich dann, wenn man die Flüssigkeiten durch ein horizontales zylindrisches kapillares Rohr mit kreisförmigem Querschnitt unter konstanter Druckhöhe ausfließen läßt. In dem Falle fließt nämlich die Flüssigkeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit durch das Rohr hindurch, und wenn das Rohr enge genug ist, so findet überhaupt nur eine der Zylinderachse parallele Bewegung statt. In jedem zur Zylinderachse senkrechten Querschnitt ändert sich die Geschwindigkeit mit dem Abstände des betrachteten Flüssigkeitsteilchens von der Zylinderachse, an allen gleich weit von der Achse gelegenen Punkten der Röhre ist aber die Geschwindigkeit dieselbe. Die Flüssigkeit teilt sich also in der Röhre in konzentrische Hohlzylinder, von denen jeder eine bestimmte, auf seiner ganzen der Länge der Röhre gleichen Länge dieselbe Geschwindigkeit besitzt, welche aber von Zylinder zu Zylinder sich ändert.

Da die Bewegung für jeden dieser Zylinder eine gleichförmige ist, so folgt, daß die Beschleunigung, welche er durch die vorhandenen Kräfte erhält, gleich sein muß der Verzögerung, welche er durch die Reibung erfährt, denn nur wenn die Beschleunigungen und Verzögerungen sich aufheben, kann die Bewegung eine gleichförmige sein.

Wir denken uns einen der Flüssigkeitszylinder in dem Abstände  $x$  von der Achse, die Dicke seines Mantels sei  $dx$ , von diesem Zylinder betrachten wir ein Stück von der Länge  $dl$ , welches sich im Abstände  $l$  von dem Beginne der kapillaren Röhre befinde. Ist der hydraulische Druck im Punkte  $l$  gleich  $p$ , so wird er am andern Ende des von uns betrachteten Zylinderstückes gleich  $p + dp$  sein, wo wir  $dp$  setzen können, wie vorher

$$dp = \frac{dp}{dl} \cdot dl.$$

Da die Basis des Zylindermantels  $2\pi x \cdot dx$  ist, so ist die infolge der Druckänderung um  $dp$  forttreibende Kraft

$$k = 2\pi x \frac{dp}{dl} \cdot dl \cdot dx.$$

Der betrachtete Hohlzylinder ist auf seiner innern und äußern Seite mit andern Hohlzylindern in Berührung, welche eine andere Geschwindigkeit besitzen; der der Achse nähere ist um die Breite  $dx$  des Zylindermantels, welche einfach gleich ist dem Abstände der Moleküle, der Achse näher, der äußere ist um dieselbe Größe weiter entfernt. Bezeichnen wir die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen dem nächstinnern und dem betrachteten Zylinder mit  $dv$ , so ist

$$k_1 = \eta \cdot 2\pi x dl \cdot \frac{dv}{dx}$$

die Kraft, welche infolge der Reibung an dem innern Zylinder die

geschwindigkeit des betrachteten Zylinders zu vermehren strebt, da die Geschwindigkeit der Bewegung von der Achse nach außen abnimmt.

Nennen wir die Differenz der Geschwindigkeiten des betrachteten und des nächstfolgenden Zylinders  $dv'$ , so ist die Kraft, mit welcher der betrachtete Zylinder in seiner Bewegung verzögert wird, da der äußere Umfang des betrachteten Zylinders  $2\pi(x + dx)$  ist,

$$k'_1 = \eta \cdot 2\pi(x + dx) dl \cdot \frac{dv'}{dx}.$$

Setzen wir nun  $dv' = dv + d^2v$ , wo  $d^2v$  dann angibt, um wieviel mehr oder weniger sich die Geschwindigkeit ändert, wenn man von dem betrachteten Zylinder sich zu dem nächstäußern, als wenn man zu dem nächstinnern übergeht, so wird

$$\begin{aligned} k'_1 &= \eta 2\pi(x + dx) dl \left( \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} dx \right) = \\ &= \eta 2\pi x dl \frac{dv}{dx} + \eta 2\pi dx dl \frac{dv}{dx} + \eta 2\pi x dl \frac{d^2v}{dx^2} dx \\ &\quad + \eta 2\pi dl \frac{d^2v}{dx^2} dx^2. \end{aligned}$$

Das vierte Glied dieses Ausdrucks ist gegen die übrigen, da es mit dem Quadrate von  $dx$  multipliziert ist, verschwindend klein, so daß es vernachlässigt werden darf; das erste Glied ist gleich  $k_1$ , so daß wir erhalten

$$k'_1 = k_1 + \eta 2\pi dx \cdot dl \left( \frac{dv}{dx} + x \frac{d^2v}{dx^2} \right).$$

Wie wir oben sahen, folgt daraus, daß die Bewegung in der Röhre gleichförmige ist, daß die beschleunigenden und verzögernden Kräfte sich aufheben: da nun  $k$  und  $k_1$  die beschleunigenden,  $k'_1$  die verzögernden sind, so ist

$$\begin{aligned} k + k_1 &= k'_1 \\ 2\pi x \frac{dp}{dl} dl dx &= \eta 2\pi dx dl \left( \frac{dv}{dx} + x \frac{d^2v}{dx^2} \right) \\ \frac{dp}{dl} &= \left\{ \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \right\} \cdot \eta, \end{aligned}$$

die Gleichung, welche nach den Regeln der Differentialrechnung die hydraulischen Drucke an den verschiedenen Stellen der Röhre und die Geschwindigkeiten  $v$  der einzelnen Schichten zu berechnen gestattet.<sup>1)</sup>

Wir gelangen dazu in folgender Weise: Zunächst zeigt die letzte Gleichung, daß die rechte Seite derselben von  $l$  unabhängig ist, indem sie nur die Änderung der Geschwindigkeit mit wachsendem Abstände von der Röhrenachse enthält. Der auf der linken Seite stehende Quotient hat also zu jedem Wert von  $l$  denselben Wert, oder es ist

<sup>1)</sup> Man sehe *Hagenbach*, Poggend. Ann. 109. 1860; *Jacobson* in *Reichert und Du Bois Reymond*, Archiv für Anatomie und Physiologie. Jahrg. 1860. p. 80. und dort die von *Neumann* gegebene Ableitung mitteilt, welche die oben entwickelte Gleichung in ähnlicher Weise liefert: *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akademie. 40. 1880.

$$\frac{dp}{dl} = \text{const} = a; \quad dp = a dl$$

und daraus folgt,

$$p = c + al.$$

Die Werte von  $c$  und  $a$  ergeben sich aus den Drucken am Anfang der Röhre, wo die Flüssigkeit in dieselbe eintritt,  $p_a$  für  $l = 0$  und am Ende der Röhre, wo die Flüssigkeit austritt,  $p_e$  für  $l = L$

$$c = p_a; \quad p_e = p_a + aL; \quad a = -\frac{p_a - p_e}{L},$$

somit wird der Druck  $p$  im Abstände  $l$  vom Anfang

$$p = p_a - \frac{p_a - p_e}{L} \cdot l.$$

Setzen wir hiernach den Differentialquotienten von  $p$  nach  $l$  in unsere Gleichung, so wird

$$-\frac{p_a - p_e}{L \cdot \eta} = \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Da die linke Seite unserer Gleichung eine konstante, von den gegebenen Drucken, der Röhrenlänge und dem Reibungskoeffizienten nicht aber von  $x$  abhängende Größe ist, so muß  $v$  eine solche Funktion von  $x$  sein, daß deren erster Differentialquotient dividiert durch  $x$  und ebenso der zweite Differentialquotient eine konstante Größe ist. Das ist nur der Fall, wenn wir setzen

$$v = A + Bx^2,$$

denn dann ist

$$\frac{dv}{dx} = 2Bx; \quad \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} = 2B; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dx} = 2B.$$

Damit wird

$$-\frac{p_a - p_e}{\eta L} = 4B; \quad B = -\frac{p_a - p_e}{4\eta L}$$

und

$$v = A - \frac{p_a - p_e}{4\eta L} x^2.$$

Zur Bestimmung von  $A$  muß uns die Geschwindigkeit irgend eines der Flüssigkeitszylinder also für einen Wert von  $x$  angebbar sein. Es ist das der Fall für die an der Wand anliegende Schicht, also, wenn wir den Radius der Röhre mit  $R$  bezeichnen, für jene Schicht, welche dem Wert  $x = R$  entspricht.

Für diesen Hohlzylinder von der Dicke  $dx$  ist zunächst

$$k = 2\pi R dx \frac{dp}{dl} dl,$$

ferner  $k_1$ , da die den Zylinder beschleunigende Reibung durch den Zylinder erfolgt, dessen Wert  $x = R - dx$  ist,

$$k_1 = -\eta 2\pi R dl \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=R}.$$

Die verzögernde Reibung ist gleich dem Produkte des äußern Reibungs-  
koeffizienten mal der Geschwindigkeit  $v_0$  der äußersten Schicht mal dem  
Flächenstück  $2\pi Rdl$ , also

$$k'_1 = 2\pi Rdl\varepsilon v_0 = 2\pi Rdl\varepsilon \left( A - \frac{p_a - p_e}{4\eta L} R^2 \right)$$

Annahme, wenn wir  $k + k_1 = k'_1$  bilden und alles durch  $2\pi Rdl$  dividieren

$$\frac{dp}{dl} dx - \eta \left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=R} = \varepsilon \left( A - \frac{p_a - p_e}{4\eta L} R^2 \right).$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist, da dort die verschwindend kleine  
Größe  $dx$  vorkommt, gegen die anderen zu vernachlässigen, und wir er-  
halten, indem wir

$$\left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=R} = - \frac{p_a - p_e}{2\eta L} R$$

einsetzen,

$$A = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} R^2 + \frac{p_a - p_e}{2\varepsilon L} R$$

und damit

$$v = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} (R^2 - x^2) + \frac{p_a - p_e}{2\varepsilon L} R.$$

Wird die Wandfläche von der Flüssigkeit benetzt, so haftet die letzte  
nicht fest an derselben, es ist die äußere Reibung  $\varepsilon$  unendlich groß;  
dem Falle fällt das letzte Glied aus, es wird

$$v = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} (R^2 - x^2).$$

Das in der Zeiteinheit aus der Röhre austretende Flüssigkeitsvolumen  
halten wir in folgender Weise. Es ist  $v$  die Geschwindigkeit des Zylinders  
von der Dicke  $dx$  und dem Radius  $x$ , somit liefert uns  $v \cdot 2\pi x dx$   
diesem Hohlzylinder entsprechende Volumen, das in der Zeiteinheit aus  
Röhre austritt. Das gesamte austretende Volumen  $V$  erhalten wir in  
Summe der in den einzelnen Hohlzylindern, deren Radien zwischen  
 $0$  und  $x = R$  enthalten sind, austretenden Volumina, somit in dem  
Integral

$$V = \int_0^R \left( \frac{p_a - p_e}{4\eta L} (R^2 - x^2) + \frac{p_a - p_e}{2\varepsilon L} R \right) 2\pi x dx$$

$$V = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} \cdot 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2 + 2 \frac{\eta}{\varepsilon} R) x dx.$$

Da an der untern Grenze  $x = 0$  alle Glieder dieser Summe gleich  
sind, so wird

$$V = \frac{p_a - p_e}{4\eta L} \cdot 2\pi \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} + \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right) = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8\eta L} \left( R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right).$$

Bei solchen Flüssigkeiten, bei denen die Wandschicht in Ruhe also die äußere Reibung  $\epsilon$  unendlich groß ist, fällt das zweite Glied der Klammer des letzten Ausdrucks fort und es wird

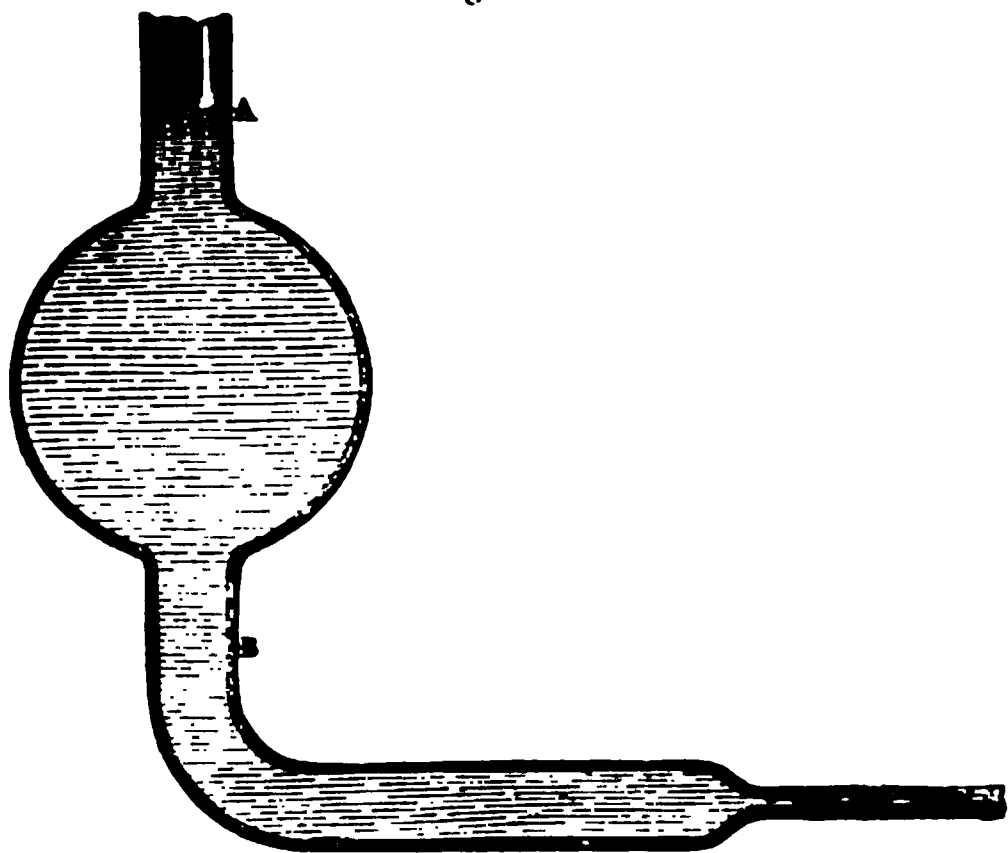
$$V = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8\eta L} R^4.$$

Das aus der kapillaren Röhre ausfließende Volumen ist dem die Flüssigkeit treibenden Drucke und der vierten Potenz des Radius der Röhre direkt, der Länge der Röhre und der innern Reibungskonstante der Flüssigkeit umgekehrt proportional.

Schon die Versuche von Hagen<sup>1)</sup> und besonders von Poiseuille, welche vor Kenntnis der Theorie Versuche über den Ausfluß von Flüssigkeiten durch enge Röhren angestellt haben, führten zu einem ganz entsprechenden Ausdruck für die durch kapillare Röhre fließende Flüssigkeitsmenge, weshalb auch die durch obige Gleichung gegebene Beziehung Poiseuillesches Gesetz genannt wird.

Das von Poiseuille angewandte Verfahren, welches mit geringen Modifikationen zu allen ähnlichen Versuchen benutzt wird<sup>3)</sup>, ist folgendes:

Fig. 160.



Eine Glaskugel ist mit einem Ansatzrohr  $A$  und einer Kapillare  $B$  versehen (Fig. 160), welche mit derselben Flüssigkeit gefüllt ist. Der Raum zwischen den Marken  $A$  und  $B$  ist genau ausgemessen. Die Röhre  $A$  ist in Verbindung gesetzt mit einem großen Gefäße, das mit komprimierter Luft gefüllt und in welchem man den Druck konstant hält. Die Kapillare ist etwas unterhalb gebogen und an dem Ende derselben werden die kapillaren Röhren angeschlossen, welche zu den Versuchen sollen, deren Länge

Durchmesser also genau gemessen sind. Der Apparat wird durch Saugen bis über  $A$  mit Flüssigkeit gefüllt und dann das Rohr  $A$  mit komprimierter Luft gefüllten Gefäße in Verbindung gesetzt. Die Kugel und das kapillare Rohr werden dann in ein Glasgefäß getaucht, das mit derselben Flüssigkeit gefüllt ist, welche zu den Ausflußversuchen benutzt wird, da erfahrungsmäßig nur dann ein regelmäßiges nicht stoßweises Fließen stattfindet.

Poiseuille beobachtete die Zeit, welche erforderlich war, das

1) Hagen, Poggend. Ann. 46. p. 423. 1841.

2) Poiseuille, Mémoires des Savants étrangers. T. IX. Poggend. Ann. 42. p. 424. 1845.

3) Man sehe unter andern Wiedemann, Poggend. Ann. 99. p. 221. Ostwald, Lehrb. der allgem. Chemie. 2. Aufl. 1. p. 549.



ben den Marken  $A$  und  $B$  enthaltene Flüssigkeit ausfloß, indem er Anzahl Sekunden bestimmte, welche erforderlich war, damit die Flüssigkeit von der Marke  $A$  zur Marke  $B$  sank.

Da die Zeiten, in denen ein gegebenes Volumen ausfließt, dem in Zeiteinheit ausfließenden Volumen umgekehrt proportional sind, so sind die Zeiten, in welchen die Flüssigkeit von  $A$  bis  $B$  sinkt, dem Druck  $p_a - p_c$  und der vierten Potenz des Radius umgekehrt, dagegen der Länge der Röhre direkt proportional sein. Alle diese Beziehungen bestätigte Poiseuille bei seinen Versuchen. Wir geben folgende mit Wasser gemessene Werte:

Länge der Röhre $L = 107,9 \text{ mm.}$	Durchmesser $0,135 \text{ mm.}$	
Höhe in mm der drückenden Wassersäule	Ausflußzeit in Sekunden.	
	Beobachtet	Berechnet
1984	5664	5664
10 501	1069	1070
20 561	546	546
30 845	365	364
41 381	273	271

Höhe der Wassersäule $1472,15 \text{ mm.}$	Durchmesser $0,252 \text{ mm.}$	
Länge der Röhre. mm	Ausflußzeit in Sekunden.	
	Beobachtet	Berechnet
108,24	633	633
84,52	492	492
54,00	314	314

Das Gesetz gilt, wie es auch der Theorie entspricht, welche Röhren gleicher Länge voraussetzt, daß die Bewegung eine gleichförmige wird, mehr für kurze Röhren, so ergab eine Röhre von  $9 \text{ mm}$  Länge als Ausflußzeit  $71'',5$ , nach obigen Zahlen hätte die Zeit  $52'',63$  sein müssen. Das Gesetz der Radien zeigen folgende Zahlen:

Höhe der Wassersäule $1984 \text{ mm.}$	Länge der Röhre $107,9 \text{ mm.}$
Durchmesser $D_1 = 0,136$	Ausflußzeit $T_1 = 5664''$
" $D_2 = 0,252$	" $T_2 = 468'',5$
$D_1^4 : D_2^4 = 471,57 : 5664.$	

vierten Potenzen der Durchmesser verhalten sich demnach umgekehrt die Ausflußzeiten.

Indem Poiseuille den Druck  $p_a - p_c = H$  in Millimetern der drückenden Wassersäule, also in Milligramm pro Quadratmillimeter, die Längen  $L$  in cm und Radius  $R$  in Millimeter ausdrückte, erhielt er das in einer Sekunde bei der Temperatur  $0^\circ$  ausfließende Wasservolumen in  $\text{mm}^3$

$$V = 2162,40 \frac{H R^4}{L} = \frac{\pi}{8 \eta} \frac{(p_a - p_c) R^4}{L}$$

also

$$2162,40 = \frac{\pi}{8 \eta}$$

$$\eta = \frac{\pi}{8 \cdot 2162,4} = 0,0001816$$

den Wert für diese beiden Ringe erhalten wir, wenn wir den abgeleiteten Ausdruck mit 2 multiplizieren. Dann gibt uns das Integral

$$\int_0^R \frac{\eta}{M} \frac{d\psi}{dx} 4\pi \varrho^3 d\varrho = \pi R^4 \frac{\eta}{M} \frac{d\psi}{dx}$$

die Verzögerung der Bewegung durch den Reibungswiderstand, den die Scheibe erfährt, wenn wir mit  $R$  den Radius der Scheibe bezeichnen.

An diesem Ausdrucke ist, im Falle die Dicke der Scheibe nicht außer acht gelassen werden darf, noch eine Korrektion wegen des an dem Umfange der Scheibe angreifenden Widerstandes anzubringen. Für den Umfang ist  $\varrho = R$  und, wenn  $h$  die Dicke der Scheibe ist, für  $f$  einzusetzen  $2\pi R h$ , so daß das Korrektionsglied wird

$$2\pi R^3 h \frac{\eta}{M} \frac{d\psi}{dx}.$$

Die sich so ergebende Verzögerung haben wir von der Beschleunigung, welche die bewegenden Kräfte dem System erteilen, abzuziehen, und erhalten dann für die Beschleunigung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{M}\varphi - \frac{2\gamma}{M}\frac{d\varphi}{dt} - \pi R^4 \frac{\eta}{M} \frac{d\psi}{dx} \left(1 + \frac{2h}{R}\right).$$

Bei großen dünnen Scheiben, wie sie zu solchen Versuchen benutzt werden, kann man das Glied  $\frac{2h}{R}$  vernachlässigen.

Die ziemlich schwierige Behandlung dieser Gleichung, wegen deren wir auf die Abhandlung von Meyer verweisen<sup>1)</sup>, ergibt, daß wir auch in dem Falle eine schwingende Bewegung erhalten, deren Amplituden nach einer geometrischen Reihe abnehmen, die also ein konstantes logarithmisches Dekrement zeigt. Das logarithmische Dekrement ist gerade wie in § 62 das Maß für die Verzögerung, es gibt also gleichzeitig den Widerstand der innern Reibung des Drahtes und den der Reibung in der Flüssigkeit.

Um den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit zu bestimmen, beobachtet man zuerst die Schwingung des Apparates in der Luft und dann jene, nachdem man die Scheibe in die Flüssigkeit gebracht hat. Aus der Differenz der logarithmischen Dekremente erhält man den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit in einem recht komplizierten mathematischen Ausdruck.

Die nach diesem Verfahren gemachten Beobachtungen liefern, nach den Meyerschen Gleichungen berechnet, nicht unerheblich größere Werte der Reibungskoeffizienten als die Methode des Ausflusses durch kapillare Röhren, wie sich sowohl aus den Versuchen von Meyer selbst als denen von Grotrian<sup>2)</sup> und Walter König<sup>3)</sup> ergibt. König<sup>4)</sup> ersetzte deshalb die von Meyer angewandten schwingenden Scheiben durch schwingende

1) O. E. Meyer, Crelles Journal. 59. Poggend. Ann. 113. p. 55. 1861.

2) Grotrian, Poggend. Ann. 157. p. 130 u. 237. 1876.

3) Walter König, Wiedem. Ann. 25. p. 618. 1885.

4) König, Wiedem. Ann. 32. p. 193. 1887

gen, für welche Kirchhoff die Bewegungsgleichungen abgeleitet hat, und für welche sich die Theorie vollständiger entwickeln läßt. Indem er an die von Boltzmann noch vervollständigten Kirchhoffschen Ausdrücke zur Berechnung benutzte, gelangte er zu dem Resultate, daß die nach der Coulombschen Methode erhaltenen Werte der Reibungskoeffizienten denjenigen gleich werden, welche man mittels des Ausflusses durch kapillare Röhren erhält.

Folgende kleine Tabelle stellt die mit drei verschiedenen Kugeln für Wasser bei der Temperatur  $17^{\circ}$  erhaltenen Werte mit den aus Ausflußversuchen abgeleiteten Werten zusammen.

Kugel	$\eta$	Ausflußversuche von		
Nr. 1	0,011 15			
„ 2	0,011 09			
„ 3	0,011 12	Poiseuille	Grottrian <sup>1)</sup>	König <sup>2)</sup>
Mittel	0,011 12	0,010 89	0,011 06	0,011 05

König hat dann auch eine Korrektur der Meyerschen Gleichungen gegeben, die wir kurz dahin angeben können, daß er statt des Trägheitsmomentes  $M$  des schwingenden Systems einen größeren und zwar von dem Reibungskoeffizienten selbst abhängigen Wert einführt. Infolge der Reibung wird nämlich auch eine gewisse Flüssigkeitsmenge mit in schwingende Bewegung gesetzt, so daß infolge der Reibung auch die Masse des schwingenden Systems vergrößert wird. Daß infolgedessen die Beziehung zwischen dem logarithmischen von der Flüssigkeitsreibung herrührenden Termen und dem Reibungskoeffizienten noch komplizierter wird, erkennt man unmittelbar. Unter Anbringung dieser Korrektur ergeben sich nach König bei etwa  $17^{\circ}$  folgende Werte der Reibungskoeffizienten:

Substanz.	Schwingung.	Ausfluß.
Wasser . . . . .	0,011 20	0,011 05
Schwefelkohlenstoff . . . . .	0,003 88	0,003 88
Äthyläther . . . . .	0,002 56	0,002 54
Leichtes Benzol . . . . .	0,005 23	0,005 26
Schweres Benzol . . . . .	0,006 88	0,006 89
Terpentinöl . . . . .	0,018 65	0,018 86.

Auch O. E. Meyer<sup>3)</sup> hat seine ältern Versuche mit der von König gegebenen Korrektur neu berechnet und erhält aus denselben für Wasser sehr gut mit den Poiseuilleschen übereinstimmende Werte.

Noch ein drittes Verfahren ist zur Messung des Reibungskoeffizienten in Flüssigkeiten zuerst von v. Helmholtz und Piotrowski<sup>4)</sup> und später von O. E. Meyer und Mützel<sup>5)</sup> angewandt worden. Dasselbe ist gewissermaßen die Umkehr des Coulombschen Verfahrens; während man bei diesem Kugeln oder Scheiben in der zu untersuchenden Flüssigkeit hin- und herbewegen läßt, wendet man nach dem Verfahren von v. Helmholtz

1 Grottrian, Wiedem. Ann. 8. p. 536. 1879.

2 König, Wiedem. Ann. 25. p. 618. 1885.

3 O. E. Meyer, Wiedem. Ann. 32. p. 642. 1887.

4 v. Helmholtz und Piotrowski, Wiener Ber. 40. p. 607. 1860.

5 O. E. Meyer, Wiedem. Ann. 48. p. 1. 1891. Mützel, ebend. p. 15. 1891.

Hohlkugeln oder flache Hohlzylinder von ziemlich großem Durchmesser in welche die zu untersuchende Flüssigkeit eingefüllt wird. Man verfährt gerade wie bei dem Coulombschen Verfahren den Apparat in Schwingung und bestimmt das logarithmische Dekrement derselben. Bestimmt man gleichzeitig das logarithmische Dekrement, wenn der Apparat ohne Flüssigkeit schwingt, so erhält man in der Differenz der beiden die von der Flüssigkeitsreibung herrührende Dämpfung. Wie dieselbe entsteht, sieht man leicht. Würde die Flüssigkeit an den Wänden absolut nicht haften, so würde dieselbe an der Bewegung nicht teilnehmen, da die bewegenden Kräfte zunächst nur das Gefäß antreiben. Haftet die Flüssigkeit an der Wand, so wird zunächst die Wandschicht mitgenommen und von da infolge der Reibung die nächstfolgende Schicht, die Reibung überträgt weiter die Bewegung auf eine dritte Schicht usw., so daß sich die Bewegung bis zu einer gewissen Tiefe in der Flüssigkeit fortpflanzt, wobei die Geschwindigkeit der Bewegung um so kleiner wird, je weiter die Schicht von der Wand entfernt ist. Wir gehen auf die Theorie der Methode, welche ebenso schwierig ist als die der Coulombschen und zu einem nicht minder komplizierten Zusammenhang des Reibungskoeffizienten mit dem Dekrement führt, nicht ein; wir bemerken nur, daß Müttzel für  $20^\circ$  den Reibungskoeffizienten des Wassers gleich 0,01014 findet, während derselbe aus den Beobachtungen von Poiseuille 0,01009 bei derselben Temperatur ist.

Eine andere Methode wurde von Brodmann<sup>1)</sup> angewandt. An einen weitem auf einer drehbaren Achse befestigten Zylinder wurde ein kleinerer Zylinder von etwas kleinerem Durchmesser konaxial hineingehängt. Die Aufhängung dieses Zylinders war eine bifilare (man sehe § 118), so daß eine Drehung des Zylinders um seine Achse ein bifilares Torsionsmoment bewirkte, welches den Zylinder in die umgedrehte Lage zurückzudrehen strebte. Der Zwischenraum zwischen den beiden Zylindern wurde mit der auf ihre Reibung zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt. Wurde dem äußeren Zylinder eine Rotation mit konstanter Geschwindigkeit erteilt, erhielt der innere Zylinder, wie genau dieselbe Überlegung wie bei der Methode von v. Helmholtz ergibt, ein Drehungsmoment um seine Achse, welches ihn soweit dreht, bis das durch die bifilare Torsion bewirkte Drehungsmoment dem dem inneren Zylinder durch die Flüssigkeitsreibung vermittelten gleich geworden ist. Um hier das Drehungsmoment zu erhalten, welches nur auf die Zylinderfläche wirkt, um also die Einwirkung auf den Boden des Zylinders zu eliminieren, verfährt man so, daß man den Zylinder zunächst bis zu einer Höhe  $h_1$  über der Bodenfläche eintaucht, dann bis zur größeren Höhe  $h_2$ . Die Vergrößerung des Drehungsmoments im zweiten Falle ist dann der Reibung an der Zylinderfläche von der Höhe  $h = h_2 - h_1$  zuzuschreiben. Für das Drehungsmoment  $\mu$ , welches der innere Zylinder durch die Reibung an der Zylinderfläche von der Höhe  $h = h_2 - h_1$  erhält, ergibt die Theorie, wenn der äußere Reibungskoeffizient  $\epsilon$  nicht unendlich ist, also eine Gleitung an den Zylinderflächen stattfindet

1) Brodmann, Wiedem. Ann. 45. p. 159. 1892. Für konzentrische Kugeln lassen sich die Rechnungen nicht soweit durchführen, um nach diesem Verfahren die Reibung zu messen.

$$\mu = \mu_2 - \mu_1 = \frac{4\pi\sigma_0\eta(h_2 - h_1)}{2\epsilon \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_0^2} \right) + \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)}$$

worin  $\sigma_0$  die Umdrehungsgeschwindigkeit des äußern Zylinders,  $r_0$  den Radius des äußern,  $r_1$  den Radius des innern Zylinders bedeutet. Ist  $\epsilon = \infty$ , so fällt das erste Glied des Nenners fort.

Brodmann wandte zu seinen Messungen einen Hohlzylinder von 8985 cm Radius und 17,1 cm Höhe an und drei innere Zylinder, deren Radien und Höhen waren

$$\begin{array}{ll} r_1 = 1,2281 \text{ cm} & H_1 = 14,321 \text{ cm} \\ r_2 = 1,9079 \text{ „} & H_2 = 14,321 \text{ „} \\ r_3 = 2,4026 \text{ „} & H_3 = 14,315 \text{ „} \end{array}$$

Die Zylinder waren aus Messing gefertigt und vergoldet.

Wie es die Theorie verlangt zeigten sich die Drehungsmomente der stationärgeschwindigkeit proportional, die Reibungskoeffizienten also davon unabhängig. Für Wasser bei der Temperatur von  $15^\circ$  ergaben sich die Reibungskoeffizienten, dieselben berechnet unter der Voraussetzung, daß  $\epsilon = \infty$  ist,

$$\begin{array}{ll} \text{für den Zylinder 1:} & 0,011317 \\ \text{„ „ „ 2:} & 0,011143 \\ \text{„ „ „ 3:} & 0,010485. \end{array}$$

Die gefundenen Reibungskoeffizienten nehmen demnach mit wachsendem Radius des inneren Zylinders merklich ab. Brodmann schließt daraus, daß der Reibungskoeffizient  $\epsilon$  von Wasser an polierten vergoldeten Flächen nicht unendlich ist, daß also die letzte Schicht Wasser nicht an dem Metall haftet, daß vielmehr Gleitung stattfindet, ein Schluß, den schon Helmholtz aus den Versuchen von Piotrowski gezogen hatte. In dem man die Beobachtungen an zwei Zylindern also an den Zylindern mit Radius  $r_1$  und  $r_2$  oder  $r_3$  kombiniert, kann man  $\eta$  und  $\epsilon$  gesondert berechnen. In dieser Weise fand Brodmann durch Kombination

$$\begin{array}{llll} \text{von 1 und 2} & \eta_{12} = 0,01265 & \epsilon_{12} = 0,2220 & \frac{\eta}{\epsilon} = 0,0570 \\ \text{„ 1 „ 3} & \eta_{13} = 0,01228 & \epsilon_{13} = 0,3001 & \frac{\eta}{\epsilon} = 0,0409 \end{array}$$

Während aus den Poiseuilleschen Versuchen sich für  $\eta$  bei  $15^\circ$  der Wert 0,01145 ergibt

Hiernach ergibt sich, daß die Schwingungsmethoden, falls man die Rechnungen soweit es geht durchführt, Werte ergeben, welche den nach der Ausflußmethode gefundenen gleich werden. Man muß deshalb der Ausflußmethode entschieden den Vorzug geben, da sie einfacher ist, mit reiner Flüssigkeit ausführbar, und da sie vor allem eine erheblich genauere Temperaturregulierung und Bestimmung zuläßt. Sie ist deshalb mit Ausnahme der bei Besprechung der Methoden angeführten Versuche fast ausschließlich zur Messung der Reibungskonstanten benutzt. Zu beachten ist nur, daß die Röhren eine hinreichende Länge haben.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Über die Gültigkeitsgrenzen des Poiseuilleschen Gesetzes sehe man Grunow, Wissenschaftliche Abhandlungen der physikalisch-technischen Reichsanstalt 4 Heft 2 p. 161. 1906.

Messungen über die innere Reibung sind besonders in der letzte Zeit in großer Zahl angestellt, von Rellstab<sup>1)</sup>, Hübener<sup>2)</sup>, Sprung<sup>3)</sup>, Grotrian<sup>4)</sup>, Pribram und Handl<sup>5)</sup>, Slotte<sup>6)</sup>, Wagner<sup>7)</sup>, Arrhenius<sup>8)</sup>, Noack<sup>9)</sup>, Reyher<sup>10)</sup>, Gartenmeister<sup>11)</sup>, Lauenstein<sup>12)</sup>, Heydweiller<sup>13)</sup> und besonders Thorpe und Rodger<sup>14)</sup> u. a. Dieselben beziehen sich auf eine große Zahl von Flüssigkeiten und Mischungen, auf Salzlösungen und auf die Änderung der Reibungskoeffizienten mit der Temperatur.<sup>15)</sup> Wir gehen auf die Resultate dieser Versuche nicht ein, da sie noch nicht zu allgemeinen Sätzen geführt haben.<sup>16)</sup> Auf die Reibung von Salzlösungen und ihre Beziehung zur elektrischen Leitungsfähigkeit kommen wir in der Elektrizitätslehre zurück.<sup>17)</sup>

Die Abhängigkeit der Flüssigkeitsreibung vom Drucke besprechen wir § 118 bei der Reibung der Gase.

Ist die Konstante der Reibung der Flüssigkeiten an den festen Körpern nicht unendlich groß, so ist der Ausdruck für die durch kapillare Röhren ausfließende Menge, wie wir sahen,

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8\eta L} \left( R^4 + 4 \frac{\eta}{\epsilon} R^3 \right),$$

es kommt also unter sonst gleichen Umständen ein von der dritten Potenz des Radius abhängiges Glied hinzu. Da Brodmann bei Wasser an Gold aus seinen Versuchen auf eine Gleitung schloß, so sollte man erwarten, daß für nicht benetzende Flüssigkeiten dieses Glied auch bei Ausströmungsversuchen aus Glasröhren in Rechnung zu ziehen sei. In der Tat glaubte Poiseuille bei dem Ausfluß des Quecksilbers durch gläserne Kapillarröhren zu finden, daß das für benetzende Flüssigkeiten aufgestellte Gesetz

- 1) *Rellstab*, Inauguraldissertation. Bonn 1868.
- 2) *Hübener*, Poggend. Ann. 150. p. 248. 1873.
- 3) *Sprung*, Poggend. Ann. 159. p. 1. 1876.
- 4) *Grotrian*, Poggend. Ann. 157. p. 130. 1875; 160. p. 238. 1877. Wiedem. Ann. 8. p. 530. 1879.
- 5) *Pribram* und *Handl*, Wiener Ber. 78. 1878; 80. 1879.
- 6) *Slotte*, Wiedem. Ann. 14. p. 13. 1881.
- 7) *Wagner*, Wiedem. Ann. 18. p. 259. 1883. Zeitschrift für physikal. Chemie. 5. p. 31. 1890.
- 8) *Arrhenius*, Zeitschr. für physikal. Chemie. 1. p. 285. 1887.
- 9) *Noack*, Wiedem. Ann. 27. p. 289. 1886.
- 10) *Reyher*, Zeitschr. für physikal. Chemie. 2. p. 524. 1888.
- 11) *Gartenmeister*, Zeitschr. für physikal. Chemie. 6. p. 524. 1889.
- 12) *Lauenstein*, Zeitschr. für physikal. Chemie. 9. p. 417. 1892.
- 13) *Heydweiller*, Wiedem. Ann. 55. p. 561. 1895; 59. p. 193. 1896; 62. p. 1897.
- 14) *Thorpe* und *Rodger*, Phil. Trans. of London R. S. 185. p. 397. 1894; p. 71. 1897. Über die Beziehungen zwischen der innern Reibung der Flüssigkeiten und ihrer chemischen Natur gibt *Thorpe* eine Übersicht in der Zeitschrift für physikal. Chemie. 14. p. 361. 1894.
- 15) Eine Zusammenstellung der beobachteten Reibungskoeffizienten findet man in *Landolt-Börnstein*, Physikalisch-chemische Tabellen. 3. Aufl. Berlin Springer 1905.
- 16) *Meyer* und *Rosencranz*, Wiedem. Ann. 2, p. 387, 1877. Man sehe *Grætz*, Wiedem. Ann. 34. p. 25. 1888.
- 17) Man sehe die wenigen allgemeinen für die physikalische Chemie wertbaren Sätze in *Ostwald*, Lehrb. d. allgem. Chemie. 2. Aufl. 1. p. 551 ff.

nicht mehr gültig sei. Genauere Versuche von Warburg<sup>1)</sup> haben indes gezeigt, daß auch für Quecksilber und Glas sich die ausgeflossene Menge darstellen läßt durch die Gleichung:

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta \cdot L} R^4,$$

wie z. B. folgende Beobachtung zeigt:

$$L = 871^{\text{mm}},5. \quad R = 0,22346. \quad \text{Temp.} = 17^{\circ},25.$$

$p_a - p_e$	Ausflußmenge in Milligr. pro 1"	
	beobachtet	berechnet aus 2
100 <sup>mm</sup> ,6 Quecksilber.	126,5	127,1
193 <sup>mm</sup> ,3 „	244,3.	

Setzen wir das spezifische Gewicht des Quecksilbers bei 17,2° gleich 13,55, so ergibt sich  $\eta$  aus der 2. Beobachtung

$$\eta = \frac{\pi \cdot 193^{\text{mm}},3 \cdot 13,55}{8 \cdot \frac{244,3}{13,55} \cdot 871,5} (0,22346)^4 = 0,00016329.$$

der

$$\eta = 0,016019 \frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{sec}}.$$

Es ergibt sich somit, daß auch bei nicht benetzenden Flüssigkeiten unendlich sein kann.

## § 90.

**Konstitution des ausfließenden Strahles.** Bisher haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Öffnung, aus welcher die Flüssigkeit ausfließt, eine kreisförmige sei, und daß somit der Strahl von der Stelle der größten Kontraktion an ein merklich zylindrischer sei. Ganz anders werden jedoch die ausfließenden Wasserstrahlen gestaltet, wenn man statt kreisförmiger Öffnungen andere, z. B. viereckige oder kreuzförmige Öffnungen anwendet. Die Gestalten dieser Strahlen sind vorzugsweise von Bidone<sup>2)</sup> und später von Magnus<sup>3)</sup> untersucht worden. Wir lassen hier einige der eigentümlichen Formen der aus eckigen Öffnungen ausfließenden Strahlen folgen, nach der Beschreibung, welche Magnus von ihnen gibt. Fig. 161a gibt die Ansicht eines Strahles, der aus einer viereckigen Öffnung ausfließt, deren eine Seite 2,6<sup>mm</sup>, deren andere 25<sup>mm</sup> lang ist, gesehen in einer zur größeren Seite senkrechten und Fig. 161b in einer zur kleineren Seite senkrechten Richtung. Fig. 162 zeigt die Gestalt eines aus einer kreuzförmigen und Fig. 163 eines aus einer quadratischen Öffnung  $ABDC$  ausfließenden Strahles. Das Wasser zieht sich unter der Öffnung sehr rasch zusammen und es bilden sich rundliche Ränder  $AcBt$  (Fig. 161a), die sehr scharf gegen den übrigen Teil der Fläche begrenzt sind. Diese erzeugen, wo sie zusammentreffen, die zur Fläche  $ABtc$  senk-

1. Warburg, Poggend. Ann. 140. 1870.

2. Bidone, Memorie dell' Accademia di Torino 34.

3. Magnus, Poggend. Ann. 95. p. 1. 1856.



rechte Fläche  $tkGi$  (Fig. 161b), die sich nach unten immer mehr zusammenzieht und dann die Fläche  $Gkh,i$  entstehen läßt, und so fort, der Strahl zersplittert. Dieselbe Gestalt erhielt der Strahl, als anstatt einfachen Ausflußöffnung eine 20<sup>mm</sup> lange Röhre von gleichem Querschnitt an das Gefäß gebracht wurde.

Bei den aus der kreuzförmigen Öffnung (Fig. 162) austretenden Strahl geht das Wasser in vier sich kreuzenden Strahlen nieder,  $Be$ ,  $Be'$ ,  $Ce$  u

Fig. 161.

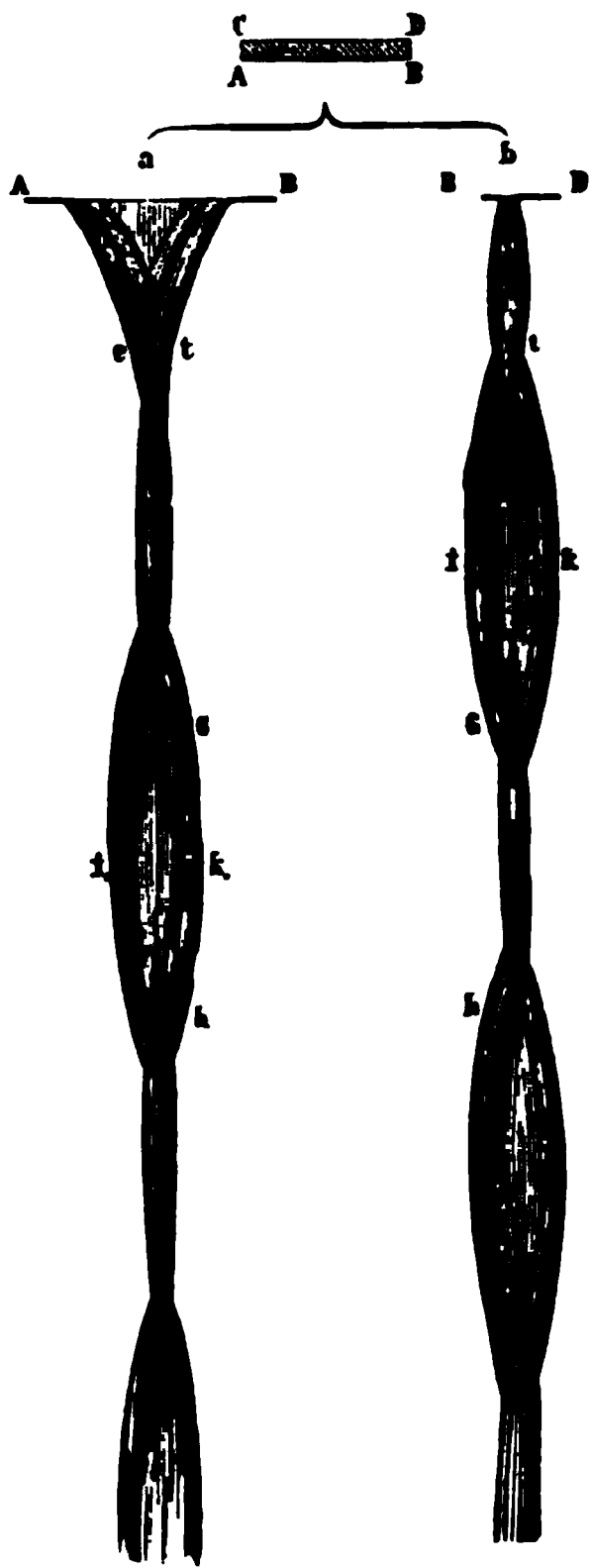


Fig. 162.

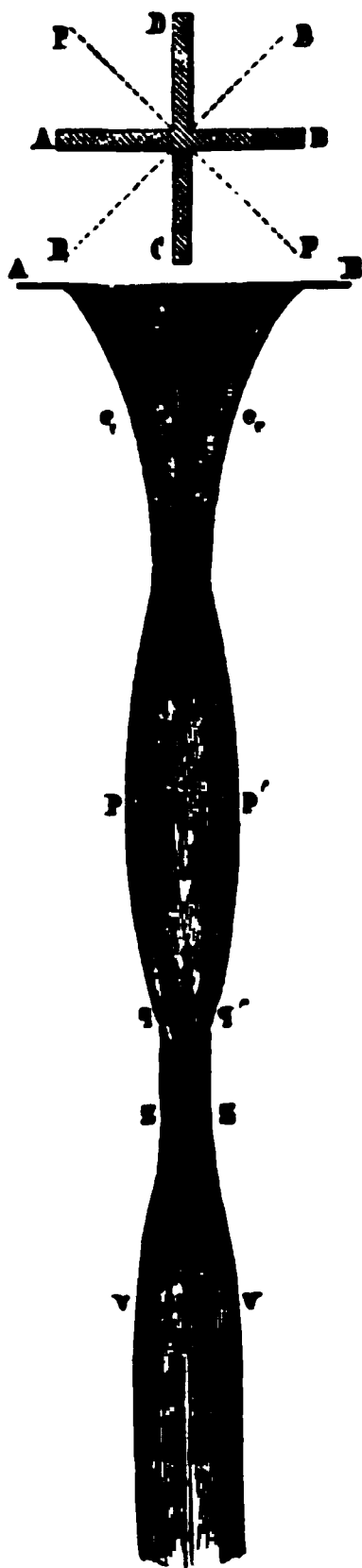
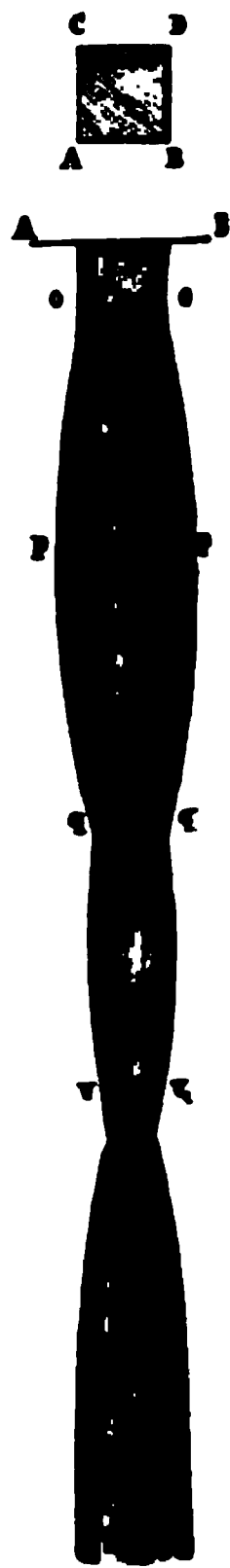


Fig. 163.



von denen jeder einen starken Rand hat. Indem diese vier Ränder sammentreffen, erzeugen je zwei eine Fläche  $rpq$ ; da aber das Zusammen treffen zentral stattfindet, wenn die Arme der kreuzförmigen Öffnung gleich sind, so halbiert jede Fläche den Winkel, den die Ränder einander machen, so daß die vier entstehenden Flächen,  $rpq$ ,  $r'p'q'$ , Lage der zwischen  $AB$  und  $CD$  punktierten Linien  $p$  und  $p'$  hat. Zwischen ihnen ziehen sich die Ränder  $C'$  bis gegen  $G$  hinab. In durch diesen Punkt gehenden Horizontalen haben die Flächen  $rpq$  größte Breite. Unterhalb dieser Stelle nehmen sie wieder dicke zu.

durch deren Zusammentreffen neue Flächen  $zv$  entstehen. Da auch die Ränder zentral zusammentreffen, so halbieren die Flächen  $zv$  die Winkel der vorigen. Ihre Richtung fällt also wieder mit derjenigen der zusammen zusammen.

Selten treten mehr als zwei solcher Flächensysteme auf, meist beginnt dem zweiten die Zersplitterung des Strahles.

Bei dem aus der quadratischen Öffnung  $ABCD$  (Fig. 163) hervor-  
enden Strahle erblickt man unter der Stelle der größten Zusammen-  
nürung vier Flächen  $opq$ , deren Verlängerungen durch die Mitte der  
en  $AB, BD \dots$  gehen und auf diesen senkrecht stehen.

Unter diesem liegt ein zweites Flächensystem, welches, wie in dem  
gen Falle, die Winkel des ersten halbiert, also mit der Richtung der  
gonalen des Quadrats zusammenfällt. Unter dem zweiten befindet sich  
drittes, dem ersten gleiches Flächensystem usf., so daß oft neun der-  
ger Systeme untereinander liegen.

Diese Formen, welche die Strahlen annehmen, die aus eckigen Öff-  
gen fließen, zeigen auf das deutlichste den Einfluß der seitlichen  
egung der Flüssigkeit und der Molekularattraktion der Flüssigkeits-  
ben, die wir bei den vorhin betrachteten Ausflußerscheinungen als  
ende Umstände ansahen. Denn diese beiden Umstände scheinen hin-  
rend, um die sonderbaren Gestalten der Strahlen zu erklären.

Die Flüssigkeitsteilchen haben alle bei ihrem Austritt aus der Öffnung  
horizontale gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwindigkeit,  
be noch durch die früher betrachtete Oberflächenspannung an den  
n Seiten des Strahles vermehrt wird. Daraus ergibt sich die von  
i Seiten nach innen gerichtete Bewegung der Flüssigkeit unmittelbar  
r der Öffnung: bei kreisförmigen Öffnungen ist die nach innen ge-  
te Geschwindigkeit der Flüssigkeit sowohl als der Widerstand, den  
Innere des Strahls derselben entgegengesetzt, nach allen Richtungen  
h, deshalb zeigt sich dort die Einschnürung von allen Seiten ohne  
atfolgende Anschwellung; anders jedoch bei eckigen Öffnungen. Dort  
be Oberflächenspannung verschieden, und zwar ist sie am stärksten von  
Ecken aus, weil dort der Krümmungsradius am kleinsten ist, während  
übrige Fläche des Strahles eben, oder gar wohl konkav sein kann.  
r der Öffnung müssen daher vorzugsweise die von den Ecken der Öffnung  
menden Flüssigkeitsteile nach der Mitte zu sich bewegen, und es muß  
r der Strahl hauptsächlich von den Ecken aus zusammengeschnürt  
en. Daher treten die von den Seiten der Öffnung herkommenden  
igkeitsteile über den Strahl heraus, und der Strahl muß einen der  
ng entgegengesetzten Querschnitt erhalten, dort seinen kleinsten  
messer haben, wo die Öffnung den größten hat, und umgekehrt.  
h-er Stelle kehren sich die Verhältnisse um; durch die Oberflächens-  
nung in den jetzt stärker gewölbten Teilen des Strahles erhalten die  
bedinglichen Teile des Strahles eine nach innen gerichtete Bewegung,  
da, wie wir sahen, der Querschnitt des Strahles wegen der beschleu-  
n Bewegung abwärts immer kleiner wird, so wird jetzt die Zusammen-  
nürung hauptsächlich von den entstandenen Ecken des Strahles aus-  
und damit ein Heraustreiben der Flüssigkeit an den konkaven  
n des Strahles eintreten.

Die Erscheinung ist also wesentlich eine Folge der verschiedenen flächenspannung des Strahles, verbunden damit, daß wegen der nach unten gerichteten Geschwindigkeit der Bewegung die Strahles überhaupt, so lange der Strahl zusammenhängt, das haben, sich der Mitte zu nähern, und daß deshalb die von den Öffnung niedergehenden Teile einen nur geringen Widerstand gegen horizontale Bewegung erfahren<sup>1)</sup>.

Auch an Strahlen, welche aus einer kreisförmigen Öffnung her beobachtet man meist Anschwellungen und Erscheinungen ähnlich. Von der Kontraktionsstelle abwärts ist der Strahl zunächst nahe

Fig 164



drisch, und dabei massiv und ganz klar. In einiger Entfernung von derselben ändert er aber sein Aussehen vollständig, er gestört, erfährt eine merkliche Anschwellung (Fig 164), trübe, so daß es den Anschein hat, als bilde er keine kontinuierliche Flüssigkeitsmasse mehr. Auf diese erste Anschwellung folgt dann eine Stelle, wo der Strahl wieder zusammengezogen ist, auf diese wieder eine Anschwellung und so fort. Wechselnden Anschwellungen und Einschnürungen nennt Savart<sup>2)</sup>, der sie zuerst genauer untersuchte, Bäuche und Einschnürungen. Im Innern des Strahles scheint sich ein kontinuierlicher Kanal herabzuziehen, gleichsam als Fortsetzung des Strahles über dem ersten Bauche.

Daß diese Anschwellungen und Einschnürungen übrigens anders beschaffen sind und von ganz anderen Ursachen als diejenigen, welche bei den aus eckigen Öffnungen ausgehenden Strahlen auftreten, läßt sich leicht zeigen.

Zunächst kann man leicht erkennen, daß der Strahl an den unteren Stellen nicht mehr kontinuierlich ist, sondern aus getrennten Tropfen besteht. Wenn man nämlich ein kleines Blattchen horizontal sehr rasch durch einen Bauch des vertikalen Strahles hindurchführt, so findet man auf dem Blatte nicht einfach eine benetzte Linie, sondern statt dessen eine Reihe von benetzten Stellen, welche zeigen, daß aufeinander folgende Tropfen des Strahles auf dem Blatte getroffen sind. Hält man ein kleines Blattchen oder ein Blech so in der Hand, daß es ein wenig in den Strahl hineinreicht, so fühlt man, so lange es von dem Strahl

selben getroffen wird, einen gleichmäßigen Druck. Wird dasselbe von einem Bauche getroffen, so fühlt man deutlich eine Vibrationsbewegung. Daraus folgt unmittelbar, daß das Aussehen des Strahles an dieser Stelle nur eine optische Täuschung sein kann, indem man nicht die einzelnen Tropfen sehen, sondern nur den Gesamteindruck erhält, welcher aus dem nacheinander an den einzelnen Stellen erscheinenden Tropfen entsteht.

Denn die einzelnen aufeinander folgenden Tropfen gehen so schnell dem andern sehr rasch vor unserem Auge vorüber, jeder muß auf unserer Netzhaut den Eindruck einer vertikalen Linie machen, gleichsam eine leuchtende Kohle, wenn sie rasch im Kreise geschwungen

1) Buff, Poggend. Ann 100 p. 168 1857

2) Savart, Annales de chim et de phys 58 p 337 1833

des feurigen Kreises macht: oder wie wir an einem rasch sich drehenden Rade nicht mehr die einzelnen Speichen sehen, sondern eine den Radkranz ausfüllende Fläche. Wenn nun ein Tropfen am Strahl gefallen ist, so folgt ihm sofort ein zweiter und der von dem ersten hinterlassene Eindruck setzt sich fort und so weiter. Wir sehen also die Konturen aller aufeinander folgenden Tropfen als einen zusammenhängenden Strahl. Daraus folgt weiter, da wir abwechselnd Bäuche und Einschnürungen wahrnehmen, daß die Tropfen sich abwechselnd verbreitern und verengern, daß sie in der Mitte der Bäuche am breitesten und in den Einschnürungen am schmalsten sein müssen.

Man kann dies sehr deutlich wahrnehmen, wenn man den Strahl so aufstellt, daß man ihn immer nur eine sehr kleine Zeit wahrnimmt, so daß in dieser Zeit die Tropfen ihre Stelle fast gar nicht ändern. Es giebt mehrere Mittel, welche wir später kennen lernen werden; das einfachste ist die Beobachtungsmethode von Magnus<sup>1)</sup>. In eine kreisförmige Scheibe von 250<sup>mm</sup> Durchmesser wird ein Spalt von 1<sup>mm</sup> Breite in der Richtung eines Radius eingeschnitten. Die Scheibe wird dann auf ihrer durch ihren Mittelpunkt gehenden Achse befestigt und in eine sehr hohe Drehung versetzt, so daß sie 20 bis 25 Umdrehungen in der Sekunde macht. Man stellt das Auge und die rotierende Scheibe so, daß man nur den Strahl sieht, wenn die Spalte dem Strahl parallel steht. Man sieht also den Strahl dann nur so lange, aber jedesmal, wenn die Spalte vor dem Strahl ergeht. Da die Spalte nur ein Millimeter breit ist, so beträgt die Zeit, in der man die ganze Kreisfläche und da die Scheibe 20 bis 25mal in der Sekunde rotiert, so ist die Spalte nur  $\frac{1}{15600}$  bis  $\frac{1}{19500}$  Sekunde vor dem Strahl, in dieser kurzen Zeit ändert aber der einzelne Tropfen seine Stelle nicht und deshalb sehen wir sie einzeln, als wären sie unbeweglich. In der Sekunde geht ferner die Spalte 20 bis 25mal an unserem Auge vorbei, so sehen wir das einzelne Bild 25mal in der Sekunde, so daß es daher ununterbrochen zu sehen ist.

Man erhält auf diese Weise einen mit Bäuchen versehenen Strahl, den man Fig. 165. Man sieht, wie der Strahl aus einzelnen Tropfen besteht, von denen man aber zwei Arten unterscheiden kann. Die einen sind sehr klein und kugelförmig in der Achse des Strahls, sie bilden den erwähnten innern Strahl, um den sich die Bäuche bilden.

Die andern sind viel größer, sie wechseln mit den ersten, sie stehen in gleichen Abständen voneinander, ab und haben eine sehr eigentümliche Gestalt. Man sieht zunächst unter dem kontinuierlichen Teile des Strahls, wie die Tropfenbildung eintritt, der Strahl zeigt Schwellungen und Einschnürungen, die bei  $\beta$  in einzelne Tropfen übergehen: die Einschnürungen werden zu den vorhin erwähnten kleinen Tröpfchen, die Abstände werden zu den großen. Diese haben zuerst eine in die Länge gezogene kugelförmige Gestalt, dann verkürzen sie sich, indem sie zugleich breiter werden  $b$ , werden kugelförmig, bei  $d$  sind sie in vertikaler Richtung abgeplattet, bei  $e$  horizontalen am stärksten ausgedehnt, bei  $c$  wieder mehr kugelförmig und noch mehr bei  $g$ , wo man den Knoten wahrnimmt, in die Einschnürung.

Länge gezogen. Von da ab wiederholen sich die Gestalten *a* — Strahl unterhalb der Bäuche auseinandergeht, und zwar treten Gestalten immer an derselben Stelle auf. Daß die Gestalt der deshalb die vorher beschriebene sein muß, geht unmittelbar aus der Gruppierung der Tropfen hervor. Es fragt sich, wie entsteht diese Erscheinung.

Fig 165. Fig 166



Wir erwähnten vorhin, daß nicht unmittelbar aus kreisförmigen Öffnungen hervortretenden diese Anschwellungen sich zeigen, sondern daß der Strahl eine nahezu zylindrische Gestalt habe. In diesem findet, wie Magnus<sup>1)</sup> nachwies, die Bildung statt, und zwar etwas tiefer als dort, wo dann eintritt, wenn sich Bäuche zeigen. Ein zylindrischer oder vielmehr schwach konischer Strahl bietet nach Magnus ein Bild, wie Fig 166. Sind die Tropfen bald länger, bald breiter, so wechseln die Formen nicht regelmäßig, deshalb ist ein mit Bäuchen versehener Strahl auch an der unteren Strecke nur breiter als an der oberen. Die Bildung ist daher allen diesen Strahlen gemein. Betrachten wir sie zuerst.

Die Tropfenbildung ist Folge der beschleunigten Geschwindigkeit der herabfallenden Flüssigkeit; insofern soviel Flüssigkeit oben ausfließt, als unten abfließt, um den Strahl als ein Kontinuum zu erhalten, splittert der Strahl und dadurch bilden sich die Tropfen.

Daß diese Erklärung die richtige sei, folgt aus der Beobachtung des aus einem mit einer Hahnöhre versehenen Gefäße tropfenweise austretenden Wassers. Zunächst sammelt sich das Wasser an der Hahnspitze an, verlängert sich dann in einen Tropfen; dann erfolgt eine Einschnürung ein und der Tropfen fällt. Der herabfallende Tropfen strebt infolge der Oberflächenspannung eine kugelförmige Gestalt anzunehmen. Oscilliert er, so daß er abwechselnd in die Länge und in die Breite gezogen, abwechselnd abgeplattet erscheint.<sup>2)</sup> Die

1) Magnus a. a. O.

2) Lenard hat die Schwingungsdauer fallender Tropfen benutzt, um die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten zu messen. Er hat die Schwingungsdauer, d. h. die Zeit, in welcher der Tropfen aus der Form *a* Fig 165 wieder in dieselbe Form *g* Fig 166 zurückkehrt, gleich *T*, als Theorie für die Oberflächenspannung  $\alpha$ , wenn *p* das Gewicht des Tropfens und *g* die Fallbeschleunigung ist

$$\alpha = \frac{8}{\pi} \pi \frac{p}{T^2}$$

Das Tropfengewicht *p* bestimmte Lenard, indem er aus einer engen Röhre Flüssigkeit in einzelnen Tropfen ausfließen ließ, eine Anzahl Tropfen in untergestellten Fläschchen auffing und das Gewicht der aufgefundenen



ung bildet dann mehrere kleine Tropfen. In diesem Falle, wo die Ausflußmenge von Anfang an nicht so groß ist, um einen kontinuierlichen Strahl zu bilden, tritt die Tropfenbildung von Anfang an auf.

Ferner. Plateau zeigte, wenn man den § 81 beschriebenen in einem Alkoholgemische gebildeten Ölzyylinder durch Entfernung der beiden Drahtreize, zwischen denen er gebildet war, verlängert, daß er dann, wenn man eine gewisse Grenze überschreitet, zerreißt. Unmittelbar vorher bilden sich abwechselnde Einschnürungen und Anschwellungen, deren letztere große Tropfen bilden, während an Stelle der Einschnürungen kleine Tropfen auftreten. Also auch hier, wo die Flüssigkeit nicht mehr ausreicht, um einen kontinuierlichen Zylinder zu bilden, diese Tropfenbildung infolge der Oberflächenspannung.

Wenn nun in allen aus kreisförmigen Öffnungen ausfließenden Strahlen die Tropfenbildung das Gemeinsame ist, so müssen noch besondere Umstände auftreten, um einmal die regelmäßige Folge derselben hervorzuheben, ein andermal nicht. Savart<sup>1)</sup> und Magnus<sup>2)</sup> haben diese nachgewiesen; sie zeigten, daß der Strahl die Gestalt Fig. 166 hat, wenn die Ausflußöffnung ganz ruhig ist und keine zitternde Bewegung besitzt, daß aber jedesmal, wenn man derselben eine zitternde regelmäßige Bewegung mitteilt, die Bäuche auftreten. Savart hing, um dieses zu zeigen, das Gefäß an Fäden schwebend auf, so daß es nicht erschüttert werden konnte, und der Strahl hatte die Gestalt Fig. 166; wurde aber durch das Anstreichen eines Violoncells in der Nähe des Gefäß und damit die Bodenplatte in regelmäßige Vibrationen gebracht, so traten sofort die Bäuche in schönster Regelmäßigkeit auf. Magnus zeigte dasselbe durch einen noch entscheidenderen Versuch. Die Ausflußöffnung wurde in eine Messingscheibe eingeschnitten, und diese durch eine Kautschukröhre auf einer Hülse befestigt, welche aus dem Boden des mit Flüssigkeit versehenen Gefäßes herabhing. Die Messingscheibe, in der sich die Ausflußöffnung befand, wurde dann auf ein Paar Kissen von Wolle gelegt, die auf eine feste Unterlage gelegt waren. Wurde nun das Gestell, auf dem das Ausflußgefäß stand, in eine regelmäßig vibrierende Bewegung versetzt, so zeigten sich keine Bäuche, weil die Vibrationen des Gefäßes sich nicht durch den Kautschuk zur Bodenplatte fortpflanzen konnten; wenn aber die Platte, in der die Ausflußöffnung angebracht war, mit dem Gestell in feste Verbindung gebracht war und somit vibrierte, so traten sofort die Bäuche auf.

Wie nun infolge dieser Vibration das regelmäßige Abreißen der Tropfen und damit die Bäuche entstehen, erklärt Magnus folgendermaßen: Wenn der Rand der Ausflußöffnung regelmäßig auf- und niedergeht, wird die Geschwindigkeit des ausfließenden Strahles abwechselnd beschleunigt und verzögert. Durch diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen entstehen die abwechselnden Anschwellungen und Einschnürungen, die in größerer Tiefe die Trennung in einzelne regelmäßige Tropfen bestimmen.

Der Quotient aus diesem Gewicht und der Tropfenzahl ist das Gewicht des einzelnen Tropfens. Die Schwingungsdauer ergab sich aus der Fallhöhe des Tropfens, *an* Fig. 165, während der Dauer einer Schwingung. Wegen des Hohlraums verweisen wir auf die Arbeit von *Lenard*, *Wiedem. Ann.* 30 p. 209 1887.

1. Savart a. a. O.

2. Magnus a. a. O.

zur Folge haben. Sind diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen nicht vorhanden, so fehlen die Bäuche und das Abreißen findet in größerer Entfernung von der Öffnung und viel weniger regelmäßig statt. Wahrscheinlich trägt die geringere Entfernung, in welcher, wenn Bäuche vorhanden sind, die einzelnen Massen abreißen, nicht unwesentlich zu jener Regelmäßigkeit bei, da alle Bewegungen in einem Strahl in geringerer Entfernung von der Öffnung regelmäßiger sind als entfernt davon.

Noch auffallender und interessanter zum Teil sind die Formen, welche Flüssigkeitsstrahlen bilden, wenn sie durch feste Körper oder andere entgegenkommende Strahlen gestört werden; man sieht diese Erscheinungen häufig in Gärten als Zierrat benutzt. Das Wasser wird nämlich von den festen Körpern nicht regelmäßig zurückgeworfen, wie wir das bei den festen Körpern fanden, sondern breitet sich in oft höchst sonderbaren Formen aus. Es würde uns jedoch zu weit führen, darauf einzugehen, deshalb verweisen wir auf die Abhandlungen von Magnus<sup>1)</sup> und Savart<sup>2)</sup>.

### Drittes Kapitel.

#### Von den gasförmigen Körpern.

##### § 91.

**Allgemeine Beschaffenheit der Gase.** Wir lernten § 47 außer der festen und flüssigen Aggregatform noch eine dritte kennen, in welcher Körper vorkommen können, die gasförmige. Diese definierten wir dahin, daß sie weder eine selbständige Gestalt wie die festen Körper, noch ein selbständiges Volumen wie die flüssigen Körper besitzen, sondern sich so weit ausbreiten, bis ein äußeres Hindernis sie zurückhält.

Wir können uns leicht durch Beobachtung und Versuche davon überzeugen, daß wir überall von einem Körper dieser Aggregatform, der Luft, umgeben sind; wir atmen sie ein, fühlen ihre Strömungen im Winde und ihren Widerstand bei raschen Bewegungen.

Wenn man eine scheinbar leere Glocke so in Wasser taucht, daß ihre ganze Basis zugleich die Wasserfläche berührt, so vermag nur wenig Wasser in die Glocke einzudringen, auch wenn wir sie so tief in das Wasser hineindrücken, so daß sie ganz unter Wasser steht. Wir müssen daraus schließen, daß die Glocke mit etwas erfüllt ist, was dem Eindringen des Wassers sich entgensetzt. Neigen wir die Glocke, indem wir aber dafür sorgen, daß die Basis derselben stets unter Wasser bleibt, so weit, daß das Niveau der in die Glocke eingedrungenen Flüssigkeit an einer Stelle den Rand der Glocke nicht mehr erreicht, so sehen wir bei fernerm Niederdrücken, wie aus ihr durch das Wasser große Blasen aufsteigen und wie dann das Wasser höher in die Glocke einsteigt. Noch deutlicher wird dieser Versuch, wenn

1) *Magnus* a. a. O. und *Poggend. Ann.* 80. p. 1. 1850; 105. p. 1. 1855.

2) *Savart* a. a. O. und *Ann. de chim. et de phys.* 54. p. 55 u. p. 113; p. 257. 1833.



wir die Glocke oben mit einem Hahn versehen. Solange der Hahn geschlossen ist, kann das Wasser in die Glocke nicht eindringen, öffnen wir aber denselben, so dringt beim Niederdrücken das Wasser ein, zugleich bemerken wir aber, wie aus der Hahnöffnung die Luft hervordringt, indem wir ihren Stoß fühlen oder sehen, wie leichte Körperchen durch den hervordringenden Luftstrom fortgerissen werden.

Dieser Versuch beweist auf das evidenteste sowohl das Vorhandensein als die Körperlichkeit der Luft, indem er uns beweist, daß in einen mit Luft erfüllten Raum ein anderer Körper nicht eindringen kann.

Durch einen ebenso einfachen Versuch können wir uns überzeugen, daß die Luft eine Flüssigkeit ist, daß ihre Teile frei beweglich sind. Denn kehren wir die Glocke um, so daß ihre Basis nach oben gerichtet ist, so können wir flüssige und feste Körper leicht hineinbringen. Die eingebrachten Körper verdrängen die Luft ebenso leicht, wie eine Flüssigkeit, in die man taucht, oder wie eine schwerere die leichtere Flüssigkeit verdrängt, mit welcher sie sich nicht mischt. Wir müssen daher die Luft als eine Flüssigkeit betrachten und ihren Teilen dieselbe freie Beweglichkeit zuschreiben, wie den einzelnen Teilen der Flüssigkeiten.

Dasselbe zeigt uns der geringe Widerstand, den die Bewegung der Körper in einem mit Luft erfüllten Raume erfährt, der noch um vieles geringer ist als der Widerstand, den eine Bewegung in einem mit Flüssigkeit erfüllten Raume findet.

Daß die Luft kein selbständiges Volumen besitzt, zeigt folgender Versuch. Man kann eine Blase leicht zum Teil mit Luft anfüllen. Bringt man sie dann in eine Glocke, aus der wir durch einen später zu beschreibenden Apparat, die Luftpumpe, die Luft fortschaffen können, so zeigt die in der Blase enthaltene Luft das Bestreben, sich auszudehnen, indem die Blase sehr bald vollständig gespannt ist, und selbst durch die ausdehnende Kraft in ihr eingeschlossenen Luft zersprengt werden kann.

Die Luft hat demnach keine selbständige Gestalt, sie dehnt sich aus, so sich ihrer Ausdehnung ein äußerer Widerstand entgegensetzt. Da nun dieselbe eine Flüssigkeit ist, so nennt man sie dieser Eigenschaft wegen eine ausdehnbare Flüssigkeit, eine expansible Flüssigkeit, und die bisher betrachteten Flüssigkeiten im Gegensatz dazu tropfbare.

## § 92

**Eigenschaften der Gase, welche sie mit den Flüssigkeiten gemein haben.** Da die Gase Flüssigkeiten sind, so folgt, daß sie eine Reihe von Eigenschaften besitzen, welche wir an den Flüssigkeiten kennen gelernt haben. Zunächst sind sie schwer wie alle Körper. Um dieses durch einen einfachen ohne weiteres verständlichen Versuch nachzuweisen, nehmen wir eine mit einem Hahne versehene Glaskugel von leichtem Glase, welche ungefähr 5–10 Liter Inhalt hat (Fig. 167), hängen sie an eine empfindliche Wage und bestimmen ihr Gewicht. Wenn wir dann die Kugel auf den bereits vorhin erwähnten Apparat bringen, mittels dessen wir die Luft aus ihr entfernen können, und die Luft aus ihr fortnehmen, so zeigt die neue Wägung, daß nach Fortnahme der Luft die Kugel leichter ge-

worden ist, und zwar bei einer Kapazität von 10 Liter um 10 Gramm.

Die Luft und ebenso alle Gase, welche uns die Chemie kennen sind demnach schwer wie alle Flüssigkeiten.

Wie bei den Flüssigkeiten nur dann Gleichgewicht war, wenn Druck auf ein Flüssigkeitselement im Innern von allen Seiten war, so auch bei den Gasen; im Zustande des Gleichgewichts erhebt jedes Gasmolekül von allen Seiten den gleichen Druck; ist derselbe in einer Richtung gestört, so tritt eine Bewegung ein. Dies zeigt sich in dem zuerst erwähnten Versuche mit der Glocke.

Fig. 167.



Wenn der Hahn geöffnet wurde, während dieselbe in die Flüssigkeit eingedrückt war, trat sofort ein Ausströmen der Flüssigkeit aus der Glocke, da der von unten nach oben auf das in der Glocke befindliche Gas wirkende Druck größer war als der von oben nach unten gerichtete Druck. Von unten nach oben drückte die über dem Flüssigkeitsniveau unter der Glocke erhobene Flüssigkeitsschicht, und vielleicht ein äußerer der Flüssigkeit lastender Druck; von oben nach unten wirkte dieser letztere; deshalb drang die Luft aus der Öffnung hervor.

Wenn wir auf ein in einem Gefäße eingeschlossenes Gas durch einen dem Gefäße genau anpassenden Kolben einen Druck ausüben, so muß wegen der Flüssigkeitseigenschaft der Gase dieser Druck sich nach allen Richtungen gleichmäßig fortpflanzen, es muß demnach jedes Flächenelement von gleicher Größe auch einen gleichen Druck empfangen.

Da nun die Gase, wie wir sahen, schwer sind, wiederholt sich alles das, was wir bei den der Schwere unterworfenen Flüssigkeiten fanden, auch hier und besonders in der uns umgebenden atmosphärischen Luft wiederholen.

Denken wir uns zu dem Ende einen mehrere Meilen hohen Zylinder über der Erde erhoben, vollkommen verschlossen und vollständig mit Gas erfüllt, und zerlegen wir dieses Gas in lauter sehr dünne horizontale Schichten, so können wir diese als ebensoviele Kolben betrachten, auf das darunter liegende Gas drücken. Der Druck wird daher von oben nach unten zunehmen; in irgend einer Schicht aber auf ein gleiches Flächenelement überall gleich sein müssen, und zwar nach allen Richtungen ebenso nach allen Seiten auf die Wände des Zylinders, als auch nach oben oder nach unten; derselbe ist gleich dem Gewichte der über diesem Flächenelement befindlichen Luftsäule. Dieser Druck ist ganz unabhängig von der Höhe oder der Größe des Zylinders, vorausgesetzt nur, daß seine Höhe konstant bleibt. Dieser letztere Umstand ist von bedeutender Wichtigkeit, dadurch berechtigt sind, unsere Schlüsse auf die unsere Erde umgebende Atmosphäre auszudehnen. Die Atmosphäre ist eine Luftmasse, welche rings um die Erde als eine Schicht von über 100 Kilometer Dicke besteht und welche, wie die Chemie uns lehrt, ein Gemenge zweier gasförmiger Körper ist, von Sauerstoff und Stickstoff. Nach den vielfachsten Analysen enthält sie um wenig mehr als 79 Teile Stickstoff (79,03) und nahezu 21 Teile Sauerstoff (20,97), und außerdem noch geringe Mengen anderer Gase.

stare, etwas Wasserdampf, und wie man neuerdings gefunden hat, so Argon, Krypton, Neon und Xenon. Man nimmt an, die Atmosphäre sei von einer letzten Schicht begrenzt, welche wegen ihrer geringen Dichte und der Zentrifugalkraft auf die darunter liegenden Schichten keinen Druck ausübt. Denn die Luft nimmt an der Umdrehung der Erde Theil, Störungen abgerechnet, welche, durch Temperaturdifferenzen, in Luftströmungen sich zeigen, in bezug auf die Punkte der Erdoberfläche unbeweglich. Mit der Höhe über der Erde muß daher die Zentrifugale Beschleunigung zunehmen, und deshalb in einer gewissen leichten Entfernung von der Erde der Schwere gleich werden.

Wir können demnach die Atmosphäre, indem wir von jenen Störungen absehen, als ein im Gleichgewicht befindliches Flüssigkeitsmeer betrachten, dessen Boden wir leben, von konstanter Höhe, und welches alle jene Erscheinungen hervorbringt, welche eine tropfbare Flüssigkeit von geringer Dichte hervorbringen würde. Jede Fläche erfährt demnach einen Druck, der dem Gewichte der über ihr befindlichen Luft gleich ist; derselbe ist gleich in Schichten, welche mit der Erdoberfläche parallel sind; er vergrößert sich, wenn wir emporsteigen, nimmt zu, wenn wir uns der Erde nähern.

An jedem Orte ist der Druck auf gleiche Flächenstücke derselbe, und die Kräfte, welche auf gleiche Flächenstücke derselben auch gerichtet sind, und bei verschiedenen Flächenstücken ihrer Größe proportional. Er muß ferner derselbe sein im Zimmer wie in freier Luft und an einer und derselben Stelle bis auf die vorhin erwähnten kleinen Abweichungen konstant sein.

Wenn wir dazu übergehen, diesen Druck zu messen, wird es gut sein, die den Gasen und Flüssigkeiten gemeinsamen Eigenschaften noch einmal zu betrachten.

Wie ein in Wasser getauchter Körper an Gewicht verliert, so wird auch ein Teil des Gewichtes der Körper von der Luft getragen; in der von der Luft umgebene Körper ebenso an seinem Schwerpunkt angreifenden nach unten gerichteten Druck erhält, der dem Gewicht der ihm verdrängten Luft gleich ist. Der experimentelle Nachweis dieses Satzes ist nicht leicht, jedoch begnügen wir uns hier damit, zu zeigen, daß überhaupt ein Gewichtsverlust in der Luft ist, und sehen die Größe desselben als die früheren Lehren bewiesen an. Wir wenden dem Ende eine kleine Wage an (Fig. 168), auf welcher an der einen Seite eine große hohle Kugel von dünnwandigem Glase trägt, während an der andern Seite ein kleines Gewicht ihr das Gleichgewicht hält. Dieses kleine Gewicht ist auf dem Wagebalken verschiebbar, und man hängt es so, daß die Kugel in der Luft genau das Gleichgewicht erhält.

Darauf bringt man diesen Apparat unter die Glocke einer Luftpumpe, und nimmt die Luft unter der Glocke fort. Man sieht dann, daß allmählich der Wagebalken nach der Seite der Kugel neigt, ein Zeichen, daß sie schwerer wird. Die mit dem kleinen Gewicht gleich große Kugel verliert in der Luft, da sie eine größere Menge Luft

Fig. 168



aus der Stelle drängt, mehr an Gewicht als das kleine Messinggewicht; die Gewichtszunahme, wenn die Luft fortgenommen wird, ist daher bei ihr größer als bei dem kleinen Gewicht.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satze ist die, daß uns die Wage nicht das wahre Gewicht der Körper gibt, sondern nur die Differenz zwischen dem Gewicht des Körpers und dem der verdrängten Luft. Nennen wir das wahre Gewicht eines Körpers  $X$ , sein Volumen  $v$  und das spezifische Gewicht der Luft  $s$ , so ist das Gewicht des Körpers in der Luft  $X - \rho$ . Nennen wir das spezifische Gewicht der Körpersubstanz  $\sigma$ , so können wir schreiben

$$v = \frac{X}{\sigma}, \text{ somit für das Gewicht in der Luft } X \left(1 - \frac{s}{\sigma}\right).$$

Die auf den Gewichtsstücken, mit denen wir den Körper abwägen, angegebenen Zahlen bedeuten deren Gewicht im luftleeren Raume. Haben wir den Körper mit  $P$  Gramm auf der Wage ins Gleichgewicht gebracht, so ist das Gewicht dieser  $P$  Gramm in der Luft, wenn  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Materials der Gewichtsstücke ist

$$P \left(1 - \frac{s}{\gamma}\right).$$

Zur Berechnung von  $X$  haben wir daher die Gleichung

$$X \left(1 - \frac{s}{\sigma}\right) = P \left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)$$

$$X = P \cdot \frac{1 - \frac{s}{\gamma}}{1 - \frac{s}{\sigma}}.$$

Da  $\frac{s}{\gamma}$  und  $\frac{s}{\sigma}$  nur kleine Größen sind, so können wir ohne merklichen Fehler schreiben

$$X = P \left(1 - \frac{s}{\gamma}\right) \left(1 + \frac{s}{\sigma}\right) = P \left(1 + s \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\gamma}\right)\right).$$

Man sieht demnach, das wahre Gewicht eines Körpers kann größer sein als das an der Wage gefundene, wenn  $\sigma < \gamma$ , oder kleiner, wenn  $\gamma < \sigma$ , also je nachdem das Volumen des abzuwägenden Körpers größer oder kleiner ist als das der Gewichtstücke.

Auch bei der Bestimmung des spezifischen Gewichtes muß diese Reduktion auf den luftleeren Raum vorgenommen werden. Für die Wägung des Körpers in Luft haben wir die eben abgeleitete Gleichung

$$X \left(1 - \frac{s}{\sigma}\right) = P \left(1 - \frac{s}{\gamma}\right) \dots \dots \dots a$$

Nennen wir  $\omega$  das spezifische Gewicht des Wassers, so erhalten wir unter der Annahme, daß bei der Wägung des in das Wasser eingetauchten Körpers die Dichtigkeit der Luft dieselbe ist, wie bei der Wägung in Luft, wenn  $p$  das Gewicht ist, welches dem in das Wasser tauchenden Körper das Gleichgewicht hält

$$X \left(1 - \frac{\omega}{\sigma}\right) = p \left(1 - \frac{s}{\gamma}\right) \dots \dots \dots b$$

Dividieren wir die Gleichung (a) durch (b), so wird

$$\frac{\sigma - s}{\sigma - \omega} = \frac{P}{p}$$

$$\sigma = \frac{P\omega - ps}{P - p}$$

Diese Korrektion, welche wir anbringen müssen, um das wahre Gewicht eines Körpers zu erhalten, können wir erst später in der Wärmelehre vollständig bestimmen, da die Größe  $s$  sich sehr bedeutend mit der Temperatur der Luft ändert. Hier sei nur soviel erwähnt, daß bei der Temperatur des schmelzenden Eises und 760<sup>mm</sup> Barometerstand das Gewicht eines Liter (1000 Cent. kub.) Luft nach den Versuchen von Regault 1<sup>gr</sup>,293 beträgt, das spezifische Gewicht  $s$  der Luft also 0,001293 ist.

Eine weitere wichtige Folge aus obigem Satze ist die, daß in der Luft gerade so wie im Wasser Körper schwimmen können, wenn das Gewicht der von ihnen aus der Stelle gedrängten Luft größer ist als ihr eigenes Gewicht. Nennen wir  $s$  das spezifische Gewicht der Luft,  $s'$  das des Körpers vom Volumen  $v$ , so ist gerade wie § 69  $v(s' - s)$  das Gewicht, welches die Körper fallen macht. Ist nun  $s' > s$ , so fällt der Körper zur Erde nieder, ist  $s' = s$ , so befindet er sich in der Luft im Gleichgewicht, ist  $s' < s$ , so steigt er in der Luft auf.

Hieraus geht hervor, daß in der Wirklichkeit nicht alle Körper gleich schnell fallen können, wie wir es im ersten Kapitel des ersten Abschnittes voraussetzten, da die Kraft, mit welcher sie zur Erde niederfallen, durch die Einwirkung der Luft modifiziert, nicht einfach ihrem Gewichte proportional ist; spezifisch leichtere Körper werden langsamer fallen müssen, als schwerere.

Wir werden aber in der Luftpumpe ein Mittel kennen lernen, um Ballone herzustellen, die keine oder nur sehr wenig Luft enthalten und zeigen, daß in diesen ein Stückchen Papier ebenso rasch fällt, als ein Stückchen Platin.

Die letzte Bedingung  $s' < s$  kann man herstellen, wenn man große Ballons mit dünnen und leichten Wänden mit erwärmter Luft oder einem Gas anfüllt, welches spezifisch leichter ist als Luft, z. B. Wasserstoffgas oder Leuchtgas.

Um die Kraft, mit welcher der Ballon aufsteigt, zu erhalten, haben wir nur von dem Auftrieb des Ballons  $v(s - s')$  das Gewicht  $p$  aller seiner Bestandteile abzuziehen, wir erhalten also dafür

$$v(s - s') - p.$$

Ist z. B. das Gas, mit dem der Ballon gefüllt ist, Wasserstoff, so ist

$$s = 0,0012932$$

$$s' = 0,0000895$$

1 Null Grad Temperatur, und wir erhalten

$$0,0012037 v - p$$

die Kraft, mit welcher ein solcher Ballon in der Luft emporgetrieben wird in Kilogrammen, wenn  $v$  in Litern gegeben ist.

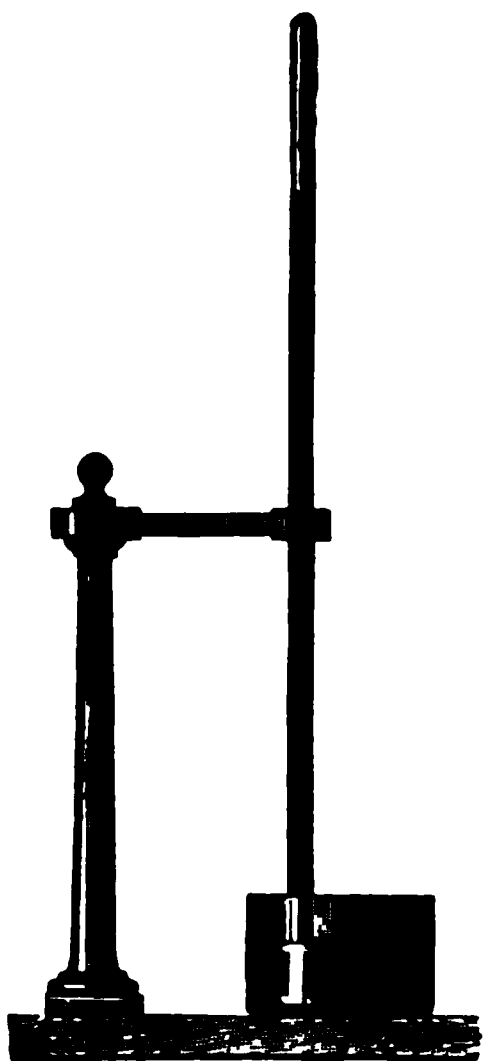
Die in neuerer Zeit vielfach benutzten Luftballons beruhen auf demselben Satze. Ein großer Schlauch von leichtem und doch dichtem Zeuge mit einem leichten Gase gefüllt, so daß selbst nach Anhängen eines Schiffchens usw. sein Gewicht noch kleiner ist als das der ausgedrängten Luft. Ein solcher Ballon wird sich daher mit allem in der Luft erheben.

### § 93.

**Das Barometer.** Wir sahen in dem vorigen Paragraphen, daß wir auf dem Boden eines Luftmeeres uns befinden, und daß deshalb jeder Punkt einen seiner Größe proportionalen Druck auszuhalten hat, der gleich dem Gewichte der Luftsäule, welche die Fläche zur Basis hat, der Luft gleich ist derjenigen der Atmosphäre. Es bietet keine Schwierigkeit, diese Tatsache durch den Versuch nachzuweisen und die Größe dieses Drucks zu messen.

Füllt man eine Röhre von ungefähr 1<sup>m</sup> Länge ganz mit Quecksilber an, schließt sie mit dem Finger, stellt sie in ein Gefäß mit Quecksilber, wie Fig. 169 und öffnet durch Wegnehmen des Fingers die Röhre unter Quecksilber, so sinkt das Quecksilber in der Röhre, aber nur bis zu einem gewissen Punkte, so daß das Quecksilber in der Röhre ungefähr 760<sup>mm</sup> höher steht als außerhalb.

Fig. 169.



Daraus folgt nach den früher erkannten statischen Gesetzen, daß auf der äußeren Oberfläche des Quecksilbers ein Druck lastet, der in der Röhre nicht vorhanden ist und dem das Gewicht der Quecksilbersäule von 760<sup>mm</sup> das Gleichgewicht hält. Wir erkennen in diesem Drucke auf die äußere Oberfläche des Quecksilbers den Druck der äußeren Luft. Wenn wir durch die Füllung mit Quecksilber das Quecksilber aus der Röhre vertrieben, so ist dort kein Druck, und die äußere Luft drückt gleich. Um das Quecksilber gehoben werden zu lassen, muß der Druck der gehobenen Quecksilbersäule dem Luftdrucke gleich sein. Die Höhe der Quecksilbersäule mißt also die Schwere der Luft an Querschnitt gleichen Luftsäule, deshalb nennt man diesen Apparat ein Barometer.

Die Idee, mittels dieses Versuches die Existenz des Luftdruckes nachzuweisen, rührt von Viviani (1644) her. Schon früh kannte man die Tatsache, daß in Röhren, aus welchen die Luft ganz oder teilweise genommen war, Flüssigkeiten emporsteigen. Man hatte diese Erscheinung zur Konstruktion der sogenannten Saugpumpen benutzt. Die Erklärer derselben suchten aber nicht in einem Drucke der äußeren Luft, sondern in dem horror vacui, man nahm an, daß die Natur einen Widerstand vor dem leeren Raum habe, und daß infolge dieses Abscheues das Wasser in den Pumpenröhren aufsteige, wenn durch Hebung des Kolbens in der

ner Raum sich bilde. Auf das Unhaltbare dieser Erklärung wurde aufmerksam, als in Florenz ein Pumpenmacher eine Saugpumpe herstellte, deren Saugrohr unter dem Bodenventil länger als 32 Fuß war; es gelang nicht, mit derselben das Wasser höher als nahe 32 Fuß zu heben. Nach der frühern Erklärungsweise hätte man annehmen müssen, daß die Luft nur bis zu dieser Höhe einen Abscheu vor dem leeren Raume hätte. Man erregte, an den man sich damals wandte, vermochte diese Schwierigkeit aufzuklären; erst sein Schüler Viviani erkannte die Ursache des Scheiterns des Wassers. Er schloß weiter, wenn der Luftdruck das Wasser nur bis zu einer Höhe von 32 Fuß oder 10,25<sup>m</sup> heben kann, so kann er das Quecksilber, welches ungefähr 13,5mal schwerer ist, nur bis zu einer noch kleinern Höhe oder nur bis ungefähr 28 Zoll — 760<sup>mm</sup> heben. Von Vivianis Freund, Toricelli, ausgeführte Versuch bewies die Richtigkeit dieser Vermutung. Später zeigte dann Pascal in der That, daß die Höhen, bis zu denen verschiedene Flüssigkeiten in so vorgerichteten Röhren gehoben wurden, ihrem spezifischen Gewichte umgekehrt proportional sind, ein Beweis, daß ein bestimmtes Gewicht einer Flüssigkeit in einer Röhre von gegebenem Querschnitte gehoben wird, welches dem äußern Luftdruck gleich ist.

#### § 94.

**Verschiedene Formen der Barometer.** Dient das Barometer nur zur Beobachtung von Barometern im Laboratorium, so daß es nicht von seiner Stelle zu werden braucht, und hat man ein Kathetenrohr zu Gebote, so ist die Einrichtung desselben sehr einfach. Man wendet als Gefäß einen parallelepipedischen Glaskasten an, den man auf ein in der Zimmerwand am besten vor einem Fenster angebrachtes festes Tischchen fest aufstellt (Fig 170). Das Rohr wird mittels zweier Klammern an einem Brett befestigt, welches mit dem Tischchen zugleich unten in der Zimmerwand fest eingelassen ist, und welches oben an der Stelle, wo sich der leere Raum des Barometers befindet, einen Ausschnitt erhält, so daß man hinter das Barometer die helle Fensterfläche sieht.

Man mißt dann die Niveauunterschiede mittels des Kathetenrohrs. Um diese Messungen mit möglichster Genauigkeit auszuführen, ist unten über dem Gefäß ein Stützfuß angebracht, der mittels einer Schraube in der Zimmerwand gehoben und gesenkt werden kann.

Wenn man die Messung machen will, beginnt man damit, den Stützfuß soweit herabzulassen, daß seine Spitze das Quecksilber berührt. Man kann dieses mit größter Genauigkeit erreichen, denn beim Herablassen sieht man das Bild des Stützfußes im Quecksilber, und der Stützfuß selbst sich gegeneinander bewegen. Der Augenblick, in dem die Spitze des Stützfußes das Quecksilber berührt, ist der Augenblick, in dem die Spitze des Stützfußes genau aufeinander treffen. Schraubt man den Stützfuß nun etwas höher, so wird die Spitze des Stützfußes sich von dem Quecksilber lösen, und man wird die Spitze des Stützfußes wieder auf das Quecksilber senken müssen.

Wenn man die Messung machen will, beginnt man damit, den Stützfuß soweit herabzulassen, daß seine Spitze das Quecksilber berührt. Man kann dieses mit größter Genauigkeit erreichen, denn beim Herablassen sieht man das Bild des Stützfußes im Quecksilber, und der Stützfuß selbst sich gegeneinander bewegen. Der Augenblick, in dem die Spitze des Stützfußes das Quecksilber berührt, ist der Augenblick, in dem die Spitze des Stützfußes genau aufeinander treffen. Schraubt man den Stützfuß nun etwas höher, so wird die Spitze des Stützfußes sich von dem Quecksilber lösen, und man wird die Spitze des Stützfußes wieder auf das Quecksilber senken müssen.

1888, Physik. I. 4. Aufl.

Fig 170



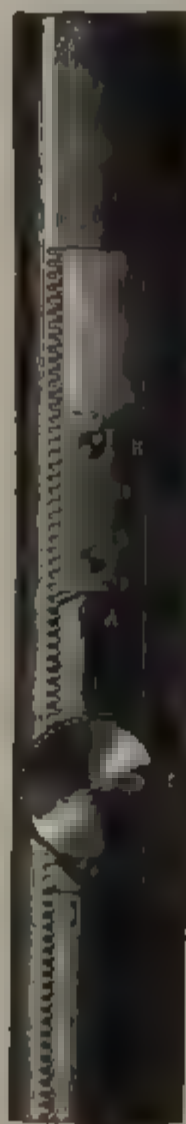


man zu weit, so höhlt sich das Quecksilber rings um den Stift aus. stellt man das Kathetometer zunächst auf die Quecksilberkuppe Röhre ein, indem man den horizontalen Faden des Fadenkreuzes die Kuppe tangieren läßt. Man bemerkt den Stand des Kathetometers, stellt dann unten auf das Niveau im Gefäße ein, indem man die des Stiftes wieder gerade das Fadenkreuz berühren läßt. Die Differenz beider Stellungen gibt die Höhe des Barometerstandes. Hat man die Länge des Stiftes genau gemessen, so kann man auch so verfahren, daß man anstatt das Niveau des untern Quecksilbers mit dem Kathetometer zu visieren, das obere Niveau des Stiftes bestimmt. Zur Differenz beider Ablesungen am Kathetometer fügt man dann, um den Barometerstand zu erhalten, die Länge des Stiftes hinzu.

Fig. 171



Fig. 172



meter zu visieren, das obere Niveau des Stiftes bestimmt. Zur Differenz beider Ablesungen am Kathetometer fügt man dann, um den Barometerstand zu erhalten, die Länge des Stiftes hinzu.

Dieses Barometer ist das genaueste, und diese Messungsmethode die genaueste, denn man kann auf diese Weise die Niveauunterschiede am besten erhalten; mag das Barometer vertikal stehen oder nicht, man erhält immer den vertikalen Abstand beider Quecksilberoberflächen. Man kann leicht die Höhe des Barometerstandes auf ein Fünfzigstel Millimeter ablesen.

#### Barometer von Fortin.

Das oben beschriebene Barometer kann jedoch nur an einem festen Orte aufgestellt werden. Man bedarf aber in vielen Fällen transportabler Barometer auf Reisen, um den Luftdruck an verschiedenen Orten zu messen, wie wir später zeigen werden, zu Höhenmessungen. Man muß daher ein tragbares Barometer anwenden, bei welchem der Maßstab ein für allemal fest ist. Das vorzüglichste Barometer der Art ist das Fortin'sche.

Das Gefäß desselben besteht aus einem Glaszylinder, welcher mit einem kupfernen Hülfsgehäuse versehen ist, der in seiner Mitte eine Öffnung hat, um das Quecksilber durchzulassen. Der Glaszylinder ist in einem Zylinder von Buchsbaumholz, der mittels Stangen an dem Hülfsgehäuse festgeschraubt ist. Der Boden dieses Buchsbaumzylinders ist aus einem elastischen Sack gebildet, einem Beutel, dessen innere Seite aus vulkanisiertem Kautschuk, dessen äußere aus Leder besteht, und der den vorspringenden Rand des Zylinders von Buchsbaum fest aufgebunden ist. Dieser Buchsbaumzylinder ist in einem weiten Metallzylinder fest

eingesetzt. Der Buchsbaumzylinder ist in einem weiten Metallzylinder fest eingesetzt. Der Buchsbaumzylinder ist in einem weiten Metallzylinder fest eingesetzt.

4, durch dessen Boden eine Schraube hindurchgeht, deren oben abgerundeter Kopf gegen ein metallisches Stück drückt, welches in der Mitte des Deckels befestigt ist und in dessen nach unten gerichtete Höhlung der Kopf der Schraube hineinpaßt.

Das Gefäß ist bis zu einer gewissen Höhe mit Quecksilber gefüllt. Wenn man die Schraube dreht, wird der elastische Boden des Gefäßes mit der Oberfläche des Quecksilbers in dem Glaszylinder gehoben oder gesenkt. Man ist daher imstande, das Niveau des Quecksilbers im Gefäß genau auf gleicher Höhe zu bringen. Um diese zu markieren, steckt man einen Elfenbeinstift *s* in den Zylinder durch den Deckel ab und man hat nur nötig, so wie bei dem vorigen Barometer zu sorgen, daß die Spitze des Stiftes *s* und ihr Bild sich befinden, indem man die Oberfläche des Quecksilbers mit Hilfe der Schraube hebt. Diese Spitze ist der Punkt, der an dem Barometer die Teilung angebracht ist.

Das Barometerrohr reicht durch der Mitte des Deckels angebrachte Öffnung in das Gefäß hinein, ist mit einem Stück Leder, welches an beiden Enden über den hervorstehenden Wänden der Öffnung angehängt ist, verschlossen, so weit, daß kein Quecksilber ausströmen kann, aber die äußere Luft nicht mit der des Gefäßes kommen kann. Das Rohr ist vollständig von einer Messinghülse umgeben, um es gegen Stöße zu schützen, aber nur, um den Stand des Quecksilbers beobachten zu können, weil gegenüberliegende Spalten vorhanden sind, die vielleicht zweimal unter und über den mittlern

des Barometers von 760<sup>mm</sup> lang sind. Auf der Messinghülse ist eine Millimeterteilung angebracht, welche oben neben dem Rande der Hülse steht und deren Nullpunkt die Spitze des Elfenbeinstiftes ist. Der Rand der Spalte ist gezahnt (Fig. 172) und mittels eines Triebes mit einem Nonius auf und ab verschiebbar. Will man eine Ablesung, so beginnt man damit, unten das Niveau des Quecksilbers einzustellen. Dann verschiebt man den Nonius, indem man das Zahnrad, der durch den untern Rand desselben gehenden Horizontalebene

Fig. 172.



hält, so lange, bis diese Ebene die Quecksilberkuppe tangiert, und bestimmt nur die Stellung des in dieser Ebene liegenden Nullpunktes des Nonius an der Teilung zu bestimmen, um den Stand des Barometers bis auf Zehntel Millimeter genau zu erhalten. Das Barometer wird auf einem dreibeinigen Stativ, welches beim Transport zugleich als Kapsel dient (Fig. 173), so aufgehängt, daß es durch die Schwere des Gefäßes immer vertikal hängt. Dazu ist es mittels einer sogenannten Cardanischen Aufhängung befestigt, das heißt um zwei zu einander senkrechte Achsen drehbar. Das Barometer ist an dem Durchmesser eines Ringes drehbar befestigt, der selbst um einen zu jenem senkrechten Durchmesser drehbar ist.

Dieses Barometer ist sehr leicht transportabel und bietet so einen weiteren Vorteil dar. Man schraubt dann das Quecksilber des Gefäßes auf die Höhe, soweit, bis nicht nur das Gefäß, sondern auch das Rohr ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Die vorher in dem Gefäße befindliche Luft tritt dann durch das Leder aus. Dann kann man den Apparat legen oder umkehren, ohne daß Luft in das Barometer eindringt, und ohne zu fürchten zu müssen, daß durch etwaige Stöße Schwankungen des Quecksilbers eintreten, so daß durch den Stoß des Quecksilbers das Glas zerbrechen könnte. Der zusammengelegte Dreifuß schützt als Kapsel das Barometer vor äußern Verletzungen.

### § 95.

**Korrektion wegen der Kapillarität.** Da in den bisher beschriebenen Barometern das Rohr stets in ein mehr oder weniger weites Gefäß mit Quecksilber taucht, so folgt aus den Sätzen der Kapillaritätslehre, daß in den Röhren wegen der kapillaren Depression das Quecksilber nicht so hoch steht, als es infolge des hydrostatischen Druckes tun würde. Wir müssen daher an den beobachteten Barometerständen eine Korrektur anbringen, indem wir die Depressionsgröße bestimmen und diese der beobachteten Barometerhöhe hinzufügen. Dies ist jedoch sehr schwierig. Wir wissen, daß die kapillare Depression abhängt von der Weite der Röhre und vom Winkel, unter dem die Flüssigkeitsoberfläche die Wandfläche schneidet. Wenn man aber nun den Winkel mißt, den die Quecksilberoberfläche mit der Wand bildet, so findet man denselben, wie wir bereits früher erwähnt, keineswegs konstant; ja die Schwankung ist im Barometer, selbst wenn man durch Klopfen an der Barometerröhre oder durch Neueinstellung des Fortinschen Barometers die Kuppe bewegt, noch viel bedeutender. Außerdem kommt vor, daß der Winkel nahezu ein rechter wird, und dann gar keine Depression eintritt. Die Depression des Quecksilbers kann auch in Röhren gleichen Durchmessers sehr verschieden sein, und man kann keine allgemein gültigen Tabellen aufstellen, um die Depression für Röhren von bestimmtem Durchmesser zu bestimmen. Man wird für jedes Barometer den Durchmesser der Röhre und für jede Beobachtung die Höhe des Meniskus messen, daraus den Winkel bestimmen, unter dem die Quecksilberoberfläche die Wandfläche schneidet, und dann die Depression berechnen. Um das leichter zu machen, sind verschiedene Tabellen berechnet, welche nach den Formeln von La

ie Depressionen bei verschiedenen Winkeln und Röhrendurchmessern an-  
geben. Eine solche von Delcros berechnet findet sich im XIV. Bande  
seiner Memoiren der Brüsseler Akademie. Mit den Tabellen von Delcros  
und keineswegs die von Mendelejeff und Fräulein Gutkowski neuer-  
dings<sup>1)</sup> äußerst sorgfältig bestimmten Depressionen in Übereinstimmung.  
Aus den von diesen angegebenen Werten hat F. Kohlrausch<sup>2)</sup> folgende  
Tabelle abgeleitet, welche für die in der ersten Spalte angegebene Röhren-  
weite  $D$  für die über den folgenden Spalten angegebene Kuppenhöhe die  
Depressionen angibt.

$D$ mm	Höhe der Kuppe mm							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37	—	—	—
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80	—	—
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,53	—
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8	—	0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9	—	0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10	—	—	0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11	—	—	0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12	—	—	0,07	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13	—	—	0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

Man sieht, wie die Depression mit zunehmender Röhrenweite rasch  
abnimmt, bei einem Röhrendurchmesser von  $20^{\text{mm}}$  ist sie selbst bei einer  
Kuppenhöhe von mehr als  $2^{\text{mm}}$  schon innerhalb der unvermeidlichen Be-  
obachtungsfehler. Wenn man die Röhre noch weiter, bis zu  $30^{\text{mm}}$  macht,  
so ist der Fehler stets verschwindend klein. Deshalb wendet man bei den  
Normalbarometern, die ein für allemal fest aufgestellt sind, Röhren von  
solchen Durchmessern an. Bei den transportablen ist jedoch eine solche  
Weite wegen des zu großen Quecksilbergewichtes nicht anwendbar. Um  
an diesen mit größerer Sicherheit als nach den Tabellen die Korrektur  
abringen zu können, wird man am besten tun sie längere Zeit mit einem  
Normalbarometer zu vergleichen, um so für jede vorkommende Kuppen-  
höhe die kapillare Depression direkt zu bestimmen.

### § 96.

**Heberbarometer.** Von den bisher beschriebenen Barometern, den  
Gefäßbarometern, unterscheiden sich die Heberbarometer. Dieselben be-  
stehen aus einer heberförmig gebogenen Glasröhre, deren langer Schenkel  
oben geschlossen und deren kurzer Schenkel oben offen ist. Sind die  
Röhren an der Stelle, wo die Quecksilberoberflächen sich befinden, gleich  
weit, und sorgt man in nachher anzugebender Weise für Gleichheit der

<sup>1)</sup> Mendelejeff und Fräulein Gutkowski, Journal der Petersburger phys. Gesell-  
schaft 5 p. 212. Beibl. zu Poggend. Ann. 1. p. 455. 1877.

<sup>2)</sup> F. Kohlrausch, Leitfaden d. prakt. Physik. 7. Aufl. p. 413. Leipzig 1892.



Kuppen, so bedarf es bei ihnen keiner Korrektur wegen der Krümmung, so daß man bei der Unsicherheit dieser Korrektur mit diesen Heberbarometern weit sicherere Resultate erhält.

Die Barometerhöhe ist, wie wohl nicht weiter abzuleiten, dem Satze von den kommunizierenden Röhren die Höhendifferenz der Quecksilberniveaus in den beiden Schenkeln.

Fig. 174.

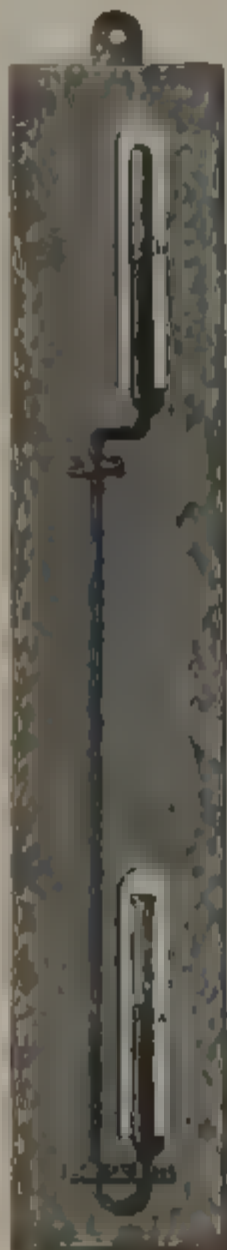


Fig. 175.



In dem Falle aber, wenn beide Niveaus des Quecksilbers in gleichem Maße und deshalb die Teilung in besonderer Weise gebracht werden.

Kann man den Barometer mit dem Kathetometer bestimme, bedarf es auch in diesem Falle keiner Teilung, eine heberförmige Glasröhre wird vor dem Ausschneiden versehen und dann befestigt (Fig. 174) und mit demselben vertikal aufgehängt, so daß die beiden Quecksilberoberflächen vertikal untereinander zu bringen. Die Röhre meist noch einmal gebogen. Eine einfache Ableseung mit dem Kathetometer ergibt den Barometerstand mit größter Genauigkeit. Hat man kein Kathetometer, so kann man zur Teilung auf dem Glase anbringen. Wird der Abstand zweier Punkte  $a$  und  $b$  genau gemessen und derselbe als Nullpunkt der Teilung genommen. Sei die Entfernung  $ab$  genau  $760\text{ mm}$ , so wird man den Punkt  $a$  mit 0 und  $b$  mit 760 bezeichnen und unter  $a$  sowie über  $b$  eine Reihe von Teilstrichen gezogen. Um den Barometerstand zu erhalten, beobachtet man die Teilstriche die obere und untere des Quecksilbers über oder unter dem Nullpunkte steht, und die Differenz

der Ablesungen gibt den Barometerstand. In unserer Zeichnung z. B. die untere Kuppe am Teilstriche 10 über dem Nullpunkt, die obere bei 750 stehen, der Barometerstand wäre dann  $750 - 10 = 740$ . Beim Ablesen hat man darauf zu achten, daß das Auge sich im Gipfel der Kuppe in der gleichen Horizontalebene befindet. Um den Barometerstand zu erhalten und zugleich um die Ablesung genauer zu machen, sind an dem oberen, sowie am untern Teile des Barometers kleine Mikroskope angebracht, mit Fadenkreuz versehene kleine Mikroskope angebracht.

Anstatt die Teilung auf dem Barometerrohr selbst anzubringen, kann sie auch neben dem Rohre auf dem Brette angebracht werden. Ist das Rohr ein für allemal fest angebracht, und ebenso die Teilung fest, so erhält man den Barometerstand in gleicher Weise wie in dem vorigen Falle.

Häufig findet man an Barometern, um mittels einer Ablesung den Barometerstand zu erhalten, das Rohr oder die Skala verschiebbar angebracht. Ist wie in Fig. 175 das Rohr vertikal verschiebbar, so befindet sich auf dem Brette, auf welchem die Skala befestigt ist, der Nullpunkt der Teilung markiert. Man stellt dann mit Hülfe der Stellschraube das Rohr so, daß die untere Quecksilberkuppe gerade an dem Nullpunkte ansetzt. Die an dem oberen Teile des Barometers angebrachte Teilung ist von diesem Punkte aus aufgetragen und eine einmalige Ablesung ergibt den Stand des Barometers.

Ist die Skala verschiebbar, so wird der Nullpunkt derselben auf die untere Kuppe eingestellt.

Man hat den Heberbarometern, um sie besser und sicherer transportieren zu können, mancherlei Formen gegeben, deren Zweck ist, den offenen Schenkel zu verschließen, so daß kein Quecksilber heraus und keine Luft in den leeren Raum des Barometers hinein kann. Die Fig. 174 und 175 dargestellten Barometer werden durch ein mit Baumwolle umwickeltes Holzstäbchen geschlossen, nachdem man durch vorsichtiges langsames Neigen den leeren Raum ganz mit dem Quecksilber gefüllt hat. Das Stäbchen wird soweit herunter gedrückt, daß es ganz auf dem Quecksilber aufsteht, und dann das Barometer umgekehrt, damit das Gewicht des Quecksilbers das Stäbchen nicht heraufdrücke.

Einen vortrefflichen Verschuß bietet die Vorrichtung, welche der Berliner Greiner an seinem Heberbarometer angebracht hat (Fig. 176). Die innern Wände des langen und kurzen Schenkels gehen nicht ununterbrochen ineinander über, sondern der lange Schenkel ist mit dem kurzen durch den künstlichen Glasverband *aa* verbunden. Der längere Schenkel ist konisch ausgezogen und um diesen Konus liegt bei *a* angeschmolzen der ausgeweitete Teil des kürzeren Schenkels. Durch die Öffnung *b*, welche ungefähr 2<sup>mm</sup> weit ist, kommuniziert der längere Schenkel mit dem kürzeren: der sie umgebende Raum ist stets mit Quecksilber gefüllt. Zum Transport wird das Barometer verschlossen, indem der Stopfen in die Verengung *c* des kürzeren Schenkels hinabgeschoben und dessen Stil in der Messingfassung *d* des kürzeren Schenkels festgeklemmt wird.

Fig. 177 *A* und *B* zeigt das Gay-Lussac'sche Barometer, welches ebenfalls sehr leicht und sicher transportiert werden kann. Es besteht aus zwei Stücken einer gut zylindrischen Röhre, welche durch eine mehrfach gebogene enge Röhre so verbunden sind, daß die Quecksilbersäulen in den beiden Röhren gerade untereinander liegen. Das Gefäß des Barometers hat nur eine sehr kleine Öffnung bei *O*, die dadurch erhalten wird, daß man in die vor der Glasbläserlampe erweichte Röhrenwand hineinsticht. Zum Transport neigt man das Barometer langsam, bis der leere Raum ganz mit Quecksilber erfüllt ist, und kehrt dann das Barometer vollständig um. Dann füllt das Quecksilber den langen Schenkel bis *r* und das überschüssige fällt in den kürzeren Schenkel unter die Öffnung *O*, durch

welche es wegen der kapillaren Depression des Quecksilbers im Glas austreten kann. Man sieht, daß das umgekehrte Barometer, da es ständig bis  $r$  mit Quecksilber erfüllt ist, beim Transport keine Stöße leiden kann, und zugleich, daß durch die enge Röhre nicht wohl Luft in den leeren Raum des Barometers gelangt.

Das Barometer von Bunten (Fig. 178) ist vor dem Eindringen von Luft noch mehr gesichert, indem über der untern Biegung der engern Röhre eine weitere Röhre angebracht ist, in welche sich der obere Teil der

Fig 176



Fig 177



Fig 178



Röhre fortsetzt und in der er in einer feinen Spitze endigt; wenn nun eine Luftblase eindringen sollte, so legt sich dieselbe in den Raum, der die Fortsetzung der engen Röhre umgibt, bei  $R$  und dringt nicht in den Raum des Barometers.

Die drei letzten Barometer sind im übrigen gerade so wie die beschriebenen einfachen Barometer auf einem Brette oder an einem Stativ befestigt; die Skala befindet sich meist auf dem Barometer. Gut ist es die Barometer stets in geneigter Stellung zu halten, und wenn man beobachten will, sie vertikal zu stellen. Die im kurzen Saugrohr an der Luft stehende Oberfläche des Quecksilbers oxydiert sich mit der Zeit; infolgedessen wird die Kuppenbildung dort ganz



näßig und es gelingt auch nicht durch Bewegen der Quecksilberoberfläche die Kuppenbildung regelmäßiger zu machen. Das gebildete Oxyd legt sich nämlich zum Teil an der Wand an und das Quecksilber adhärirt an dem mit Oxyd bedeckten Glase ganz anders als am reinen Glase. Ist das Barometer geneigt, so ist die Quecksilberoberfläche an einer tieferen Stelle des Rohres und das Oxyd setzt sich dort an; wird das Barometer senkrecht gestellt, so kommt die jedesmal sich frisch bildende Quecksilberoberfläche stets an reine Stellen der Glasröhre und die Kuppenbildung ist regelmäßig, sodaß bei Gleichheit der Röhrenweite im offenen und geschlossenen Schenkel es keiner Korrektion wegen der Kapillarität bedarf.

Da sehr häufig, trotz aller Vorsicht, etwas Luft in den leeren Raum des Barometers hineinsickert, so ist für genaue Beobachtungen das Barometer darauf hin zu untersuchen und eventuell dafür eine Korrektion anbringen. Man tut das, indem man die Höhe des Barometers mit dem Kathetometer abliest, wenn das Barometer senkrecht steht und ein zweites Mal, nachdem dasselbe geneigt ist, so daß der leere Raum des Barometers verkleinert ist. Befindet sich Luft in demselben, so ergibt die zweite Beobachtung einen niedrigeren Barometerstand, hat man durch Neigung den leeren Raum gerade auf die Hälfte gebracht, so ist zu dem zuerst beobachteten Stande die Differenz der in vertikaler und geneigter Stellung gemessenen Barometerhöhen hinzuzufügen, wie sich aus dem nachher zu sprechenden Mariotteschen Gesetz ergibt.

An den beobachteten Barometerhöhen ist, wenn nicht die Beobachtung gerade bei der Temperatur Null Grad gemacht ist, eine Korrektion wegen der Temperatur anzubringen. Das Quecksilber dehnt sich wie alle Körper im Erwärmen aus und wird dadurch leichter; dem gleichen Gewichte der Luft hält daher vom kalten Quecksilber eine kürzere Säule das Gleichgewicht als vom warmen. Die bei verschiedenen Temperaturen genommenen Barometerstände sind daher nicht vergleichbar. Man muß deshalb die bei verschiedenen Temperaturen genommenen Barometerstände auf eine Normaltemperatur und somit auf eine Normaldichtigkeit des Quecksilbers reduzieren. Als solche Normaltemperatur ist diejenige des schmelzenden Eises ausgeführt, von welcher ab als Nullpunkt die Grade unserer Thermometer als gerechnet sind.

Ist der Barometerstand mit einem Kathetometer abgelesen, dessen Teilung für die gewöhnliche Temperatur unserer Laboratorien richtig ist, so befindet sich die Teilung auf dem Barometerrohr und ist ebenfalls bei der gewöhnlichen Temperatur der Laboratorien  $18-20^{\circ}$  ausgeführt, so ist nur die Ausdehnung des Quecksilbers zu beachten, wenn wir ebenfalls voraussetzen, daß die Barometerhöhe bei gewöhnlicher Temperatur beobachtet ist. Ist  $B$  der bei der Temperatur  $t$  beobachtete Barometerstand, so ist der auf Null Grad reduzierte

$$B_0 = \frac{B}{1 + 0,0001814 t}$$

Indem die Maßstäbe bzw. die Teilung auf dem Barometerrohr für die Temperatur  $0^{\circ}$  aufgetragen, so tritt an die Stelle der Zahl 0,0001814 die Differenz der Ausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers und des Maßstabes.

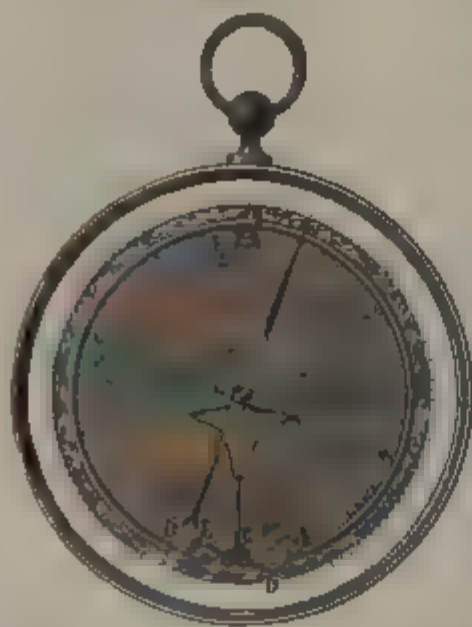
Da die Teilung wie bei den meisten Kathetometern aus Silber, so wird

die Zahl 0,000162, ist die Teilung auf Glas 0,000174. Wird der Wärmelehre auf diese Korrekturen zurück<sup>1</sup>.

### § 97.

**Aneroidbarometer.** Auf einem ganz andern Prinzip als Silberbarometer beruhen die Aneroid- oder Metallbarometer. Derselben wurde von Vidi<sup>2</sup>) konstruiert; das Prinzip desselben ist einfach, eine flache zylindrische Metalldose, deren Deckel aus einer Bleche verfertigt ist, wird, nachdem sie luftleer gepumpt ist, verschlossen. Der biegsame Deckel nimmt dann eine gewisse Gestalt an, welche von seiner Elastizität, dem gerade vorhandenen Luftdruck und dem Drucke der noch in der Dose vorhandenen Luft abhängt. Letzterer, konstante Temperatur vorausgesetzt, bleibt, wie die elastische Beschaffenheit des Deckels ungeändert. Wird der Luftdruck ein anderer, so muß die Lage des Deckels eine andere sein. Steigt der Luftdruck, so wird der Deckel nach innen gedrückt, sinkt derselbe, so wölbt sich der Deckel mehr nach außen. Die durch den Luftdruck bewirkte Bewegung des Deckels wird durch einen auf demselben angebrachten Stift auf ein in dem Kasten, auf dessen Dose befestigt ist, angebrachtes Hebelwerk übertragen. Das Hebelwerk dreht einen Zeiger, der, wie es Fig. 179 für das Bourdonsche Barometer angibt, auf eine Teilung zeigt.

Fig. 179



steigt der Luftdruck, so bewegt sich der Zeiger nach innen, sinkt derselbe, so bewegt sich der Zeiger nach der andern Seite.

Auf einem ähnlichen Prinzip beruht das kurze Zeit nachher von Bourdon konstruierte Metallbarometer<sup>3</sup>). Das Barometer besteht aus einer biegsamen Röhre, deren Biegung eines Rohres, dessen Enden fest verschlossen wird, so daß die Zunahme der biegenden Kraft zu einer Zunahme der Biegung, die Abnahme derselben abnimmt. Die Röhre ist elastisch kreisförmig gebogen. Wenn sich demnach stärker oder schwächer der Luftdruck bei konstantem innern Druck der Röhre zunimmt oder abnimmt. In dem Bourdonschen Barometer ist eine solche kreisförmige Röhre bei *F* befestigt und bei *G*

frei; im Innern der Röhre ist die Luft sehr stark verdünnt. Wenn der Druck in der Atmosphäre zunimmt, so nähern sich die Enden *F* und *G* einander.

1) Eine Beschreibung und Theorie der in neuerer Zeit auf meteorologischen Observatorien vielfach als Registrierapparat benutzten Wärmestromuhr würde hier zu weit führen und liegt als von speziell meteorologischen Zwecken zu fern. Man findet eine ausführlichere Beschreibung in: *Schreiber, Theorie und Praxis des Wagebarometers*. Carl's Repertorium 1872. Man sehe auch *Sprung, Zeitschrift für Instrumentenkunde* 1886; 7 p. 17 1887.

2) *Vidi, Comptes Rendus* 24 p. 976 1847 *Poggend. Ann.* 78

3) *Bourdon, Comptes Rendus* 87. p. 656. 1858

Ein um die feste Achse drehbarer Winkelhebel  $AICEB$  dreht sich und überträgt die Bewegung mittels des gezähnten Radstückes bei  $G$  auf einen Zeiger, der auf einer am Umfange des Barometers angebrachten Teilung einspielt. Nimmt der Luftdruck ab, so gehen die Enden der Hebelarme  $A$  und  $B$  wieder auseinander, und der Zeiger bewegt sich nach entgegengesetzter Richtung. Der Zeiger ist mit einer Stellvorrichtung unabhängig von dem Rade drehbar und wird so eingestellt, daß er bei mittlerem Luftdrucke auf der Mitte der Skala bei  $F'$  steht, steigt der Luftdruck, so geht der Zeiger nach der einen, fällt derselbe, nach der andern Seite.

Aus der Beschreibung der Aneroid- oder Metallbarometer ergibt sich, daß die Teilung nur empirisch nach einem Quecksilberbarometer hergestellt werden kann.

Die Aneroidbarometer haben den großen Vorteil, leicht transportabel zu sein, sie können ferner sehr empfindlich hergestellt sein, bedürfen aber bei ihrer Benutzung großer Vorsicht, da sie im Laufe der Zeit sich ändern, es heißt, bei demselben Luftdruck nicht dieselbe Angabe machen, indem im Laufe der Zeit sich die Biegung der Deckel oder der Röhre ändert. Diese Änderungen, die an den verschiedenen Exemplaren sehr verschieden und im allgemeinen um so kleiner sind, einen je kleineren Spielraum man der Bewegung der Deckel gibt, sind zum Teil stetig. Man muß die Aneroidbarometer deshalb von Zeit zu Zeit und um so öfter, eine je größere Genauigkeit man von ihnen verlangt, mit dem Quecksilberbarometer vergleichen. Es kommen Barometer vor, besonders in der von Naudet gegebenen Form, wo die Änderung im Jahr kein Millimeter beträgt, andere aber, wo eine solche Änderung in einem Monat und in noch kürzerer Zeit folgt. Hierzu kommen, was noch schlimmer ist, unstetige Änderungen, die darin bestehen, daß bei starken besonders rasch erfolgenden Änderungen des Luftdrucks das Barometer nicht auf den früheren Stand zurückkehrt, wenn der Luftdruck wieder der frühere geworden ist. Ich habe ein solches Barometer drei Monate lang mit dem Quecksilberbarometer verglichen und bei Luftdruckschwankungen von  $10 - 12^{\text{mm}}$  Änderungen in den Angaben von  $2^{\text{mm}}$  gefunden; bei diesem Exemplar hatten sich in den drei Monaten diese Änderungen so summiert, daß die Angaben an der Skala um  $23^{\text{mm}}$  hoch waren.

Bei den Metallbarometern ist ebenso wie bei den Quecksilberbarometern eine Korrektur wegen der Temperatur anzubringen, die ebenfalls empirisch gefunden werden kann, indem man ein solches Barometer auf verschiedene Temperaturen erwärmte Räume einführt und seinen Stand mit dem des Quecksilberbarometers vergleicht.

### § 98.

**Schwankung und Größe des Luftdrucks.** Eine fortgesetzte Beobachtung des Barometers gibt uns, wie schon vorhin erwähnt wurde, zu erkennen, daß der Luftdruck keineswegs zu allen Zeiten am gleichen Orte und zu derselben Zeit an verschiedenen Orten der gleiche ist. Die Schwankungen des Luftdrucks stehen in inniger Beziehung zu den Witterungserscheinungen, die Beobachtung dieser Schwankungen ist des-

halb eine wesentliche Aufgabe der meteorologischen Stationen, wir begnügen uns hier damit, die wichtigsten Resultate dieser Beobachtungen mitzuteilen, soweit sie uns zur Kenntnis der Größe des Luftdrucks erforderlich sind.

Beobachtet man an einem und demselben Orte das Barometer regelmäßig, am besten mit Hilfe eines Registrierapparates, so findet man, daß der Luftdruck unaufhörlichen Schwankungen unterworfen ist, daß er höchst selten auch nur für eine Stunde konstant ist. Bei einer genauern Untersuchung der Schwankungen unterscheidet man bald zwei Klassen derselben, periodisch regelmäßige und unregelmäßige. Erstere betragen nur wenige Millimeter, letztere gehen in unsern Breiten bis zu 60<sup>mm</sup>. In tropischen Gegenden sind fast nur die regelmäßigen Schwankungen vorhanden. Infolge dieser regelmäßigen Schwankungen hat das Barometer zweimal des Tages einen höchsten und zweimal einen tiefsten Stand. Die höchsten Stände sind kurz vor Sonnenuntergang und des Morgens zwischen 9 und 10 Uhr, die tiefsten einige Zeit vor Sonnenaufgang und des Nachmittags gegen 4 Uhr. Die Zeiten, an denen diese Maxima und Minima auftreten, ändern sich im Laufe des Jahres etwas, der tiefste Stand am Nachmittag und der höchste des Abends tritt im Sommer später, der tiefste Stand am Morgen dagegen im Sommer früher ein als im Winter, nur der höchste Stand am Morgen fällt Winter und Sommer ungefähr auf die gleiche Zeit.

Ebenso ergibt sich auch eine jährliche Periode der Schwankungen, die Barometerstände sind im Winter im allgemeinen höher, der Luftdruck ist also im Winter größer als im Sommer.

Nimmt man aus möglichst vielen längere Jahre fortgesetzten Beobachtungen das Mittel, und bestimmt so den mittlern jährlichen Barometerstand, so findet man denselben für die verschiedenen Jahre merklich gleich groß, so daß wir schließen müssen, daß der Luftdruck im großen und ganzen, jene Schwankungen abgerechnet, immer derselbe bleibt.

Ein Vergleich der so erhaltenen Jahresmittel, welche uns also den mittlern Luftdruck eines Ortes geben, für verschiedene Orte zeigt, daß der Luftdruck auch örtlich verschieden ist. Zunächst zeigt sich die Höhe über dem Meeresniveau von maßgebendem Einfluß, der Luftdruck nimmt mit steigender Höhe nach einem bestimmten demnächst (§ 105) abzuleitenden Gesetze ab. Mit Hilfe dieses Gesetzes können wir alle an verschiedenen Orten, deren Höhe bekannt ist, beobachteten Barometerstände auf das Meeresniveau reduzieren. Eine derartige Reduktion zeigt, daß auch der Barometerstand keineswegs an allen Orten derselbe ist, daß er sich mehr oder weniger mit der Länge und Breite eines Ortes ändert. Um die Änderungen des Barometerstandes mit der Länge eines Ortes auch nur annähernd zu bestimmen, dazu reicht das vorhandene Beobachtungsmaterial keineswegs aus. Für die Änderungen mit der Breite eines Ortes scheint aber allgemein das Gesetz zu herrschen, daß der Barometerstand vom Äquator bis gegen den 30 Breitengrad zunehme, von dort bis zum 65 Breitengrad abnehme und in höheren Breiten wieder wachse. Um ein Bild von den Änderungen zu geben, führen wir Schouws Angaben hier an, der aus 10 Beobachtungen verschiedener Orte auf Inseln und an den Uferküsten der atlantischen Ozeans folgende Übersicht zusammengestellt hat:



Breite nördlich Barometerstand		Breite nördlich Barometerstand	
0	762,2	50	762,2
10	763,7	60	758,9
20	765,5	65	753,4
30	766,6	70	755,6
40	764,4	75	758,9

Die Barometerstände am Meeresufer, schließt Schouw, scheinen räumlich das nebeneinander darzubieten, was in zeitlicher Reihenfolge die täglichen und jährlichen Schwankungen zeigen.

Von viel bedeutenderer Größe als die periodischen Änderungen des Barometerstandes sind die nicht periodischen. Daß aber auch diese einer gewissen Regelmäßigkeit folgen, hat Dove auf das sicherste nachgewiesen, indem er den Begriff der barometrischen Windrose aufstellte und zeigte, daß die Barometerschwankungen auf das innigste mit den Änderungen der Windrichtung zusammenhängen.

Der Luftdruck ist im allgemeinen bei Nordostwind am höchsten, sinkt bei Ost-, Südost-, Südwind, ist bei Süd- und Südwestwind am tiefsten und steigt bei West-, Nordwest- und Nordwind.

Den innern Zusammenhang dieser Tatsache weist die Meteorologie nach, sie zeigt, daß die Luftströmungen, welche ein Sinken des Barometers bewirken, uns warme und diejenigen, welche ein Steigen hervorrufen, uns kalte Luft zuführen. Die Wärmelehre gibt uns den physikalischen Grund dieser Tatsache.

Mit der Änderung des Windes hängt auf das innigste die Änderung des Wetters zusammen; im mittlern Europa bringt Süd- und Südwestwind allgemeinen Regen, dagegen Nordostwind heiteres und klares Wetter, daß der Barometerstand selbst mit dem Wetter parallel geht. Bei hohem Barometerstand haben wir sogenanntes gutes Wetter, bei niedrigem Regen und Wind. Der mittlere Barometerstand entspricht dem Übergange von gutem zum schlechten, wenn er bei sinkendem, vom schlechten zum guten, wenn er bei steigendem Barometer erreicht wird. Deshalb eben wird auch das Barometer als sogenanntes Wetterglas benutzt, und neben den entsprechenden Barometerstände die Bezeichnung gutes Wetter, veränderlich usw. gesetzt. Betreffs des nähern über den Zusammenhang des Barometerstandes mit dem Wetter verweisen wir auf die neuern Lehrbücher der Meteorologie von Mohn, von Bebbber, Sprung u. a.

Wir haben schon mehrfach erwähnt, daß man den Druck einer Atmosphäre als Maßeinheit des Druckes nimmt; aus dem gesagten geht hervor, daß man bei den starken örtlichen und zeitlichen Schwankungen des Druckes einen bestimmten Druck als den der Atmosphäre definieren muß. Hier wählte man als den normalen Druck einer Atmosphäre jenen, der dem Pariser Zoll entsprach, in England nahm man 30 Zoll englisches Maß. Nach Einführung des Metermaßes wird jetzt allgemein bei physikalischen Versuchsungen als Druck einer Atmosphäre jener bezeichnet, welcher einer Quecksilberhöhe von 760<sup>mm</sup> bei 0° entspricht. Der Barometerstand 760<sup>mm</sup> ist gleich 28,075 Zoll Pariser Maß und 29,722 Zoll englisch, so daß also der jetzt angenommene Normalwert des Atmosphärendrucks etwas höher ist als der frühere Pariser und etwas kleiner als der englische.

Alle Zahlen, in welche der Luftdruck eingeht, und derselben sind, wie wir schon sahen und noch sehen werden, recht viele, sind auf diesen Normaldruck von 760<sup>mm</sup> bezogen.

Die Größe dieses Druckes ergibt sich aus der Überlegung, daß auf dem Quadratcentimeter ein Druck gleich dem von 76<sup>cm</sup> Quecksilber lastet. Nach Regnault ist das spezifische Gewicht des Quecksilbers gleich 13,5959, demnach ist das Gewicht dieser Quecksilbersäule gleich 1033,288<sup>gr</sup> oder abgerundet 1,0333<sup>kg</sup>. In absolutem Maße,  $GCS$  ist somit der Druck der Atmosphäre

$$1013667,3 \frac{gr}{cm \ sec^2}.$$

In der praktischen Maschinentechnik wird jetzt vielfach der Druck eines Kilogramm pro Quadratcentimeter als Atmosphärendruck genommen; es entspricht das einer Barometerhöhe von 735,5<sup>mm</sup>.

## § 99.

**Boyle-Mariottesches Gesetz.** Da die Flüssigkeiten ein selbständiges Volumen haben, so haben sie auch eine bestimmte von dem äußern Druck, dem sie unterworfen sind, nur in geringem Grade abhängige Dichtigkeit.

Bei den Gasen ist das jedoch durchaus anders, da wir sahen, daß ihr Volumen nur von dem äußern Drucke abhängt. Es fragt sich nun, wie hängt das Volumen und die Dichtigkeit der Gase von dem äußern Drucke ab.

Diese Frage ist schon frühzeitig untersucht und zwar zuerst von dem englischen Physiker Boyle<sup>1)</sup> und einige Jahre später von dem französischen Physiker Mariotte<sup>2)</sup>. Beide gelangten zu demselben Resultate, das sich in folgendem, nach dem letztern meist das Mariottesche, neuerdings aber auch vielfach das Boylesche oder auch das Boyle-Mariottesche genannten, Gesetze aussprechen läßt.

Wenn man eine gegebene Gasmenge in einem Gefäße abschließt und dieselbe dann verschiedenen Drucken  $P$  und  $P'$  aussetzt, so verhält sich das Volumen des Gases in beiden Fällen,  $v$  und  $v'$  umgekehrt wie die Drucke oder

$$v : v' = P' : P.$$

Anstatt dieses Ausdrucks können wir auch setzen

$$v' P' = v P,$$

oder das Produkt aus dem Volumen einer Gasmenge und dem Druck, unter dem sie steht, ist konstant.

Da nun, wie wir früher sahen, die Dichtigkeit eines Körpers bei gleichem Gewicht dem Volumen desselben umgekehrt proportional ist, oder

$$v : v' = d' : d,$$

1) Boyle, Nova experimenta physico-mechanica de vi aëris elastica. London 1662.

2) Mariotte, De la nature de l'air. Paris 1679.

aus dem obigen, daß die Dichtigkeit einer Gasmenge den Drucken, derselbe ausgesetzt, direkt proportional ist, oder

$$d : d' = P : P'.$$

Versuche, mittelst welcher Mariotte dieses Gesetz nachwies, waren

Er nahm eine lange Glasröhre, welche vor einem festen Brette und nahe ihrem Ende umgebogen war, so daß ein kürzerer aufsteigender Schenkel entstand, wie bei dem Heberbarometer. Der kürzere war oben geschlossen, der längere oben offen (Fig. 180). Man

fügte zunächst eine kleine Menge Quecksilber in den offenen Schenkel, so daß es in beiden Röhren bis zum Nullpunkt der Teilung reichte. Dieses schloß dann die in dem geschlossenen Schenkel enthaltene Luft vollständig ab. Das Volumen der abgesperrten Luft wird durch die hinter der Röhre angebrachte Teilung abgemessen. Das Gas erfüllt jetzt den abgesperrten Raum. Der Druck der äußern Luft, welche auf der Oberfläche des Quecksilbers im offenen Schenkel lastet, und welcher den früher erkannten hydrostatischen Druck in der geschlossenen Röhre sich überträgt.

Man gießt nun durch den Trichter in das offene Schenkel Quecksilber nach. Das Niveau desselben steigt auf beiden Seiten, aber in dem geschlossenen Schenkel steigt es weniger als in dem offenen, und man findet, daß das Quecksilber in dem geschlossenen Schenkel bis zum Strich 5 angestiegen ist, die eingeschlossene Luft

nur mehr die Hälfte ihres frühern Volumens wenn der Unterschied der beiden Quecksilberstände die Höhe des Barometers beträgt. Dann fügt man auch das Gas den Druck zweier Atmosphären an, indem außer dem Drucke der äußern Luft noch den Druck einer dem Gewichte der Luft an Größe gleich Quecksilbersäule auf das abgeschlossene Gas. Wenn man weiter Quecksilber hinzufügt, bis der Unterschied gleich 2, 3, 4 . . . Barometerhöhen wird, so erhält man dadurch einen Druck von 3, 4, 5 . . . Atmosphären, und man findet dann, daß das Volumen der abgesperrten Luft auch  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  . . . des ursprünglichen Volumens beträgt.

Um die Richtigkeit des Mariotteschen Gesetzes für Drücke zu prüfen, die größer sind als der Druck der äußern Atmosphäre, kann man sich das folgende Verfahren bedienen, welches im wesentlichen schon Mariotte

Eine möglichst zylindrische Barometerrohr wird ihrer ganzen Länge nach in Millimeter geteilt und durch Kalibrieren der zwischen zwei Teilstrichen enthaltene Raum bestimmt. Zu dem Ende bringt man gleiche Mengen Quecksilber nacheinander in die Röhre.

Man füllt die Röhre bis zum Teilstrich  $n$ , das erste und zweite Teilstrich  $n'$ , durch Hinzufügen des dritten fülle sich die Röhre

Fig. 180





bis zum Teilstriche  $n''$  usf., so folgt daraus, daß sich die Räume bis zu den Teilstrichen  $n$ ,  $n'$ ,  $n''$  verhalten wie  $1:2:3$ .

Hat man auf diese Weise das Kaliber der Röhre an allen Stellen bestimmt, so füllt man dieselbe vollständig so, als wenn man ein Barometer herstellen wollte, und kehrt dann das fertige Barometer um, daß (Fig. 181) um. Dasselbe besteht aus einer weiten Röhre

Fig. 181



oder noch besser von Gußeisen unten verschlossen und mit einem Hahn versehen ist und oben in ein Gefäß von Glas endet. Die Röhre ist in einem Dreifuß vertikal aufgestellt und bis  $nn$  mit Quecksilber gefüllt. Unten angebrachte Hahn dient dazu, das Quecksilber leicht zu lassen zu können.

Hat man das fertige Barometer umgekehrt, so bringt man ein Zuleitungsrohr etwas unterhalb der Luft in dasselbe. Dieselbe Luft hebt das Quecksilber in den Leertube auf, und sofort sieht man das Quecksilberniveau durch die Röhre sinken. Man drückt die Röhre zunächst in das Gefäß so weit, daß die Oberflächen des Quecksilbers im Innern der Röhre mit der äußeren Quecksilbersäule von gleicher Höhe sind. Der Teilstrich, neben welchem das Gefäß steht, gibt uns dann den Druck, welchen die Luft unter dem Barometer einnimmt. Zieht man nun das Rohr weiter aus dem Gefäß, so steigt das Quecksilber heraus, so vermehrt sich das Volumen der abgesperrten Luft, aber zugleich steigt auch das Quecksilber infolge des äußeren Druckes in der Röhre empor und der Unterschied zwischen der Quecksilbersäule dieser Röhre und der Barometerhöhe gibt uns den Druck, unter dem sich das Gas befindet.

Denn auswärts lastet auf dem Quecksilber der Druck der ganzen Atmosphäre oder ein Druck gleich dem einer Quecksilbersäule von der Höhe des Barometers, im Innern hält die Luft zum Teil die gehobene Quecksilbersäule das Gleichgewicht: der Rest der Barometerhöhe über diese Quecksilbersäule drückt also das Gas. Diesem Drucke hält die Elastizität des Gases, der Druck, den es aus Bestrebens, sich auszudehnen, auf die Wände ausübt, das Gleichgewicht.

Um diese Unterschiede zwischen dem Barometerstande und der Höhe unserer Röhre gehobenen Quecksilbersäule zu messen, ist neben

in festes Barometer angebracht. Man mißt dieselben mittels des Kathetometers.

Vergleicht man die von dem Gase angefüllten Räume und die Drucke  $P$ , unter welchen es steht, so findet man stets

$$P \cdot v = P' \cdot v'.$$

Füllt z. B. das Gas, wenn das Rohr so tief eingetaucht ist, daß die Oberfläche des Quecksilbers innerhalb und außerhalb der Röhre von gleicher Höhe ist, die Röhre bis zum Teilstreiche  $n$ , so füllt es die Röhre bis zum Teilstreiche  $n'$ , das Volumen des Gases ist also doppelt so groß, wenn die Höhe des Quecksilbers in der Röhre gerade die Hälfte der Barometerhöhe trägt usf.

Mittels dieser schon von Mariotte angestellten Versuche kann man das angestellte Gesetz nachweisen; indes können sie keinen Anspruch auf große Genauigkeit machen, da es besonders äußerst schwierig ist, die Temperatur konstant zu erhalten. Das ist aber durchaus erforderlich, da bei einer Temperaturänderung das Gas ebenfalls sein Volumen ändert, das Mariottesche Gesetz also nur bei konstanter Temperatur der Gase gültig sein kann.

Überdies kann man bei diesen Methoden die Drucke, denen das Gas ausgesetzt ist, nur zwischen verhältnismäßig engen Grenzen variieren lassen. In der Wichtigkeit dieses Gesetzes fragt es sich jedoch, ob es streng und allgemein gültig ist.

Seit Mariotte und Boyle sind deshalb sehr vielfach Versuche darüber angestellt, ob dieses Gesetz für alle Gase und für alle Drucke gültig sei. Die älteren Versuche von Musschenbroek<sup>1)</sup> Sulzer<sup>2)</sup>, Robinson<sup>3)</sup> gelangten zu keinem entscheidenden Resultate; der erstere schloß in Übereinstimmung mit Boyle, daß unter Drucken, welche größer waren als vier Atmosphären, die Luft weniger, die letzteren, daß sie mehr zusammengedrückt würde, als das Gesetz verlangt.

Im Jahre 1826 publizierten dann Oersted und Schwendsen<sup>4)</sup> Versuche nach einer der beschriebenen ähnlichen Methode, aber mit besseren und genaueren Apparaten, und nach einer zweiten ganz verschiedenen Methode. Sie komprimierten Luft in dem Kolben einer Windbüchse und bestimmten mittels einer Wage das Gewicht und somit die Dichtigkeit der in dem Kolben enthaltenen Luft. Den Druck, unter welchem die Luft stand, bestimmten sie mit Hilfe eines Sicherheitsventiles aus dem Drucke, den dieselbe auf die Wände des Kolbens ausübte. Das Ventil wurde mit einem einarmigen Hebel festgedrückt, und das Gewicht auf demselben so lange verschoben, bis die eingeschlossene Luft es gerade zu heben imstande war. Mit der ersten Methode dehnten Oersted und Schwendsen ihre Versuche bis zu einem Drucke von 8, mit der letztern bis auf 68 Atmosphären aus. Sie schlossen aus ihren Versuchen, daß für Luft das Mariottesche Gesetz bis zu diesen Drucken streng gültig sei; bei der

1) Musschenbroek, Cours de physique. Tome III Paris 1759.

2) Sulzer, Mémoires de Berlin 1763.

3) Robinson, System of Mech. Phil. III.

4) Oersted und Schwendsen, Edinburgh Journal of science. 4. p 224.

unvermeidlichen Ungenauigkeit der letztern Methode darf man doch nur schließen, daß es mit großer Annäherung unter so hohen noch besteht.

Für andere Gase als die atmosphärische Luft fanden die Physiker das Gesetz jedoch nicht bestätigt, besonders wenn die Gase Kompression flüssig zu machen sind. Sie fanden z. B., daß sich Salpetersäure bis zu einem Drucke von zwei Atmosphären gerade so wie atmosphärische Luft, daß aber bei höheren Drucken das Gas komprimiert wurde.

Gleiche Resultate erzielten die Versuche von Despretz<sup>1)</sup> Es waren mehrere graduierte oben geschlossene Röhren, deren eine Luft, die andere Gase enthielten, in einen Oerstedschen Kompressionsapparat (Fig 76 § 64), nachdem er die offenen Enden der Röhren in ein Gefäß mit Quecksilber eingesetzt hatte (Fig 182). Bei einer Kompression des Wassers in dem Apparate wurde auch das Gas der Röhren komprimiert.

Fig 182



Der Druck war in dem ganzen Apparate derselbe, die Röhren alle ein gleiches Volumen hatten und es wurde sorgfältig darauf geachtet, daß das Niveau des Quecksilbers beim Beginn des Versuches in allen Röhren gleich war, so hätte es in allen Röhren dasselbe bleiben müssen, wenn die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgten. Es war das nicht der Fall, als die eine Röhre atmosphärische Luft, die zweite Ammoniakgas, die dritte Schwefelwasserstoffgas, die vierte Cyangas enthielt. Das Volumen dieser Gase nahm bei einem Drucke, welcher wenig größer war als der atmosphärische, schneller ab, als die Drucke zunahm, schneller, als das Volumen der atmosphärischen Luft abnahm.

Despretz schloß ferner, daß Wasserstoffgas und atmosphärische Luft bis zu einem Drucke von 15 Atmosphären dem Mariotteschen Gesetze folgen, daß aber bei Drucken von 20 Atmosphären und darüber die Luft zusammengedrückt werde, als das Gesetz von Mariotte es verlangt.

Durch Despretz's Versuche wurde also die exakte Gültigkeit des Gesetzes von Boyle-Mariotte auch für atmosphärische Luft in Frage gestellt, deshalb nahmen auf Aufforderung der französischen Akademie (Arago und Dulong<sup>2)</sup>) die Frage wieder auf.

Dieselben verfolgten mit ihren Versuchen die Kompression der atmosphärischen Luft bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären nach der Methode, die sich im Prinzip durchaus nicht von der Mariotteschen unterschied, die aber durch die Sorgfalt, mit welcher die einzelnen Theile des Apparates gearbeitet waren, und die Genauigkeit, mit welcher die Beobachtungen angestellt wurden, Resultate ergab, welche das höchste Vertrauen verdienen. Die zu komprimierende Luft war in einer sorgfältig ausgeführten Röhre von 1<sup>m</sup>,70 Länge und 5<sup>mm</sup> lichte Durchmesser eingeschlossen. Diese Röhre war von einem weitem Zylinder umgeben, durch

1. Despretz, Annales de chim et de phys. 34 1827.

2. Arago und Dulong, Mémoires de l'Académie des sciences de France, 10 p 193 1830

nierlich Wasser derselben Temperatur hindurchlief, um die in der eingeschlossene Luft auf konstanter Temperatur zu erhalten. Die inner Röhre kommunizierende offene Röhre hatte eine Länge von 27". In der nähern Details der Apparate und der einzelnen Vorsichtsmaß-, welche diese Physiker anwandten, müssen wir auf die Original-llung verweisen.

Dulong und Arago unternahmen drei Versuchsreihen; in jeder der- wurde der kurze geschlossene Schenkel ihrer Röhre mit Luft unter Drucke der Atmosphäre angefüllt, und diese dann immer stärker imiert. Nach jeder Erhöhung des Druckes wurde das Volumen der hlossenen Luft und die Niveaudifferenz des Quecksilbers in der ge- enen und offenen Röhre gemessen. Bei jeder Versuchsreihe wurde uck bis auf 27 Atmosphären verstärkt. Folgende Tabelle enthält n ihnen erhaltenen Zahlen in einer Versuchsreihe, bei der die Tem- r genau auf 13° erhalten war. Die erste Kolumne enthält den Druck limeter Quecksilberhöhe, die zweite das Volumen der Luft in der osenen Röhre, die dritte das Volumen berechnet nach dem Mariotte- Gesetze von dem Anfangsvolumen und dem Anfangsdrucke aus, und rte endlich die Unterschiede zwischen dem so berechneten und dem hteten Volumen.

Tabelle der von Dulong und Arago erhaltenen Zahlen.

Druck in mm Quecksilber	Beobachtetes Volumen	Berechnetes Volumen	Differenz
760,00	501,3	-	-
3612,4	105,247	105,470	0,230
3757,18	101,216	101,412	0,206
4625,18	82,286	82,380	0,094
5040,78	76,095	76,198	0,103
5737,38	66,216	66,417	0,201
8596,23	44,008	44,320	0,312
9992,36	37,851	38,132	0,281
12620,00	30,119	30,192	0,073
13245,06	28,664	28,770	0,106
14667,36	25,885	25,978	0,093
16534,9	22,968	23,044	0,076
16584,4	22,879	22,972	0,093
18438,5	20,547	20,665	0,118
20236,6	18,833	18,872	0,039
20498,6	18,525	18,588	0,063

ergleicht man die beobachteten mit den berechneten Zahlen, so findet dieselben sehr nahe gleich. Man muß daraus schließen, daß die bei Kompression der Luft, wenn überhaupt, sich nur sehr wenig von dem Mariotteschen Gesetze berechneten unterscheidet. Mehr kann jedoch daraus nicht schließen, da die Unterschiede nicht gleich sind, und da die beobachteten Volumina immer kleiner sind als rechnete Volumen. Es kann das seinen Grund haben entweder in der vollkommenen Richtigkeit des Gesetzes oder auch in Ungenauig-



keiten der Messungen. Die Art der Abweichungen spricht jedoch für die Erstere.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, ist man in dem Umstande, ganz vollkommene Messungen zu machen; wenn die Abweichungen zwischen den Beobachtungen und den nach einem vermuteten Gesetze gestellten Berechnungen nur sehr klein sind, so ist man zu der Annahme berechtigt, daß die Unterschiede gleich Null sein würden, wenn die Messungen ganz vollkommen wären, und kann auf die Richtigkeit des Gesetzes schließen. Indes wird in dem Falle der Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung bald positiv, bald negativ sein, das heißt, bald wird die beobachtete, bald die sich aus den Rechnungen ergebende Größe größer sein, da es ebenso wahrscheinlich ist, daß die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, bei einer sonst richtigen Methode, die Resultate vergrößern als verkleinern. Abweichungen, welche immer in demselben Sinne erfolgen, und seien sie auch noch so klein, lassen entweder einen konstanten Fehler in der Methode oder eine Ungenauigkeit des Gesetzes vermuten. Da ersterer nun nicht aufzufinden ist, so dürfen wir durch diese Vermutung das Gesetz nicht als bewiesen ansehen; müssen vielmehr annehmen, daß die sich zeigenden Abweichungen zum Teil allerdings in den Beobachtungsfehlern, zum Teil jedoch in einer Ungenauigkeit des Mariotteschen Gesetzes ihren Grund haben.

Arago und Dulong schlossen anders; sie glaubten, wie man überhaupt im Anfange des neunzehnten Jahrhunderts geneigt war anzunehmen, daß die Naturerscheinungen einfachen Gesetzen folgen, daß der mathematische Ausdruck derselben stets wenig kompliziert sein müsse. Deshalb finden diese Physiker es, daß die Abweichungen stets in demselben Sinne erfolgen, und hielten bei der geringen Größe der Unterschiede das Gesetz für bewiesen.

Arago und Dulong konnten ihre Versuche nicht über andernfalls als die atmosphärische Luft ausdehnen, da die französische Regierung die Benutzung der Gebäude entzog, in denen ihre Apparate aufgestellt waren.

Diese Lücke suchte Pouillet<sup>1)</sup> auszufüllen. Pouillet nahm die Luft nach den vorhergegangenen Versuchen das Boyle-Mariottesche Gesetz als richtig an, und verglich mit den Kompressionen der Luft mit den andern Gasen. Seine Versuchsmethode war derjenigen von Dulong ähnlich; die Röhren, in welchen er die Gase komprimierte, hatten eine Länge von zwei Meter.

Die Resultate Pouillet's sind folgende:

1) Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Stickoxyd und Kohlenoxyd folgen bis zu 100 Atmosphären dem Kompressionsgesetz der atmosphärischen Luft.

2) Die Gase, schweflige Säure, Ammoniak, Kohlensäure und Aethyloxydulgas, welche bei relativ geringen Drucken schon in die flüssige Form übergehen, werden merklich stärker komprimiert als die atmosphärische Luft, sobald ihr Volumen auf  $\frac{1}{2}$ , oder  $\frac{1}{4}$  komprimiert ist.

3) Das Gleiche gilt für leichtes und schweres Kohlenwasserstoffgas, welche bei einem Drucke von 100 Atmosphären noch nicht flüssig werden.

1) Pouillet, *Éléments de Physique*. 4<sup>e</sup> édit. Tome I p. 327.

Folgende Tabelle enthält die von Pouillet mitgetheilten Resultate. Die erste Kolumne enthält die Drucke, die zweite die theoretischen Volumina, die folgenden die Quotienten  $\frac{v'}{v}$  der beobachteten Volumina  $v'$  und der theoretischen  $v$  für die darüber stehenden Gase.

Druck in Atmo- sphären	Theore- tisches Volumen $v$	$\frac{v'}{v}$ $\frac{v'}{v}$ Kohlensäure	$\frac{v'}{v}$ $\frac{v'}{v}$ Stickoxydul	$\frac{v'}{v}$ $\frac{v'}{v}$ Leichtes Kohlenwas- serstoffgas	$\frac{v'}{v}$ $\frac{v'}{v}$ Schweres Kohlenwas- serstoffgas
1	1,00	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,50	1,000	0,996	0,998	0,994
4	0,25	1,000	0,988	0,995	0,989
5	0,20	0,989	0,983	0,992	0,986
6,67	0,15	0,980	0,971	0,989	0,983
10	0,10	0,965	0,956	0,981	0,972
15,38	0,065	0,934	0,923	0,949	0,962
20	0,050	0,919	0,896	0,956	0,955
25	0,040	0,880	0,849	0,951	0,948
33,3	0,030	0,808	0,787	0,951	0,931
40	0,025	0,739	0,732	0,940	0,919
50	0,020	—	—	0,907	0,899
83	0,012	—	—	—	0,850

Lange Zeit nahm man mit Arago und Dulong an, daß die atmosphärische Luft so wie Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff dem Mariotte'schen Gesetze vollständig folgen, bis Regnault die Frage 1845 wieder aufnahm. Er war durch gewisse Erscheinungen beim Ausdehnen der Gase durch die Wärme auf die Vermutung geführt worden, daß das Gesetz von Mariotte auch für diese Gase nur ein annähernd richtiges sei. Da nun das Gesetz über die Kompression der Gase ein Fundamentalgesetz der Physik ist, indem es in fast alle Bestimmungen über die Gase eingeht, so stellte Regnault eine Reihe neuer Versuche über diesen Punkt an<sup>1)</sup>.

Die Apparate, welche Regnault anwandte, waren im wesentlichen, dieselben, welche auch Arago und Dulong angewandt hatten, auch er benutzte die Methode von Mariotte, ein abgeschlossenes Gasvolumen durch Quecksilbersäulen zusammendrücken zu lassen, und maß dann zugleich das Volumen des Gases und den zugehörigen Druck.

Eine Verbesserung der Methode ließ jedoch eine bedeutend größere Genauigkeit in den Messungen erzielen.

Arago und Dulong waren bei ihren Versuchen stets davon ausgegangen, die kurze geschlossene Röhre mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre zu füllen und diese nach und nach bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären zusammenzupressen. Da nun das Anfangsvolumen des Gases unter dem Drucke einer Atmosphäre gleich 1 war, so war es unter dem Drucke von 5 Atmosphären nur  $\frac{1}{5}$ , bei 10  $\frac{1}{10}$ , bei 20 nur  $\frac{1}{20}$  usf.

<sup>1)</sup> Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. 21 p. 329

So wurde bei den hohen Drucken das Volumen sehr klein und daher war es unmöglich, es mit der nötigen Genauigkeit auszumessen. Besonders wenn man beachtet, daß es äußerst schwierig ist, das Volumen der einzelnen Teile der Röhre genau zu erhalten, und daß der Meniskus Quecksilbers nicht genau seine Gestalt beibehält.

Die sich hieraus unvermeidlich ergebenden Ungenauigkeiten der Messung vermied Regnault folgendermaßen:

Eine Glasröhre von 8–10<sup>mm</sup> lichte Durchmesser und 3<sup>m</sup> Länge wurde vertikal aufgestellt. Die Röhre, an ihrem obern Ende durch einen Hahn verschlossen, kommunizierte an ihrem untern Ende mit einer ebenfalls vertikal aufgestellten, oben offenen Röhre von 36<sup>m</sup> Länge, welche eine Quecksilbersäule enthielt, welche das in der ersten Röhre abgeschlossene Gas zusammendrücken sollte. Auf der oben verschlossenen Röhre von 3<sup>m</sup> Länge waren zwei Marken gezogen, die eine an ihrem untern Ende, welche das Volumen der ganzen Röhre bestimmte, indem zu Anfang jedes Versuches dafür gesorgt war, daß das Quecksilber in dieser Röhre bei dieser Marke stand; die zweite Marke war in der Mitte der Röhre gezogen, so daß sie genau das halbe Volumen der Röhre von ihrem obern Ende bis zur untern Marke bestimmte.

Man füllt nun zunächst die Röhre mit trockener Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre bis zur untern Marke, dann drückt man, indem man die Quecksilbersäule in der langen Röhre verlängert, die Luft so zusammen, bis sie gerade das halbe Volumen annimmt, bis also das Quecksilber in der verschlossenen Röhre bei der zweiten Marke steht. Ist das Mariottesche Gesetz genau richtig, so muß jetzt die Höhe der Quecksilbersäule in der offenen Röhre über der in der verschlossenen genau der Höhe des Barometers sein, der Druck muß genau gleich 2 Atmosphären sein.

Man füllt nun zu einem zweiten Versuche die ganze geschlossene Röhre bis zur untern Marke mit trockener Luft unter dem Drucke von 2 Atmosphären und komprimiert wieder auf die Hälfte; der Druck muß jetzt gleich 4 Atmosphären sein.

Füllt man dann das Volumen 1 mit trockener Luft unter dem Drucke von 4 Atmosphären und komprimiert diese auf das Volumen  $\frac{1}{2}$ , so ist jetzt der Druck 8 Atmosphären sein u.s.f.

Kurz, man untersucht auf diese Weise, ob der Druck, der ein Volumen Luft, welches unter dem Drucke  $h$  steht, auf die Hälfte reduziert, gleich  $2h$  ist. Die Gasvolumina sind bei diesen Versuchen stets sehr klein und deshalb der genauesten Messung fähig.

Wegen der Feinheiten des Apparates und der Vorsichtsmaßregeln bei den Messungen müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen. Wir müssen nur kurz erwähnen, wie die geschlossene Röhre mit Luft bei höheren Drucken angefüllt wurde. Die Röhre kommunizierte mittelst eines an ihrem obern Ende befindlichen Hahnes mit einer Pumpe, durch welche man bei geöffnetem Hahn Luft in die Röhre pumpen konnte. Man brachte auf diese Weise die Röhre bis zur untern Marke mit Luft an und bestimmte den Druck, unter welchem die Luft sich befand, aus der Höhe der Quecksilbersäule in der langen Röhre. Man hatte es auf diese Weise in der Hand, die Röhre, in welcher das Gas komprimiert wurde, bis zur untern Marke mit Luft unter beliebigem Druck anzufüllen.



Um zu zeigen, wie Regnault aus diesen Versuchen die Resultate erhielt, wollen wir zunächst eine Versuchsreihe mit atmosphärischer Luft folgen lassen, bei welcher das Volumen 1 mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre angefüllt wurde. Die geschlossene Röhre kommunizierte beim Beginne des Versuches frei mit der atmosphärischen Luft; als sie bis zur untern Marke mit Luft angefüllt war, wurde der Hahn geschlossen und durch Einfüllen des Quecksilbers in die lange Röhre das Volumen möglichst genau auf  $\frac{1}{2}$  reduziert.

Spalte 1 enthält die Volumina  $V_0$  und  $V_1$  beim Beginne des Versuches und nach der Kompression, Spalte 2 die entsprechenden Drucke in Millimeter Quecksilberhöhe, Spalte 3 die Temperaturen der Luft, Spalte 4 das Verhältnis der Volumina  $\frac{V_0}{V_1}$ , Spalte 5 das Verhältnis der Drucke  $\frac{P_1}{P_0}$  und Spalte 6 das Verhältnis  $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ .

Volumina $V_0$ und $V_1$	Drucke $P_0$ und $P_1$	Temperatur °C.	$\frac{V_0}{V_1}$	$\frac{P_1}{P_0}$	$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$
1939,69	738,72	4,44	2,001 215	1,998 389	1,001 414
969,26	1476,25				
1939,69	738,99	4,40	1,999 990	1,997 076	1,001 448
969,26	1476,82				
1940,21	739,07	4,40	2,000 010	1,997 565	1,001 224
970,10	1476,84				
1939,47	739,19	4,43	2,000 701	1,997,863	1,001 421
969,39	1476,80				

Wäre das Mariottesche Gesetz genau richtig, so müßten die in einer Horizontalreihe befindlichen Zahlen der Kolonnen 4 und 5 genau gleich sein, da nach dem Mariotteschen Gesetz

$$V_0 : V_1 = P_1 : P_0;$$

und da ebenso

$$V_0 \cdot P_0 = V_1 \cdot P_1,$$

so müßten die Zahlen der letzten Kolonne gleich 1 sein.

Man sieht aber, während  $\frac{V_0}{V_1}$  fast genau gleich 2 ist, daß  $\frac{P_1}{P_0}$  stets kleiner als 2 und somit  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$  ist.

Es folgt also aus diesen Versuchen, daß die atmosphärische Luft schon bei einer Druckdifferenz von einer Atmosphäre von dem Gesetze Mariottes abweicht. Gleiches fand Regnault bei allen übrigen Gasen.

In der folgenden Tabelle sind die von Regnault erhaltenen Zahlen für atmosphärische Luft, Stickgas, Kohlensäure und Wasserstoffgas zusammengestellt.

Für jedes Gas sind zwei Kolonnen verzeichnet; die erste enthält die Drucke  $P_0$  beim Beginne der Versuche, die zweite das Verhältnis  $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ ,  $V_1$  stets fast genau  $\frac{1}{2} V_0$  war und  $P_1$  der dem Volumen  $V_1$  entsprechende Druck ist.

Tabelle von Regnaults Versuchen über die Kompression der Gase.

Luft		Stickstoff		Kohlensäure		Wasserstoff	
$P_0$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	$P_0$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	$P_0$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	$P_0$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$
738,72	1,001 414	753,62	1,000 788	764,03	1,007 725	—	—
2112,53	1,002 765	1159,26	1,000 996	1414,77	1,012 313	—	—
4140,82	1,003 090	2159,60	1,001 381	2164,81	1,018 973	2211,18	0,998 584
4219,22	1,003 495	3030,22	1,001 955	3186,13	1,028 494	3989,47	0,996 961
6770,15	1,004 286	4953,92	1,002 860	4879,77	1,045 625	5845,18	0,996 121
9336,41	1,006 366	5957,96	1,003 271	6820,22	1,066 137	7074,96	0,994 697
		7297,06	1,003 924	8393,68	1,084 278	—	—
		8628,54	1,004 768	9620,06	1,099 830	9175,25	0,993 126
		9775,38	1,004 881			10361,78	0,992 327
		10981,42	1,006 456				

Man sieht, daß bei diesen vier untersuchten Gasen das Verhältnis  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  nur sehr wenig von der Einheit abweicht, so daß also das Boyle-Mariottesche Gesetz, wenn es auch nicht genau richtig ist, doch nur wenig von der Wahrheit abweicht. Wir werden es deshalb in den meisten Fällen als richtig annehmen dürfen, ohne fürchten zu müssen, große oder auch nur merkliche Ungenauigkeiten zu erhalten, besonders da wir in den meisten Fällen nur kleinere Drucke anzuwenden haben, und wie die Tabelle zeigt, für Drucke, welche nur wenig von dem der Atmosphäre verschieden sind, das Verhältnis  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  sich der Einheit immer mehr nähert.

Bei aufmerksamer Betrachtung jener Tabelle findet man, daß die drei ersten Gase, Luft, Stickstoff, Kohlensäure, alle in demselben Sinne von dem Mariotteschen Gesetze abweichen, daß bei allen  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$ , also bei allen das Volumen in rascherem Verhältnisse abnimmt, als der Druck wächst, oder das beobachtete Volumen  $V_1$  kleiner ist, als es nach dem Mariotteschen Gesetze sein sollte. Dasselbe Resultat enthielten schon die Versuche von Arago und Dulong. Die neuen Versuche indes zeigen weiter, daß das Verhältnis  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  wächst, wenn der anfängliche Druck, unter dem das dem Versuche unterworfenen Gas steht, größer ist, daß also die Abweichungen zwischen dem wirklichen Verhalten der Gase und dem Mariotteschen Gesetze um so größer werden, je mehr die Zusammendrückung des Gases wächst. Wenn nun auch die Regelmäßigkeit dieser Zahlen auf das entschiedenste dafür spricht, daß die beobachteten Abweichungen nicht Folge der Beobachtungsfehler sind, sondern einer Ungenauigkeit des Gesetzes zugeschrieben werden müssen, so ist es doch gut, nachzuweisen, daß sie größer sind als die Beobachtungsfehler, welche wir annehmen dürfen. Sei deshalb der beobachtete Wert

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \alpha,$$

und nehmen wir  $V_1$  genau  $= \frac{1}{2} V_0$ , so ist

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \frac{2 \cdot P_0}{P_1} = \alpha,$$

et

$$\frac{2 \cdot P_0}{\alpha} = P_1.$$

Wäre nun das Mariottesche Gesetz genau richtig, so müßte

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1'} = \frac{2 P_0}{P_1'} = 1.$$

ber

$$P_1' = 2 P_0$$

in. Der Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung ist demnach

$$P_1' - P_1 = 2 P_0 - 2 \frac{P_0}{\alpha} = 2 P_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Dieser Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung läßt sich nun rechnen, wenn wir in diesen Ausdruck die Werte  $P_0$  und  $\alpha$  unserer Tabelle einsetzen, man erhält so den Unterschied in der Höhe der Quecksilbersäulen, wie sie beobachtet wurden, und wie sie nach dem Gesetze von Mariotte hätten sein sollen. Für Luft erhalten wir

$P_0$		$P_1' - P_1$	
738 <sup>mm</sup> ,72		2 <sup>mm</sup> ,08	
2112	53	11	65
4140	82	25	50
4219	05	29	36
6770	15	57	68
9336	41	118	01.

Diese Differenzen sind offenbar zu groß, als daß man sie den Beobachtungsfehlern zuschreiben könnte. Das Boyle-Mariottesche Gesetz ist demnach nicht streng richtig, wenn auch die Abweichungen so unbedeutend sind, daß wir sie im allgemeinen nicht zu beachten haben werden.

Stickstoff, Kohlensäure und Sauerstoff verhalten sich wie atmosphärische Luft, sie werden stärker zusammengedrückt, als das Mariottesche Gesetz verlangt. Sie bilden also mit den von Despretz und Pouillet untersuchten Gasen, Ammoniak, schweflige Säure, Cyan usf. eine Gruppe; alle diese Gase besitzen eine Zusammendrückbarkeit, welche mit dem äußern Drucke zunimmt.

Anders jedoch das Wasserstoffgas; für dieses ist das Verhältniß  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  stets kleiner als 1. Dieses Gas wird also bei steigenden Drucken weniger stark zusammengedrückt,  $V_1$  nimmt nicht in demselben Verhältnisse ab, als  $P_1$  wächst; und da bei immer größern Anfangsdrucken der Wert  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  immer kleiner wird, so folgt, daß mit wachsendem Drucke die Kompressibilität abnimmt.

Folgende Tabelle, welche Zahlen enthält, welche Regnault aus seinen Versuchen berechnete, zeigt, wie die Kompressibilität wächst bei den drei ersten und abnimmt bei dem letzten Gase. Sie gibt die Drucke an, welche erforderlich sind, um ein Gas, welches unter dem Drucke 1<sup>mm</sup> Quecksilber Volumen 1 hat, auf  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  ... zu komprimieren.

Volume	Luft		Kohlensäure		Stickgas		Wasserstoff	
	Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz
	m	m	m	m	m	m	m	m
1	1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	— 0,0000
$\frac{1}{2}$	1,9978	+ 0,0022	1,9829	+ 0,0171	1,9986	+ 0,0014	2,0011	— 0,0011
$\frac{1}{3}$	3,9874	+ 0,0126	3,8273	+ 0,1027	3,9919	+ 0,0081	4,0068	— 0,0068
$\frac{1}{4}$	7,9456	+ 0,0543	7,5193	+ 0,4807	7,9641	+ 0,0359	8,0339	— 0,0339
$\frac{1}{5}$	9,9162	+ 0,0838	9,2262	+ 0,7738	9,9435	+ 0,0565	10,0560	— 0,0560
$\frac{1}{10}$	11,8823	+ 0,1177	10,8682	+ 1,1868	11,9191	+ 0,0809	12,0844	— 0,0844
$\frac{1}{15}$	15,8044	+ 0,1956	13,9260	+ 2,0740	15,8597	+ 0,1408	16,1616	— 0,1616
$\frac{1}{20}$	19,7198	+ 0,2802	16,7054	+ 3,2946	19,7886	+ 0,2116	20,2687	— 0,2687

Um diese Erscheinungen zusammenzufassen, kann man sich ein Gas denken, welches genau dem Mariotteschen Gesetze folgt und welches die Grenze bildet zwischen den beiden Gruppen, deren eine, Luft, Stickgas, Kohlensäure, stärker komprimiert wird, deren andere, allein durch den Wasserstoff repräsentiert, jedoch in geringerem Grade zusammengedrückt wird als jenes angenommene Gas. Das Mariottesche Gesetz ist demnach ein Gesetz, dem sich die verschiedenen Gase mehr oder weniger annähern. Die Abweichungen hängen ab von der Natur des Gases, von den anfänglichen Drucken und andern Umständen; im § 103 werden wir ableiten, in welcher Weise die Differenz zwischen dem beobachteten Werte von  $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$  und dem theoretischen Werte, der gleich 1 ist, oder

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} - 1 = \beta$$

von diesen Umständen abhängt.

Man kann aus den Beobachtungen in übersichtlicher Weise eine der Abweichungen der Gase vom Mariotteschen Gesetze darstellende Interpolationsformel ableiten. Für eine gegebene Gasmenge hat das Produkt  $PV$  für jeden Druck oder auch für jedes Volumen einen bestimmten Wert, und nach dem Mariotteschen Gesetze sollte dieses Produkt für jeden Druck oder jedes Volumen denselben Wert haben. Die Abweichung der Gase von diesem Gesetze besteht nun darin, daß mit steigendem Druck oder abnehmendem Volumen dieses Produkt kleiner wird; man kann dieselbe deshalb darstellen, indem man die Veränderung dieses Produktes durch eine Gleichung wiedergibt, welche die Abhängigkeit desselben von dem Drucke  $P$  oder dem Volumen  $V$  ausdrückt. Gehen wir von irgend einem Drucke  $P_0$  aus und nennen das zugehörige Volumen  $V_0$ , so können wir entweder setzen

$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 - A \left( \frac{V_0}{V} - 1 \right) + B \left( \frac{V_0}{V} - 1 \right)^2 \dots \dots \dots$$

oder auch

$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 - A_1 \left( \frac{P}{P_0} - 1 \right) + B_1 \left( \frac{P}{P_0} - 1 \right)^2 \dots \dots \dots$$

Daß wir in den Klammern den Überschuß der betreffenden Quotienten über 1 setzen müssen, erkennt man daraus, daß für  $V = V_0$  oder  $P = P_0$  die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung gleich 1 werden müssen.

Man erkennt weiter leicht, daß in der ersten Formel  $V$  im Nenner, in der zweiten  $P$  im Zähler stehen muß, da die Abweichungen der Gase vom Mariotteschen Gesetze um so größer werden, je kleiner das Volumen oder je größer der Druck wird. Setzen wir  $P_0 = 1$ , etwa 1<sup>m</sup> Quecksilber und  $V_0$  ebenfalls gleich 1, nehmen also etwa an, daß sich unsere Werte auf 1 Liter Gas unter dem Drucke 1<sup>m</sup> Quecksilber beziehen, so können wir obige Formeln schreiben

$$PV = 1 - A \left( \frac{1}{V} - 1 \right) + B \left( \frac{1}{V} - 1 \right)^2 \dots \dots \dots \text{Ia}$$

$$PV = 1 - A_1 (P - 1) + B_1 (P - 1)^2 \dots \dots \dots \text{IIa}$$

Die erste Form der Interpolationsgleichung wurde von Regnault selbst benutzt<sup>1)</sup>, während Jochmann<sup>2)</sup> und Schröder van der Kolk<sup>3)</sup> die zweite wählten. Der letztere zeigte, daß für keines der untersuchten Gase sich alle beobachteten Werte von  $PV$  mit der von Regnault bei seinen Beobachtungen angenommenen Genauigkeit mit einem Paare von Konstanten darstellen ließ, er benutzte deshalb die Gleichung nur für kleinere Intervalle. Wir begnügen uns indes hier damit, die von Regnault aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Konstanten anzuführen, da wir doch noch im § 103 und später in der Wärmelehre auf diese Rechnungen zurückkommen müssen.

Die durch ihre Logarithmen gegebenen Konstanten für die vier von Regnault untersuchten Gase sind:

Luft . . . . .	$\log A = 0,043\,5120 - 3$	$\log B = 0,287\,3751 - 5$
Stickstoff . . . .	$\log A = 0,838\,9375 - 4$	$\log B = 0,847\,6020 - 6$
Kohlensäure . . .	$\log A = 0,931\,0399 - 3$	$\log B = 0,862\,4721 - 6$
Wasserstoff . . .	$\log A = 0,738\,1736 - 4$	$\log B = 0,925\,0787 - 6$

Für den Wasserstoff ist zu beachten, daß  $PV$  stets größer als 1 ist, es ist deshalb in der Gleichung das zweite Glied positiv zu setzen. Die Konstanten leitete Regnault aus den für 8<sup>m</sup> und für 16<sup>m</sup> Druck beobachteten Werten von  $PV$  ab.

Später hat Regnault<sup>4)</sup> noch einige andere Gase bis zu einem Drucke von etwa 8 Atmosphären untersucht. Die von ihm für dieselben berechneten Interpolationsformeln haben die Gestalt

$$\frac{V_0 \cdot 0,76}{V \cdot P} = 1 + A(P - 0,76) + B(P - 0,76)^2,$$

weil die Drucke ebenfalls in Meter Quecksilber gegeben sind. Die Logarithmen der Konstanten haben folgende Werte:

Sauerstoff . . . .	$\log A = 0,269\,9060 - 3$	$\log B = 0,664\,6643 - 5$
Kohlenoxyd . . .	$\log A = 0,780\,5656 - 3$	$\log B = 0,848\,9327 - 4$
Stickoxydul . . .	$\log A = 0,814\,6743 - 3$	$\log B = 0,667\,0487 - 4$
Stickoxyd . . . .	$\log A = 0,446\,5181 - 3$	$\log B = 0,439\,5015 - 4$

1) Regnault, Mémoires de l'Acad 21 p. 418 1847

2) Jochmann, Schlämilchs Zeitschrift für Mathematik etc 5 p. 101. 1860

3) Schröder van der Kolk, Poggend. Ann. 116 1862

4) Regnault, Mémoires de l'Acad 26 p. 299 1862

In der Gleichung für Stickoxydul ist *B* negativ, also das dritte Glied positiv zu setzen.

Für eine Anzahl anderer Gase hat Regnault das Verhalten gegenüber dem Mariotteschen Gesetze bis zu einem Drucke von zwei Atmosphären verfolgt. Folgende Tabelle enthält die Resultate; in dieselbe sind auch die vorher erwähnten Gase aufgenommen, sie ist geordnet nach dem Grade, in welchem die Gase vom Mariotteschen Gesetze abweichen, die Abweichung ist um so größer, je größer der Quotient  $\frac{P_0 \cdot V_0}{P \cdot V}$  ist. Die Zahlen gelten für eine Temperatur von 7°,9 C.

	$P_0$	$P$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P_0 \cdot V_0}{P \cdot V}$
Luft . . . . .	702,78	1457,61	2,074	1,002 15
Stickoxyd . . . . .	720,08	1416,33	1,967	1,002 85
Kohlenoxyd . . . . .	703,18	1457,28	2,072	1,002 93
Grubengas . . . . .	706,53	1383,73	1,958	1,006 34
Stickoxydul . . . . .	703,10	1448,63	2,060	1,006 51
Kohlensäure . . . . .	774,03	1550,63	2,003	1,007 22
Chlorwasserstoff . . .	708,93	1460,03	2,059	1,009 25
Schwefelwasserstoff .	722,53	1409,93	1,951	1,010 83
Ammoniak . . . . .	703,53	1435,33	2,040	1,018 81
Schweflige Säure . .	697,83	1341,58	1,922	1,020 88
Cyan . . . . .	703,48	1428,58	2,031	1,023 53.

Die Abweichungen vom Mariotteschen Gesetze, stets im Sinne einer stärkern Kompressibilität, sind zum Teil sehr beträchtlich, sie sind, wie wir später zeigen werden, im allgemeinen um so größer, je leichter die Gase zu Flüssigkeiten kondensiert werden.

§ 100.

**Abweichung der Gase vom Mariotteschen Gesetze bei sehr kleinem und hohem Drucke.** Die Regnaultschen Versuche ergaben uns das Verhalten der Gase von etwa 1 bis 30 Atmosphären. Sowohl bei niedrigen Drucken, welche kleiner sind als derjenige einer Atmosphäre, als für große Drücke hat er die Gase nicht verfolgt. Für erstere Drücke glaubte er, daß die Beobachtungsfehler zu groß seien, um einige Sicherheit über das Verhalten der Gase erhalten zu können. Da indes die Gase nach Regnaults Beobachtungen mit steigendem Drucke immer weiter vom Mariotteschen Gesetze abweichen, nahm man an, daß sie in ihrem Verhalten sich demselben um so mehr nähern, je kleiner der Druck wird.

Es sind nun in neuerer Zeit Versuche über das Verhalten der Gase bei Drucken, die kleiner sind als der Druck einer Atmosphäre, mehrfach durchgeführt worden, und zwar zunächst von Siljeström<sup>1)</sup>, Mendelejeff<sup>2)</sup> und Amagat<sup>3)</sup>. Der erstere schließt aus seinen Versuchen, daß in dem

1) *Siljeström*, Poggend. Ann. 151. 1873.  
2) *Mendelejeff* und *Kirpitschoff*, Ann. de chim. et de phys. 2. (5.) p. 417. 1874, und *Hemilian*, 9. (5.) p. 111. 1876.  
3) *Amagat*, C. R. 82. p. 914. 1876.

ist mit abnehmendem Drucke das Produkt aus Druck und Volumen stets ungleich, daß sich dasselbe aber nicht einer bestimmten Grenze annähert, es also selbst bei großer Verdünnung die Gase nicht dem Mariotteschen Gesetze folgen. Die Versuche von Siljeström sind indes von Mendelejeff einer scharfen Kritik unterzogen, und da Siljeström selbst anführt, daß die von ihm beobachteten Abweichungen vom Mariotteschen Gesetze durch Änderungen des beobachteten Druckes verschwinden, die im Allgemeinen kleiner sind als die von ihm zugegebenen Beobachtungsfehler der einzelnen Beobachtungen, so kann man trotz der zahlreichen Versuche, die von Siljeström angestellt sind, seine Folgerungen nicht für begründet halten.

Mendelejeff kommt bei seinen mit Kirpitschhoff und später mit Emilien angestellten Versuchen zu dem entgegengesetzten Resultate: er findet, daß, wenn man von dem Drucke einer Atmosphäre aus den Druck der Gase vermindert, das Produkt  $PV$  wieder abnimmt, so daß dasselbe nicht bei dem Druck einer Atmosphäre ein Maximum hätte. Die unten an anderer Stelle genannte Publikation, welche die mit Kirpitschhoff angestellten Versuche mitteilt, ist als eine vorläufige bezeichnet, die zweite Publikation gibt nur die Resultate der Versuche, nicht die Beobachtungen selbst, welche auch seitdem nicht veröffentlicht zu sein scheinen. Die Zahlen in der ersten Mitteilung angegebenen Zahlen zeigen bei kleinen

Drucken eine sehr starke Abnahme des Produktes  $PV$ . Bezogen auf das Produkt  $PV$  bei 646<sup>mm</sup> Druck als Einheit erhält Mendelejeff bei 628<sup>mm</sup> 0,99306, bei 16,395<sup>mm</sup> 0,97114 und bei 14,555<sup>mm</sup> gar nur 0,6551.

Zu andern Resultaten gelangen die Versuche von Amagat; derselbe findet, daß bei kleinen Drucken die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, oder doch nur so wenig von demselben abweichen, daß die Abweichungen durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler verdeckt werden. Das von Amagat bei seinen Versuchen benutzte Verfahren war folgendes. Zwei Kugeln dickwandigen Glases, jede von etwas mehr als 100<sup>cc</sup> Inhalt, waren durch ein enges Rohr miteinander verbunden. An der unteren befand sich ein langes Rohr, welches in ein tiefes, auf und nieder verstellbares Gefäß mit Quecksilber tauchte. Die obere Kugel trug ein Ansatzrohr, welches durch einen T-förmig durchbohrten Hahn mit einer gegabelten Röhre in Verbindung stand, deren einer Arm zu einer Luftpumpe, deren anderer zu einem Manometer führte.

Während nun das untere Ende des langen Rohres in Quecksilber tauchte, wurde aus den Kugeln die Luft soweit ausgepumpt, daß das Quecksilber an eine Marke stieg, die sich an dem die beiden Kugeln verbindenden engen Rohr befand, und dann am Manometer der Druck des noch in der oberen Kugel vorhandenen Gases abgelesen. Darauf wurde das Quecksilber so weit gesenkt, daß das Quecksilber aus der untern Kugel bis zu einer Marke an dem untern langen Rohr hinabsank, und wieder der Druck des jetzt nahezu auf das doppelte Volumen gebrachten Gases abgelesen.

Die beiden Kugeln befanden sich, um die Temperatur konstant zu halten, in einem Wasserbade, und es schwankte infolgedessen die Temperatur nur etwa um  $\frac{1}{30}$  Grad.



Bei sieben Versuchsreihen, bei denen die Temperaturen stets zwischen  $10^{\circ}$  und  $12^{\circ}$  waren, ergaben sich folgende Resultate:

Reihe	Zahl der Einzelversuche	Anfangsdruck $P_0$ mm	$\frac{PV}{P_0 V_0}$
1	5	6,541	1,0018
2	5	6,546	1,0035
3	8	10,499	1,0000
4	6	10,516	0,9998
5	6	10,552	1,0022
6	4	6,538	1,0011
7	7	6,536	1,0018.

Die Abweichungen der Zahlen der letzten Reihe sind kleiner als die möglichen Beobachtungsfehler, so daß in der Tat diese Zahlen eine Abweichung der Luft vom Mariotteschen Gesetz nicht erkennen lassen.

Von van der Ven<sup>1)</sup> angestellte Versuche gelangen zu ähnlichen Resultaten wie Mendelejeff. Die Methode van der Vens war die von Siljeström. Zwei eiserne, in schmelzendem Eise liegende Zylinder *A* und *B* stehen durch eine mit einem Hahn verschließbare Röhre in Verbindung. Der Zylinder *A* hat andererseits ein Ansatzrohr, in welches ein Trockenapparat eingesetzt ist, durch welches, wenn es geöffnet ist, Luft aus der Atmosphäre in die Zylinder *A* und *B* eintreten kann. Der Zylinder *B* ist mit der Luftpumpe und dem Manometer verbunden.

Zunächst werden *A* und *B* mit trockner Luft vom Drucke der Atmosphäre gefüllt; dann wird in beiden der Druck bis auf eine gewisse Größe  $P$  vermindert; darauf wird der Hahn zwischen *A* und *B* geschlossen und der Druck in *B* weiter bis zum Drucke  $P_1$  vermindert. Schließlich wird der Hahn zwischen *A* und *B* geöffnet und der Druck  $P_2$  gemessen, der dann vorhanden ist. Ist  $V$  das Volum des Zylinders *A*,  $V_1$  das des Zylinders *B* und  $v_1$  der Raum in dem Manometer bis zur Oberfläche des Quecksilbers, wenn der Druck  $P_1$ , dagegen  $v_2$ , wenn der Druck  $P_2$ , so muß bei genauer Richtigkeit des Mariotteschen Gesetzes

$$PV + P_1(V_1 + v_1) = P_2(V + V_1 + v_2).$$

Zur Prüfung des Gesetzes berechnete van der Ven aus den beobachteten Drucken  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , und den bestimmten Volumen  $v_1$  und  $v_2$ , das Verhältnis der beiden Räume  $V$  und  $V_1$ . Ist das Mariottesche Gesetz streng richtig und sind die Versuche genau, so muß sich aus der Kombination aller Versuche derselbe Wert des Verhältnisses  $V_1 : V$  ergeben. Führt man den Versuch so, daß  $v_1 = v_2$  und setzt man dann für  $V_1 + v_1 = V_1 + v_2 = V^1$ , so wird die Beziehung

$$\frac{V}{V^1} = \frac{P_2 - P_1}{P - P_2}.$$

Der Versuch ergab den Wert dieses Quotienten um so kleiner, je kleiner  $P$  genommen wurde. Es wurde  $P_1$  immer nahezu 7<sup>mm</sup> und  $P$  gleich 24<sup>mm</sup>.

1) Van der Ven, Archive du Musée Teyler (Haarlem 1890) 2. Reihe. 3. Bd. 4. Teil. p. 349. Beiblätter zu Wiedem. Ann. 14. p. 867. 1891.

58 — 31 — 16<sup>mm</sup> gewählt. Den vier Anfangsdrucken entsprechend ergibt sich

$$\frac{V}{V_1} \text{ zu } 1,026 - 1,051 - 1,064 - 1,080.$$

Es folgt daraus, daß das Produkt  $PV$  mit abnehmendem Drucke kleiner wird, und zwar findet van der Ven, wenn man  $PV$  für 248<sup>mm</sup> gleich 1 setzt, dasselbe für

$$58^{\text{mm}} \text{ zu } 0,9875 - 31^{\text{mm}} \text{ zu } 0,9815 - 16^{\text{mm}} \text{ zu } 0,9745,$$

klein, welche denen von Mendelejeff nahe kommen.

F. Fuchs<sup>1)</sup> hat nach einer wesentlich der von Amagat benutzten gleichen Methode das Verhalten von Luft, Kohlensäure und Wasserstoff gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetze zwischen einem Drucke von 10 und 250<sup>mm</sup> Quecksilber verfolgt. Für Wasserstoff gelangt er zu dem Resultate, daß sich unter diesem Drucke eine Abweichung vom Mariotteschen Gesetze nicht erkennen lasse; für Luft findet er, wie vor ihm Mendelejeff, daß das Produkt  $pr$  in der Nähe des Druckes einer Atmosphäre, aber bei 700<sup>mm</sup> ein Maximum hat und bei weiterer Druckabnahme kleiner wird. Wird das unter dem Drucke von 1<sup>m</sup> Quecksilber genommene Volumen gleich 1 gesetzt, so ist  $pr$  bei 0,7<sup>m</sup> gleich 1,0001 und geht bis 50<sup>m</sup> auf 0,9988 zurück.

Für Kohlensäure und schweflige Säure wächst das Produkt mit abnehmendem Drucke stets von 1 bei 1<sup>m</sup> Quecksilberdruck für Kohlensäure 1,0063, für schweflige Säure bis 1,0251 bei 0,25<sup>m</sup> Druck.

Bohr<sup>2)</sup> hat das Verhalten des Sauerstoffs bei sehr kleinen Drucken, unter 15<sup>mm</sup> Quecksilber, untersucht. Er stellte zwei gleiche Barometer nebeneinander in ein und dasselbe Gefäß; das Quecksilberniveau in dem Gefäße wurde beliebig gehoben und gesenkt, und somit der leere Raum der Barometer beliebig vergrößert oder verkleinert werden. In das eine Barometer, dessen oberer Teil sorgfältig kalibriert und geteilt war, ließ er geringe Mengen Sauerstoff eintreten, und beobachtete die Differenz der Barometerstände, wenn dieser Sauerstoff ein kleineres oder größeres Volumen ausfüllte. Für sehr kleine Drucke fand er eine starke Zunahme des Druckes mit der Verkleinerung des Volumens. War dieser Druck erreicht, so nahm bei weiterer Verminderung des Volumens von 1,023 auf 1 der Druck gar nicht zu; erst bei weitergehender Volumverminderung wächst der Druck, und zwar zunächst so, daß das Produkt  $pr$  zunimmt, aber langsamer wie vorher, bis sehr bald nahe konstant wird. Unter 0,7<sup>mm</sup> Druck ist die an die Stelle des Mariotteschen Gesetzes tretende Gleichung

$$(p + 0,070)r = K,$$

zwischen 0,70<sup>mm</sup> und 15<sup>mm</sup> ergab sich

$$(p + 0,109)r = K_1.$$

Bohr ist geneigt, das eigentümliche Verhalten bei 0,7<sup>mm</sup> Druck einer Anziehung des Sauerstoffs zuzuschreiben, durch welche bei konstantem

<sup>1)</sup> F. Fuchs, Wiedem. Ann. 35. p. 430. 1888

<sup>2)</sup> Bohr, Wiedem. Ann. 27. p. 459. 1886.

Druck eine Volumzunahme des Sauerstoffs eintrete, welche bei Verringerung des Volumens wieder rückgängig wird.

Die Versuche über das Verhalten der Gase bei geringen Drücken wurden später von Campetti<sup>1)</sup>, Battelli<sup>2)</sup>, Lord Rayleigh und anderen wieder aufgenommen. Sämtliche Beobachter kamen zu dem Resultat, daß die von Mendelejeff gefundenen Abweichungen von dem Boyle'schen Gesetze nicht existieren, Campetti und Battelli glaubten indes, daß Bohr aus seinen Versuchen geschlossene Anomalie des Sauerstoffs ableiten zu können<sup>3)</sup>. Die Versuche von Thiesen<sup>4)</sup> hatten wesentlich dazu zu prüfen, ob bei dem Sauerstoff die Bohrsche Anomalie vorliegt oder nicht.

Das Verfahren war folgendes. Das Entwicklungsgefäß des Sauerstoffes war eine Röhre von schwer schmelzbarem Glase, deren in stumpfer Form schräg abwärts gebogenes und verschlossenes Ende Quecksilberoxyd mündete in ein etwa 10 Liter haltendes Glasgefäß, von welchem durch einen Hahn abgesperrt werden konnte. Das Innere des Gefäßes wurde dauernd mit dem einen Schenkel eines Manometers verbunden. Das zweite Gefäß war mittels einer Röhre, welche durch einen Hahn verschlossen war, ein zweites von gleicher Größe angeschlossen; auf dieses schloß ein drittes Gefäß von etwa 0,8 Liter Inhalt, das ebenfalls von dem ersten durch einen Hahn absperrbar war. Mit dem dritten Gefäße war eine absperrbare Leitung eine automatische Quecksilberluftpumpe der Sprengelschen (man s. § 110) verbunden.

Der Gang der Versuche war folgender. Zunächst wurde der Entwicklungsapparat luftleer gepumpt, dann der erste Ballon oder die beiden Ballons aus dem Entwicklungsapparat mit Sauerstoff gefüllt und der Druck gemessen. Dann wurde der Sauerstoff durch Öffnen des Hahnes in die Leitung zwischen dem zweiten und dritten Gefäß, während die Leitung vom dritten Gefäß zur Luftpumpe geschlossen war, auf die drei Gefäße verteilt, und wieder der Druck gemessen.

Nehmen wir an, es seien zuerst die beiden großen Gefäße mit dem Drucke  $p_1$  gefüllt, das Volumen derselben sei  $V_1$ , dann sei nach Verteilung des Gases auf die drei Gefäße der Druck  $p_2$ , das Volumen der drei Gefäße  $V_2$ . Das Boyle'sche Gesetz gültig, so muß

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Da der Quotient  $\frac{V_2}{V_1}$  konstant ist, so muß  $\frac{p_1}{p_2}$  konstant sein, von welchem Werte  $p_1$  man auch ausgeht.

Ein einfaches Verfahren läßt ohne Ausmessung des Volumens die Boyle'sche Folgerung prüfen. Man pumpt nach der ersten Beobachtung in das dritte Gefäß, nachdem es von dem zweiten abgesperrt ist, wieder Luft. Wenn in den beiden ersten Gefäßen bleibt der Druck  $p_2$ , durch Verbindung

1) Campetti, Atti di Torino. 31. p. 52. 1895.

2) Battelli, Nuovo Cimento. 1. (5.) p. 5 u. 81. 1901.

3) Man sehe auch die Kritik der Versuche Battellis von Thiesen, Ann. d. Physik. 6. p. 280. 1901.

4) Thiesen, Ann. d. Physik. 6. p. 280. 1901.

dem dritten Gefäß sinkt der Druck auf  $p_3$  und es muß  $\frac{p_1}{p_2}$  denselben Wert haben wie  $\frac{p_2}{p_3}$ .

Indem man das Verfahren wiederholt, kann man zu immer kleiner werdenden Drucken übergehen. Thiesen ging so in einer Versuchsreihe von einem Anfangsdruck  $0,897^{\text{mm}}$  in den ersten zwei Gefäßen bis auf  $0,543^{\text{mm}}$  zurück. Für die Quotienten der aufeinander folgenden Drucke ergab sich 1,039 und die mit diesem Quotienten aus dem Anfangsdrucke  $0,897^{\text{mm}}$  berechneten Drucke weichen von dem beobachteten Drucke um höchstens  $0,005^{\text{mm}}$  ab; die Abweichungen zeigten gar keinen bestimmten Gang, so daß man in diesen und in weiteren Messungen Thiesens keine Abweichungen vom Boyleschen Gesetz und ebenso keine Anomalie, wie Bohr bei  $0,7^{\text{mm}}$  gefunden zu haben glaubte, erkennen kann.

Lord Rayleigh hat in gesonderten Untersuchungen die Gültigkeit des Boyleschen Gesetzes geprüft zwischen  $75^{\text{mm}}$  und  $150^{\text{mm}}$  Druck<sup>1)</sup> und zwischen etwa  $1,5^{\text{mm}}$  und  $0,01^{\text{mm}}$  Druck<sup>2)</sup>. Die ersterwähnten Versuche wurden nach der Methode von Amagat ausgeführt; es wurde ein aus zwei durch eine enge Röhre verbundenen Kugeln bestehendes Gefäß mit Gas unter dem Druck von  $75^{\text{mm}}$  gefüllt. Darauf wurde das Gas in die kleine Kugel gedrückt, mit welcher eine Vorrichtung verbunden war, durch welche das Volumen des in die obere Kugel gedrückten Gases etwas reguliert werden konnte. Das Volumen des Gases wurde so reguliert, daß der Druck genau der doppelte wurde. Die Volumina, welche das Gas in beiden Hälften einnahm, waren genau gemessen. Wegen der Einzelheiten der Anordnung verweisen wir auf die Abhandlung von Rayleigh.

Als Resultat gibt derselbe an, daß wenn man als Genauigkeitsgrenze für den Quotienten  $\frac{p_1 r_1}{p_2 r_2}$  annähme 0,0002, bei Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff keine Abweichung vom Mariotteschen Gesetz zu erkennen war; bei Stickstoffoxydul zeige sich auch bei diesen geringen Drucken, daß es etwas stärker zusammendrückbar sei als es das Gesetz verlangt.

Zur Prüfung des Gesetzes bei sehr kleinen Drucken hat Lord Rayleigh ein eigenes Manometer konstruiert, das er Neigemanometer nennt. In die beiden Schenkel des Manometers, deren einer mit dem Raume, der das zu untersuchende Gas enthält, einer Meßröhre, in Verbindung stand, war auch mit einer Quecksilberluftpumpe durch Öffnen eines Hahnes in Verbindung gesetzt werden konnte, mit welcher der andere Schenkel des Manometers verbunden war, waren Glasstäbchen mit feinen Spitzen eingefügt. Wenn der Druck auf beiden Seiten genau gleich war, so berührten die Spitzen gerade die Quecksilberoberfläche. Wurde durch Verbindung mit dem Gasbehälter auf der einen Seite des Manometers, während auf der andern Seite durch die Pumpe Luftleere gehalten wurde, ein Druck wirksam, so wurde dort das Quecksilber herabgedrückt, die Oberfläche entfernte sich von der Spitze. Durch Neigen des Manometers um eine Achse, senkte zu der vertikalen die beiden Achsen der Manometerschenkel auf-

<sup>1)</sup> Lord Rayleigh, Transact. of London Royal Soc. 198 p. 417 1902; Zeitschrift f. physikal. Chemie 41 p. 71 1902

<sup>2)</sup> Lord Rayleigh, Transact. of London Royal Soc. 196 p. 205 1901; Zeitschrift f. physikal. Chemie. 37. p. 713 1901

nehmenden Ebene senkrecht war, wurde dann das Quecksilber mit Spitzfenster wieder in Berührung gebracht. Aus der Größe der Neigung ließ sich die Druckdifferenz berechnen. Die Neigung wurde in einem mit dem Manometer fest verbundenen Spiegel mit Fernrohr und Skala abgelesen. Für 1<sup>mm</sup> Druckdifferenz betrug die Neigung an der Skala abgelesene Teilstriche.

Zur Prüfung des Gesetzes wurde folgendermaßen verfahren. Zu Anfang wurde der ganze Apparat luftleer gepumpt, dann die Verbindung zwischen dem Gasbehälter führenden Röhre mit der Pumpe abgesperrt, das Quecksilber in der Meßröhre durch eine Vorrichtung, wie wir sie später in der Beschreibung der Quecksilberluftpumpe kennen lernen werden, bis zu einem Teilstriche gehoben und der Raum über dem Quecksilber bis zur Quecksilberoberfläche im Manometer mit dem zu untersuchenden Gase bei einem Drucke von höchstens 1,5<sup>mm</sup> oder auch zu kleinerem Drucke gefüllt und der Druck gemessen. Darauf wurde das Quecksilber in der Meßröhre gesenkt, somit das Volumen des Gases um eine gemessene Menge geändert und wieder der Druck gemessen. Ist das Volumen zwischen der Oberfläche des Quecksilbers im Manometer und dem Nullpunkte der Teilung der Meßröhre  $V$  und das Volumen zwischen dem Nullpunkte der Teilung und der Oberfläche des Quecksilbers in der Meßröhre bei der ersten Füllung gleich  $v_1$ , der Druck des Gases gleich  $p_1$ , ist ferner die Vergrößerung des Volumens in der Meßröhre auf  $v_2$ , der Druck  $p_2$  geworden, so muß, wenn das Mariottesche Gesetz gültig ist

$$p_1 (V + v_1) = p_2 (V + v_2).$$

Das Volumen  $V$  wurde durch eigene Versuche zu 45,6<sup>cc</sup> bestimmt. Wir geben in folgender Tabelle eine Versuchsreihe mit Stickstoff.

Volumen in cc	Druck in Skalent.	Logarithm. des Produkt	Druck in mm Hg	$\frac{pv}{p_m v_m}$	Fehler in mm
45,6 + 0	344,9	4,1966	1,49	1,0007	+ 0,01
45,6 + 10	282,3	4,1958	1,22	0,9988	- 0,01
45,6 + 20	239,5	4,1962	1,04	0,9998	- 0,01
45,6 + 40	183,3	4,1956	0,79	0,9983	- 0,01
45,6 + 60	148,8	4,1963	0,64	1,0000	0,01
45,6 + 80	125,2	4,1966	0,54	1,0007	+ 0,01
45,6 + 110	101,1	4,1968	0,44	1,0012	+ 0,01
45,6 + 150	80,2	4,1955	0,35	0,9982	- 0,01
45,6 + 190	66,9	4,1976	0,29	1,0030	+ 0,01

$$p_m v_m = 4,1963$$

Wie man sieht, weichen die Produkte  $pv$  so wenig voneinander ab, daß die Quotienten von  $pv$  und dem Mittelwerte des Produktes  $p_m v_m$  so nahe von 1 ab, daß an der Gültigkeit des Boyleschen Gesetzes nicht zu zweifeln ist. Gleiches wie für Stickstoff zeigte sich bei Wasserstoff und Sauerstoff. Von der Bohrschen Anomalie war bei letzterem nichts zu erkennen. Diese Versuche bestätigen somit, was man nach den Messungen von Boyle schon erwarten mußte, daß die Gase bei wachsender Verdünnung sich dem Boyle-Mariotteschen Gesetz immer mehr annähern.

nan die Gase stärkern als den von Regnault angewandten erwirft, so tritt bei der Mehrzahl, wie schon erwähnt wurde, in die flüssige Form ein, bei einigen, den sogenannten permanenten, Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlenoxyd indessen dann nicht, wenn man die Kompressionen bei der gewöhnlichen Temperatur unserer Umgebung vornimmt. Wir beschränken uns in der Besprechung des Verhaltens der Gase bei gewöhnlicher Temperatur werden erst im zweiten Bande, wenn wir die Kontinuität des gasförmigen Zustandes besprechen, auf das Verhalten der verschiedenen Temperaturen zurückkommen.

Die Untersuchung des Verhaltens der permanenten Gase in weit höherem Druck, zu 2000 Atmosphären, ist zuerst von Natterer<sup>1)</sup> vorgenommen worden. Er komprimierte die Gase in der Flasche seines § 111 beschriebenen Kompressionsapparates und maß den Druck, ähnlich wie Oersted bei seinen bei ihren vorhin erwähnten Versuchen, indem er gegen die Flasche angebrachtes Ventil einen Hebel wirken ließ und die Gewichte, welche den Hebel im Gleichgewicht hielten. Das Gas ließ er dann durch eine Röhrenleitung unter eine in Wasserbader Wanne stehende Glocke treten, deren Kubikinhalt genau so groß war als der Kubikinhalt der Flasche des Kompressionsapparates. Wenn nun die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, so soll, wenn die Glocke einmal aus der Flasche unter dem Drucke einer Atmosphäre gefüllt wird, der Druck in der Flasche um 10 Atmosphären abnehmen, sind die Gase weniger kompressibel, als es das Mariottesche Gesetz verlangt, so muß der Druck bei jeder Füllung der Glocke um mehr als 10 Atmosphären abnehmen, und zwar um so mehr, je mehr sie dem Sinne von dem Gesetze abweichen. Es zeigte sich, daß bei den Versuchen die Druckabnahme bis zu mehr als dem 10fachen wuchs; z. B. bis auf 2790 Atmosphären komprimiert war, sank bei Austritt von 10 Volumen Gas der Druck um 136, dann um 126 Atmosphären, erst als der Druck auf 75 Atmosphären herabgegangen war, sank für jede zehn Volume heraustretenden Gases um 10 Atmo-

Natterer in dieser Weise die Flasche allmählich entleerte und während dem Ausfließen von 10 Volumen den Druck beobachtete, ließ er rückwärts bestimmen, wieviel Volume Gas in der Flasche bei jedem Drucke komprimiert waren. Da nun der reziproke Wert des in der Flasche enthaltenen Anzahl Volumina das Volumen der in der Flasche bei dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen Gases angibt, so gab er auf diese Weise das Produkt  $P \cdot V$  für jeden Druck an, wobei  $P$  den Druck in Atmosphären und  $V$  das Volumen in Volumina der in der Flasche bei dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen Gases angibt. In dieser Weise sind in der Tabelle einige von Natterers Angaben zusammengestellt, die in der ersten Spalte jedes Gas angegebenen Spalten enthält die Drucke  $P$  in Atmosphären, in der zweiten die Anzahl der in der Flasche unter diesen Drucken enthaltenen Volumina  $V$  der Gase, deren reziproker Wert das Volumen

<sup>1)</sup> Natterer, Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 5. 1850; 6. 1851; 12. 1852; 13. 1853; 14. 1854; 15. 1855. Die hier angeführten Versuche finden sich in Ann. 94 p. 436 1855.

jener Gasmenge ist, welche unter dem Drucke einer Atmosphäre die Fl  
ansfüllt, die dritte Kolumne enthält den Quotienten  $\frac{P_0 V_0}{P V} = \frac{1}{P V}$ , d  
Abweichung von der Einheit den Grad der Abweichung vom Mariottes  
Gesetze in derselben Weise angibt wie bei den Zahlen von Regnau

Wasserstoff			Sauerstoff		
$P$	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P V}$	$P$	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P V}$
2790	1008	0,3613	1354	657	0,4582
2347	958	0,4081	1106	617	0,5578
1781	848	0,4761	923	577	0,6251
1508	778	0,5159	764	537	0,7028
1259	708	0,5615	563	467	0,8294
1015	628	0,6187	463	417	0,9006
751	528	0,7030	370	347	0,9378
505	398	0,7881	276	267	0,9674
365	308	0,8438	243	237	0,9753
248	218	0,8790	210	207	0,9857
100	98	0,9800	188	187	0,9947
78	78	1,0000	177	177	1,0000

Stickstoff			Kohlenoxyd		
$P$	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P V}$	$P$	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P V}$
2790	705	0,2527	2790	727	0,2606
2046	645	0,3152	2088	677	0,3242
1640	605	0,3680	1674	637	0,3805
1458	585	0,4012	1416	607	0,4286
1228	555	0,4519	1196	577	0,4824
1035	525	0,5072	1016	547	0,5383
801	475	0,5930	814	507	0,6228
600	415	0,6917	599	447	0,7462
403	335	0,8312	408	367	0,8999
206	195	0,9466	204	197	0,9657
107	105	0,9813	138	137	0,9928
85	85	1,0000	127	127	1,0000

Für geringere als die zuletzt in den Tabellen angegebenen Dr  
erhält Natterer für die Produkte  $P V$  den Wert 1, da diese Met  
selbstverständlich nicht imstande ist, die kleinen Abweichungen der  
vom Mariotteschen Gesetze in geringeren Drucken erkennen zu la  
Die Versuche Natterers sind wiederholt von Cailletet<sup>1)</sup>; das  
ihm angewandte Verfahren ist dem ähnlich, welches er bei Untersu  
der Kompression der Flüssigkeiten anwandte. Das Gas befand sich in  
unten offenen und mit dem offenen Ende in Quecksilber tauchenden  
röhre von etwa 50<sup>cc</sup> Inhalt; an das obere Ende der Röhre war ein  
vergoldetes Kapillarrohr angesetzt, welches oben geschlossen war.

1) Cailletet, Comptes Rendus. 70. p. 1131. 1870.



einrichtung war in einen mit Wasser angefüllten Kompressionsapparat  
 st. Ließ man nun auf das Wasser den durch ein Desgoffesches  
 manometer (§ 66) gemessenen Druck wirken, so pflanzte sich derselbe auf  
 Quecksilber fort, und dieses stieg, wenn der Druck groß genug war, in  
 kapillare Rohr und löste das Gold an den Wänden soweit auf, als es  
 ins Rohr eingedrungen war. Der Raum des kapillaren Rohres, an  
 dem Wandung das Gold nicht aufgelöst war, gab dann das Volumen  
 komprimierten Gases, welches nach Beendigung der Kompression be-  
 nutzt wurde. Die von Cailletet auf diese Weise bei einer Temperatur  
 15° erhaltenen Zahlen gibt folgende Tabelle, zusammengestellt mit  
 Zahlen von Natterer.

Druck in Atmosphären	$V_0 P_0$ Wasserstoff Cailletet Natterer		$V P$ Luft Cailletet Natterer	
	Cailletet	Natterer	Cailletet	Natterer
60	0,9810	—	1,0137	—
80	"	—	1,0118	—
100	0,9552	0,9800	1,0098	1,0000
200	0,9158	0,9050	0,9990	0,9502
300	0,8761	0,8600	0,9405	0,9200
400	0,8374	0,8312	0,8672	0,8628
600	0,7580	0,7533	0,7215	0,7185

Später hat Cailletet<sup>1)</sup> Messungen über die Kom-  
 pressibilität des Stickstoffes angestellt, bei welchen er  
 die Höhe der drückenden Quecksilbersäule maß.

Einrichtung des Kompressionsgefäßes zeigt Fig. 183.  
 Eine starke Röhre von Stahl, 1,8<sup>m</sup> lang und 25<sup>mm</sup>  
 dick befindet sich oben in eine enge Röhre ver-  
 zerte mit dem Gase gefüllte Gefäß *R*. Die Glas-  
 röhre ist wieder auf ihrer innern Seite vergoldet. Die  
 Röhre ist oben durch den eisernen Konus *D* und  
 Schraube *C* verschlossen; sie ist vollständig mit  
 Quecksilber gefüllt. An dem untern Ende ist die  
 Röhre, wie die Figur zeigt, mit einer 3<sup>mm</sup> weiten  
 Röhre *TT* von weichem Stahl verbunden, welche eine  
 Länge von 250<sup>cm</sup> hat, und welche um eine Holztrommel  
 2<sup>cm</sup> Durchmesser gewickelt ist, die sich um eine  
 vertikale Achse drehen kann. Das Gefäß hängt selbst  
 an einem 4<sup>mm</sup> dicken, ebenfalls um eine Holztrommel  
 gewickelten Stahldraht. Die Stahlröhre ist vollständig  
 mit großer Sorgfalt mit Quecksilber gefüllt, so  
 daß die Quecksilbersäule nirgendwo durch eine Luft-  
 blase unterbrochen ist. Die ganze Vorrichtung war  
 in einem 500<sup>m</sup> tiefen artesischen Brunnen zu Butte-  
 Caillies aufgestellt. Durch Drehen der den Draht  
 die Stahlröhre tragenden Holztrommeln wird dann  
 der Apparat vorsichtig und langsam in den Brunnen  
 abgelassen, bis zu einer Tiefe, die genau durch die



1, Cailletet, D'Almeida Journal de physique 8. 1879.

Länge des abgewickelten Stahldrahtes gemessen wird, der dann auch die Höhe der drückenden Quecksilbersäule entspricht. Die an dem Apparat angebrachten Maximumthermometer gestatten nach dem Herausziehen derselben die Temperatur zu bestimmen, welche der Apparat im Brunn hatte. Dieselbe war bis zu einer Tiefe von  $84^{\text{m}} 15^{\circ}$  und stieg dann beim Hinablassen bis  $182^{\text{m}}$  auf  $17^{\circ}$ .

Das Volumen der komprimierten Luft ergab sich gerade wie bei den vorhin beschriebenen Versuchen aus der Strecke, bis zu welcher in der Glasröhre das Gold aufgelöst war.

Folgende Tabelle gibt einige der von Cailletet erhaltenen Resultate; die Drucke sind in Meter Quecksilber, die Volumina in Volumteilen des Kompressionsgefäßes angegeben.

Druck. $P$	Volum. $V$	$PV$	Druck. $P$	Volum. $V$	$PV$
39,359	207,93	8184	89,388	97,97	8267
44,264	184,20	8153	99,188	86,06	8536
49,271	162,82	8022	114,119	76,69	8751
59,462	132,86	7900	144,241	62,16	8966
64,366	123,53	7951	154,224	54,97	9023
69,367	115,50	8011	174,100	52,79	9191
79,234	103,00	8162	181,985	51,27	9330

Das Minimum von  $PV$ , also die stärkste Kompressibilität des Stickstoffs, ergibt sich somit hier bei  $59,46^{\text{m}}$  Quecksilberdruck, von da an nimmt die Kompressibilität in immer steigendem Maße ab.

Amagat<sup>1)</sup> hat die Kompressibilität der Gase noch weiter verfolgt und seine Versuche auf sämtliche sogenannte permanente Gase ausgedehnt. Die Versuche wurden in einem Schachte von  $400^{\text{m}}$  Tiefe in der Nähe von Saint-Etienne ausgeführt, auf dessen Boden der Kompressionsapparat aufgestellt war. Das Verfahren, welches Amagat anwandte, war demjenigen von Regnault gleich, jedoch mußte er, wie Biot und Arago, die Kompressionen mit einer und derselben Gasfüllung vornehmen. Um die kleinen Volumina mit Genauigkeit zu messen, war deshalb dem Gasbehälter eine ebensolche Form gegeben, wie sie auch von Cailletet gewählt war. Das Manometerrohr war ein enges Stahlrohr von  $2^{\text{mm}}$  Durchmesser im Innern und einer Wandstärke von  $1,5^{\text{mm}}$ . Dasselbe war aus einzelnen Stücken zusammengesetzt und wurde nach Bedürfnis verlängert, wenn zu höheren und höheren Drucken übergegangen wurde. Bei jedem einzelnen Versuch endigte das Manometer in einer Glasröhre, in welcher das obere Niveau des Quecksilbers beobachtet wurde. Die Höhe der Quecksilbersäule wurde an einem mit Marken versehenen Stahldrahte gemessen, welcher neben dem Manometer im Schacht herabhing, indem ein Gehilfe in einem Fahrstuhl in dem Schacht emporstieg und durch Einfüllen oder Herausnehmen von Quecksilber aus der Glasröhre bewirkte, daß das obere Niveau des Quecksilbers in gleicher Höhe mit einer Marke des Drahtes war.

Auf die Details dieser begreiflicherweise mit den größten Schwierigkeiten verknüpften und deshalb um so verdienstvolleren Versuche kommt

1) Amagat, Ann. de chim. et de phys. 29. (5.) 1880.

wir hier nicht eingehen: wir müssen deshalb auf die Abhandlung von Amagat verweisen, in welcher die zur Überwindung aller Schwierigkeiten angewandten Maßregeln vortrefflich beschrieben sind.

In folgender Tabelle sind die Resultate der Messung für Stickstoff von Amagat zusammengestellt.

Druck <i>P</i> Meter Hg	<i>P V</i>	Druck in Atmosphären	Druck ber. nach dem M. G.	Differenzen
20,740	50 989	27,289	27,289	0,000
35,337	50 897	46,496	46,580	+ 0,084
47,176	50 811	62,034	62,251	+ 0,217
55,481	50 857	73,001	73,181	+ 0,188
61,241	50 895	80,580	80,728	+ 0,140
69,140	50 987	90,975	90,978	+ 0,003
82,970	51 226	109,171	108,665	— 0,506
96,441	51 602	126,896	125,388	— 1,508
128,296	52 860	168,810	162,835	— 5,975
158,563	54 214	208,635	196,224	— 12,411
190,855	55 850	251,129	229,271	— 21,855
221,103	57 796	290,934	256,669	— 34,275
252,353	59 921	332,039	282,544	— 49,495
283,710	62 192	373,302	306,005	— 67,247
327,388	65 428	430,773	335,707	— 95,066

Den kleinsten Wert erhält das Produkt *P V* hier bei einem etwas geringeren Drucke, als bei den Versuchen von Cailletet bei einem Druck von 47<sup>m</sup> Quecksilber.

Die Kompressibilität der übrigen Gase verglich Amagat dann mit der des Stickstoffs nach dem Verfahren von Despretz und Pouillet. Aus der beobachteten Volumverminderung des Stickstoffs wurde nach den in der vorigen Tabelle angegebenen Zahlen der Druck in Meter Quecksilber berechnet.

In folgender Tabelle sind die von Amagat erhaltenen Resultate zusammengestellt, wobei nur zu bemerken ist, daß die Drucke auf die erste Decimale abgerundet sind, da die von Amagat für die verschiedenen Gase gegebenen Drucke in der zweiten Decimale etwas verschieden sind. Die erste Spalte enthält so die Drucke in Meter Quecksilber, für welche die in den folgenden Spalten angegebenen Werte von *P V* erhalten wurden.

<i>P</i>	Luft	Sauerstoff	<i>P V</i> für			
			Wasserstoff	Kohlenoxyd	Grubengas	Äthylen
4.1	26 968	26 843	27 381	27 147	26 325	21 473
4.9	26 908	26 614	27 618	27 102	25 596	18 352
5.2	26 791		27 652	27 007	24 998	12 263
5.5	26 789	26 185	27 960	27 025	24 433	9 772
4.0	26 778	26 050	28 129	27 060	24 074	9 370
2.2	26 792	25 858	28 323	27 071	23 724	9 703
4.2	26 840	25 745	28 533	27 158	23 318	10 675
1.5	27 011	25 639		27 420	22 951	12 210
3.9	27 608	25 671	29 804	28 092	22 915	15 116

$P$	Luft	Sauerstoff	$PV$ für			
			Wasserstoff	Kohlenoxyd	Grubengas	Äthylen
177,6	28 540	25 891	30 755	29 217	23 739	18 962
214,5	29 585	26 536	31 625	30 467	25 054	22 115
250,2	30 572	—	32 426	31 722	26 742	25 065
303,0	—	28 756	—	—	—	29 333
304,0	32 488	—	33 887	33 919	29 289	—

Mit Ausnahme des Wasserstoffs, bei welchem entsprechend dem schon von Regnault gefundenen Verhalten das Produkt  $PV$  stetig zunimmt, zeigen alle Gase ein Minimum des Produktes  $PV$ , welches aber bei jedem Gase bei einem anderen Drucke eintritt. Am auffallendsten ist das Verhalten des Äthylens, bei welchem der Wert des Produktes bei dem Minimum weniger als ein Drittel des Wertes bei 300<sup>m</sup> Druck beträgt, und bei welchem dann ein so rapides Ansteigen des Produktes eintritt, daß die Kompressibilität dieses Gases in höhern Drucken ohne Zweifel kleiner wird, als das aller übrigen Gase. Überall findet man aber das zuerst von Natterer gefundene Resultat bestätigt, daß je weiter ein Gas komprimiert wird, um so mehr dasselbe vom Mariotteschen Gesetze abweicht, daß das Volumen ganz erheblich langsamer abnimmt, als es nach diesem Gesetze der Fall sein müßte.<sup>1)</sup>

Das Mariottesche Gesetz ist somit nur ein ideales Gesetz, dem sich die wirklichen Gase bei geringen Drucken mehr oder weniger anschließen, bei Drucken von weniger als drei Atmosphären so nahe, daß wir es in den meisten Fällen unbedenklich bei Gasmessungen anwenden dürfen, das heißt, wenn wir Gasquantitäten durch Messung des Volumens unter solchen Drucken bestimmen oder vergleichen wollen, daß wir sie mit Anwendung des Mariotteschen Gesetzes auf das bei einem Normaldrucke, etwa dem Drucke einer Atmosphäre von ihnen ausgefüllte Volumen reduzieren dürfen.

### § 101.

**Kinetische Theorie der Gase.** Die Gase sind gegenüber den festen und flüssigen Körpern dadurch charakterisiert, daß sie kein selbständiges Volumen haben, daß eine bestimmte Quantität Gas nur unter einem bestimmten Druck auch ein bestimmtes Volumen ausfüllt, wobei dann die Gase auf die Wände des Raumes, in dem sie eingeschlossen sind, einen dem sie in dem Raum haltenden genau gleichen Gegendruck ausüben. Der Analogie nach liegt es nahe, in diesem Drucke der Gase wie bei den festen und flüssigen Körpern eine elastische Gegenwirkung gegen den äußeren Druck zu sehen, also eine gegenseitige Abstoßung der Moleküle des Gases. Da indes die Gase stets, ihr Volumen mag so klein oder so groß sein, wie es will, einen bestimmten Druck erheischen, um in einem bestimmten Volumen gehalten zu werden und den diesem gleichen Gegendruck ausüben, so müßte man schließen, daß die Moleküle der Gase sich gegenseitig

1) Die späteren Versuche von Amagat, bei denen er bis zu Drucken von 3000 Atmosphären vorgeschritten, Ann. de chim. et de phys. 29. (6.) 1893, wird wir in der Wärmelehre behandeln, bei Untersuchung der Abhängigkeit des Volums einer gegebenen Gasmenge von Druck und Temperatur.

stets und unter allen Umständen abstoßen, eine Annahme, die man auch vielfach und lange Zeit gemacht hat. Unter Annahme, daß die Abstoßung der Gasmoleküle mit einer Kraft stattfindet, die mit wachsender Entfernung abnimmt, läßt sich in der That das die Gase wenigstens ideal charakterisierende Mariottesche Gesetz ableiten. Wir werden indes in der Wärmelehre bei Besprechung der innern Arbeit bei Ausdehnung der Gase Erscheinungen kennen lernen, welche den Beweis liefern, daß eine solche Abstoßung zwischen den Gasmolekülen nicht vorhanden ist.

Schon Daniell Bernoulli<sup>1)</sup> sprach es aus, daß man sich auch eine ganz andere Vorstellung von der Natur des gasförmigen Zustandes machen kann, daß die Annahme genüge, daß die Gasmoleküle sich ganz unabhängig voneinander frei im Raume bewegen, bis sie aneinander oder an eine feste Wand treffen, wo sie dann nach den Gesetzen des elastischen Stoßes zurückgeworfen werden. Diese Ansicht wurde mehr als ein Jahrhundert kaum oder nur ganz vereinzelt beachtet und geteilt, bis sie vor etwa fünfzig Jahren infolge unserer neuern Auffassung über das Wesen der Wärme kurz nacheinander von drei Physikern, von jedem selbständig und ohne Kenntnis der frühern vereinzelt ausgesprochenen Vorstellung, wieder neu gebildet wurde, von Joule<sup>2)</sup>, Krönig<sup>3)</sup> und Clausius<sup>4)</sup>. Besonders Clausius führte diese Auffassung des Gaszustandes in der glücklichsten Weise durch und leitete für eine Reihe von Erscheinungen die Gesetze des Verhaltens der Gase ab. Wenn auch die ganze Fruchtbarkeit dieser Theorie der Gase erst in der Wärmelehre hervortreten wird, so ergeben sich doch eine Reihe von Erscheinungen, die uns an dieser Stelle zu betrachten obliegen, so unmittelbar aus dieser Theorie, daß wir dadurch veranlaßt werden, dieselbe jetzt vorzuführen, ihre Vervollständigung in der Lehre von der Wärme uns vorbehaltend.

Nach dieser Theorie existiert in den Gasen kein eigentlicher Gleichgewichtszustand, die Moleküle sind vielmehr ununterbrochen in einer geradlinig fortwährenden Bewegung, bis sie an eine feste Wand stoßen und von dieser als vollkommen elastische Körper zurückgeworfen werden, oder bis zwei Moleküle in geradem oder schiefem Stoße aneinander prallen. Man kann sich, sagt schon Bernoulli, ein zylindrisches senkrecht stehendes Gefäß und darin einen beweglichen Stempel, auf welchem ein Gewicht liegt. Die Hohlung möge äußerst kleine Körperchen enthalten, welche sich mit großer Geschwindigkeit nach allen Richtungen hin bewegen; dann repräsentiren diese Körperchen, welche gegen den Stempel anprallen und ihn zurückwerfen, eine elastische Flüssigkeit darstellen.

Um die Möglichkeit einer solchen stetig fortwährenden Bewegung zu veranschaulichen, stellt sich Krönig einen Kasten vor, in welchem eine

1) In seiner Hydrodynamik, sectio decima, aus dem Jahre 1738. Nach einer Bemerkung von P. de Bes. Romme, Poggend. Ann. 107. 1859.

2) Joule, Mem. of the Manch. Soc. 9. 2. 1850; Philos. Mag. 14. 1. 511. 1857.

3) Krönig, Poggend. Ann. 99. 1856.

4) Clausius, Poggend. Ann. 100. 1857. In Poggend. Ann. 115. p. 2. 1862. 268. Clausius an, wie weit man sich in frühern Zeiten dieser Hypothese angelehnt hat. Mit der Theorie von Clausius stimmt im wesentlichen die Theorie von Maxwell, Phil. Mag. 19. 1. und 20. 1. 1860. Eine andere Theorie entwickelte Maxwell später Phil. Mag. 32. 1. 1866 u. 35. 1. 1868.

Anzahl absolut elastischer Kugeln sich befinden, deren Volumen jedoch gegen den ganzen innern Raum des Kastens nur klein ist. Wenn man diesen Kasten lebhaft auf und ab und hin und her schüttelt, so erhalten die Kugeln eine Bewegung, wie sie für die Gasmoleküle angenommen ist, und wenn diese Kugeln sowie die Wände des Kastens als absolut elastisch angenommen werden, so dauert die Bewegung ohne Ende fort.

Außer dieser geradlinig fortschreitenden Bewegung müssen, wie Clausius hervorgehoben, die Moleküle zunächst noch eine rotierende Bewegung haben, da im allgemeinen die Stöße, mit denen die Moleküle aufeinander prallen, nicht lediglich zentrale sein werden; jeder schiefe Stoß bringt aber, wie wir sahen, eine Rotation der Moleküle um eine in ihnen liegende Achse hervor. Dadurch ist, bei den zusammengesetzten Molekülen wenigstens, sofort auch die Wahrscheinlichkeit oszillierender Bewegungen der einzelnen Teile der Moleküle gegeben. Diese rotierende und oszillierende Bewegung nennt Clausius im Gegensatze zu der fortschreitenden Bewegung derselben die Bewegung der Bestandteile. Bei einem bestimmten Gase und gegebener Temperatur müssen die lebendigen Kräfte dieser beiden Bewegungen in einem konstanten Verhältnisse stehen. Es folgt das einfach aus der Überlegung, daß in einem eine äußerst große Anzahl von Molekülen enthaltenden Raume in jedem Zeitelemente alle überhaupt nur möglichen Arten von Stößen stattfinden müssen; da nun die Bewegung der Bestandteile nur von der Art, wie die Moleküle aufeinander prallen und der Beschaffenheit bzw. den elastischen Verhältnissen der Moleküle, bei einer gegebenen Zahl von Stößen abhängig ist, so wird sie in jedem Zeitelemente in der gleichen Weise erzeugt; es muß sich daher die gesamte Bewegung in einem stationären Zustande befinden, in welchem die lebendigen Kräfte beider Bewegungen in einem bestimmten und bei ungeänderter Temperatur für immer gleich bleibenden Verhältnisse stehen.

## § 102.

**Mittlere Wegelänge der Moleküle.** Um über den durch diese Auffassung gegebenen Gaszustand nähern Aufschluß zu erhalten, untersuchen wir zunächst die Wegestrecken, welche die einzelnen Gasmoleküle im Mittel zurücklegen zwischen je zwei Stößen. So schwierig diese Aufgabe zu sein scheint, in so einfacher Weise ist dieselbe von Clausius durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst worden<sup>1)</sup>.

Die Moleküle stoßen einander und ändern ihre Bewegungsrichtung, wenn sie sich bis zu einem gewissen Abstände genähert haben; diese Entfernung ist durch den Radius einer Kugelfläche gegeben, welche wir um den Schwerpunkt der Moleküle gelegt denken. Diesen Radius nennt Clausius den Radius der Wirkungssphäre, und den von jener Kugelfläche umschlossenen Raum die Wirkungssphäre. Diese soll demnach so bestimmt sein, daß, wenn der Schwerpunkt eines andern Moleküls in diese Kugel-

1) Clausius hat diese Frage zuerst Poggend. Ann. 105. 1858, Abhandlung zur mechanischen Wärmetheorie (Braunschweig bei Vieweg 1864—1867). Ab p. 272 behandelt. Später nochmals in etwas anderer Weise Sitzungsberichte niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1874. Poggend. Erg.-Bd. VII. 1876. Obige Ableitung schließt sich an die zweite.

Stoß eintritt, der Stoß zwischen beiden Molekülen selbst stattfindet. In welchem Verhältnisse der Radius der Wirkungssphäre zur Größe des Moleküles selbst steht, darüber läßt sich nur aufgrund von Hypothesen etwas sagen. Nimmt man z. B. an, die Moleküle haben Kugelform und die Stoßwirkung trete wie bei elastischen Kugeln ein, wenn die Oberflächen sich berühren, so erkennt man, daß der Radius der Wirkungssphären gleich dem Durchmesser der Moleküle ist, denn in dem Falle tritt der Stoß ein, wenn die Mittelpunkte der Moleküle, also deren Schwerpunkte um die Summe der beiden Radien voneinander entfernt sind.

Um die zwischen zwei Stößen zurückgelegte Wegestrecke zu berechnen, denken wir uns zunächst einen irgendwie durch eine beliebige unregelmäßige Oberfläche begrenzten Raum und in diesem einen beweglichen Punkt. Der Punkt befinde sich an einer beliebigen Stelle des Raumes, so daß für alle gleich großen Teile des Raumes die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt zu enthalten gleich groß sei. Der Punkt mache dann eine unendlich kleine Bewegung von der Länge  $dl$  nach irgend einer beliebigen Richtung, so daß alle möglichen Richtungen gleich wahrscheinlich sind. Wir untersuchen zuerst die Frage, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt bei dieser unendlich kleinen Bewegung die Oberfläche treffe.

Zu dem Zwecke suchen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit auf, daß der Punkt irgend ein Element  $ds$  der Oberfläche treffe. Man denke sich den Punkt ruhend und statt dessen das betrachtete Flächenelement  $ds$  nach der vorher angenommenen Bewegung des Punktes entgegengesetzten Richtung um die Strecke  $dl$  bewegt. Dadurch beschreibt das Flächenelement einen unendlich kleinen prismatischen Raum und die Wahrscheinlichkeit, daß der ruhend gedachte Punkt in diesem Raume liege, ist ganz dieselbe wie diejenige, daß der bewegte Punkt das Flächenelement  $ds$  trifft.

Für alle diejenigen Fälle, in denen die gedachte Bewegung des Flächenelementes von dem begrenzten Raume nach außen geht (welche jeder Bewegung des Punktes entsprechen, bei denen er sich von dem Flächenelement entfernt), so daß also der von dem Flächenelemente beschriebene kleine Raum außerhalb des gegebenen Raumes liegt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt in dem kleinen Raume liegt, gleich Null. Für solche Fälle dagegen, in denen die gedachte Bewegung des Flächenelementes nach innen geht, so daß der von demselben beschriebene kleine Raum einen Teil des gegebenen Raumes bildet, wird die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt sich gerade in diesem Teile des gegebenen Raumes befindet, gleich einem Bruche, dessen Zähler dieser Teil des Raumes und dessen Nenner der ganze Raum ist.

Sei  $\vartheta$  der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung des Elementes mit der auf dem Elemente nach innen gerichteten Normalen macht, so wird die Größe des kleinen Raumes dargestellt durch den Ausdruck

$$ds \cos \vartheta \cdot dl.$$

Da der Raum ein schiefes Prisma von der Länge  $dl$ , dessen zur Achse senkrechter Querschnitt  $ds \cos \vartheta$  ist. Der Raum ist positiv, wenn der kleine Raum im Innern des gegebenen, negativ, wenn er außerhalb liegt.



denn im letztern Falle ist der Winkel  $\vartheta$  ein stumpfer. Für negative Werte des Ausdruckes ist somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit Null. Nennen wir den ganzen gegebenen Raum  $U$ , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei der gedachten Bewegungsrichtung der Punkt sich in dem kleinen Raume befinde

$$\frac{ds \cos \vartheta dl}{U}.$$

Damit ist indes die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt sich in dem betrachteten Raume befinde, respektive die Wand treffe, nur gegeben, wenn die Bewegungsrichtung mit der Normalen des Elementes  $ds$  den Winkel  $\vartheta$  bildet. Um die Wahrscheinlichkeit überhaupt zu finden, daß der Punkt in dem kleinen Raume sich befinde, müssen wir erst noch die Wahrscheinlichkeit aufsuchen, daß der Punkt sich in dieser Richtung, die wir die Richtung  $\vartheta$  nennen wollen, bewege.

Zu dem Ende denken wir uns um den Punkt eine Kugel beschrieben mit dem Radius eins. Die möglichen Bewegungsrichtungen sind dann sämtliche Radien der Kugel. Denken wir uns jetzt durch den Punkt, also den Mittelpunkt der Kugel die Richtung der Normale zu dem Flächenelement gelegt, so liegen alle Richtungen  $\vartheta$  auf einem Kegelmantel, der die Kugeloberfläche in einem Kreise schneidet, nicht in zwei Kreisen, da wir nur den Winkel  $\vartheta$  mit der nach innen gezogenen Normalen des Elementes in betracht zu ziehen haben. Der Radius des Kreises, in welchem der Kegel die Oberfläche schneidet, ist  $\sin \vartheta$ , somit der Umfang des Kreises  $2\pi \sin \vartheta$ . Multiplizieren wir den Umfang  $2\pi \sin \vartheta$  mit dem Bogenelement  $d\vartheta$ , so erhalten wir eine kleine Zone auf der Kugelfläche, deren Flächeninhalt  $2\pi \sin \vartheta d\vartheta$  ist. Die Wahrscheinlichkeit nun, daß der Punkt bei seiner Bewegung eine Richtung habe, die zwischen  $\vartheta$  und dem davon unendlich wenig verschiedenen  $\vartheta + d\vartheta$  liegt, ist gleich dem Quotienten aus dem Flächeninhalt dieser Kugelzone und dem Flächeninhalt der Kugel. Denn die zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  liegenden Richtungen schneiden die Kugelfläche sämtlich in dieser Zone, während die Durchschnittspunkte sämtlicher möglicher Richtungen mit der Kugelfläche die ganze Kugelfläche geben. Da der Radius der Kugel gleich eins angenommen wurde, ist die Oberfläche der Kugel  $4\pi$ . Die Wahrscheinlichkeit somit, daß die Bewegungsrichtung mit der Innenseite der Normalen einen spitzen Winkel bilde, der zwischen  $\vartheta$  und  $d\vartheta$  liegt, ist

$$\frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi} = \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt sich in der Richtung  $\vartheta$  bewege und bei der Bewegung das betrachtete Oberflächenelement  $ds$  treffe, ist dann gleich dem Produkte aus den beiden berechneten Wahrscheinlichkeiten. Denn unter den Fällen  $\frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2}$ , in denen sich der Punkt in der verlangten Richtung bewegt, sind es nur die Fälle  $\frac{ds \cos \vartheta dl}{U}$ , in denen er das Flächenelement  $ds$  trifft, die Wahrscheinlichkeit, daß beides zusammen eintritt, ist somit

$$\frac{ds \cos \vartheta dl \sin \vartheta d\vartheta}{2 U}$$

Da wir nun über die Lage des Oberflächenelementes gar keine nähere Annahme gemacht haben, so gilt die gleiche Wahrscheinlichkeit für ein Element der Oberfläche; ist  $s$  ein Stück der Oberfläche, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses unter dem Winkel  $\vartheta$  von dem nach einer beliebigen Richtung durch die Strecke  $dl$  bewegten Punkte getroffen wird, dem Verhältnis größer als die eben berechnete Wahrscheinlichkeit, in welchem  $s$  größer ist als  $ds$ . Um diese Wahrscheinlichkeit zu erhalten, müssen wir somit die vorhin berechnete mit  $\frac{s}{ds}$  zu multiplizieren, sie wird

$$\frac{s \cos \vartheta dl \sin \vartheta d\vartheta}{2L}.$$

Um dann die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß die Oberfläche des Gases überhaupt an irgend einer Stelle unter dem Winkel  $\vartheta$  getroffen wird, haben wir nur  $s$  durch die ganze Oberfläche  $S$  zu ersetzen, dieselbe wird also

$$\frac{S \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2L} dl.$$

Wir wollen jetzt annehmen, der Punkt bewege sich nicht nur durch kleine Strecke  $dl$ , sondern habe eine gewisse Geschwindigkeit  $u$ , mit der er sich fort bewegt, bis er die Oberfläche trifft und von dieser nach den Elastizitätsgesetzen abpralle, worauf er nach einer andern Richtung derselben Geschwindigkeit weiter geht. Dabei soll vorausgesetzt werden, daß die Wechselwirkung zwischen Oberfläche und Punkt nur in unmittelbarer Nähe stattfindet, so daß die Änderung der Bewegungsrichtung bei dem Stöße in unmerklich kleiner Zeit vor sich geht, und demnach die Geschwindigkeit trotz der während der Stoßzeit stattfindenden Abweichung konstant betrachtet werden dürfe. Dann ist die Zeit  $dt$ , in der der Punkt den Weg  $dl$  zurücklegt, immer dieselbe, und wir können für  $dl$  setzen  $dl = u dt$ . Setzen wir das für  $dl$  ein, so erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, daß das Stück  $s$  der Oberfläche in der Zeit  $dt$  von dem Punkte unter dem Winkel  $\vartheta$  getroffen wird,

$$\frac{s \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \cdot u}{2L} dt;$$

die ganze Oberfläche haben wir nur  $s$  mit  $S$  zu vertauschen.

Hieraus erhalten wir die Anzahl von Stößen, welche das Flächenstück  $s$  in der Zeit einer Sekunde unter dem Winkel  $\vartheta$  erhält, durch folgende Überlegung. Nennen wir den Faktor von  $dt$  für einen Augenblick  $x$ ; obiger Ausdruck sagt dann, daß das Flächenstück  $s$  durchschnittlich einen Stoß unter dem Winkel  $\vartheta$  in einer solchen Zeit  $u dt$  bekommt, daß

$$x u dt = 1, \quad u dt = \frac{1}{x};$$

im Verlaufe dieser Zeit wird die Wahrscheinlichkeit des Stoßes gleich  $x$ . Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Falles aber gleich 1 ist, so bedeutet das, daß der Fall wirklich eintritt; denn die Wahrscheinlichkeit wird mathematisch durch den Quotienten aus der Zahl zutreffenden und der Zahl der möglichen Fälle definiert. Ist aber dieser

Quotient gleich 1, so heißt das, die Zahl der zutreffenden Fälle ist gleich der Zahl der möglichen, oder die vermutete Erscheinung tritt ein.

Findet nun in der Zeit  $ndt$  ein Stoß statt, so ist die Zahl der Stöße in der Zeit einer Sekunde

$$\frac{1}{ndt} = x = \frac{su \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2U}.$$

Das ist also die Zahl der Stöße, die das Flächenstück  $s$  der Oberfläche unter einem Winkel zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  erhält im Laufe einer Sekunde; ersetzen wir  $s$  durch  $S$ , so erhalten wir die Zahl der Stöße, welche die ganze Oberfläche in der Richtung  $\vartheta$  während einer Sekunde erhält.

Um daraus die Zahl von Stößen zu berechnen, welche die Oberfläche in einer Sekunde überhaupt erhält, haben wir den zuletzt gefundenen Ausdruck für jeden zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  liegenden Wert von  $\vartheta$  zu bilden, da der Winkel  $\vartheta$  nur ein spitzer sein darf, und dann die Summe aller dieser Ausdrücke zu bilden. Die Zahl  $Z$  der Stöße, welche die ganze Oberfläche in der Sekunde erhält, ist somit nach E IV, E 5 und E VIII

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Su}{2U} \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{Su}{2U} \cdot \frac{1}{2} \left( \cos^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 0 \right) = \frac{Su}{4U}.$$

Die Zahl der Stöße ist also gleich dem Produkte aus der Geschwindigkeit des Punktes und der Größe der Oberfläche dividiert durch den vierfachen Raum, in welchem sich der Punkt bewegt.

Aus der Zahl der Stöße in der Sekunde erhalten wir den zwischen zwei Stößen zurückgelegten Weg, indem wir die in der Sekunde zurückgelegte Strecke durch die Stoßzahl dividieren, sie wird

$$l = \frac{u \cdot 4U}{Su} = \frac{4U}{S}.$$

Der hier abgeleitete Satz über die Zahl der Stöße  $Z$  und über den zwischen zwei Stößen im Mittel zurückgelegten Weg führt uns nun unmittelbar zur Lösung unserer Aufgabe der Bestimmung der mittleren Weglänge der Moleküle.

Der Raum  $V$  sei mit Gas gefüllt; er enthalte die sehr große Zahl  $N$  der Moleküle von der von uns vorhin angenommenen Beschaffenheit; der Radius der Wirkungssphäre sei gleich  $\varrho$ . Um auch jetzt wieder vom einfachsten Fall auszugehen, denken wir uns zunächst, daß nur eines der Moleküle sich in der für die Gasmoleküle angenommenen Bewegung befinde, alle übrigen seien fest, das heißt sie ändern ihren Ort im Raum nicht. Die Anordnung dieser Moleküle sei eine ganz beliebige, jedoch so, daß immer in gleich großen meßbaren Stücken des betrachteten Raumes die gleiche Anzahl von Molekülen vorhanden sei. Der in unsern Entwicklungen angenommene bewegliche Punkt repräsentiert uns dann den Schwerpunkt des beweglichen Moleküls. Derselbe bewegt sich so lange fort, er in die Wirkungssphäre eines festen Moleküles oder an der Wand des Raumes ankommt, welche das Gas einschließt. Wir haben demnach, die Zahl der Stöße, die das bewegliche Molekül in der Zeiteinheit erfährt

in dem vorhin für  $Z$  entwickelten Ausdrücke nur für  $S$  die Summe der Oberflächen aller Wirkungssphären der im Raum vorhandenen Moleküle und der Wandungen des Gefäßes einzusetzen. Denn die Summe aller dieser Flächen gibt uns die Begrenzung des Raumes, in welchem sich unser Punkt frei bewegen kann. Da wir bei unserer Entwicklung die Form der Begrenzung des betrachteten Raumes ausdrücklich als ganz beliebig angenommen haben, gilt unsere Entwicklung für den in dieser Weise begrenzten Raum unmittelbar.

Der Raum  $V'$ , in welchem sich der Punkt bewegen kann, ist der von der gegebenen Gasmenge ausgefüllte Raum, vermindert um den Raum, welchen die Wirkungssphären der Moleküle ausfüllen, denn in die Wirkungssphären kann der Punkt nicht eindringen.<sup>1)</sup>

Die Oberfläche der Wirkungssphäre jeden einzelnen Moleküls ist  $4\rho^2\pi$ , die Summe der Oberflächen für  $N$  Moleküle somit  $N \cdot 4\rho^2\pi$ . Setzen wir die Größe der Gefäßwand, welche das Gas einschließt, gleich  $\Sigma$ , so wird

$$S = N4\rho^2\pi + \Sigma.$$

Ist  $V$  der von der gegebenen Gasmenge eingenommene Raum, so wird, da  $\frac{4}{3}\rho^3\pi$  der von der Wirkungssphäre jedes einzelnen Moleküls eingenommene Raum ist,

$$V' = V - N \cdot \frac{4}{3}\rho^3\pi.$$

Damit erhalten wir, wenn  $u$  die Geschwindigkeit des bewegten Moleküls ist,

$$Z_1 = \frac{N4\rho^2\pi + \Sigma}{4(V - N\frac{4}{3}\rho^3\pi)} u,$$

und für die mittlere Weglänge des Moleküls, die zwischen je zwei Stößen im Mittel zurückgelegte Strecke,

$$l_1 = \frac{V - N\frac{4}{3}\rho^3\pi}{N4\rho^2\pi + \Sigma}.$$

Bei der Bestimmung dieses Wertes  $l_1$  ist noch die Voraussetzung gemacht, daß die Moleküle mit Ausnahme des einen betrachteten in Ruhe seien. Nach unserer Gastheorie sind nun alle Moleküle in Bewegung; die Geschwindigkeit der Bewegung ist im Mittel für alle dieselbe, wir setzen sie also für alle gleich  $u$ .

Zunächst sieht man, daß die Zahl der Stöße, welche das Molekül der festen Wand erteilt, dadurch nicht geändert werden kann, da die feste Wand an der Bewegung der Moleküle nicht teilnimmt, die Verhältnisse des Moleküls der festen Wand gegenüber somit nicht geändert werden. Schreiben wir daher

$$Z_1 = \frac{N \cdot 4\rho^2\pi \cdot u}{4(V - N\frac{4}{3}\rho^3\pi)} + \frac{\Sigma u}{4(V - N\frac{4}{3}\rho^3\pi)},$$

so kann nur das erste Glied des Ausdrucks für  $Z_1$  geändert werden.

<sup>1</sup> Darauf, daß bei Berechnung der mittlern Weglänge der von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllte Raum in betracht gezogen werden müsse, ist zuerst Van der Waals in seiner Abhandlung: „Over de Continuïteit van den Gas- en Vloeistoftoestand“ Academisch Proefschrift, Leiden 1873, hingewiesen.

Die Änderung desselben ergibt sich auf folgende Weise; die Zahl dieser Stöße ist bei ruhenden Molekülen der Geschwindigkeit  $u$  des bewegten proportional, denn sie ist, wenn wir den Faktor von  $u$  der Kürze halber mit  $a$  und das erste Glied des Ausdruckes für  $Z_1$  mit  $Z_1'$  bezeichnen,

$$Z_1' = au.$$

Für die zwischen zwei Stößen im Mittel verstreichende Zeit  $\tau$  erhalten wir dann

$$\frac{1}{Z_1'} = \frac{1}{au} = \tau.$$

Sind nun außer dem betrachteten auch alle übrigen Moleküle in Bewegung, so ist, wenn wir zunächst annehmen, daß während der Zeit  $\tau$  die Bewegung aller Moleküle außer dem betrachteten dieselbe Richtung habe, die zwischen zwei Stößen stattfindende Zeit in dem Maße kleiner oder größer als  $\tau$ , in welchem die Moleküle durch ihre Bewegung sich dem betrachteten genähert oder von demselben entfernt haben. Für die Berechnung dieser geänderten Stoßzeit  $\tau'$  gelangen wir zu demselben Resultate, wenn wir auch jetzt noch uns alle Moleküle als ruhend denken, dagegen dem betrachteten Moleküle eine in dem Maße größere oder kleinere Geschwindigkeit beilegen, daß es den bei ruhenden Molekülen vorhandenen Abstand in derselben Zeit  $\tau'$  zurücklegt, wie den durch die Bewegung der Moleküle verkleinerten Abstand mit der Geschwindigkeit  $u$ . Wir haben also einfach anstatt der Geschwindigkeit  $u$  die relative Geschwindigkeit des Moleküles gegenüber derjenigen der anderen Moleküle zu setzen. Bewegen sich z. B. alle Moleküle mit dem betrachteten in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$ , so entfernt sich ein in der Bahn des Moleküls liegendes anderes Molekül in der Zeit  $\tau$  um die Strecke  $v\tau$ , das Molekül hat also außer dem frühern Wege noch den Weg  $v\tau$  zurückzulegen, um an das folgende anzustoßen. Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir dem betrachteten Molekül die Geschwindigkeit  $(u - v)$  beilegen, während die anderen ruhen, auch dann hat es nach der Zeit  $\tau$  noch den Weg  $v\tau$  zurückzulegen, um zum Stoß zu gelangen. Ebenso wie bei gleichgerichteter Geschwindigkeit haben wir auch, wenn die Geschwindigkeit  $v$  eine andere Richtung hat, anstatt  $u$  die relative Geschwindigkeit des betrachteten Moleküls zu setzen, das heißt also jene Geschwindigkeit, mit welcher es sich zwischen den als ruhend gedachten andern Molekülen bewegen müßte, um gegen dieselben die gleiche Bewegung zu erhalten, welche durch die Bewegung aller Moleküle bewirkt wird. Bildet die Geschwindigkeit  $v$  mit derjenigen  $u$  den Winkel  $\varphi$ , so ist nach dem Satz von dem Parallelogramm der Bewegungen diese relative Geschwindigkeit

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cdot \cos \varphi},$$

oder wenn wir voraussetzen, daß die Geschwindigkeit aller Moleküle dieselbe  $u$  des betrachteten sei

$$r = u \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi}.$$

Haben die Moleküle nicht alle die gleiche Richtung der Bewegung welche mit der des betrachteten Moleküls den Winkel  $\varphi$  bildet, sondern haben deren Bewegungen alle möglichen Richtungen, so daß für je

Molekül jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich ist, so ist die relative Geschwindigkeit des Moleküls gegen jedes der andern Moleküle eine andere. Nehmen wir aber aus allen diesen relativen Geschwindigkeiten das arithmetische Mittel, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Molekül an ein anderes stößt, also auch im Mittel die zwischen zwei Stößen verstrichene Zeit, dieselbe als wenn das Molekül diese mittlere Geschwindigkeit besäße, alle übrigen aber in Ruhe wären.

Zur Berechnung dieser mittlern relativen Geschwindigkeit  $\bar{r}$  haben wir dieselbe Betrachtung anzustellen wie vorhin, als wir die Zahl der Stöße berechneten, welche die Oberfläche unter dem Winkel  $\vartheta$  treffen. Die Anzahl der Moleküle, deren Bewegungsrichtung mit derjenigen des betrachteten Moleküls Winkel bilden, welche zwischen  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  liegen, verhält sich zur Gesamtzahl der Moleküle wie die Zone  $2\pi \sin \varphi d\varphi$  zur Oberfläche der Kugel  $4\pi$ , sie ist somit, da wir die Anzahl der in dem Raume vorhandenen Moleküle  $N$  genannt haben,

$$N \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi.$$

Denn auch jetzt sind sämtliche Bewegungsrichtungen die Radien einer Kugel, die zwischen  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  gelegenen die zu der entsprechenden Zone gehörigen Radien. Nach dem Begriffe der mittlern Geschwindigkeit ist die Summe aller Geschwindigkeiten dividiert durch die Anzahl der Moleküle, müssen wir zur Berechnung von  $r$  die Summe aller möglichen relativen Geschwindigkeiten, und zwar jeder einzelnen so oft, als Moleküle mit ihr begabt sind, bilden, und dann die Gesamtsumme durch  $N$  dividieren. Die vorhin berechnete Geschwindigkeit  $r$  besitzt die Anzahl  $N \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$  als Produkt

$$Nu \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi} \cdot d\varphi$$

ist somit, wenn wir auch jetzt  $u$  als die mittlere absolute Geschwindigkeit aller Moleküle bezeichnen, den Anteil, den die mittlere Geschwindigkeit  $r$  an der Gesamtsumme hat. Bilden wir nun den gleichen Ausdruck  $r$  alle zwischen  $0$  und  $\pi$  liegenden Werte, so erhalten wir in der Summe dieser Ausdrücke dividiert durch  $N$  die gesuchte mittlere Geschwindigkeit  $\bar{r}$ . Dieselbe wird somit

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \int_0^\pi Nu \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi} \cdot d\varphi.$$

Da nun

$$\sqrt{1 - \cos \varphi} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}; \quad \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

so, wenn wir gleichzeitig die konstanten Faktoren vor das Summenzeichen setzen,

$$r = 4u \int_0^\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Nach den schon oft benutzten Sätzen der Einleitung ist

$$\int_0^\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{3} (\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0) = \frac{1}{3}.$$

demnach wird

$$\bar{r} = \frac{4}{3} u.$$

Für die zwischen zwei Stößen innerhalb der Moleküle im Mittel verstrichene Zeit ergibt sich darnach

$$\tau' = \frac{1}{a\bar{r}} = \frac{1}{a\frac{4}{3}u},$$

somit für die Stoßzahl

$$Z = \frac{1}{\tau'} = \frac{4}{3} au = \frac{4}{3} \cdot \frac{N \frac{4}{3} \rho^2 \pi u}{4(\bar{V} - N \frac{4}{3} \rho^2 \pi)},$$

oder für die Stoßzahl  $Z$ , welche das Molekül im Mittel in der Sekunde innerhalb der Moleküle und an der Wand des Gefäßes erhält,

$$Z = \frac{\frac{4}{3} N \frac{4}{3} \rho^2 \pi + \Sigma}{4(\bar{V} - N \frac{4}{3} \rho^2 \pi)} u,$$

und daraus für die von dem Molekül im Mittel zwischen zwei Stößen zurückgelegte Wegestrecke

$$l = 4 \frac{\bar{V} - N \frac{4}{3} \rho^2 \pi}{\frac{4}{3} N \frac{4}{3} \rho^2 \pi + \Sigma}.$$

Da wir in den letzten Entwicklungen die mittlere Geschwindigkeit des nach beliebiger Richtung mit der Geschwindigkeit  $u$  zwischen der nach beliebigen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit  $u$  sich bewegenden Molekülzahl  $N$  berechnet haben, gilt dieser unser Ausdruck für jedes der  $N$  Moleküle, so daß also der gefundene Wert für  $l$  uns die mittlere Wegelänge irgend eines Moleküles in dem mit Gas gefüllten Raume  $\bar{V}$  liefert. Die mittlere Wegelänge hängt demnach einigermaßen von der Ausdehnung der Wandflächen des Gefäßes ab, das heißt, denken wir uns einen Kubikmeter Luft in der äußern Atmosphäre ohne Wandfläche, so ist die Wegelänge etwas größer, als wenn wir ihn durch eine feste Wand umgrenzen. Indes, wenn auch die Wirkungssphäre eines Moleküles eine sehr kleine Oberfläche hat, so ist doch, wenn die Gase nicht sehr verdünnt sind, die Zahl der Moleküle eine so große, daß wir in dem Ausdrucke für  $l$  im Nenner  $\Sigma$  gegen das erste Glied vernachlässigen und schreiben dürfen

$$l = \frac{\bar{V} - N \frac{4}{3} \rho^2 \pi}{\frac{4}{3} N \frac{4}{3} \rho^2 \pi},$$

oder

$$\frac{l}{\rho} = \frac{\bar{V} - N \frac{4}{3} \rho^2 \pi}{N \frac{4}{3} \rho^2 \pi}.$$

Das Verhältnis der mittlern Wegelänge zu dem Radius der Wirkungssphäre ist also gleich dem Verhältnisse des von den Wirkungssphären der Moleküle freien von dem Gase eingenommenen Raumes zu dem von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllten Raume. Dieses letztere Verhältnis können wir auch als den für jedes Molekül vorhandenen freien Raum bezeichnen, das heißt denken wir uns den gegebenen Raum in sovielen Würfel geteilt, als derselbe Moleküle enthält, so ist der Quotient aus der mittlern Wegelänge und dem Radius der Wirkungssphäre gleich dem Quotienten aus dem Rauminhalt eines solchen Würfels weniger dem Ra



inhalt einer Wirkungssphäre und dem Rauminhalt der letztern. Nennen wir also  $\lambda$  die Seite eines solchen Würfels, so daß  $N\lambda^3 = V$ , so wird

$$\begin{aligned} l &= \frac{\lambda^3 - \frac{4}{3}e^3\pi}{\frac{4}{3}e^3\pi} \\ l &= \left( \frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}e^3\pi} - 1 \right) e; \end{aligned}$$

die mittlere Wegelänge ist also gleich dem Quotienten aus dem Rauminhalte eines der Würfel dividiert durch den Rauminhalt einer Wirkungssphäre weniger eins multipliziert mit dem Radius der Wirkungssphäre. Dieselbe ist jedenfalls eine sehr kleine Größe, so daß wir erkennen, daß die Entwicklung unserer Auffassung über den Gaszustand dahin führt, daß die Bewegung der Gasmoleküle wesentlich eine oszillierende ist, wobei sie aber nicht bei jeder Oszillation denselben Weg hin und her zurücklegen, und wobei die Oszillationsweiten nicht immer dieselben sind.

Um das letztere zu erkennen, müssen wir noch einmal auf die Bedeutung der mittleren Wegelänge zurückkommen. Dieselbe ist nicht etwa, daß jedes Molekül zwischen je zwei Stößen den Weg  $l$  zurücklegt. Die in Wirklichkeit zurückgelegten Wege sind sehr verschieden, sie sind aber bald größer bald kleiner als  $l$ , und im ganzen so, daß wenn wir die zwischen einer großen Zahl Stößen zurückgelegten Wege durch die Zahl der Stöße dividieren, diese Länge herauskommt. Oder auch, zählen wir die von sämtlichen Molekülen  $N$ , die den Raum  $V$  erfüllen, zwischen je zwei Stößen zurückgelegten Wege zusammen, so ist diese Summe dividiert durch die Zahl der Moleküle gleich der mittlern Wegelänge; die von sämtlichen Molekülen zurückgelegten Wege sind also so groß, als wenn jedes den Weg  $l$  zurückgelegt hätte.

Um den Gaszustand vollständig zu übersehen, wollen wir deshalb die Frage noch untersuchen, welche Wegestrecken die Moleküle wirklich zurücklegen: wir berechnen deshalb zunächst nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit die Anzahl Moleküle, welche einen Weg von  $x$  Wegelänge zurücklegen, keinen größeren und keinen kleinern. Sei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül die mittlere Wegelänge  $l$  zurücklegt, ohne anzustoßen, gleich  $a$ , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es nochmals den Weg  $l$  zurücklegt ohne anzustoßen, gleich  $a \cdot a = a^2$ , die Wahrscheinlichkeit, daß es den Weg  $3l$ , ohne vorher anzustoßen,  $a^3$ , also diejenige, daß es den Weg  $x \cdot l$  zurücklegt, ohne vorher anzustoßen,  $a^x$ . Schreiben wir nun, da  $a$  ein echter Bruch ist,  $a = e^{-u}$ , so können wir diese Wahrscheinlichkeit schreiben

$$W = e^{-ux}.$$

Enthält unser Raum  $N$  Moleküle, so bedeutet der Satz, die Wahrscheinlichkeit, daß jedes Molekül den Weg  $x \cdot l$  zurücklegt, sei gleich  $W$ , nichts anderes, als daß von der ganzen Zahl  $N$  eine solche Zahl  $n$  diesen Weg zurücklegt, ohne schon vorher anzustoßen, daß

$$\frac{n}{N} = W$$

1. Die Zahl  $n$  der den Weg  $xl$ , ohne vorher anzustoßen, zurücklegenden

Moleküle ist somit

$$n = NW = Ne^{-\alpha x}.$$

Alle übrigen Moleküle werden schon nach Zurücklegung kleinerer Wege gestoßen. Um nun aber die Zahl der Moleküle zu bestimmen, welche gerade den Weg  $x \cdot l$  zurücklegen und keinen größeren, müssen wir ausrechnen, wie viele am Ende dieses Weges einen Stoß erhalten. Wir finden diese Anzahl, wenn wir von der eben gefundenen Zahl diejenige abziehen, welche ohne anzustoßen den von  $x$  unendlich wenig verschiedenen Weg  $(x + dx)l$  zurücklegen; denn die Differenz dieser Zahlen ist eben jene Anzahl von Molekülen, welche keinen größeren Weg als  $(x + dx)l$ , wofür bei der vorausgesetzten Kleinheit von  $dx$  auch  $x \cdot l$  gesetzt werden darf, ohne Stoß zurücklegen kann. Diese Differenz ist

$$Ne^{-\alpha x} - Ne^{-\alpha(x+dx)} = Ne^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha dx}).$$

Bei der vorausgesetzten Kleinheit von  $dx$  können wir setzen

$$e^{-\alpha dx} = 1 - \alpha dx,$$

und erhalten somit für die Zahl der Moleküle, die gerade den Weg  $x$  ohne Stoß zurücklegt, keinen größeren und keinen kleinern

$$Ne^{-\alpha x} \cdot \alpha dx.$$

Hiermit sind wir imstande den Koeffizienten  $\alpha$  zu bestimmen, indem wir die Summe aller von den Molekülen zwischen je zwei Stößen zurückgelegten Wege berechnen, die, wie wir sahen, gleich  $Nl$  ist.

Da die eben berechnete Molekülzahl gerade den Weg  $xl$  zurückgelegt hat, so ist das Produkt

$$lxNe^{-\alpha x} \cdot \alpha dx$$

der in Summe von diesen Molekülen zurückgelegte Weg. Den von allen  $N$  Molekülen zurückgelegten Weg erhalten wir dann, wenn wir für jeden Wert von  $x$  zwischen Null und Unendlich den gleichen Ausdruck bilden und alle diese summieren, also in der Summe

$$l \int_0^{\infty} x Ne^{-\alpha x} \alpha dx.$$

Für diese Summe gibt die Integralrechnung den Wert

$$l \frac{N}{\alpha};$$

da nun die Summe der von allen Molekülen zurückgelegten Wege gleich  $Nl$  ist, so folgt

$$l \frac{N}{\alpha} = Nl; \quad \alpha = 1.$$

Mit dem so bestimmten Werte von  $\alpha$  ergibt sich somit die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül den Weg  $xl$  zurücklegt, zu  $e^{-x}$ , und hiernach die Zahl der Moleküle, welche den Weg  $xl$  zurücklegt, zu  $Ne^{-x}$ . Die Zahl der Moleküle, welche also die mittlere Wegelänge ohne vorher gestoßen zu haben zurücklegt, ist

$$Ne^{-1} = 0,3679 N,$$

also nur etwa 37 $\frac{1}{2}$ %; alle übrigen haben schon nach Zurücklegung eines kürzern Weges einen Stoß erhalten. Für den doppelten Weg findet man so 13,5%, für den dreifachen 4,9%, für den zehnfachen 0,0045%, so daß also von einer Million Moleküle im Durchschnitt nur 45 ungestört die 10fache mittlere Wegelänge zurücklegen.

## § 103.

**Ableitung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes.** Die Entwicklungen des letzten Paragraphen führen uns sofort zu der Beziehung, welche zwischen dem Druck eines Gases und dem von demselben eingenommenen Raum bestehen muß. Nach unserer Theorie kann der Druck, den das Gas auf die Wandungen des Gefäßes ausübt, in welches es eingeschlossen ist, nur herühren von den Stößen, welche die an die Wand prallenden Moleküle der Wand erteilen.

Wenn ein Raum von der Größe  $U$  ein mit der Geschwindigkeit  $u$  sich bewegendes Molekül enthält, so erhält das Flächenstück  $s$  der Wand im Durchschnitt pro Sekunde (p. 574)

$$\frac{su \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2U}$$

Stöße in der Richtung  $\vartheta$ . Enthält der Raum  $N$  Moleküle, so ist für jedes dieser  $N$  Moleküle die Stoßzahl dieselbe, die in der Richtung  $\vartheta$  von allen diesen Molekülen ausgeübten Stöße haben somit die Zahl

$$\frac{Nsu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2U}$$

Das an die Wand anprallende Molekül wird nach den Gesetzen des elastischen Stoßes von der Wand zurückgeworfen, das heißt also die gegen die Wand senkrechte Komponente der Geschwindigkeit wird in die entgegengesetzte verwandelt. Die zur Wand senkrechte Komponente der Geschwindigkeit für die in der Richtung  $\vartheta$  gegen die Wand fliegenden Moleküle ist  $u \cos \vartheta$ , indem diese in die entgegengesetzte verwandelt wird, ist es dasselbe als wenn dem Molekül in der von der Wand fortgewandten Richtung die Geschwindigkeit  $2u \cos \vartheta$  erteilt würde. Nennen wir nun  $m$  die Masse des einzelnen Moleküls, so ist die dieser Geschwindigkeit entsprechende Bewegungsgröße  $m \cdot 2u \cos \vartheta$ . Die gesamte Bewegungsgröße, welche die in der Richtung  $\vartheta$  gegen die Wand fliegenden Moleküle infolge ihres Anpralls an das Stück  $s$  der Wand in der Zeit einer Sekunde erhalten, ist demnach, da jedes in der Richtung  $\vartheta$  gegen die Wand fliegende Molekül bei jedem Stoße dieselbe Bewegungsgröße  $2mu \cos \vartheta$  erhält,

$$2mu \cos \vartheta \cdot \frac{Nsu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2U} = \frac{smNu^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{U}.$$

Hieraus erhalten wir in schon oft abgeleiteter Weise die Bewegungsgröße, welche sämtliche in allen möglichen Richtungen gegen die Wand fliegenden Moleküle infolge ihres Anpralls an die Wand in einer Sekunde erhalten, in der Summe

$$\frac{s N m u^2}{U} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

denn die möglichen Richtungen entsprechen allen Werten von  $\vartheta$  zwischen 0, entsprechend dem senkrechten Anprall, und  $\frac{\pi}{2}$  entsprechend einer der Wand parallelen Bewegung. Diese Summe ist, da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{1}{3} \left( \cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 0 \right) = \frac{1}{3}$$

ist, gleich

$$\frac{1}{3} \frac{s N m u^2}{U}.$$

Denken wir uns jetzt die Wandfläche  $s$  vollkommen frei beweglich, so muß, damit sie nicht durch die Stöße der Moleküle zurückgetrieben wird, von der andern Seite auf die Wand ein Druck ausgeübt werden, und zwar muß wegen der großen Zahl von Stößen, die in stetiger Folge stattfinden, dieser Druck ein stetiger sein. Die Größe dieses Druckes ist dadurch gegeben, daß er, die Zeit einer Sekunde wirkend, der Masse der gegen die Wandfläche  $s$  prallenden Moleküle dieselbe Bewegungsgröße erteilen muß. Nennen wir diesen Druck für die Flächeneinheit  $p$ , so muß nach dem § 11 abgeleiteten Satze, daß der Antrieb einer Kraft in der Zeit  $t$  gleich der in dieser Zeit  $t$  erreichten Bewegungsgröße sein muß, und da die hier in betracht gezogene Zeit die Zeit einer Sekunde ist,

$$p s = \frac{1}{3} \frac{s N m u^2}{U},$$

oder

$$p = \frac{1}{3} \frac{N m u^2}{U}, \quad p U = \frac{1}{3} N m u^2$$

Wie wir im vorigen Paragraphen sahen, ist  $U$  der von den Wirkungssphären der Moleküle freie Raum des mit dem Gase gefüllten Gefäßes, so daß wir also zu dem Satze gelangen, daß das Produkt des Druckes, den ein Gas auf die Flächeneinheit ausübt in den von den Wirkungssphären freien Raum, den das Gas einnimmt, gleich einem Drittel der doppelten lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung der in dem Raume bewegten Moleküle ist<sup>1)</sup>. Für die Größe  $U$  erhielten wir im vorigen Paragraphen

$$U = V - N \frac{4}{3} \rho^3 \pi.$$

Bei den jedenfalls sehr kleinen Werten von  $\rho$  können wir, wenn das Gas nicht eine sehr große Dichtigkeit hat, den von den Wirkungssphären ausgefüllten Raum vernachlässigen, und erhalten dann

$$p V = \frac{1}{3} N m u^2.$$

1) *Krönig*, Poggend. Ann. 99. 1856. Genauer abgeleitet zuerst von *Clausius*, Poggend. Ann. 100. 1857.

Da für eine gegebene Gasmasse die Zahl der Moleküle konstant ist,  $n$  die Masse  $m$  jedes Moleküls und, wie wir schon hier hervorheben, für eine konstante Temperatur, auch die Geschwindigkeit  $u$ , so ist letzte Gleichung der Ausdruck des Mariotteschen Gesetzes, daß das Produkt aus dem Drucke und dem Volumen bei einer gegebenen Gasmenge gegebener Temperatur konstant ist.

Die Entwicklung läßt aber zugleich erkennen, daß das Gesetz nur näher richtig sein kann, und daß die Gase um so mehr davon abweichen müssen, je kleiner der von dem Gase eingenommene Raum ist, umso mehr dann, wenn der von den Wirkungssphären eingenommene Raum verschwindend klein ist. Setzen wir in die Gleichung den richtigen für  $V$  ein, so wird:

$$p(V - N \frac{4}{3} \rho^3 \pi) = \frac{1}{3} N m u^2.$$

Da für eine gegebene Gasmasse der von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllte Raum eine konstante Größe ist, so können wir, wenn wir denselben mit  $b$  bezeichnen und die Konstante der rechten Seite mit  $R$ , die Gleichung auch schreiben

$$p(V - b) = R; \quad pV = R + pb.$$

Wir erkennen demnach<sup>1)</sup>, daß die dynamische Gastheorie anstatt zu Mariotteschen Gesetze, zu dem Satze gelangt, daß das Produkt aus Drucke und Volumen eines Gases nicht konstant ist, sondern daß es mit wachsendem Drucke wachsen muß und zwar um so mehr, je größer der Druck  $p$  ist, unter welchem das Gas steht. Weiter aber erkennt man, daß diese Beziehung mit ungeändertem Werte von  $b$  nur so lange gültig sein kann, wie die Bewegungen, die in der Theorie vorausgesetzt sind, das ist höchstens so lange möglich, als der Abstand der Schwerpunkte zweier Moleküle nicht kleiner als der doppelte Radius der Wirkungssphäre ist, denn nur dann könnte noch ein Molekül zwischen zwei andern hindurchgehen; es wird demnach in der Gleichung ein kleinerer Wert von  $b$  einsetzen sein, sobald der ganze von dem Gase angefüllte Raum nicht mehr ist als der doppelte Raum, den die Wirkungssphären der Gasmoleküle<sup>2)</sup> einnehmen.

Von den von Regnault untersuchten Gasen entspricht indes nur Wasserstoff dieser Beziehung, denn nur bei diesem wächst das Produkt  $pV$  mit wachsendem Drucke, bei allen übrigen Gasen dagegen nimmt mit wachsendem Drucke zunächst das Produkt  $pV$  ab, um dann, erst wenn der Druck auf 60–70 Atmosphären gewachsen ist, wieder zuzunehmen, was übereinstimmend aus den Versuchen von Caillatet und Amagat folgt.

Wir müssen daraus schließen, daß unsere Theorie noch nicht ganz den wirklichen Verhältnissen entspricht; in der Tat haben wir bei Entwicklung derselben eine Voraussetzung gemacht, die nicht streng richtig

<sup>1)</sup> Dieser Ausdruck ist zuerst von van der Waals in der schon erwähnten Abhandlung Over de continuïteit van den Gas- en Vloeistoftoestand, Leiden 1873 abgeleitet.

<sup>2)</sup> Man sehe van der Waals in der eben zitierten Abhandlung bzw. in der Übersetzung derselben von Roth, Leipzig 1881 bei Barth, p. 55 u. p. 81.

sein kann<sup>1)</sup>, die Voraussetzung nämlich, daß die zwischen den Molekülen tätigen Kräfte nur im Augenblicke des Stoßes wirksam seien, und daß die Dauer dieser Wirkungen so klein sei, daß der Einfluß, den sie auf die Geschwindigkeit der Bewegung haben, vernachlässigt werden dürfe. Ist das nicht der Fall, wird die Geschwindigkeit durch den Stoß für eine gegen die Zeit der freien Bewegung erhebliche Zeit geändert, so muß die Geschwindigkeit  $u$ , die wir als mittlere der Moleküle für ein gegebenes Gas und gegebene Temperatur bezeichneten, einigermaßen von der Zahl der Stöße abhängen, somit, da die Stoßzahl von dem Volumen der gegebenen Gasmenge abhängt, mit dem Volumen des Gases sich etwas ändern.

Anstatt die Änderung der Geschwindigkeit zu berechnen, kann man, wie van der Waals<sup>2)</sup> gezeigt hat, den Einfluß der Molekularkräfte durch eine etwas andere Betrachtung in Rechnung ziehen. Wir erhielten für den Druck des Gases für die Flächeneinheit der Wandfläche

$$p = \frac{R}{(V - b)}.$$

Sind zwischen den Gasmolekülen anziehende Kräfte tätig, so muß dadurch die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle gegen die Wand fliegen und damit der Druck  $p$  kleiner werden. Der Effekt ist also derselbe, wie wenn die gegen die Wand fliegenden Moleküle eine gegen das Innere des Gases wirkende Anziehung erhalten, durch welche der Druck  $p$  nicht gleich dem berechneten, sondern kleiner, also

$$p = \frac{R}{(V - b)} - \alpha$$

sein muß. Jedes auf die Wand drückende Molekül erfährt diese Druckverminderung, dieselbe muß also zunächst proportional sein der in einem gegebenen Momente in der Wandschicht vorhandenen Moleküle. Diese ist aber der Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle, also der Dichtigkeit des Gases proportional. Außerdem muß die auf jedes einzelne Molekül wirkende, gegen das Innere des Gases gerichtete Anziehung, wie wir das bei allen ähnlichen Wirkungen finden, der Anzahl der auf das in der Grenzschicht befindliche wirkenden Moleküle proportional sein.

Denken wir uns um ein solches Molekül mit dem größten Abstände, bis auf welchen die Moleküle anziehend auf dasselbe wirken, eine Kugel gelegt, so wird jedes innerhalb der in das Gas fallenden Halbkugel liegende Molekül auf das betrachtete anziehend wirken. Die Zahl der in dieser Halbkugel liegenden Moleküle ist wieder der Dichtigkeit des Gases proportional, so daß also die Größe  $\alpha$  dem Quadrate der Dichtigkeit proportional ist. Da nun bei einer gegebenen Gasmenge die Dichtigkeit dem Volumen umgekehrt proportional ist, können wir schreiben

$$\alpha = \frac{a}{V^2}$$

und

$$p = \frac{R}{V - b} - \frac{a}{V^2},$$

1) Clausius, Poggend. Ann. 100. p. 353. 1857; Wiedem. Ann. 9. p. 337. 1862.

2) van der Waals, a. a. O. p. 54.

der auch

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R.$$

In der Form

$$pV = R - \frac{a}{V} + pb + \frac{ab}{V^2}$$

kennt man, daß der Gang der Werte  $pV$  wesentlich von dem Verhältnisse  $a$  und  $b$  abhängig ist, daß, wenn der Wert von  $a$  hinreichend groß ist, der Wert von  $pV$  mit abnehmendem Volumen zuerst bis zu einem Maximum abnehmen kann und dann erst bei wachsendem Volumen zunimmt.

So lange das Volumen nicht zu klein ist, können wir in dem Gliede  $b$  den Druck  $p$  nach dem Mariotteschen Gesetze durch

$$p = \frac{R}{V}$$

setzen und dann

$$pV = R - \frac{a}{V} + \frac{bR}{V} + \frac{ab}{V^2}$$

schreiben. In dieser Form erkennt man, daß die aus der Theorie sich ergebende Gleichung mit der empirischen Gleichung zusammenfällt, welche Regnault zur Darstellung seiner Beobachtungen gewählt hat. Dieselbe war (§ 100 Ia)

$$pV = 1 - A\left(\frac{1}{V} - 1\right) + B\left(\frac{1}{V} - 1\right)^2$$

$$pV = 1 + A + B - \frac{A + 2B}{V} + \frac{B}{V^2},$$

daß

$$R = 1 + A + B, \quad a = bR = A + 2B, \quad ab = B.$$

Die Regnaultschen Beobachtungen zeigen somit, daß bis zu einem Drucke von 20<sup>m</sup> Quecksilber das Verhalten der Gase ganz der entwickelten Theorie entspricht.

An den Messungen von Cailletet und Amagat läßt sich dann prüfen, ob auch bei größern Drucken die Volumabnahme der Theorie entspricht. Ich habe zu diesem Zwecke die Versuche Amagats mit Stickstoff gewählt. Amagat gibt die Produkte  $pV$  in Metern Quecksilber und in willkürlichen Volumeinheiten seines Apparates an. Um die Produkte in denselben Einheiten, wie sie Regnault zur Darstellung seiner Versuche zugrunde legt, bei denen das Volumen des Gases bei dem Drucke von 1<sup>m</sup> Quecksilber gleich 1 gesetzt wird, auszudrücken, habe ich zunächst nach den Regnaultschen Angaben (§ 99) das Volumen  $V$  für den kleinsten von Amagat angewandten Druck 20,740<sup>m</sup> berechnet. Dasselbe ergibt sich zu 0,0477. Dann wurde aus den von Amagat gegebenen Werten  $pV$  und  $p$  das von demselben beobachtete Volumen berechnet. Das Volumen bei 20,740<sup>m</sup> =  $p$  ergab sich so zu 2458 in den Amagatschen Einheiten. Durch Multiplikation mit  $\frac{0,0477}{2458}$  wurden dann sämtliche Volumina auf die Regnaultsche Einheit reduziert. Es wurden dann aus den Regnaultschen Konstanten  $A$  und  $B$

$$A = 0,0006901$$

$$B = 0,00000704$$



die Konstanten  $a$  und  $b$  der Gleichung bestimmt. Dieselben ergaben sich

$$a = 0,003\,03 \quad b = 0,002\,325.$$

Schließlich wurden aus den Amagatschen Beobachtungen nach der Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R$$

die Konstanten  $R$  berechnet, da dieselben, wenn die Beobachtungen mit der Theorie stimmen, einen konstanten Wert von  $R$  liefern müssen. Folgende Tabelle enthält einige Werte zur Vergleichung von Theorie und Beobachtung:

$p$	$\frac{a}{V^2}$	$V$	$V - b$	$R$
20,740	1,331	0,047 7	0,045 37	1,0012
47,176	6,936	0,020 9	0,018 57	1,0049
69,140	14,794	0,014 3	0,011 97	1,0049
96,441	28,105	0,010 38	0,008 06	1,0032
128,296	47,400	0,007 995	0,005 67	0,9963
158,563	68,745	0,006 64	0,004 315	0,9811
221,103	117,760	0,005 07	0,002 570	0,9319

Die bis zu einem Drucke von  $128^m$  berechneten Werte entsprechen der Theorie, so genau es sich erwarten läßt, wenn man erwägt, daß die Konstanten  $a$  und  $b$  aus den Beobachtungen Regnaults abgeleitet sind, die nur bis zu einem Drucke von etwas über  $20^m$  gehen. Eine Ableitung der Konstanten der theoretischen Gleichung aus Regnaults und Amagats Beobachtungen würde ohne Zweifel Werte geben, welche eine noch bessere Übereinstimmung zwischen der Beobachtung und der Theorie liefern würden. Die beiden letzten Beobachtungen geben schon zu kleine Werte von  $R$ , so daß wir schließen müssen, daß schon wenn  $V$  zwischen zwei und drei  $b$  liegt, die Bewegungen der Moleküle unsern Voraussetzungen nicht mehr entsprechen.

Wir werden auf die Vergleichung von Theorie und Beobachtung in der Wärmelehre bei Gelegenheit der Besprechung der Ausdehnung der Gase durch Erwärmung nochmals zurückkommen und dann auch den Einfluß der Temperatur auf die von der Theorie gelieferten Konstanten kennenlernen. Überhaupt können wir erst in der Wärmelehre die kinetische Gastheorie vervollständigen.

Für die drei andern von Regnault ausführlicher untersuchten Gase ergeben sich aus den § 99 angeführten Konstanten folgende Werte von  $a$  und  $b$ :

Luft . . . . .	$a = 0,005\,01$	$b = 0,003\,87$
Wasserstoff . .	$a = 0,002\,65$	$b = 0,003\,17$
Kohlensäure . .	$a = 0,009\,33$	$b = 0,000\,78$

Schließlich wollen wir noch hervorheben, daß durch die Bestimmung des Wertes  $b$  sich auch in Zahlen das Verhältnis zwischen der mittleren Wegelänge und dem Radius der Wirkungssphäre der Moleküle angeben läßt. Für die mittlere Wegelänge hatten wir

$$l = \frac{V - N \frac{4}{3} \pi r^3}{N \frac{4}{3} \pi r^3} \cdot r = \frac{V - b}{b} \cdot r.$$

Bei der Berechnung der Konstanten der Regnaultschen Gleichungen damit auch der aus denselben abgeleiteten Werte von  $a$  und  $b$  ist Volumen des Gases unter dem Drucke 1<sup>m</sup> Quecksilber als 1 gesetzt. Werte  $b$  geben also etwa in Litern den Raum an, den die Wirkungssphären der Moleküle ausfüllen, welche sich unter dem Drucke von 1<sup>m</sup> Quecksilber in einem Liter befinden. Für diese erhalten wir dann den Koeffizienten von  $q$ , indem wir  $V = 1$  setzen, also

$$l = \left( \frac{1}{b} - 1 \right) q$$

Darnach werden für

$$\begin{array}{ll} \text{Stickstoff } l = 429q & \text{Wasserstoff } l = 314q \\ \text{Luft } \dots l = 259q & \text{Kohlensäure } l = 1281q. \end{array}$$

Es bedarf demnach nur noch der Bestimmung der absoluten Werte  $l$ , um auch die Größe der Wirkungssphäre der Moleküle zu berechnen. Sutherland<sup>1)</sup> hat darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn wir in Zustandsgleichung der Gase zu dem Resultate gelangen, es sei eine Anziehung der Moleküle der Gase vorhanden, durch diese Anziehung auch die Stoßzahl der Moleküle und damit die mittlere Wegelänge eine etwas andere sein muß, als wir sie im vorigen Paragraphen berechneten. Für die mittlere Wegelänge fanden wir

$$l = \left( \frac{1}{\frac{1}{2} q^2 \pi} - 1 \right) q$$

wenn wir in der Klammer 1 gegen das erste Glied vernachlässigen

$$l = \frac{1}{\frac{1}{2} q^2 \pi}.$$

ist für die Stoßzahl

$$Z = \frac{n}{l} = n \frac{1}{2} q^2 \pi.$$

Wie sich durch die Anziehung die Stoßzahl ändert, ergibt sich nach Meyer<sup>2)</sup> durch folgende einfache Erwägungen. Fliegt ein Molekül nahe einem andern, so daß es ohne diese Anziehung vorüberfliegen würde, so wird infolge dieser Anziehung das Molekül aus seiner Bahn zum anziehenden Molekül hin abgelenkt. Die Ablenkung muß um so größer sein, je stärker die Anziehung der Moleküle im Verhältnis zur lebendigen Kraft des fliegenden Moleküls ist, da das Beharrungsvermögen des fliegenden Moleküls in seiner Bahn der lebendigen Kraft desselben proportional ist. Ist die Ablenkung aus der Bahn groß genug, so kann das fliegende Molekül zum Stoße kommen. Die Zahl der Stöße muß also größer werden. Ist  $\epsilon$  der Anziehung der Moleküle proportional und  $\alpha$  eine Proportionalitätskonstante, so können wir die veränderte Stoßzahl  $Z_1$  setzen

$$Z_1 = Z \left( 1 + \alpha \frac{\epsilon}{\frac{1}{2} m u^2} \right) = n \frac{1}{2} q^2 \pi \left( 1 + \alpha \frac{\epsilon}{\frac{1}{2} m u^2} \right)$$

<sup>1)</sup> Sutherland, Phil. Mag. 36. 5. p. 507. 1893.

<sup>2)</sup> 1) F. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. 2. Aufl. Breslau 1899.

werden wir nachweisen, daß bei steigender Temperatur die Dichtigkeit der Gase, und zwar für alle sehr nahe gleichmäßig, abnimmt, so daß wir bei einer nach der Zentesimalskala genommenen Temperatur  $t$  das Gewicht von 1 cm<sup>3</sup> Gas schreiben können

$$\frac{0,001\,293 \cdot \delta}{1 + 0,003\,67 t}$$

Deshalb wird bei der Temperatur  $t$  die Geschwindigkeit

$$u = 48\,496,4 \sqrt{\frac{1 + 0,003\,67 t}{\delta}} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

man für Luft  $\delta = 1$  zu setzen ist.

Für einige Gase werden hiernach die Werte von  $u$  für die Temperatur  $t = 0$  des schmelzenden Eises abgerundet in Meter ausgedrückt:

Sauerstoff . . .	$\delta = 1,105\,66$	$u = 461^m$
Stickstoff . . .	$\delta = 0,971\,3$	$u = 492^m$
Wasserstoff . .	$\delta = 0,069\,2$	$u = 1844^m$
Kohlensäure . .	$\delta = 1,529\,0$	$u = 392^m$

Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die so berechneten Werte von  $u$  nicht die arithmetischen Mittel der Geschwindigkeit der Moleküle sind: es sind vielmehr jene Werte der Geschwindigkeit, welche alle Moleküle haben müßten, damit der Druck dem wirklichen gleich ist;  $u$  bedeutet also die Quadratwurzel aus dem mittlern Quadrate der Geschwindigkeit, welches letzteres nicht mit dem Quadrate der mittlern Geschwindigkeit zusammenfällt. Um die mittlere Geschwindigkeit zu bestimmen, bedarf es erst einer Untersuchung, wie die verschiedenen Geschwindigkeiten auf die Moleküle verteilt sind, eine Untersuchung, welche Maxwell<sup>1)</sup> durchgeführt hat, auf welche hier einzugehen hier zu weit führen würde. Wir begnügen uns mit Angabe des Resultates, daß hiernach die mittlere Geschwindigkeit etwas kleiner ist als der Clausiussche Wert, und zwar daß

$$u_1 = u \sqrt{\frac{8}{3\pi}}$$

Bei den Molekülen kommen alle Geschwindigkeiten vor von sehr kleinen bis zu sehr großen; etwa 1,5 Prozent der Moleküle hat eine Geschwindigkeit, die weniger als ein Viertel der mittlern, etwa 0,5 Prozent eine solche, die mehr als das Doppelte der mittlern beträgt.

## § 105.

**Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe. Barometrische Höhenmessungen.** Nachdem wir in den letzten Paragraphen die Bedeutung des Mariotteschen Gesetzes für unsere Kenntnis der Natur des Gaszustandes kennen gelernt haben, gehen wir zunächst dazu über, das Mariottesche Gesetz zur Ableitung einiger aus demselben sich ergebenden Erscheinungen

<sup>1)</sup> Maxwell, Phil. Mag. 29. 4. 1860 und 35. 1. 1868; Boltzmann, Wiener Berichte 54. 1868; 63, 1871; 66, 1872; 72, 1875. Man sehe auch O. E. Meyer, Physikalische Gastheorie 2. Aufl. Breslau 1894. 99. p. 46 und math. Zusätze p. 17

zu benutzen. Wir beginnen mit Ableitung des Gesetzes, nach welchem der Luftdruck abnehmen muß, wenn wir uns in der Atmosphäre emporheben. Eben weil die Dichtigkeit der Gase mit dem Druck sich ändert, muß das Gesetz der Druckabnahme bei vertikaler Erhebung in der Atmosphäre ein anderes sein, als wenn wir uns in einer tropfbaren Flüssigkeit emporheben.

Um das Gesetz abzuleiten, nehmen wir an, die Luft habe überall dieselbe Temperatur und sei im Gleichgewicht. Sei der Barometerstand in der Höhe  $h$  über dem Meeresniveau gleich  $b$ . Ist  $g$  die Beschleunigung beim freien Fall in der Höhe  $h$ , und  $\sigma$  die Dichtigkeit, d. i. das Gewicht der Volumeinheit Quecksilber, so ist der durch den Barometerstand  $b$  angegebene bzw. durch die Quecksilbersäule von der Höhe  $b$  ausgeübte Druck

$$p = g\sigma b.$$

Die Größe  $g$  hängt, wie wir wissen, von der Höhe  $h$  über dem Meeresniveau und von der geographischen Breite  $\varphi$  ab. Ist  $g_0$  der Wert von  $g$  am Meeresniveau unter derselben geographischen Breite, so ist nach § 40

$$g = g_0 \left( 1 - \left( 2 - \frac{3\delta'}{2\delta} \right) \frac{h}{R} \right) = g_0 \left( 1 - a \frac{h}{R} \right).$$

wenn wir annehmen, wir befinden uns auf einer Hochebene, und auch ein Berg kann als solche angesehen werden, und  $\delta'$  ist die Dichtigkeit der Schichten der Hochebene,  $\delta$  die mittlere Dichtigkeit der Erde. Für  $g_0$  in seiner Abhängigkeit von der Breite fanden wir § 41

$$g_0 = 978 + 5,19 \sin^2 \varphi$$

in Zentimetern ausgedrückt. Drücken wir  $g_0$  durch den Wert von  $g_{45}$  aus, welcher der geographischen Breite von  $45^\circ$  entspricht, so erhalten wir leicht

$$g_0 = g_{45} (1 - 0,00264 \cos 2\varphi).$$

Demnach wird der Druck

$$p = g_{45} (1 - 0,00264 \cos 2\varphi) \left( 1 - a \frac{h}{R} \right) \sigma \cdot b.$$

Ist die Dichtigkeit der Luft an derselben Stelle  $s$ , so ist der Druck, den eine Luftschicht von der unendlich kleinen Höhe  $dh$  an jener Stelle ausübt, gleich

$$gsdh,$$

worin für  $g$  derselbe Wert einzusetzen ist. Die Dichtigkeit  $s$  der Luft erhalten wir nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze. Ist  $s_0$  die Dichtigkeit der Luft unter dem Drucke  $p_0$ , so ist

$$s : s_0 = p : p_0; \quad s = \frac{s_0}{p_0} \cdot p.$$

Setzen wir als Druck  $p_0$  den Druck des normalen Barometerstandes  $b_0 = 76^{\text{cm}}$  am Meeresniveau und unter  $45^\circ$  Breite, so ist

$$p_0 = \sigma g_{45} b_0$$

und

$$s = \frac{s_0}{b_0} (1 - 0,00264 \cos 2\varphi) \left( 1 - a \frac{h}{R} \right) b,$$

kommt, wenn wir den  $\cos q$  enthaltenden Klammerausdruck mit  $A$  bezeichnen, ist der Druck der Schicht von der Höhe  $dh$

$$g \cdot dh = g_{45} \frac{s_0}{b_0} A^2 \left(1 - a \frac{h}{R}\right)^2 b dh = dp \dots \dots \dots (a)$$

Steigen wir um die Höhe  $dh$  empor, so muß der Druck um diese Größe abnehmen, der Barometerstand wird  $b + db$ , und der Druck dieser Quecksilbersäule in der Höhe  $h + dh$  wird

$$p + dp = g_{45} \sigma \cdot (b + db) A \left(1 - a \frac{h + dh}{R}\right)$$

oder

$$dp = g_{45} \sigma db A \left(1 - a \frac{h}{R}\right) + g_{45} \sigma b A a \frac{dh}{R} - g_{45} \sigma db A \frac{dh}{R}.$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist gegen die beiden andern wegen des Produktes  $db dh$  unendlich klein und kann deshalb fortgelassen werden. Wir erhalten demnach die Abnahme  $db$  des Barometerstandes aus der Gleichung

$$g_{45} \sigma db A \left(1 - a \frac{h}{R}\right) = dp - g_{45} \sigma b A a \frac{dh}{R}.$$

Setzen wir den vorhin (Gleichung a) für die Abnahme des Druckes gefundenen Wert ein, so wird

$$- g_{45} \sigma db A \left(1 - a \frac{h}{R}\right) = g_{45} \frac{s_0}{b_0} A^2 \left(1 - a \frac{h}{R}\right)^2 b dh - g_{45} \sigma b A a \frac{dh}{R}.$$

Wenn wir auf der linken Seite das negative Vorzeichen setzen, um ausdrücken, daß  $db$  eine Abnahme des Barometerstandes ist, wenn wir aufsteigen, also  $dh$  eine positive Größe ist. Darnach wird

$$db = \frac{s_0}{b_0 \sigma} \cdot b \cdot A \left(1 - a \frac{h}{R}\right) dh \cdot \frac{1}{1 - a \frac{h}{R}} - \frac{1}{R} dh$$

oder

$$\frac{db}{b} = \left[ \frac{s_0}{b_0 \sigma} A \left(1 - a \frac{h}{R}\right) - \frac{a}{1 - a \frac{h}{R}} \cdot \frac{1}{R} \right] dh,$$

was wir auch schreiben können

$$= \left[ 1 - \frac{b_0 \sigma}{s_0} A \left(1 - a \frac{h}{R}\right)^2 - \frac{1}{R} \right] \frac{s_0}{b_0 \sigma} A \left(1 - a \frac{h}{R}\right) dh$$

$$= F \cdot \frac{s_0}{b_0 \sigma} A \left(1 - a \frac{h}{R}\right) dh,$$

wo wir den ersten Faktor, den wir als konstant ansehen können, das zweite Glied in der Klammer sich außerordentlich wenig mit  $h$  und  $\frac{1}{R}$  ändert, mit  $F$  bezeichnen, so daß

$$F = 1 - \frac{b_0 \sigma}{s_0} A$$

Die Gleichung für  $db$  gibt schon das Gesetz an, nach welchem der Druck mit steigender Höhe abnimmt, denn sie zeigt, daß jedesmal,

wenn  $dh$  denselben Wert hat,  $db$  immer nahezu derselbe Bruchteil von  $b$  ist, das heißt also, der Luftdruck bzw. die ihn messende Barometerhöhe nimmt sehr nahe in einer geometrischen Reihe ab, wenn die Höhen in arithmetischer Reihe wachsen. Bis zu Höhen, bis zu denen die Änderung der Schwerkraft außer acht gelassen werden kann, würde das Gesetz genau gelten.

Das ergibt sich noch deutlicher, wenn wir aus dieser Gleichung für  $db$  den Barometerstand in einer Höhe  $H$  berechnen; sei derselbe  $b_n$ , so erhalten wir denselben, wenn wir die Summen bilden

$$-\int_b^{b_n} \frac{db}{b} = \int_h^H F \frac{s_0}{b_0 \sigma} A dh - \int_h^H F \frac{s_0}{b_0 \sigma} \frac{Aa}{R} h dh.$$

Diese Summen sind nach E VIII, E 2 und E 1

$$- \{ \log b_n - \log b \} = F \frac{s_0}{b_0 \sigma} A (H - h) - F \frac{s_0}{b_0 \sigma} \cdot \frac{Aa}{2R} (H^2 - h^2)$$

oder

$$\log b - \log b_n = F \frac{s_0}{b_0 \sigma} A \left( 1 - a \frac{H+h}{2R} \right) (H - h),$$

worin die Logarithmen natürliche sind. Wollen wir Briggische Logarithmen nehmen, so müssen wir die rechte Seite mit dem zur Verwandlung von natürlichen in Briggische erforderlichen Faktor  $M$  gleich dem Briggischen Logarithmus von der Zahl  $e$  multiplizieren.

Die Gleichung zeigt, daß, wenn wir von der Änderung der Schwere absehen, jedesmal, wenn wir in der Atmosphäre um dieselbe Höhe  $H - h$  emporsteigen, die Differenz der Logarithmen der Barometerstände an der untern und obern Grenze denselben Wert hat, oder daß der Quotient aus den Barometerständen denselben Wert hat.

Dieses Gesetz gestattet unmittelbar aus den an einer untern und obern Station beobachteten Barometerständen die Höhendifferenz  $H - h$  der beiden Orte zu bestimmen. Lösen wir die Gleichung nach  $H - h$  auf und setzen  $H - h = D$ ,  $H + h = 2h + D$ , so wird

$$D = \frac{b_0 \sigma}{M s_0} \frac{1}{F} \frac{1}{A} \frac{1}{1 - a \frac{2h + D}{R}} (\log b - \log b_n),$$

worin nur noch die Koeffizienten auszuwerten sind.

Für  $b_0$  haben wir den normalen Barometerstand 76<sup>cm</sup> einzusetzen,  $\sigma$  ist die Dichtigkeit des Quecksilbers 13,595 93 bei 0°, die Zahl  $M$  ist gleich 0,434 29. Für  $s_0$  ist die Dichtigkeit der Luft bei normalem Barometerstande unter der geographischen Breite 45° einzusetzen. Ist die Temperatur der Luftschicht  $H - h$  gleich der Temperatur 0° des schmelzenden Eises, so ist  $s_0$  die Dichte der Luft bei dieser Temperatur; ist die Temperatur der Luftschicht  $t^0$ , so ist die Dichte  $s_0$  für die Temperatur  $t^0$  zu nehmen. Diese ist, wie wir in der Wärmelehre zeigen werden,

$$s_0 = \frac{0,001\,292\,73}{1 + 0,003\,67 t^0}$$

Mit diesen Zahlen wird

$$\frac{b_0 s}{M s_0} = 1\,840\,520 (1 + 0,003\,67\,t) \text{ cm.}$$

Für die Temperatur  $t$  müßte man die mittlere Temperatur der Luftschicht  $D$  einsetzen. Da man indes nicht angeben kann, wie die Temperatur in der Luftschicht verteilt ist, so begnügt man sich in Ermangelung eines bessern die mittlere der an beiden Stationen beobachteten Temperaturen  $(t + t_n)$  einzusetzen.

Der für  $s_0$  angegebene Wert setzt weiter voraus, daß die Luft ganz trocken ist, und in der ganzen Höhe von  $h$  bis  $H$  dieselbe Temperatur  $t$  habe. Beides ist nicht der Fall. Feuchte Luft ist leichter als trockene, und da die Feuchtigkeit in der Luft mit steigender Temperatur zunimmt, so ist die Dichtigkeit der Luft mit steigender Temperatur etwas kleiner, als es nur durch die Ausdehnung würde. Da die Temperatur der Luft bei Höhenmessungen in der Regel höher ist als  $0^\circ$ , so genügt es, zur Berücksichtigung des Einflusses der Luftfeuchtigkeit den Koeffizienten 0,003 67 durch den Wert 0,004 zu ersetzen.

Um den in unserer Formel vorkommenden Wert

$$a = 2 - \frac{3\delta'}{2\delta}$$

bestimmen, machen wir die im allgemeinen zutreffende Annahme, daß  $\delta = 0,5\delta'$ ; damit wird  $a = 1,25$ . Dann wird, da  $R = 636\,942\,000^{\text{cm}}$  ist,

$$\frac{1}{F} = 1 + \frac{b_0 s}{s_0} \frac{a}{R} = 1,001\,5685$$

$$\frac{1}{A} = 1 + 0,002\,64 \cdot \cos 2\varphi$$

$$\frac{1}{1 - a \frac{2h + D}{R}} = 1 + 1,25 \frac{2h + D}{R}.$$

Setzen wir das alles ein, und berücksichtigen, daß auch die Barometerstände auf  $0^\circ$  zu reduzieren sind, so wird in Zentimetern

$$D = 1,843\,410 \cdot 1,001\,5686 \times$$

$$\left(1 + 0,004\,00 \frac{t + t_n}{2}\right) (1 + 0,002\,64 \cos 2\varphi) \left(1 + 1,25 \frac{2h + D}{R}\right) \times$$

$$\left| \log \frac{b}{1 + 0,000\,18\,t} - \log \frac{b_n}{1 + 0,000\,18\,t_n} \right|,$$

so wie wir mit  $t$  und  $t_n$  die Temperatur des Quecksilbers an beiden Orten bezeichnen. Zur Berechnung von  $D$  vernachlässigt man zunächst den letzten Faktor, und erhält so einen sehr nahe richtigen Wert, mit welchem man den fünften Faktor ausrechnet und zur schließlichen Auswertung von  $D$  benutzt.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Ausführlichere Behandlung der Gleichung für barometrische Höhenmessungen gibt *La Place*, *Mécanique céleste*. Livre X. chap. 4; *Poisson*, *Traité de mécanique*. Tome II. Livre IV. chap. 5; *Rühlmann*, *Die barometrischen Höhenmessungen*. Physik. I. 6. Aufl.



Hierbei liegt nun noch die Voraussetzung zugrunde, daß die Atmosphäre im Gleichgewicht sei, was nach den Bemerkungen des § 98 nicht der Fall ist. Um die dort erwähnten Variationen des Luftdruckes zu beachten, muß man entweder den mittlern Barometerstand an beiden Stationen anwenden, oder wenn das, wie es meist der Fall ist, an der obern Station auf der Spitze eines Berges nicht möglich ist, muß man eine Zeit wählen, in welcher die Atmosphäre möglichst ruhig ist, damit sie möglichst nahe im Zustande des Gleichgewichtes ist, den unsere Rechnung voraussetzt. Man muß dann ferner gleichzeitige Beobachtungen an beiden Stationen anstellen lassen. Da die Änderungen des Luftdruckes meist nicht so lokal sind, daß derselbe in nahe liegenden Orten sehr verschieden ist, so kann man dann ziemlich sicher sein, korrespondierende Barometerstände zu erhalten. Unsere Formel ergibt dann die Höhe der zweiten Station mit dem Barometerstande  $b_0$  über der ersten bis auf einige Meter genau.

Kennt man die Höhe eines Ortes über der Meeresfläche und zugleich den Barometerstand  $b$  an demselben, so kann man mit Hilfe dieser Formel den Barometerstand  $b_0$  erhalten, welcher in dem Niveau des Meeres unter der Breite und Länge des Ortes vorhanden sein würde. Auf diese Weise werden die an den verschiedenen Orten beobachteten mittlern Barometerstände auf das Niveau des Meeres reduziert.

### § 106.

**Anwendung des Mariotteschen Gesetzes auf Manometer.** Die Druckmesser, welche wir bisher kennen gelernt haben, beruhen auf dem hydrostatischen Grundgesetze, daß in kommunizierenden Röhren nur im Gleichgewicht ist, wenn der Druck auf die Trennungsfäche der beiden Flüssigkeiten von beiden Seiten gleich groß ist. Bei diesen wird also der Druck des Gases, die Expansivkraft desselben, durch eine Flüssigkeitssäule gemessen, welche in der einen der beiden kommunizierenden Röhren über dem Niveau der Flüssigkeit in der andern erhoben ist. Bei hohen Drucken müssen diese aber immer eine bedeutende Länge haben, wie z. B. die von Arago und Dulong oder Regnault eine Länge von 36<sup>m</sup> besaßen. Man hat deshalb auf das Mariottesche Gesetz eine andere Art von Manometern gegründet, welche den Druck eines Gases durch die Kompression eines abgeschlossenen Luftvolumen bestimmen. Da die Luft fast genau dem Mariotteschen Gesetze folgt, so erhalten wir mit Zugrundelegung des Gesetzes nur wenig von der Wahrheit abweichende Resultate.

Die gewöhnlichste Form der Manometer ist die folgende. Eine abgeschlossene mit trockener Luft gefüllte Glasröhre (Fig 184) taucht in ein Gefäß, welches zum Teil mit Quecksilber gefüllt ist. Das Gefäß steht in einem festen Zylinder von Eisen, durch dessen Deckel die geschlossene Röhre luftdicht hindurchgeführt ist. Die Röhre ist in dem Deckel fest

messungen Leipzig 1870. Man sehe auch *Bayer*, Poggend Ann 96 : 17. 1866; *Pernter*, Carls Repertorium. 24 p 161 1888. Wegen genauer Berücksichtigung der Feuchtigkeit der Luft *Hann*, Zeitschrift der österr Gesellschaft für Meteorologie 9 p 192; 10 p. 228.

ittet und der Deckel luftdicht und fest auf den Zylinder auf-  
bt. Durch eine mit einem Hahn verschließbare Röhre kann das  
mit dem Raume in Verbindung gesetzt werden, in welchem das  
ageschlossen ist, dessen Druck gemessen werden soll.

ei dem äußern Druck der Atmosphäre steht das  
ilber in der Röhre und dem Gefäße gleich hoch;  
urch den Hahn das zusammengedrückte Gas in das  
und drückt auf die äußere Quecksilberfläche, so  
das Quecksilber in die verschlossene Röhre ein und  
olumen des abgesperrten Gases gibt die Größe des  
s an.

an graduirt den Apparat auf folgende Weise.  
t der Radius der Röhre gleich  $r$  und ihre Länge  
 $h$ , so ist bei dem anfänglichen Drucke von 760<sup>mm</sup>  
olumen des abgesperrten Gases  $v$

$$v = r^2 \pi h.$$

Wenn nun der äußere Druck bis zu  $n \cdot 760^{\text{mm}}$  wächst,  
gt das Quecksilber um  $x$  in der Röhre in die Höhe  
r dann von der Luft eingenommene Raum ist

$$v' = r^2 \pi (h - x).$$

Während das Quecksilber in der Röhre um  $x$  steigt,  
es in dem Gefäße um  $y$ . Nennen wir den Radius  
enfalls als zylindrisch vorausgesetzten Gefäßes  $R$ ,  
en wir

$$\pi r^2 x = \pi R^2 y,$$

in der Röhre aufgestiegene Quecksilber vorhin in dem Gefäße den  
 $\pi R^2 y$  einnahm.

Die Spannung oder der Druck der eingeschlossenen Luft auf die Ober-  
des Quecksilbers ist gleich dem äußeren Drucke  $n \cdot 760^{\text{mm}}$ , jedoch  
dert um die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule, also

$$p' = n \cdot 760 - x - y$$

$$p' = n \cdot 760 - x \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

nd da die Volumina  $v$  und  $v'$  sich verhalten umgekehrt wie die  
s, so haben wir

$$\pi r^2 h : \pi r^2 (h - x) = n \cdot 760 - x \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right) : 760,$$

tzen wir

$$\frac{1}{760} \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right) = k,$$

$$h : h - x = n - kx : 1$$

$$\frac{h}{h - x} = n - kx.$$

Fig. 184.



Diese Gleichung nach  $x$  aufgelöst gibt

$$x = \frac{1}{2k} \left\{ n + kh \pm \sqrt{(n + kh)^2 - 4kh(n-1)} \right\},$$

wo wir zur Berechnung von  $x$  dem Wurzel Ausdruck das negative Zeichen geben müssen.

Denn für  $n = 1$  ist  $x = 0$ , unser Ausdruck gibt

$$x = \frac{1}{2k} \left\{ 1 + kh \pm \sqrt{(1 + kh)^2} \right\},$$

und machen wir den Wurzel Ausdruck negativ

$$x = 0.$$

Zur Graduierung eines solchen Manometers bedarf es also nur einer genauen Messung der Radien  $r$  und  $R$ ; daraus wird die Größe  $k$  und mit dieser dann  $x$  berechnet für  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Die so gefundenen Höhen  $x$  werden, von dem Niveau des Quecksilbers im Gefäße aus, neben der Röhre aufgetragen und mit 1, 2, 3 ... bezeichnet. Die Quecksilberstände geben dann unmittelbar die Größe des Druckes in Atmosphären an.

Ist die Röhre sehr enge, das Gefäß, in welches sie taucht, aber sehr weit, so kann man die Niveauänderung im Gefäße vernachlässigen. In unserer Formel ist dann  $R = \infty$ ,  $\frac{r^2}{R^2} = 0$ ,  $k = \frac{1}{760}$ , und wir erhalten

$$x = \frac{760}{2} \left\{ n + \frac{h}{760} - \sqrt{\left(n + \frac{h}{760}\right)^2 - 4 \frac{h}{760} (n-1)} \right\}.$$

Fig. 185.



Oft gibt man diesen Manometern eine U-förmige Gestalt (Fig. 185). Der offene Arm erhält den Druck, der gemessen werden soll, und der geschlossene Arm enthält in dem Raume  $NA$  über dem Quecksilber trockne Luft. Unter dem Drucke der Atmosphäre steht das Quecksilber in beiden Röhren gleich hoch. Steigt der Druck auf  $n \cdot 760^{\text{mm}}$ , so sinkt das Quecksilber in dem offenen Schenkel bis  $N'$  und steigt in dem geschlossenen Schenkel um ebensoviel bis  $N''$ . Um den Apparat zu graduieren, dient unsere obige Formel, indem wir  $r = R$  und somit

$$k = \frac{2}{760}$$

setzen, wodurch wir erhalten

$$x = \frac{760}{4} \left\{ n + \frac{2h}{760} - \sqrt{\left(n + \frac{2h}{760}\right)^2 - 8 \frac{h}{760} (n-1)} \right\}.$$

Es ist übrigens zu bemerken, daß bei dieser Art des Graduierens vorausgesetzt wird, daß die Röhren genau zylindrisch sind, also  $r$  denselben Wert behält. Es wird das nur selten mit aller Strenge der Fall sein und deshalb ist es im allgemeinen besser, die Röhren durch den Versuch zu graduieren. Man bringt sie dann mit einem Quecksilbermanometer in Verbindung, wie es zum Beweise des Mariotteschen Gesetzes

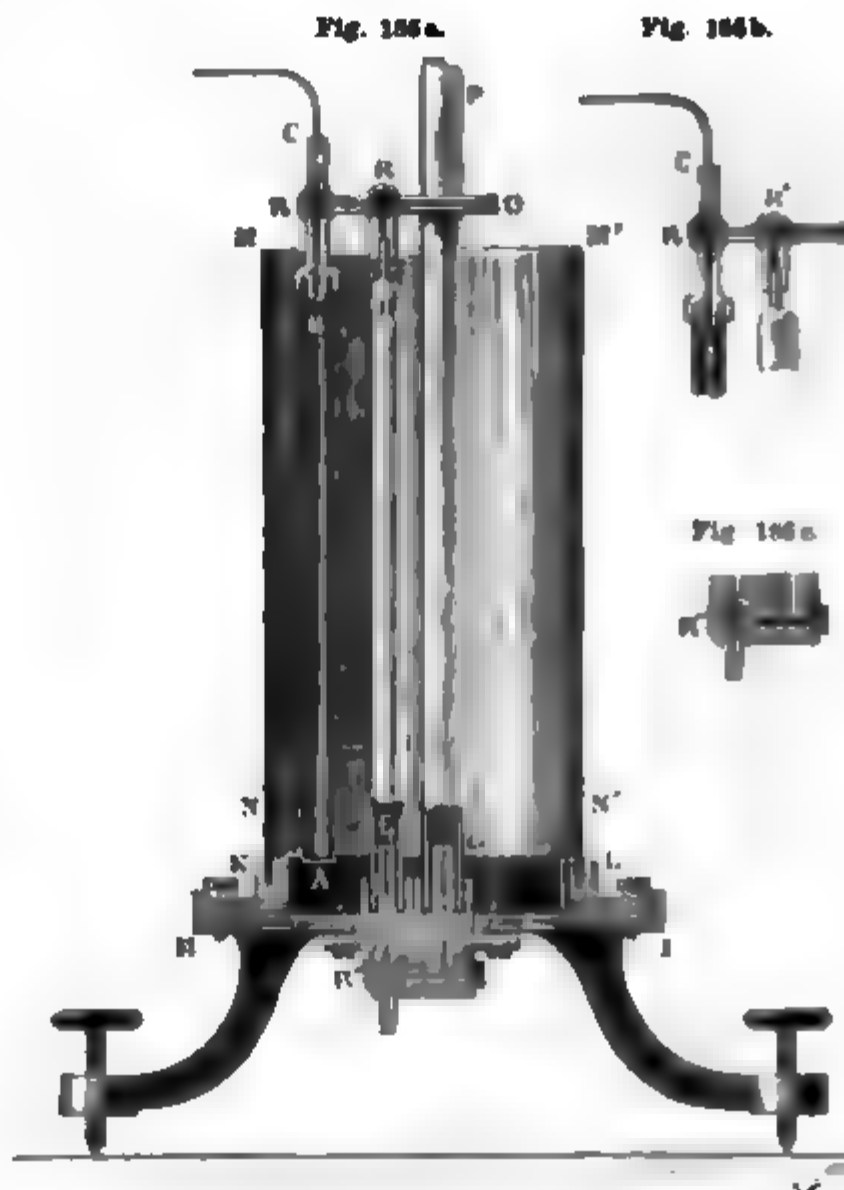
dt wurde, und vergleicht die Volumina der abgesperrten Luft mit den Drucken.

den Druck zu messen, welchen ein Gas in einem abgeschlossenen (wie einem größeren Behälter, ausübt, hat Regnault<sup>1)</sup> ein Manometer gegeben, welches bis zu Drucken von etwa 30 Atmosphären Genauigkeit der zuletzt beschriebenen Manometer mit der Genauigkeit des einfachen Quecksilbermanometer verbindet. Die Einrichtung des Manometers zeigt Fig. 186. Es besteht aus einem dickwandigen Rohr *AB*, welches durch den T-förmig durchbohrten Hahn *R* und die Leitung *C* mit dem Behälter in Verbindung gesetzt werden kann, das komprimierte Gas enthält. Neben der Röhre *AB* befindet sich ein aus zwei kommunizierenden Röhren *DE* und *FG* bestehende einfaches U-Rohr-Manometer. Diese beiden Röhren kommunizieren durch den in

der Bodenplatte des Apparates eingesetzten Glasstücke befindlichen ebenfalls T-förmig durchbohrten Hahn *R'*, bei um 90° geneigter Stellung (Fig. 186b) den innern Raum des U-Rohres *DE* mit der äußeren Luft in Verbindung setzt. Die Röhren *DE* und *FG* sind möglichst zylindrisch und beide mit Millimetertheilung

Das oben erwähnte abgezogene Rohr *C* in den vertikalen Theil des mit dem Hahn *R* kommunizierenden Rohres *AB* unmittelbar über dem U-Rohre *DE* findet sich abgewinkelt durch den Hahn *R'*, durch den Innern des Rohres *AB* entweder mit der Luft in Verbindung (Fig. 186a),

oder durch Drehung um 90° (Fig. 186b) mit dem Hahne *R* in Kommunikation gebracht werden kann. Die drei Röhren sind von einem in einer der Bodenplatte eingekitteten Glaszylinder *MM'* umgeben, welcher mit Quecksilber gefüllt wird, um den Apparat während des Gebrauches auf constanter Temperatur zu halten.



<sup>1)</sup> Regnault, Mémoires de l'Acad. 26. p. 580 1862 Poggend Ann. 243. 1871.

Zum Gebrauche des Apparates wird zunächst das Rohr  $AB$  mit dem mit Gas gefüllten Behälter in Verbindung gesetzt, durch Stellung des Hahnes  $R$  wie in Fig. 186a und dann durch Einfüllen von Quecksilber durch das Rohr  $FG$  das Rohr  $ED$  soweit mit Quecksilber gefüllt, daß es aus der Öffnung  $O$  hervortritt. Darauf wird der Hahn  $R$  in die Stellung Fig. 168b gedreht und dann der Hahn  $R'$  langsam so gestellt, daß der innere Raum von  $AB$  mit der Röhre  $DE$  in Verbindung steht (Fig. 186b). Die in  $AB$  komprimierte Luft tritt zum Teil in  $DE$  über. Man stellt gleichzeitig den untern Hahn  $R'$  so, daß sowohl aus der Röhre  $DE$  als aus  $GF$  das Quecksilber ausfließen kann, und laßt so lange unter Quecksilber ausfließen, bis in den beiden letzteren Röhren die Quecksilberniveaus eine bequem zu messende Höhendifferenz  $h$  zeigen.

Der gesuchte Druck  $x$  der in dem Behälter vorhandenen Luft ergibt sich folgendermaßen. Durch die Verbindung des Rohres  $AB$  mit dem betreffenden Behälter hat sich das Volumen  $V$  dieses Rohres mit Gas unter dem Drucke  $x$  gefüllt. Nach Herstellung der Verbindung der beiden Röhren  $AB$  und  $DE$  hat sich dann dieses Gasvolumen ausgedehnt, und zwar, wenn wir mit  $W$  das Volumen im Rohre  $DE$  bezeichnen, welches nach Herstellung der Niveaudifferenz  $h$  von dem Gase mit angefüllt ist, auf das Volumen  $V + W$ . Ist  $H$  der Barometerstand zur Zeit, als das Volumen  $V + W$  hergestellt war, so steht dieses Gas jetzt unter dem Drucke  $H + h$ . Nach dem Mariotteschen Gesetze ist deshalb

$$xV = (V + W)(H + h),$$

$$x = \frac{V + W}{V} (H + h).$$

Zur Bestimmung von  $x$  ist deshalb außer der Kenntnis von  $H$  und  $h$  noch jene der Volumina  $V$  und  $W$  erforderlich. Zur Bestimmung von  $W$  füllt man zunächst  $ED$  wieder mit Quecksilber vollständig, bis es aus  $O$  auszufließen beginnt, stellt dann den Hahn  $R'$  in die Stellung Fig. 186b und den Hahn  $R$  so, daß der Raum von  $ED$  durch die beiden Hähne  $R'$  und  $R$  und die Röhre  $C$ , welche jetzt in die freie Luft mündet, mit der äußern Luft kommuniziert. Man stellt dann den Hahn  $R'$  in die Stellung Fig. 186c und läßt aus dem Rohre  $ED$  das Quecksilber ausfließen. Das ausgeflossene Quecksilber sammelt man in eine Flasche und wägt es. Man bestimmt so direkt durch das Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers den Rauminhalt der Röhre bis zu den verschiedenen Teilstrichen, und hat dann zur Bestimmung des Volumens  $W$  jedesmal nur nötig, den Teilstrich zu beobachten, bis zu welchem das Quecksilber in der Röhre  $ED$  herabgedrückt ist.

Um schließlich  $V$  zu bestimmen, wird  $AB$  mit Luft unter dem Druck der Atmosphäre gefüllt und das Manometer gerade wie zur Bestimmung des Druckes  $x$  hergerichtet. Verfährt man nun gerade so wie zur Untersuchung des Druckes  $x$ , so wird auch jetzt Luft in  $DE$  übertreten, wenn man aus  $R'$  Quecksilber austreten laßt, es wird aber in  $GF$  das Quecksilber jetzt rascher sinken als in  $DE$ . Ist in  $DE$  ein Volumen  $W$  eingetreten, und in  $GF$  das Quecksilber um  $h'$  tiefer gesunken, so ist  $p$  wenn wieder  $H$  die Höhe des Barometers ist,



$$HV = (V + W')(H - h')$$

$$V = W' \frac{H - h'}{h'}.$$

Indem man so die Luft aus  $AB$  bis zu verschiedenen Volumen  $V + W'$  ausdehnen läßt, erhält man eine Reihe von Werten  $V$ , die sich gegenseitig kontrollieren.

Weitere Werte von  $V$  kann man erhalten, indem man zunächst das Rohr  $AB$  und das Rohr  $DE$  bis zu einem Volumen  $v'$  mit Luft füllt, und dann durch Einfüllen von Quecksilber in  $GF$  diese Luft komprimiert. Ist man sie soweit komprimiert, daß in  $DE$  noch ein Volumen  $W_1$  mit Luft gefüllt ist, und steht infolgedessen das Quecksilber in  $FG$  um  $h_1$  höher, so ist

$$(V + v')H = (V + W_1)(H + h_1)$$

$$V = \frac{v'H - W_1(H + h_1)}{h_1}.$$

Regnault gab bei seinem Manometer den Röhren  $AB$  und  $DE$  die Länge von 1<sup>m</sup> und ersterer einen Durchmesser von 5<sup>mm</sup>, letzterer von 1<sup>mm</sup>, so daß also der Querschnitt des letztern Rohres 16mal so groß war als der von  $AB$ . Wurde also  $AB$  mit Gas unter einem Drucke von 1 Atmosphäre gefüllt, so konnte man  $V + W'$  leicht so herstellen, daß es gleich 16  $V$  war, es wurde dann die Niveaudifferenz  $h$  gleich dem Manometerstande.

Man sieht leicht, wie man durch Verkleinerung von  $V$  und Vergrößerung von  $W'$  auch stärkere Drucke mit nicht größeren Niveaudifferenzen messen kann; es ist dann nur auf die Bestimmung von  $V$  und  $W'$  die größte Sorgfalt zu verwenden, da je kleiner  $V$  ist, ein kleiner bei der Bestimmung des Volumens begangener Fehler von sehr großem Einfluß ist.

Zur Messung sehr großer Drucke ist das § 66 beschriebene Manometer von Desgoffe wohl das genaueste.

Nur erwähnt seien die in der Technik viel benutzten Metallmanometer, die zuerst von Bourdon konstruiert gewissermaßen das umgekehrte Metallbarometers sind. Der innere Raum der in dem Bourdonschen Manometer vorhandenen gebogenen Röhre wird mit dem Raum in Verbindung gesetzt, in welchem der Druck gemessen werden soll. Je nach der Stärke des Druckes biegt sich die Röhre mehr auf; die Teilung, auf welcher der Zeiger einsteht, wird durch Vergleichung mit einem offenen Quecksilbermanometer bestimmt. Diese Metallmanometer haben sehr verschiedene Formen und in den Einzelheiten verschiedene Konstruktion.

## § 107.

**Volumenometer.** Eine andere Anwendung des Mariotteschen Gesetzes ist die Messung der Volumina von Körpern und so die Bestimmung der Dichtigkeit, ohne einer Wägung in Wasser zu bedürfen. Der erste Apparat der Art wurde von Say<sup>1)</sup> unter dem Namen Stereometer und

<sup>1)</sup> Say, Annales de chimie par Guyton, Lavoisier etc. 23. 1797. Auch Gilbert, Annales. 2. 1799.

etwas später von Leslie<sup>1)</sup> beschrieben. Regnault<sup>2)</sup> gab demselben folgende Form (Fig. 187 und 188). Eine Glaskugel *A* von 300<sup>cm</sup> Rauminhalt ist mittels einer Metallfassung auf ihrem Hals durch vier Schrauben und Zwischenlegung von eingefettetem Leder luftdicht mit dem manometrischen Apparat *abcd* verbunden. Das Manometer besteht aus zwei 14<sup>mm</sup> weiten Glasröhren *b* und *c*, welche in ein eisernes mit einem T-förmig durchbohrten Hahn *r* versehenes Röhrenstück eingekittet sind. Fig. 189 und 190 zeigen einen Durchschnitt des Röhrenstückes mit zwei verschiede-

Fig. 187



Fig. 188



Fig. 189



Fig. 190



nen Stellungen des Hahnes. In Fig. 189 kommunizieren die beiden Manometerrohre miteinander, in Fig. 190 *b* mit der äußern Luft, *r* ist geschlossen. In einer andern Stellung wurde *c* ohne *b* und in einer andern Stellung beide mit der äußern Luft in Verbindung stehen. Die Röhre *cd* ist gerade und oben offen; die Röhre *b*, welche oben mit der Kugel durch das Rohr *aA* in Verbindung steht, hat nahe unter der Krümmung *a* eine Kugel.

1) Leslie, Ann. of Philosoph. No. LXIV.

2) Regnault, Ann. de chim. et de phys. 14 (3.) 1845. Auch Poggend. Ann. 66. p. 445. 1845.



und zwei Marken  $mn$  und  $pq$ , die eine über, die andere unter  $B$ . Durch den Hahn  $s$  kann man auch die Röhre  $ab$  oben mit der freien Luft in Verbindung setzen.

Man muß das Volumen der einzelnen Teile der Röhre  $ab$ , von da, wo sie in die Kugel  $A$  tritt, bis zur Marke  $mn$ , und des zwischen den beiden Marken enthaltenen Teiles genau kennen, ebenso das Volumen der Kugel  $A$ . Um den zwischen den Marken enthaltenen Raum zu erhalten, setzt man den Hahn  $s$ , stellt  $r$  so, daß  $ab$  und  $cd$  kommunizieren (Fig. 189) und füllt in  $cd$  Quecksilber ein, bis es an  $mn$  steht. Darauf dreht man den Hahn  $r$  in die Stellung (Fig. 190) und läßt soviel Quecksilber in ein tergestelltes Gefäß abfließen, daß die Quecksilbersäule in  $ab$  gerade bis  $r$  steht.

Man schließt den Hahn, so daß die Röhren nicht mehr mit der äußern Luft in Verbindung stehen und erhält aus dem Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers das zwischen  $pq$  und  $mn$  enthaltene Volumen. Dies Volumen ist  $v$ . Die beiden andern Volumina, das der Kugel und der Verbindungs- röhre, bestimmt man zusammen, da man nur die Summe der Volumina zu kennen braucht. Diese sei  $V$ . Man füllt dazu bei geöffnetem Hahn  $s$  und in der Stellung des Hahnes  $r$ , wie in Fig. 189, beide Röhren bis zur Marke  $pq$ . Darauf schließt man  $s$ , und füllt in  $cd$  soviel Quecksilber nach, bis das Quecksilber in  $ab$  bis  $mn$  steht. Das Quecksilber steht dann in  $cd$  um eine Länge  $h$ , die man mit dem Kathetometer mißt, höher als in  $ab$ . Die Luft in der Röhre  $ab$  über dem Quecksilber und in der Kugel  $A$  ist nun komprimiert durch die Quecksilbersäule  $h$ . Unter dem atmosphärischen Druck bei geöffnetem Hahn  $s$  füllte sie den Raum  $V + v$  aus; unter dem verstärkten Drucke nur mehr den Raum  $V$ . Nennen wir den Barometerstand  $H$ , so haben wir nach dem Mariotteschen Gesetze

$$V + v : V = H + h : H$$

$$V(H + h) = (V + v)H$$

$$V = v \cdot \frac{H}{h}.$$

Somit kennt man den Rauminhalt der einzelnen Teile des Apparates, wenn man bedarf, um das Volumen  $x$  eines Körpers zu bestimmen.<sup>1)</sup>

Man legt den Körper, dessen Volumen  $x$  gefunden werden soll, in die Kugel. Derselbe verdrängt dadurch eine ihm an Volumen gleiche Luftmenge. Wenn man nun bei geöffnetem Hahn  $s$  wieder Quecksilber bis zur Marke  $pq$  einfüllt und den Hahn  $s$  schließt, so ist jetzt das Volumen der gesperrten Luft nicht mehr  $V + v$ , sondern  $V + v - x$ . Füllt man dann in  $cd$  wieder Quecksilber nach, bis es in  $ab$  bei  $mn$  steht, so wird jetzt das Volumen  $V + v - x$  auf das Volumen  $V - x$  komprimiert und man beobachtet in  $cd$  eine Quecksilbersäule  $h'$ , welche diese Kompression betrifft. Nennen wir wieder  $H$  den Barometerstand, so ist

<sup>1)</sup> Eine sehr vereinfachte und bequeme Form des Regnaultschen Volumenometers beschreibt *Paulzow*, *Wiedem. Ann.* 13. p. 332. 1881; in bezug auf ein von *Beunhauer* schon früher beschriebenes Volumenometer sehe man *Paulzow*, *Wiedem. Ann.* 14. p. 176. 1881.

$$V + v - x : V - x = H + h' : H$$

$$H(V + v - x) = (H + h')(V - x)$$

$$x = \frac{Vh' - vH}{h'}$$

Eine zweite Bestimmung von  $x$  erhält man auf dem umgekehrten Wege. Man füllt bei geöffnetem Hahn  $s$  soviel Quecksilber in das Manometer, daß es in  $ab$  bis zur Marke  $mn$  steht. Bei geschlossenem Hahn ist dann das Luftvolumen  $V - x$  abgesperrt. Darauf stellt man den Hahn  $r$  so, daß beide Röhren miteinander und mit der äußern Luft in Verbindung stehen und läßt soviel Quecksilber abfließen, daß es in  $ab$  bis zur Marke  $pq$  steht. Das Luftvolumen  $V - x$  hat sich dann auf das Volumen  $V + v - x$  ausgedehnt, und zugleich beobachtet man, daß das Quecksilber in der Röhre  $cd$  um eine Strecke  $h''$  tiefer steht als in  $ab$ . Nach dem Mariotteschen Gesetze ist wieder

$$V + v - x : V - x = H : H - h''$$

$$H(V - x) = (H - h'')(V + v - x)$$

$$x = V - \frac{v(H - h'')}{h''}$$

Kombiniert man beide Methoden, so kann man sogar die Beobachtung des Barometers unterlassen. Die erste Gleichung für  $x$  gibt

$$H = \frac{(V - x)h'}{v},$$

die zweite

$$H = \frac{(V - x)h''}{v} + h'' = \frac{(V + v - x)h''}{v},$$

und aus beiden

$$\frac{V + v - x}{V - x} = \frac{h'}{h''}$$

$$x = V - v \cdot \frac{h''}{h' - h''}$$

Kopp<sup>1)</sup> hat schon früher ein anderes Volumenometer konstruiert, welches vor dem Regnaultschen den Vorzug der größern Einfachheit hat, so daß es jeder sich leicht selbst herstellen kann; Fig. 191 stellt dasselbe dar. In einem zum Teil mit Quecksilber gefüllten Zylinder  $K$  bewegt sich ein quecksilberdicht schließender Kolben mit schwacher Reibung.

Der Zylinder ist unten mit einer Korkplatte geschlossen, und ein gekrümmtes Rohr  $p$  läßt ihn mit einem unten und oben geschlossenen Zylinder  $i$  kommunizieren. Der Deckel des letzteren Zylinders ist von zwei Röhren durchbohrt,  $cd$  und  $q$ .

Die Röhre  $cd$  ist gerade, an ihren beiden Enden offen, und gegen eine willkürliche Teilung gelegt, deren Nullpunkt etwas über dem Zylinder liegt. Die Röhre  $q$ , gekrümmt, wie die Figur zeigt, tritt durch den Boden in ein zylindrisches Gefäß  $r$  ein. Von dem Deckel des Zylinders reichen mehrere Platinspitzen von verschiedener Länge  $a, b$  in den Zylinder

1) Kopp, Annalen der Chemie und Pharmazie von Liebig. 35. 1840.

Das zylindrische Gefäß  $r$  kann ein anderes Gefäß aufnehmen, den zu untersuchenden Körper enthält. Eine Scheibe  $m$  von mattem Glase wird durch die Schraube  $t$  und einen zwischengelegten Körper  $u$  auf den abgeschliffenen oberen Rand des Zylinders  $cd$  verschließt ihn luftdicht. Die Zylinder  $K$  und  $ii$  sind bis zu gewissen Höhe mit Quecksilber gefüllt. Man zieht zunächst den Kolben in  $K$  so auf, daß die Luft frei durch  $cd$  in den Zylinder  $ii$  kommen kann. Sei bei dem Barometerstand  $H$  das Volumen der Luft, welches in  $r$  abgesperrt ist, wenn das Quecksilber bei  $c$  die Röhre  $cd$  verschließt,

zieht man nun den Kolben herab, so steigt das Quecksilber in  $ii$ , und man kann es dahin bringen, daß es gerade die Röhre  $cd$  berührt. Dabei wird das Quecksilber in  $ii$  um eine Höhe  $h$  steigen, und  $h$  mißt jetzt den Druck, unter welchem die komprimierte Luft steht. Diese Höhe  $h$  ist verschiedenem Barometerstand  $H$  zu sein, da mit  $H$  die Dichtigkeit der Luft sich ändert.

Sei  $V'$  das Volumen der abgesperrten Luft, wenn das Quecksilber bei  $a$  steht, so ist

$$V : V' = H + h : H$$

$$V : V - V' = H + h : h$$

$$V - V' = \frac{h}{H + h} \cdot V.$$

Um nun das Volumen  $V$  zu bestimmen, bedarf es noch einer weiteren Messung; man legt dazu in das Gefäß  $r$  einen Körper von bekanntem Volumen  $v$ , und verfährt gerade wie vorhin. Man erhält dann das Volumen  $V'$  auf dieselbe Weise. Das Volumen der anfänglich abgesperrten Luft ist jetzt beim Hinaufdrücken des Quecksilbers bis  $a$  ist es  $V' - v$ ; in der Röhre  $cd$  ist das Quecksilber dann bis zu einer Höhe  $h'$  gestiegen. Wir erhalten nach

$$V - v : V' - v = H + h' : H,$$

da wir wieder gerade wie vorhin verfahren

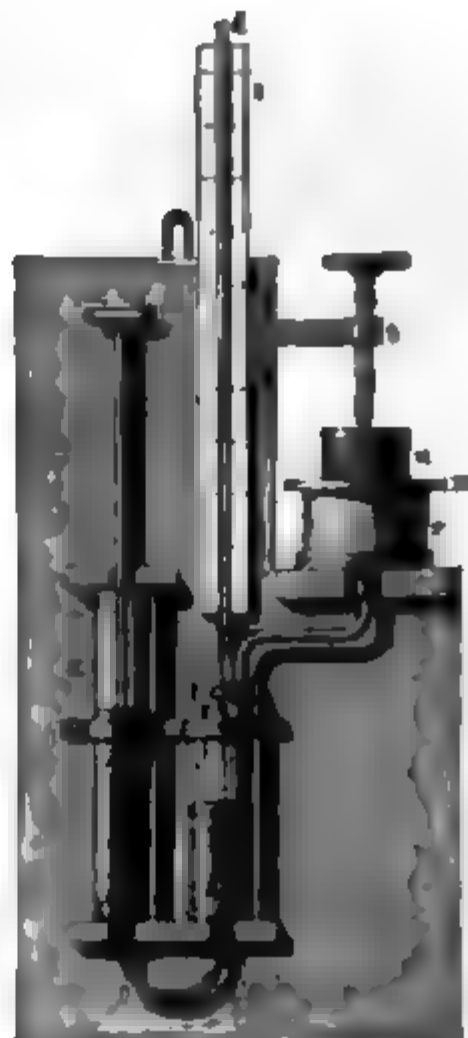
$$V - v : V - V' = H + h' : h',$$

so wir für  $V - V'$  den soeben erhaltenen Ausdruck ein und bringen dieselben Transformationen an:

$$V = \frac{h'}{H + h' - h} \cdot (H + h) \cdot (V' - v).$$

Wenn  $V$  so ein für allemal bestimmt, so erhält man aus einem dem ganz gleichen Versuche das Volumen  $x$  eines zu untersuchenden

Fig. 191.



Körpers. Man legt den Körper in den Zylinder  $r$  und komprimirt die Luft, bis das Quecksilber die Spitze  $a$  berührt. In der Röhre  $r$  steigt das Quecksilber bis zu einer Höhe  $h''$ , und es ist

$$V = \frac{h''}{H} \cdot \frac{H + h}{h'' - h} \cdot x,$$

und daraus, wenn wir die Gleichung nach  $x$  auflösen,

$$x = \frac{H}{h''} \cdot \frac{h'' - h}{H + h} \cdot V.$$

Der Apparat ist mit mehreren Platinspitzen versehen, um mehrere Werte für  $x$  erhalten zu können, welche sich gegenseitig kontrollieren, und aus denen man das Mittel nimmt, wenn die einzelnen kleine Abweichungen zeigen.

Man kann diese Apparate sehr gut anwenden, um das spezifische Gewicht von Körpern zu bestimmen, bei denen man die gewöhnliche Methode des Eintauchens in eine Flüssigkeit nicht anwenden kann. Man misst das Gewicht des Körpers in Grammen und das Volumen mittelst des Apparates in Kubikzentimetern. Der Quotient beider gibt das spezifische Gewicht.

Um sich von der Genauigkeit der Methode zu überzeugen, hat Kopp zunächst das spezifische Gewicht von Blei, Zinn und einigen anderen Substanzen bestimmt, wie folgende Zahlen zeigen, sehr genau mit den von anderen Beobachtern gefundenen spezifischen Gewichten dieser Substanzen.

Es ist das spezifische Gewicht von

Blei	nach Kopp	11,404,	nach gewöhnlicher Methode	11,
Zinn	„	7,363,	„	7,
Salmiak	„	1,50,	„ Wollaston	1,

Für eine Reihe anderer Substanzen hat Kopp dann folgende spezifische Gewichte erhalten:

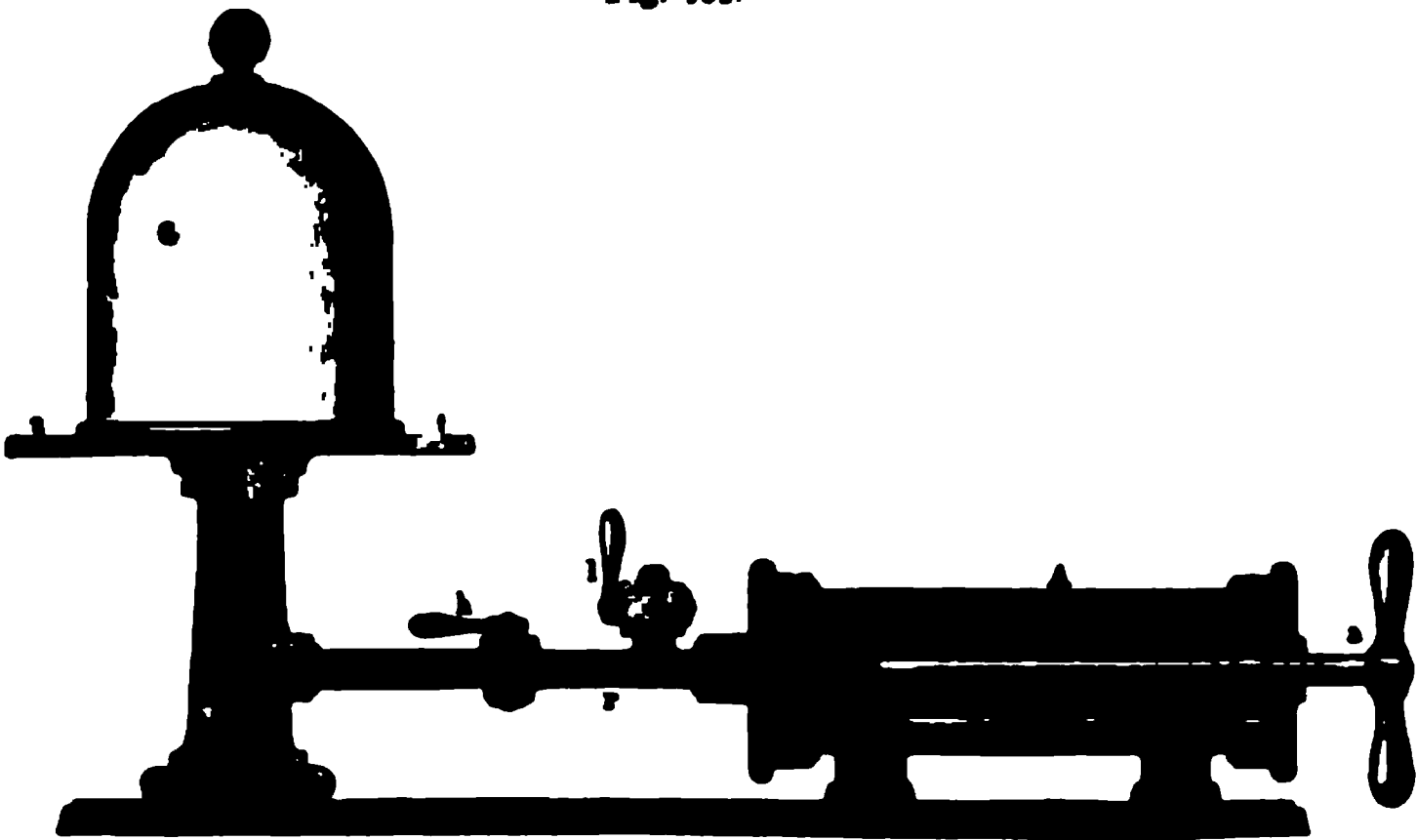
Substanzen	Sp. Gew.	Substanzen	Sp. Gew.
Bimstein (gepulvert) . . . . .	2,15	Korkrinde . . . . .	0,25
Asche von Buchenholz . . . . .	2,85	Faser von Lindenholz . . . . .	1,50
Zucker (weiss., gepulvert) . . . . .	1,58	„ „ Tannenholz . . . . .	1,50
Kochsalz (gepulvert) . . . . .	2,15	„ „ Nußbaum . . . . .	1,50
Weizenmehl . . . . .	1,49	„ „ Apfelbaum . . . . .	1,50
Stärkemehl . . . . .	1,56	„ „ Zwetschenbaum . . . . .	1,50
Flachsfaser . . . . .	1,45	„ „ Birnbaum . . . . .	1,50
Seide (Coconfaden) . . . . .	1,56	„ „ Eichenholz . . . . .	1,50
Baumwolle . . . . .	1,27	„ „ Buchenholz . . . . .	1,50
Schafwolle (verarbeitet) . . . . .	1,29		

§ 108.

**Die Luftpumpe.** Auf der zweiten Fundamenteigenschaft der Materie, dem Bestreben, jeden ihnen dargebotenen Raum auszufüllen, beruht einer der für den Physiker wichtigsten Apparate, die Luftpumpe, durch die man imstande ist, aus einem Raume die Luft herauszuschaffen.

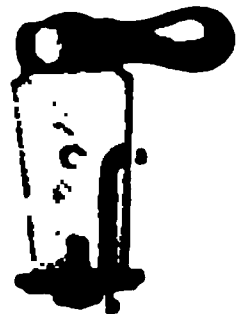
Der einfachste Apparat dieser Art ist die Hahnluftpumpe, wie sie der Erfinder derselben, Otto von Guericke, Bürgermeister von Magdeburg, konstruierte. (*Experimenta nova Magdeburgica de spatio vacuo*. Amstelod. 672 fol.) In einem hohlen, gut gearbeiteten Zylinder *A* kann ein luftdicht schließender Kolben *k* hin und hergeführt werden. Der Boden des Zylinders ist durchbohrt und eine Röhre *rr*, welche in der Mitte eines Hahns *ll* mündet, setzt den durch die Glocke *G* umgebenen Raum mit dem Innern des Zylinders in Verbindung.

Fig. 192.



In der Röhre *rr* sind überdies zwei einfach quer durchbohrte Hähne angebracht *h* und *l*. Wenn man die beiden Hähne so stellt, daß der innere Raum des Zylinders weder mit der Glocke *G*, noch mit der äußern Luft in Verbindung steht, und nun den Kolben gegen *a* hin bewegt, so entsteht im Zylinder ein luftverdünnter Raum, da sich die vorher in einem kleinen Teile des Zylinders befindliche Luft jetzt in dem ganzen Zylinder ausbreitet. Dreht man den Hahn *h*, so wie die Zeichnung es zeigt, daß die Glocke mit dem Zylinder *A* in Verbindung steht, so strömt die dichtere Luft aus der Glocke durch die Röhre *rr* in den luftverdünnten Raum des Zylinders, und die Luft unter der Glocke ist dünner wie vorher. Schließt man dann durch die Glocke wieder vom Zylinder ab, so kann man durch Hineinschieben des Kolbens bei geöffnetem Hahn *l* die Luft aus dem Zylinder herausdrücken. Durch mehrfache Wiederholung dieser Operationen kann man dann allmählich die Luft unter der Glocke bis auf einen gewissen Grad verdünnen.

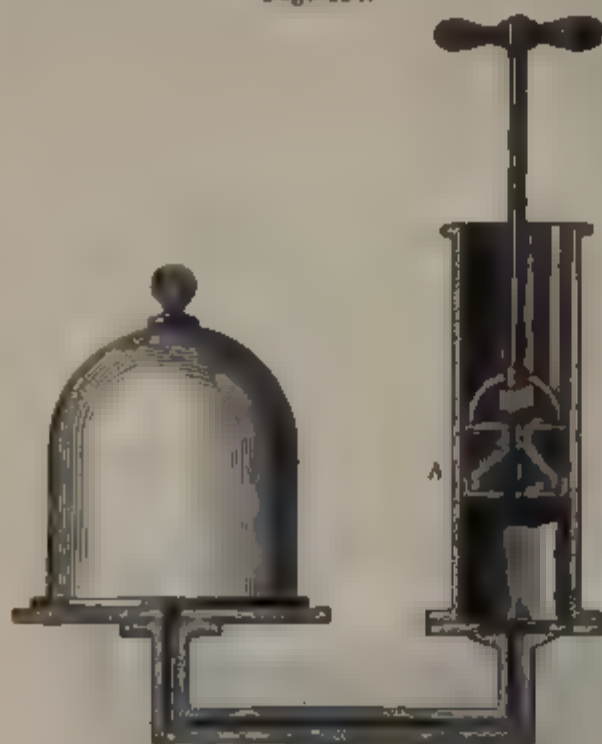
Fig. 193.



Diese Luftpumpe ist nun zwar die einfachste, aber auch die unbestimmteste, da man bei jeder Verdünnung drei Operationen vornehmen muß, das Herausziehen und Hineinschieben des Kolbens und die Stellung zweier Hähne. Die nächste Verbesserung, welche an den Maschinen angebracht wurde, war die, daß man statt zweier Hähne nur einen doppelt durchbohrten Hahn (Fig. 193) anwandte. Die eine Durchbohrung geht wie bei den einfachen Hähnen quer durch denselben, und verbindet in der ent-

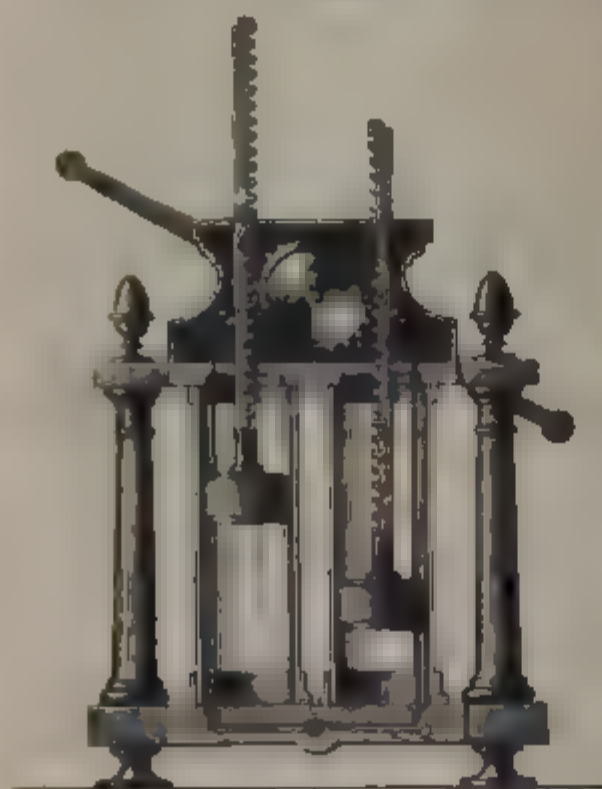
sprechenden Stellung die Glocke mit dem Zylinder. Die zweite, einen rechtwinkelig gekrümmten Kanal *ab*, sie setzt das Innere derselben mit der äußern Luft in Verbindung, sie dient also dazu, bei Zurückführen des Kolbens aus dem Zylinder zu entlassen.

Fig. 194.



welche sich vorher mit der Luft der Glocke ins Gleichgewicht gesetzt, stärker von oben nach unten drückt. Bald öffnet sich dann

Fig. 195



Um der Stellung der Glocke überhoben zu sein, hat man dieselben durch Ventile ersetzt. Der in dem Zylinder *A* befindliche Kolben *K* ist durch ein zentrisch durchbohrtes, welches durch unten nach oben sich öffnen und verschlossen werden kann. Eine Klappe ist am Boden derselben vorhanden, die ebenfalls nach oben sich öffnet. Wenn der Kolben *K* in die Höhe zieht, so öffnet sich das Kolbenventil *I*; ein stärkerer Druck der Luft in der Glocke öffnet sich dann aber das Ventil *V*, die Luft dringt aus der Glocke in den Zylinder. Wird der Kolben gedrückt, so schließt sich das Ventil *I*, da dann die in *K* enthaltene Luft, welche sich vorher mit der Luft der Glocke ins Gleichgewicht gesetzt, stärker von oben nach unten drückt. Bald öffnet sich dann Ventil *I* des Kolbens und der Zylinder *A* enthaltene Luft strömt durch die Kolbenöffnung aus, bis der Kolben wieder auf dem Boden des Zylinders aufsteht.

Indes würde bei dieser Ventilluftpumpe die Verdünnung der Luft unter der Glocke bald erreicht, da die Luft nur durch die Glocke in den Zylinder gelangen kann, wenn sie das Ventil *V* hebt. Die Luft wird also aufhören, in den Zylinder einzuströmen, sobald der Druck in der Glocke so klein geworden, daß er nicht mehr imstande ist, das Ventil zu heben. Deshalb ist in der Maschine weitere Veränderung gebracht, und bewirkt, daß der steigende Kolben das Ventil *V* der niedergehende es schließt.

#### Zweistiefelige Pumpe

Bei einstiefeligen Pumpen ist unvermeidlich jedesmal ein toter Raum, wenn beim Herabdrücken des Kolbens nur die Luft aus der Pumpe in die Glocke strömt, nicht aber aus dem Rezipienten in die Pumpe geschafft wird.

aben sie noch eine andere Unbequemlichkeit. Wenn nämlich die est vollständig ausgepumpt ist, so muß man bei Hebung des Kol- icht nur die Reibung des Kolbens an den Wänden des Stiefels über- , sondern auch den Druck der Luft, welcher auf dem Kolben lastet ns kein Gegendruck das Gleichgewicht hält. Dieser Druck ist bei

Größe des Kolbens sehr bedeutend, er überschreitet  $100^{kg}$ , wenn urchschnitt des Kolbens einem Quadratdezimeter gleich wird. Dieser

der bei dem Anfang der Operation gleich 0 ist, wächst sehr rasch icht das Auspumpen von Luft bald sehr schwierig, wenn nicht un-

h. Um diesen beiden Übelständen zu begegnen, hat man zweistiefe- iltumpfen (Fig. 195) konstruiert, bei denen man zwei solcher Pumpen elbar nebeneinander stellt und mit demselben Rezipienten in Ver- g bringt. Die Kolben sind an Zahnstangen befestigt, deren Zähne

eines gezähnten Rades eingreifen. Das Zahnrad sitzt auf einer ebenen Achse, an der zugleich ein zweiarmiger Hebel befestigt ist. ilt den Hebel an den an seinen beiden Enden angebrachten Hand- und hebt und senkt die Kolben durch Drehung des Rades. Man wie hier immer der eine Kolben steigt, wenn der andere herabgeht,

ie somit beide vor- merkte Übelstände ilt sind. Denn

jetzt der Luft- den aufsteigenden , so befördert er z gleichem Maße edergehenden; der

Luftdruck ist also lemnis der Opera- ie geht am Ende ut leerer Glocke leicht als im An-

Überdies ist aber er tote Gang ver-

, denn geht der olben nieder, um ft aus dem Körper mpe fortzuschaffen, gt der andere Kol- f und pumpt Luft m Rezipienten.

erbindung der

en mit dem Rezipienten. Um mit den Pumpen leicht die ver- nsten Apparate in Verbindung setzen zu können, sind sie auf einem Tische befestigt (Fig. 196) Die Kanäle, welche die Pumpenstiefel m Rezipienten in Verbindung setzen, vereinigen sich gleich hinter mpfen in einen einzigen Kanal, der dann horizontal über dem Tische ührt ist, in einiger Entfernung vertikal aufsteigt und in der Mitte tellers von mattgeschliffenem Glase endigt. Das hervorstehende Ende ials ist mit einem Schraubengewinde versehen, auf welchem man

Fig. 195.





die Apparate aufschrauben kann, in denen man einen luftleeren Raum stellen will. Diese sind zu dem Zwecke mit einer Schraubenscheibe versehen, welche auf das Gewinde paßt. Überdies sind bei einer Luftpumpe stets einige Glocken mit abgeschliffenem Rand, welche auf Teller gesetzt und ausgepumpt werden können. Um den Verschluss solcher Glocke vollkommen luftdicht zu machen, bestreicht man denselben dann noch mit einer dünnen Schicht Fett.

**Manometer.** Um zu bestimmen, wie weit die Verdünnung in den Apparaten vorgeschritten ist, besitzen alle Luftpumpen ein Manometer (Fig 197). Dasselbe ist von einer Glasglocke umgeben, welche in eine Messingfassung eingekittet ist, die durch eine Röhrenleitung

Fig 197



vom Rezipienten zu den Pumpen führenden Kanal in Verbindung steht. So wird zugleich aus dem Rezipienten die Glocke die Luft ausgepumpt. Man sieht daher, wie der Kolbenhub das Quecksilber in dem einen Schenkel des Manometers füllt, so lange bis die Verdünnung der Luft den höchsten Grad erreicht hat, und das Niveau des Quecksilbers im Barometerrohr nur wenig mehr über das in dem anderen Schenkel erhoben ist. Der Druck der noch im Rezipienten vorhandenen Luft und somit ihre Dichtigkeit wird durch das Moment durch den Unterschied der Quecksilberniveaus gegeben. Gewöhnlich wendet man anstatt eines ganzen Barometers ein gekürztes Barometer an von 30 bis 40<sup>cm</sup> Länge. Das Quecksilber in dem geschlossenen Schenkel beginnt dann erst zu fallen, als bis der Druck der Luft auf die Hälfte sinkt und somit die Luft zur Hälfte ausgepumpt ist. Man kann die Verdünnung schon früher, ja überhaupt genau bestimmen, wenn man verbindet man mit der Pumpe ein einfaches U förmiges Quecksilbermanometer, dessen einer Schenkel durch einen Korkstopf geschlossen ist, der von einer zur Luftpumpe führenden Glasröhre durchbohrt ist. Der andere Schenkel ist offen. Röhren sind zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt. Die Luft in dem mit dem Rezipienten der Luftpumpe verbundenen Schenkel verdünnt, so steigt das Quecksilber in demselben, sinkt in dem andern und die Niveauunterschiede geben den Überschuss des äußern Luftdruckes über den Druck der Luft im Rezipienten.

Zieht man demnach den Niveauunterschied vom Barometerstande ab, so erhält man den Druck der Luft im Rezipienten.

Der Niveauunterschied wird mit dem Kathetometer gemessen.

**Grad der Verdünnung.** Bis zu welchem Grade man mit einer Luftpumpe die Luft im Rezipienten verdünnen kann, ergibt sich durch Überlegung. Sei das Volumen des Rezipienten bis zu dem in der Pumpenstiefel führenden Hahn oder Ventil gleich  $A$  und der Raum der Pumpenstiefels gleich  $B$ . Nehmen wir an, es stehe der Kolben auf dem Boden, so zwar, daß zwischen Kolben und Hahn absolut keine Luft mehr vorhanden sei, so ist das Volumen  $A$  der Luft abgesperrt. Wenn der Kolben aufgezogen, so verbreitet sich die Luft aus dem Raum  $A$  in den Raum  $A + B$ , und die Dichtigkeit der Luft ist im Verhältnisse

$$1 : \frac{A}{A + B}$$

ner geworden. Die im Stiefel vorhandene Luft wird jetzt fortgeschafft, und der Kolben zum Boden zurückgeführt wird. Wiederholt man die Operation, so nimmt die Dichtigkeit der Luft im Rezipienten wieder in selben Verhältnis ab, sie ist gegen die anfängliche Dichtigkeit

$$1 : \left( \frac{A}{A + B} \right)^2$$

orden. Nach  $n$  maliger Wiederholung des Pumpens hat demnach die Dichtigkeit im Verhältnis

$$1 : \left( \frac{A}{A + B} \right)^n$$

genommen.

Die Dichtigkeit würde darnach niemals Null werden können, da der selbe angegebene Bruch nur für ein unendlich großes  $n$  gleich Null wird, würde sich aber mit wachsendem  $n$  der Grenze Null nähern.

Es sind indes wesentlich zwei Gründe, welche der Verdünnung eine blich von Null entfernte Grenze geben, nämlich die schädlichen Räume die Undichtigkeiten. Zunächst ist die vorhin gemachte Voraussetzung,

zwischen dem Kolben und Ventil oder Auslaßhahn gar kein Raum vorhanden wäre, nicht erfüllt, es ist immer ein gewisser sogenannter schädlicher Raum vorhanden, der am Schlusse jeder einzelnen Operation, das heißt, wenn der Kolben bis zum Boden zurückgeführt ist, mindestens mit Luft von der Dichtigkeit der Atmosphäre gefüllt ist, da, um die Luft aus dem Stiefel fortzuschaffen, dieser Raum mit der äußern Atmosphäre in Verbindung gesetzt werden muß. Ist  $b$  die Größe dieses schädlichen Raums, so ist  $\frac{b}{B}$  die Grenze der durch fortgesetztes Pumpen erreichbaren Dichtigkeit.

Denn wenn man, ohne die Verbindung des Stiefels mit dem Rezipienten herzustellen, den Kolben aus der tiefsten in die höchste Lage bringt, würde die Dichtigkeit 1 der im schädlichen Raume vorhandenen Luft  $\frac{b}{B}$  hinabgehen. Wird jetzt die Pumpe mit dem Rezipienten in Verbindung gesetzt, so kann aus dem Rezipienten keine Luft mehr in die Pumpe abströmen, die Grenzdichte ist damit erreicht.

**Babinets Hahn.** Um diesen störenden Umstand auf ein Minimum zu reduzieren, hat Babinet zur Luftpumpe einen besondern nach ihm benannten Hahn hinzugefügt. Derselbe befindet sich in der Achse der Röhre, welche die von beiden Pumpenstiefeln kommenden Kanäle verbindet, unmittelbar unter denselben. Dieser Hahn hat zunächst eine T-förmige Durchbohrung, so daß die Querdurchbohrung der beiden Pumpenstiefel mit der Längsdurchbohrung der Achse des Hahnes geführt wird, und da diese die Fortsetzung des zur Glocke führenden Kanals ist, mit diesem in Verbindung setzt. In der Stellung Fig. 198a, die sie auf dem Hahn gewöhnlich bezeichnet, ist also die Verbindung der innern Teile der Maschine bisher von uns angenommene. Anders aber, wenn man den Hahn umdreht, ihn in die Stellung Fig. 198b bringt. Die Durchbohrung des Hahnes ist dann so, daß der eine Pumpenstiefel noch mit der Glocke in Verbindung steht, während der andere durch den Hahn mit der äußern Atmosphäre verbunden ist.

**Babinets Hahn.** Um diesen störenden Umstand auf ein Minimum zu reduzieren, hat Babinet zur Luftpumpe einen besondern nach ihm benannten Hahn hinzugefügt. Derselbe befindet sich in der Achse der Röhre, welche die von beiden Pumpenstiefeln kommenden Kanäle verbindet, unmittelbar unter denselben. Dieser Hahn hat zunächst eine T-förmige Durchbohrung, so daß die Querdurchbohrung der beiden Pumpenstiefel mit der Längsdurchbohrung der Achse des Hahnes geführt wird, und da diese die Fortsetzung des zur Glocke führenden Kanals ist, mit diesem in Verbindung setzt. In der Stellung Fig. 198a, die sie auf dem Hahn gewöhnlich bezeichnet, ist also die Verbindung der innern Teile der Maschine bisher von uns angenommene. Anders aber, wenn man den Hahn umdreht, ihn in die Stellung Fig. 198b bringt. Die Durchbohrung des Hahnes ist dann so, daß der eine Pumpenstiefel noch mit der Glocke in Verbindung steht, während der andere durch den Hahn mit der äußern Atmosphäre verbunden ist.

Verbindung steht, der andere jedoch nicht mehr. Dafür steht durch eine andere Durchbohrung des Hahnes, die in der Figur durch die punktierte Linien angedeutet ist, dieser Stiefel mit dem ersten Stiefel in Verbindung. Geht nun der Kolben in dem ersten Stiefel in die Höhe, so tritt die Luft aus dem Rezipienten in ihn hinein; geht er herab und der Kolben in den zweiten Stiefel in die Höhe, so pumpt der letztere nicht Luft aus dem Rezipienten, sondern die Luft aus dem ersten Stiefel in diesen. Dadurch wird also die Luft aus dem schädlichen Raume des mit dem Rezipienten in Verbindung stehenden Stiefels ausgepumpt und die theoretisch erreich-

Fig. 198 a.



Fig. 198 b



bare Grenzdichte wird  $\left(\frac{b}{B}\right)^3$ . Wir erkennen das, wenn wir die Kolben abnacheinander sich bewegend denken. Es sei in beiden Stiefeln die oben Babinetschen Hahn mögliche Grenze erreicht, und der Kolben rechts stehe auf dem Boden. Im Stiefel links ist dann die Dichte  $\frac{b}{B}$ , im Stiefel rechts der Raum  $b$  mit Luft von der Dichte 1 erfüllt. Wird jetzt der Babinetsche Hahn in die Stellung Fig. 198 b gelegt, so wird der Raum  $b$  rechts mit dem Raum  $B$  links in Verbindung gesetzt und die Dichte 1 geht in die Dichte  $\frac{b}{B+b}$  oder  $\frac{b}{B}$ , wenn wir im Nenner  $b$  gegen  $B$  vernachlässigen, über. Geht jetzt der Kolben rechts in die Höhe und macht den Raum  $B$  frei, so wird die im Raum  $b$  vorhandene Luft von der Dichtigkeit  $\frac{b}{B}$  auf den Raum  $B$  gebracht, die Dichtigkeit wird  $\frac{b^2}{B^2}$  und es kann so lange dem Rezipienten Luft entströmen, bis in demselben die gleiche Verdünnung erreicht ist.

In der Praxis ist indes diese Grenze doch nicht zu erreichen, denn es ist unmöglich, die aus verschiedenen Teilen zusammengesetzte Pumpe und besonders die Kolben gegen die äußere Luft derart abzudichten, daß nicht von außen in die Pumpe Luft einsickert. Dieses Einsickern ist um so stärker, je weiter die Verdünnung getrieben ist, man muß deshalb, sobald die äußerste Verdünnung erreicht ist, durch passende Stellung des gleich zu besprechenden Hahnes den Rezipienten von der Pumpe abtrennen.

Die mit derartigen Pumpen zu erreichende Verdünnung läßt in den ausgepumpten Räumen noch etwa 1<sup>mm</sup> Quecksilberdruck.

**Hahn zum Wiedereinlassen der Luft.** Ist unter der Glocke der Luftpumpe der verdünnte Raum hergestellt, so wird derselbe durch den Druck der äußern Luft so fest gehalten, daß es nicht möglich ist, ihn zu heben. Es ist deshalb nötig, eine Vorrichtung anzubringen, um die L

die dieselbe wieder einlassen zu können. Dazu dient der unter dem Teller (Fig. 196) angebrachte Hahn. Derselbe hat ebenfalls mehrfache Durchbohrungen, um den Teller der Luftpumpe vollständig absperrn zu können, zugleich aber in die Pumpe Luft einlassen zu können.

Zunächst ist er quer durchbohrt und setzt in der Stellung (Fig. 199) die Glocke mit der Pumpe in Verbindung. Außer dieser Durchbohrung

ist er noch eine zweite

(Fig. 200), welche im In-

nen des Kanals recht-

winklig umbiegt, und die

in einem zu dem in Fig.

199 gezeichneten senk-

rechten Durchchnitt liegt.

Dieser Kanal mündet in

der äußern Luft und kann

noch einen Stift luft-

dicht geschlossen werden,

so daß in der Stellung

Fig. 199 keine Luft durch

den Kanal eintreten kann.

In der Stellung Fig. 200

setzt der Hahn die

Glocke der Luftpumpe mit

der äußern Luft in Ver-

bindung; er dient

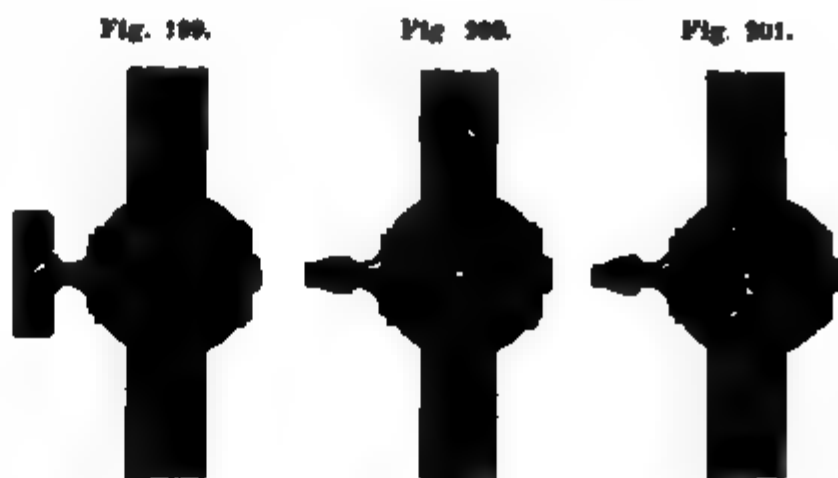
also zum Einlassen der

Luft in die Glocke. In der

Stellung Fig. 201, in

welcher der Hahn gegen

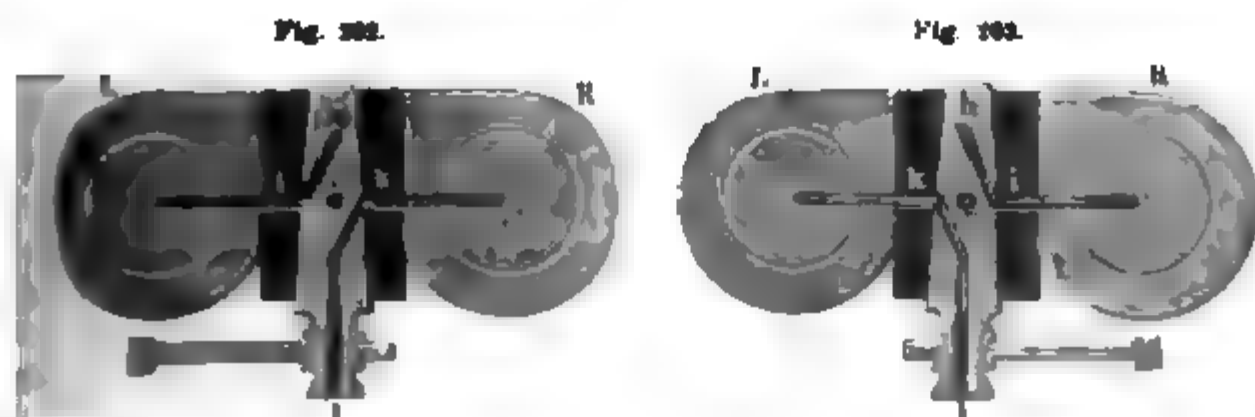
Fig. 201 um  $180^\circ$  gedreht



ist, ist die Glocke, der Rezipient, sowohl von der äußern Luft als von der Pumpe abgesperrt, dagegen kommuniziert jetzt die Pumpe mit der äußern Luft.

Auf dem Griffe des Hahnes sind die Stellungen durch ein den Bohrungen parallel gezogenes T gezeichnet.

Ebenso wie zweistiefelige Ventilluftpumpen werden auch zweistiefelige Hohl-Luftpumpen angewandt. Die Verbindung des Tellers mit den Pumpen-Hähnen ist dieselbe wie bei den Ventilluftpumpen, die wir bisher beschrieben haben; die Kolben in diesen Pumpen sind ganz massiv und der wesentlichste Unterschied zwischen diesen und den Ventilpumpen besteht in der Einrichtung des Hahnes, der an der Stelle des Babinetschen



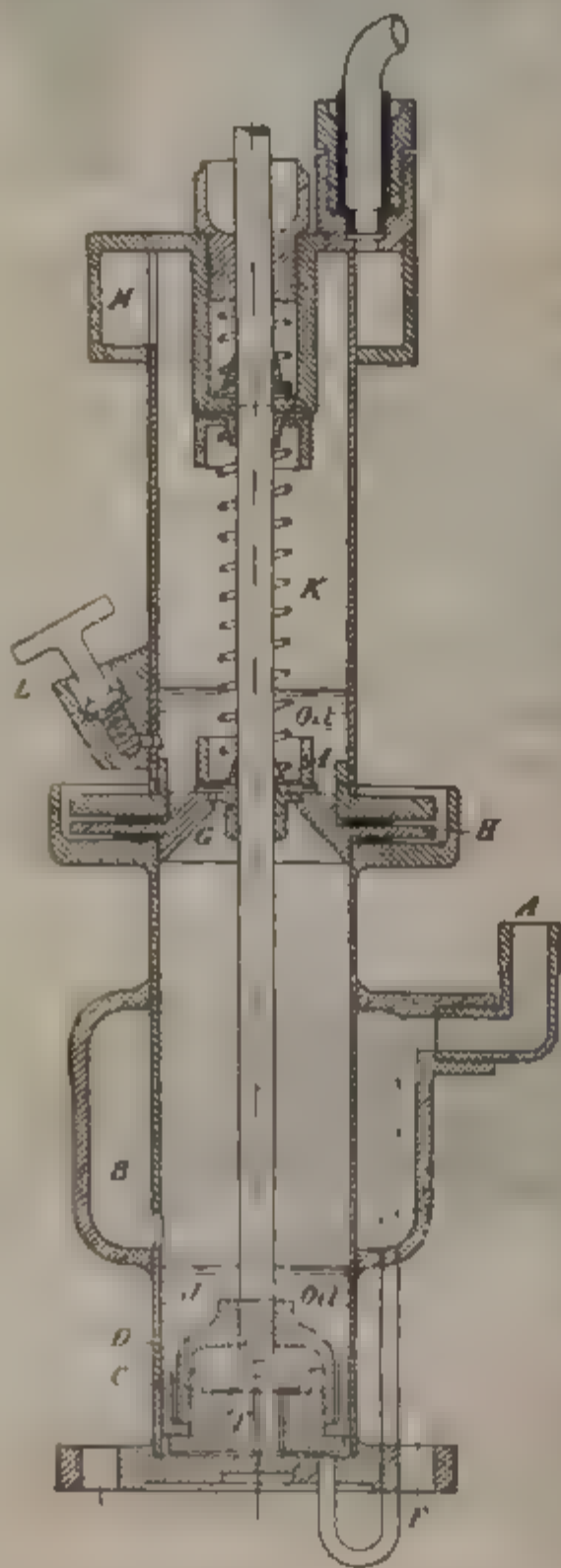
angebracht ist, um beim Aufsteigen des Kolbens den Pumpenstiefel vom Rezipienten, beim Niedergang aber mit der äußern Luft in Verbindung zu setzen, des nach seinem Erfinder benannten Grassmannschen



Die Einrichtung dieses Hahnes und seine Verbindung zeigen Fig. 202 und 203. Von dem Boden der beiden Stiefel führt, gerade wie bei der Ventilpumpe, eine Durchbohrung in den Kanal, der den Hahn in sich aufnimmt.

An der Stelle, wo das von dem Teller der Pumpe herkommende Rohr in den Kanal mündet, ist der Hahn quer ganz durchbohrt, in der Mitte dieser Querdurchbohrung geht durch den Hahn schräg ein Kanal *kl*, der in der Lage Fig. 202 dort aus dem Hahn in die von dem Stiefel *L* herkommende Durchbohrung mündet. Diese schräge Durchbohrung des Hahnes *kl*, welche in dem Griff in die äußere Luft mündet, verbindet dann den von dem Rezipienten kommenden Kanal mit der äußeren Luft.

Fig. 204.



Zieht man den Kolben nach oben, wobei gleichzeitig der Griff *kl* hinabgedrückt wird, so tritt die Luft aus dem Rezipienten, während *kl* die Luft herausgedrückt. Man jetzt den Hahn um 180° (Fig. 203), so ist durch die Verbindung des Stiefels *R* mit dem Rezipienten, durch *kl* die Luft aus der äußeren Luft hergestellt.

Um schließlich den Rezipienten zum Auspumpen zu bringen, dreht man den Stiefel durch den andern, so dass die Luft aus dem Rezipienten herausgedrückt werden kann, hat man den Hahn in die oben angedeuteten Stellung zu drehen, die dritte Durchbohrung des Hahnes einfach quer durch den Hahn, so verbindet dann die beiden Stiefel, während weder eine Verbindung mit dem Rezipienten noch mit der äußeren Luft vorhanden ist.

Bei den Hahnluftpumpen ist es allerdings nach jedem Umdrehen des Hahns umlegen, also eine Operation vornehmen, als bei der Ventilpumpe. Man indes jetzt Stiefel *L* von der Größe nimmt, ist dieser Stiefel sehr groß. Die Hahnluftpumpe hat dagegen den Vorzug der Einfachheit der Konstruktion und gestatten den Rezipienten die Verdünnung zu erreichen, als die Ventilpumpen.

Jetzt werden statt der Ventile vielfach doppelwirkende Ventile, sowohl Hahn- als Ventilpumpen, bei welchen der Stiefel *L* des Kolbens unten, beim M...

Rezipienten in Verbindung steht. Bei diesen Pumpen wird gleich-  
: Auf- und Niedergehen des Kolbens durch die kontinuierliche  
eines Rades erzeugt, durch einen Mechanismus, der demjenigen  
ich ist, den wir später bei dem Nattererschen Apparat beschreiben

eigenthümliche doppelwirkende einstiefelige Ventilluftpumpe hat  
an Delenil konstruiert<sup>1)</sup>, welche sich von den eben erwähnten  
unterscheidet, daß der Kolben nicht dicht an dem Stiefel anliegt,  
aß zwischen ihm und der Stiefelwandung ein Zwischenraum von  
— ist, es sind die sogenannten Pumpen à piston libre. In dem  
Zwischenraum zwischen Kolben und Stiefel zirkuliert die Luft  
langsam; indem man nun den Kolben recht lang nimmt, gleich  
elten Durchmesser des Stiefels, und da auf dem größten Theile des  
len der Kolben zurücklegt, die Luft an beiden Seiten desselben  
wenig verschiedene Dichtigkeit hat, kann man trotz des nicht  
anliegens des Kolbens verdünnte Räume herstellen, in denen die  
etwa mehr  $10^{-3}$  Quecksilberdruck hat. Die Maschine geht, da  
a nicht reibt, leichter wie die andern Pumpen, sie hat zugleich  
ag, daß der Kolben nicht gefettet wird.

Nachfrage nach gut wirkenden Pumpen hat in der letzten Zeit  
: zugenommen,

seits die Tech-  
lie Herstellung  
ampen Bedarf  
andererseits in  
torien die Er-  
n der elektri-  
adungen in ver-  
Gasen vielfach  
: wurden.

vielen Neukon-  
n von Kolben-  
aben prinzipiell  
ues gebracht,  
bat zu Labo-  
zwecken eine Öl-  
el Anklang ge-  
für wollen deren  
ing kurz folgen

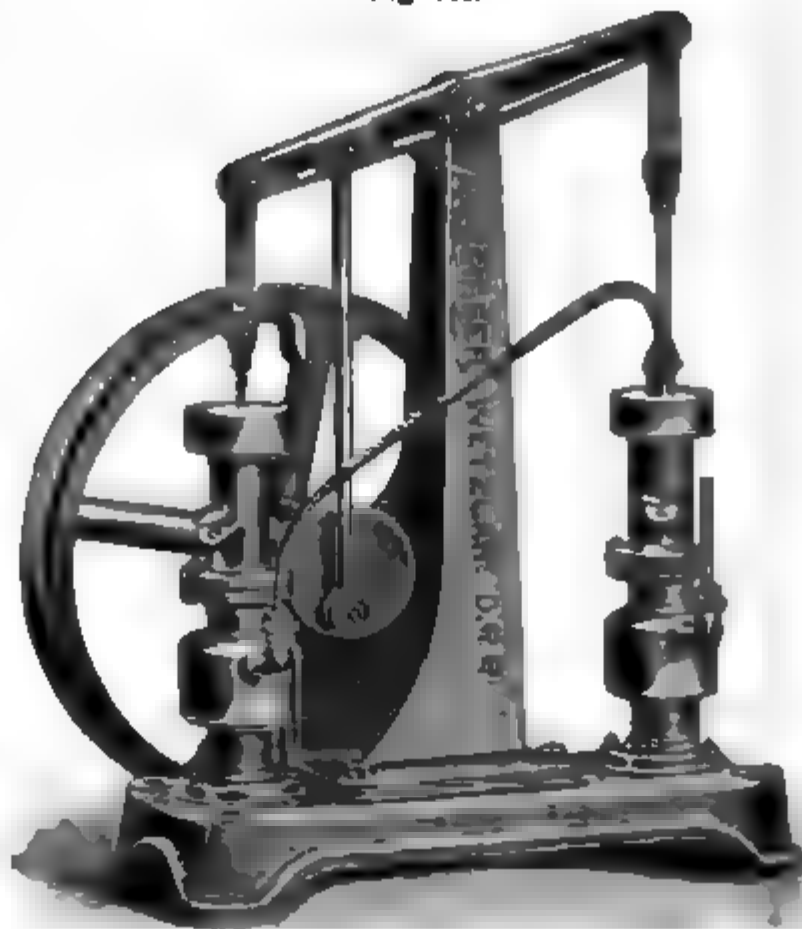
rogen. „Geryk“-  
pe<sup>2)</sup> (Patent  
R. P.) ist eine  
ope, die ent-

n Hand oder mit einem kleinen Elektromotor betrieben wird.  
flliche Wirkung beruht darauf, daß der Kolben auf eine besondere

delenil, Comptes Rendus 60. p 571. 1890 Repertorium für physika-  
hnik von Carl L. 1895

schz. f. phys.-chem. Unterricht 16. p. 283. 1903

Fig. 206.



Art mit Öl gedichtet ist. Es befindet sich nämlich (Fig. 204) auf dem Kolben eine Ölschicht  $J$  von 13<sup>mm</sup> Dicke, welche mit dem Kolben mitbewegt wird. Ein Teil desselben wird, wenn der Kolben oben angelangt ist, durch das Austrittsventil  $G$  hindurchgetrieben, wobei es die Luft vor sich treibt, und dadurch die schädlichen Räume vollkommen ausfüllt. Dem Ventil  $G$  in dem Vorraum  $K$  befindet sich auch eine Ölschicht, so daß die Luft nicht mehr durch das Ventil zurück kann, denn die Ölschichten vereinigen sich zu einer Masse. Bewegt sich der Kolben nach unten, so fließt die nötige Ölmenge wieder durch das Ventil, bevor es sich schließt.  $A$  ist das Saugrohr,  $L$  ein Stutzen zum Einfüllen des Öles. Bei der sogenannten Duplexpumpe wirken zwei solcher Kolbenpumpen hintereinander. Es stellt eine solche Duplexpumpe dar.

Fig. 206



Arthur Pfeiffer (Wetzlar), der diese Pumpen baute, an, daß das Vakuum bis zu 0,0002<sup>mm</sup> getrieben werden kann. Man muß dabei aber berücksichtigen, daß sich diese Zahl auf den Partialdruck Luft bezieht, dabei aber die Temperatur des Öldampfes nicht berücksichtigt sein kann.

Arthur Pfeiffer (Wetzlar), der diese Pumpen baute, an, daß das Vakuum bis zu 0,0002<sup>mm</sup> getrieben werden kann. Man muß dabei aber berücksichtigen, daß sich diese Zahl auf den Partialdruck Luft bezieht, dabei aber die Temperatur des Öldampfes nicht berücksichtigt sein kann.

### § 109.

**Fall der Körper im luftleeren Raum.** In § 92 haben wir bereits, daß wegen des Daseins der Luft nicht alle Körper gleich schnell fallen, daß wir aber die im ersten Kapitel des ersten Abschnittes behauptete Proportionalität von Gewicht und Anziehungskraft und somit den Satz, daß alle Körper gleich schnell fallen, selbst für die spezifisch leichtesten Körper durch eine Luftpumpe nachweisen könnten. Zu dem Ende wendet man eine Röhre an, welche an der einen Seite in eine Metallfassung gekittet ist, die in eine mit einem Hahn versehene Röhre geht, welche in einer auf das Schraubengewinde der Luftpumpe passenden Schraubenmutter endet. Das andere Ende der Röhre ist durch eine Metallfassung luftdicht geschlossen.

In diese Röhre bringt man ein Schrotkorn und eine Feder, oder ein Stückchen Platin und ein Stückchen Zinn, und schraubt sie auf die Luftpumpe und macht sie so luftdicht. Darauf schließt man den Hahn, schraubt die Röhre wieder ab und kehrt sie um. Die in der Röhre enthaltenen Körper fallen dann herab, und man sieht, daß die Platinfeder in demselben Augenblicke unten ankommt wie das Schrotkorn, das Stück Papier ebenso rasch fällt wie das Stück Zinn.

Läßt man dann durch teilweises Öffnen des Hahns wieder Luft in die Röhre eintreten, so sieht man, wie die Körper fallen, die leichteren Körper immer mehr zurückbleiben, je mehr Luft in die Röhre tritt, ein Beweis, daß die ungleiche Geschwindigkeit des Fallens dieser Körper nur Folge des störenden Einflusses der Luft ist.

Eine Reihe von Versuchen, welche gewöhnlich mit der Luftpumpe angestellt werden, um die Existenz des Luftdruckes nachzuweisen, ist die Zersprengung einer über einen Zylinder gespannten Blase, das



inmaderhaften der sogenannten Magdeburger Halbkugeln usf., genüge es, hier erwähnt zu haben. Sie haben viel von ihrem Interesse verloren, welches sie früher darboten, als sie dazu dienten, den großen Druck nachzuweisen, und beitrugen, das Phantom des Horror vacui zu verbannen.

### § 110.

**Quecksilberluftpumpen.** Eine von den bisher besprochenen durch verschiedene Form der Luftpumpen ist die zuerst von Dr. Geißler in Bonn konstruierte Quecksilberluftpumpe.<sup>1)</sup> Bei dieser wird die Pumpe durch eine barometerartige Vorrichtung ersetzt, in welcher durch Heben und Senken von Quecksilber die Torricellische Leere hergestellt wird, mit welcher diejenigen Apparate verbunden werden, aus welchen die Luft entfernt werden soll. Die Einrichtung der Pumpe in der jetzt ihr gegebenen Form zeigt Fig. 207. An einem festen auf massivem Holzfuß aufgestellten Brett ist die bei *B* mit einer etwa 1,5 Liter enthaltenden birnförmigen Erweiterung versehene unten und oben offene Glasröhre *AC* befestigt. Die Länge der Glasröhre von *C* bis zur Birne beträgt etwa 80<sup>cm</sup>. Unten bei *C* ist die Röhre umgebogen und auf die Umbiegung ein dickwandiger Schlauch vom besten Kautschuk gezogen, der die Röhre *AC* mit dem Gefaße *G* in Verbindung setzt, das einen etwas größern Rauminhalt hat als die Birne *B*. Das Gefäß *G* befindet sich in einem Rahmen *R*, der selbst an dem Riemen *L* hängt. Der Riemen *L* ist über zwei Rollen *r*<sub>1</sub> geführt und an der mit der Kurbel *K* drehbaren Rolle *r*<sub>2</sub> befestigt. Wird die Rolle *r*<sub>2</sub> in dem einen Sinne gedreht, so wird *G* gehoben, wird sie in entgegengesetztem Sinne gedreht, so sinkt *G* durch sein Gewicht hinab.

An die Röhre *AC* ist bei *E* etwas oberhalb *B* seitlich ein horizontales Glasrohr angesetzt, welches zu den auszupumpenden Apparaten führt. Bei *H* ist ein einfach durchbohrter Glashahn eingeschliffen.

In der Röhre *AC* befinden sich oberhalb *E* noch zwei weitere eingeschliffene Glashähne *H*<sub>1</sub> und *H*<sub>2</sub>; oben bei *A* ist die Röhre trichterartig erweitert.

Das freie Ende des Rohres *S* ist konisch ausgeschliffen; in dieses Ende wird das Rohr *s*, das zu den weitem Apparaten führt, mit einem sehr sorgfältig an dessen einem Ende angeschliffenen Konus luftdicht eingesetzt. Dieses Rohr trägt das Manometer *M*, welches durch einen ebenso sorgfältig geschliffenen Konus in das konisch ausgeschliffene Ansatzstück *m* eingesetzt ist. Durch einen ebensolchen Schliff ist der Trockenapparat *T* mit der Pumpe verbunden, der, mit wasserfreier Phosphorsäure gefüllt, den Zweck hat, zur trockne Luft in die Pumpe eintreten zu lassen. Die Hähne und Schliffe werden zur vollständigen Abdichtung etwas eingefettet. Als ein besonders geeignetes Fett empfiehlt Röntgen<sup>2)</sup> eine Mischung von reiner Vaseline mit möglichst reinem Wachs. Durch Wahl passender Verhältnisse

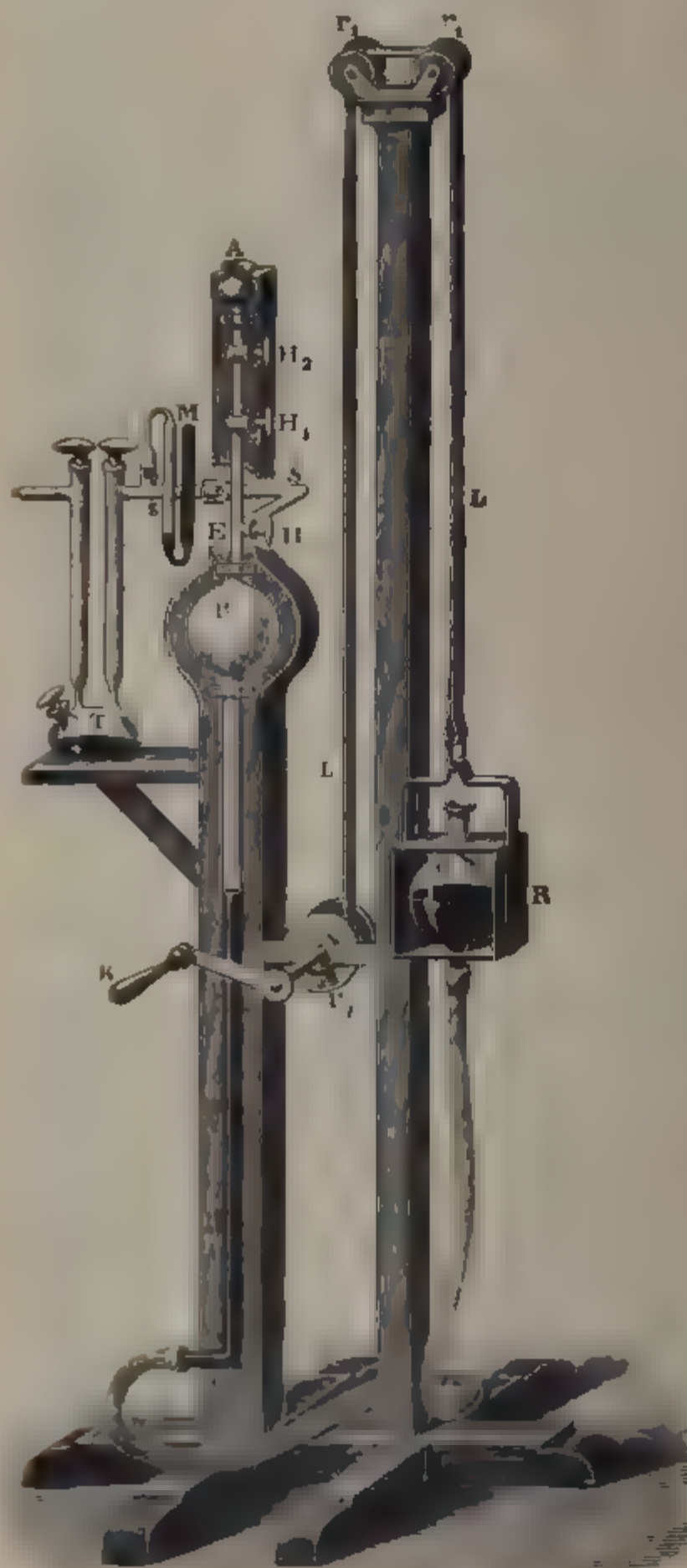
<sup>1)</sup> Poggendorff weist zwar nach Poggend. Ann. 125. 1865, daß die Idee der Quecksilberluftpumpe sehr alt, ja fast ebenso alt als die der gewöhnlichen Luftpumpe ist; man wird aber trotzdem Dr. Geißler als den Erfinder dieser Art Luftpumpen bezeichnen müssen, da er zuerst 1867 eine praktisch benutzbare und benutzte Pumpe konstruierte.

<sup>2)</sup> Röntgen, Wiedem. Ann. 23. p. 23. 1884.

der beiden Substanzen kann dem Fette jede gewünschte Konsistenz gegeben werden. Dieses Fettungsmittel hat den großen, gerade für die Luftpumpe unschätzbaren Vorzug, daß es keine Dämpfe abgibt und daß es nicht verhartet.

Um die Pumpe zu gebrauchen, wird das Gefäß *G* in seiner tiefen

Fig. 20.



Lage mit Quecksilber ausgefüllt, der Hahn *H*, der zu den anzupumpenden Apparaten führt, wird geschlossen und die Hähne *H*<sub>1</sub> und *H*<sub>2</sub> werden geöffnet. Man hebt das Gefäß *G*, wodurch selbstverständlich das Quecksilber in *AC* emporsteigt; man setzt das Heben so weit fort, bis etwas Quecksilber durch den Hahn *H*<sub>1</sub> tritt (der Hahn *H*<sub>1</sub> wird erst später benutzt und schließt den Hahn *H*<sub>1</sub>). Läßt man jetzt das Gefäß *G* hinab, so wird, sobald das Niveau des in ihm vorhandenen Quecksilbers mehr als die Höhe des Barometers beträgt, unter *H*<sub>1</sub> ist, das Quecksilber in *AC* sinken, und sich, falls das Quecksilber luftfrei ist, die Barometerleere lassend. Man läßt das Gefäß *G* weiter hinab, daß in *AC* das Quecksilber bis einige Zentimeter unter der Birne *B* steht.

Öffnet man jetzt den Hahn *H*, das heißt, daß man ihn so, daß die anzupumpenden Röhre mit der Birne *B* in Verbindung stehen, so strömt die Luft in die Birne.

Man schließt wieder *H* und hebt nun das Gefäß *G* so hoch, daß *H*<sub>1</sub> zu öffnen das Gefäß *G* so hoch, daß das Quecksilber in *AC* steigt. Ist der Druck der in *AC* ist

mierten Luft annähernd dem der äußern Atmosphäre gleich, so öffnet man  $H_1$  und hebt das Quecksilber bis über  $H_1$  wie vorhin usf. Der Hahn kommt zur Wirkung, wenn die Verdünnung schon ziemlich weit gegeben ist. Man hebt dann das Quecksilber bis über  $H_2$  und schließt, wor man  $G$  hinabläßt,  $H_2$  und wenn das Quecksilber  $H_1$  passiert hat, schließt man  $H_1$ . Zwischen  $H_1$  und  $H_2$  entsteht ein luftleerer Raum. Bei dem nächsten folgenden Pumpen wird dann das Quecksilber bei geschlossenem Hahn  $H_1$  vorsichtig langsam gehoben, damit es nicht bei der schon starken Verdünnung gegen den Hahn  $H_1$  schlägt, wodurch ein solcher Stoß entstehen kann, daß die oberen Teile der Pumpe abgeschlagen werden können. Ist wenn das Quecksilber bis zu  $H_1$  gehoben ist, öffnet man  $H_1$ . Die neuen Luftblasen treten demnach in einem luftverdünnten Raum aus und das Quecksilber kommt nicht mehr mit der Atmosphäre in Berührung. Infolgedessen wirkt die Anbringung des zweiten Hahns ähnlich wie der Robinetsche Hahn, die Verdünnung geht weiter als bei Anwendung nur eines Hahnes.

Eine etwas andere Anordnung hat wenige Jahre später (1862) Töpler der Quecksilberluftpumpe gegeben, die Töplersche Pumpe ist eine Ventilluftpumpe. Wenn bei den gewöhnlichen Luftpumpen im allgemeinen die Hahnluftpumpen den Ventilluftpumpen vorzuziehen sind, so kommt bei den Quecksilberluftpumpen der Töplerschen Luftpumpe der Vorzug zu, weil sie jeden Hahn, jeden Glasschliff entbehrlich macht. Die Töplersche Pumpe in der Form, welche ihr Hagen gegeben hat<sup>1)</sup> mit nur geringen Abweichungen, zeigt Fig. 208. Das Rohr  $AC$  mit der Birne  $B$  ist dem auf und nieder zu hebenden Gefäß  $G$  ist dasselbe wie bei der eislerschen Luftpumpe. Bei  $A$  ist an die Röhre ein enges zweimal gebogenes und unter der zweiten Biegung bei  $b$  etwa 80<sup>cm</sup> langes Rohr von 2<sup>mm</sup> Weite angesetzt. Dasselbe endet bei  $c$  in einem mit Quecksilber versehenen Glase, dem man häufig bei  $d$  ein Ausflußrohr gibt, um in diesem Glase ein konstantes Niveau zu erhalten. Das obere Ende des Rohres ist etwa bis 78<sup>cm</sup> über dem Niveau des Quecksilbers befindet sich vor einer Skala, welche auf der einen Seite die Höhe über  $c$  in Millimetern anzeigt, auf der andern Seite eine Teilung hat, welche das Volumen der leeren Röhre von einer Marke bei  $m$  bis zu dem betreffenden Teilstrich in  $U$ <sup>cm</sup> angibt.

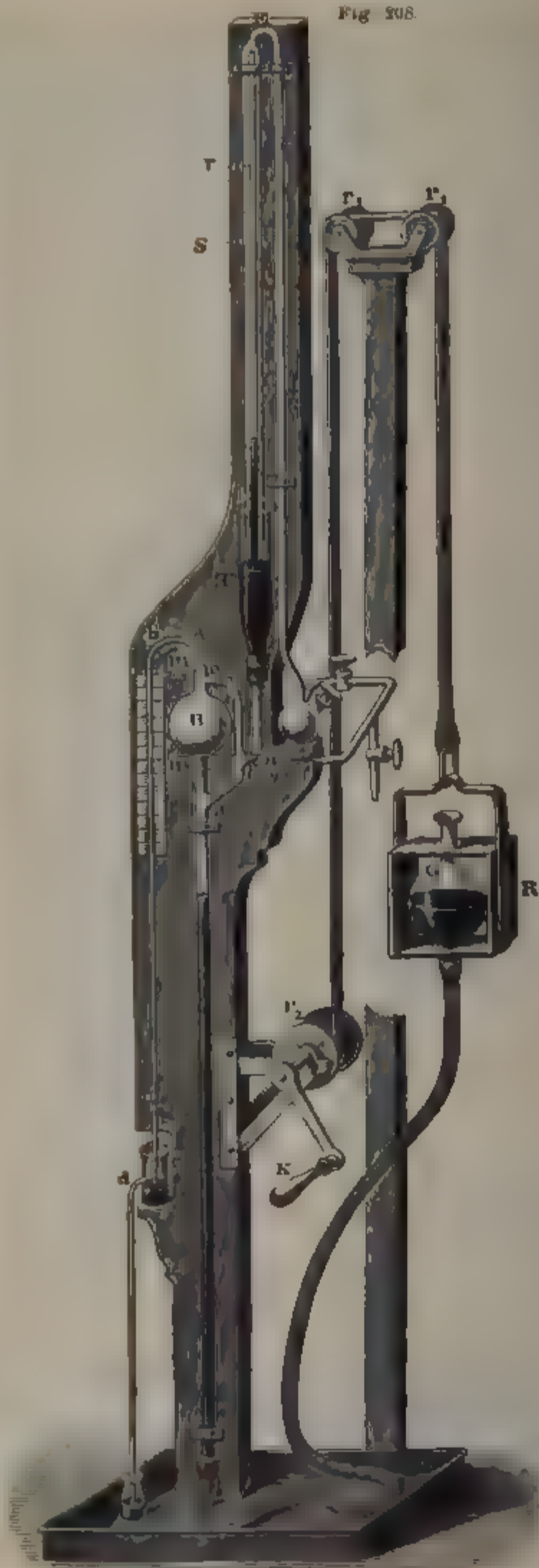
Unterhalb der Birne  $B$  ist an das Rohr  $AC$  bei  $a$  ein Rohr angeschmolzen, das um die Birne herumgeführt ist und bei  $e$  wieder in das Rohr  $AC$  mündet. An dieses Rohr ist bei  $f$  das Rohr angesetzt, das zu den auszupumpenden Apparaten führt. Die Ansatzstelle  $f$  befindet sich in der gleichen Höhe, daß die Mündung des zu den auszupumpenden Apparaten führenden Rohres  $r$  bei dem Heben des Quecksilbers eher abgeschlossen ist, als das Quecksilber in die Birne  $B$  eintritt.

Das Rohr  $r$  steigt von  $f$  ab vertikal so weit empor, daß sein Ende höher als die höchste Barometerhöhe über dem horizontalen Teile bzw. der höchsten Stelle des gebogenen Rohres  $Abc$  liegt.

Die zu den auszupumpenden Apparaten führenden Glasröhren können an den Enden dieses Rohres angeschmolzen werden. Besser aber stülpt

<sup>1)</sup> Bessel-Hagen, Wiedem. Ann. 12. p. 425. 1881.

Fig. 208.



man über das Rohr *r* in das Rohr *S*, das mit trichterförmiges passendes Quecksilber gefülltes hinabreicht, das an einem durchbohrten Kautschukpfropfen herdrückt auf das Rohr nahe an dessen untere aufgesetzt ist. Am Ende dieses Rohres eine Glasröhre angeschmolzen, die nach Einschalten des Trockenapparates, die Feuchtigkeit von dem fernhält, zu den ausströmenden Apparaten führt, kann diese direkt angeschlossen sein, so daß es bei Anwendung der Töpler'schen Pumpen Hahnes und keines Gefäßes bedarf. Nehmen wir an, es sei irgend ein Raum, welchem die an *s* angebrachte Röhre führt, zu pumpen. Das Gefäß *G* wird gehoben und ehe es in *B* tritt, wird bei *f* die Verbindung zu *R* unterbrochen. Bei weiterem Heben des Gefäßes wird die in *B* befindliche Luft durch das Rohr *bc* ausgetrieben, hebt das Quecksilber in *bc*, daß es selbst durch *bc* auszufließen beginnt, senkt dasselbe langsam, bis das Quecksilber trennt irgend einer Stelle der Röhre *Ab*, sinkt in *bc* bis barometerhöhe hinab, ebenso in der Röhre *bc* luftleer zurücklassend, die Niveaudifferenz in *bc* die Barometerhöhe in *bc* die Mündung *f* frei, so daß die Luft aus dem zu pumpenden Raume in die Röhre *bc* strömt. Bei den ersten Heben

man vorsichtig verfahren, denn es tritt die Luft, sobald die Mündung  $e$  frei wird, schon unter Hinausstößen des Quecksilbers aus der Röhre  $fe$  in die Birne herein. Wenn man das Quecksilber in  $B$  nicht sehr langsam sinken läßt, kann durch den Stoß des Quecksilbers der obere Teil der Pumpe zertrümmert werden. Durch die in  $B$  eintretende Luft sinkt das Quecksilber in  $bc$ , und man kann an der Höhe des Quecksilbers in dieser Röhre über  $e$  sofort erkennen, welche Verdünnung erreicht ist. Man hebt das Quecksilber im Gefäße  $G$  von neuem. Ist  $f$  erreicht, so steigt das Quecksilber bei weiterem Heben von  $G$  entsprechend der in den auszupumpenden Räumen erreichten Verdünnung in  $r$  hinauf. Durch die Kompression der in  $B$  enthaltenen Luft wird bei weiterem Heben das Quecksilber in  $bc$  hinabgedrückt und die Luft entweicht bei  $e$ . Man hebt weiter, bis Quecksilber durch das Rohr  $bc$  unten austritt und senkt das Gefäß  $G$  hinab, wobei sich derselbe Vorgang wiederholt wie vorher. In dieser Weise führt man fort, bis die gewünschte Verdünnung erreicht ist.

Der in der Pumpe noch vorhandene Luftdruck ergibt sich jedesmal aus der Höhe der Quecksilbersäule in  $bc$  und um bei starker Verdünnung den Luftdruck direkt abzulesen dient die Teilung am oberen Ende von  $bc$ . Ist die Verdünnung sehr weit getrieben, so ist die Änderung der Quecksilberhöhe in  $bc$  nicht mehr mit Sicherheit zu erkennen. Um die Verdünnung aber auch dann genau anzugeben, hat Töpler folgenden Weg eingeschlagen. Man bestimmt, ehe man die Pumpe an ihrem Stativ befestigt, das Volumen der Röhre  $Abc$  von der Marke  $a$  bis zu den verschiedenen auf der Teilung rechts von der Röhre angebrachten Teilstrichen, bzw. man versieht die Röhre mit einer Teilung, welche den Raum von  $m$  ab bis zu den verschiedenen Teilstrichen in  $0,1^{\text{cm}}$  angibt. Bei einem Durchmesser des Rohres von  $2^{\text{mm}}$  hat der Raum für  $0,1^{\text{cm}}$  etwa  $30^{\text{mm}}$  Länge, man sieht, daß man so mit Sicherheit auf weniger als  $0,01^{\text{cm}}$  ablesen kann. Man mißt ferner den Raum der Birne und des Seitenrohres  $ef$  von der Marke  $m$  bis  $nn$ , also jener Stelle, welche das Quecksilber gerade haben muß, damit das Rohr  $r$  abgeschlossen ist. Das Volumen sei gleich  $V$ .

Will man nun den Druck, der bei starker Verdünnung in der Pumpe noch vorhanden ist, genau bestimmen, so hebt man zunächst das Quecksilber bis zum Niveau  $nn$  und beobachtet den Stand des Quecksilbers in  $bc$ . Ist das durch das Quecksilber in  $bc$  abgesperrte Volumen der Röhre bis  $m$  gleich  $r$ , so ist jetzt zwischen den Quecksilberflächen  $nn$  und in  $bc$  ein Luftvolumen unter dem unbekannten Drucke  $x$  abgesperrt. Man hebt das Quecksilber bis  $m$ ; das Quecksilber in  $bc$  sinke dabei um  $d^{\text{mm}}$ . Ist das Volumen von  $m$  bis zu dem jetzigen Stande des Quecksilbers in  $bc$  gleich  $r_1$ , so ist die Luft von dem Volumen  $V + r$  auf das Volumen  $r_1$  komprimiert und die komprimierte Luft übt den Druck  $d + x$  aus. Zur Berechnung von  $x$  haben wir daher die Gleichung

$$(V + r)x = r_1(d + x).$$

Demnach

$$x = \frac{r_1}{V + r - r_1} d.$$

Nehmen wir an  $V$  sei  $1500^{\text{cm}}$  und  $r_1$ , das wir bei den stärksten

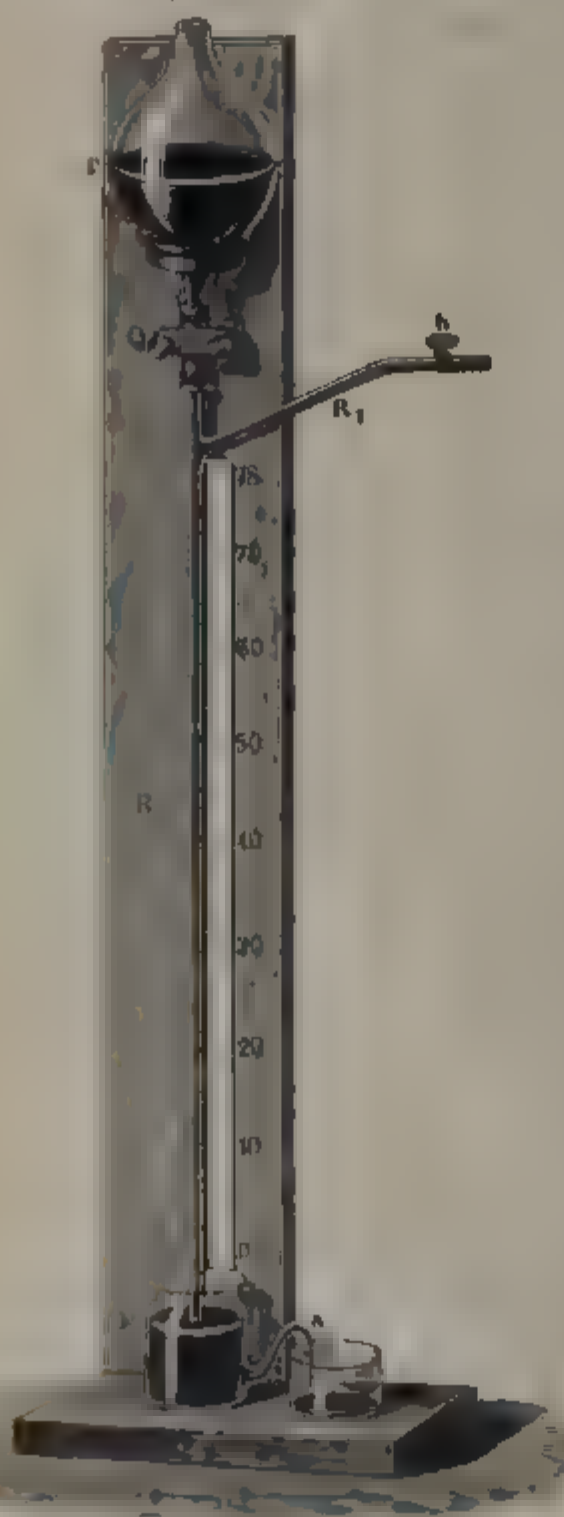


Verdünnungen gleich  $v$  setzen können, sei  $0,2^{\text{cm}}$ , so ist

$$x = \frac{1}{7500} d.$$

Würde man dann  $d$  nur auf  $0,1^{\text{mm}}$  genau bestimmen können, so

Fig. 201



könnte man  $x$  bis auf  $0,000012^{\text{cm}}$ , also bis auf den 57 millionsten Teil des Druckes einer Atmosphäre genau bestimmen. Da man die Genauigkeit von  $d$  noch weiter treibt und das Verhältnis  $v:1$  noch günstiger herstellen kann, lassen sich noch erheblich kleinere Drücke genau messen. McLeod hat im Töplersche Verfahren zur Konstruktion eines Manometers benutzt, welches zur Ablesung sehr kleiner Drücke sehr geeignet ist<sup>1</sup>.

Wir werden nachher die mit diesen Pumpen erreichbaren Verdünnungen angeben.

Eine auf einem ganz andern Prinzip beruhende Quecksilberpumpe ist die von Sprengel angegebene<sup>2</sup>; dieselbe beruht auf den § 87 abgeleiteten Sätzen über den hydraulischen Druck.

An ein trichter- oder flaschenförmiges Gefäß  $T$  (Fig. 202) ist unten mit einem Kautschukschlauch eine etwa  $800^{\text{mm}}$  lange d. konische Glasröhre von überall gleichem etwa  $2^{\text{mm}}$  betragenden Innendurchmesser angehängt, deren anderes offenes Ende in ein kleines seitlichem Ausflußrohr  $a$  verengt. Gefäß  $F$  mündet. An das Rohr  $R$  ist etwa  $30^{\text{mm}}$  unterhalb des Kautschukschlaches eine seitliche Röhre  $R_1$  angeschmolzen, in welcher bei  $h$  passend einen Glasstopfen setzt. Diese Röhre führt zu

auszupumpenden Apparaten. Über den Kautschukschlauch ist ein Quetschhahn gelegt, durch welchen man den Schlauch schließen kann, so daß die Pumpe wirken zu lassen, füllt man den Trichter mit Quecksilber.

1. Eine Beschreibung des Apparates von McLeod befindet sich Ber. 1 p. 176 1877.

2. Sprengel, Journal of chemical Society 3 (2) 1865. Poggend Ann 129 p. 564 1865.

durch einen Druck auf den Quetschhahn den Kautschukschlauch und läßt das Quecksilber in einem stetigen Strahl ausfließen. Die durch die Röhre  $R_1$  mit dem Apparat verbundenen Räume werden dann allmählich leer gepumpt, indem die Luft durch das bei  $R_1$  vorbeifallende Quecksilber mitgerissen und unten aus dem Rohre  $R$  ausgetrieben wird. Hat der Apparat die angeführten Dimensionen, so kann man ziemlich vollständige Barometerleere durch fortgesetztes Ausfließen erhalten. Es ergibt sich das unmittelbar aus der letzten Gleichung des § 87. Nennen wir  $h$  die Tiefe des Ansatzrohres  $R_1$  unter dem Niveau des Quecksilbers in  $T$ ,  $H$  den Abstand der untern Ausflußöffnung von demselben Niveau,  $p_0$  den Druck der Atmosphäre, der auf dem obern Niveau des Quecksilbers lastet und ebenso in der Ausflußöffnung wirkt, so ist der bei  $R_1$  vorhandene hydraulische Druck

$$p = p_0 - s(H - h).$$

Ist nun  $H - h$ , die Länge der Quecksilbersäule unterhalb  $R_1$ , gleich der Höhe des Barometers, so ist  $p = 0$ , es wird also aus den mit  $R_1$  verbundenen Räumen in die Röhre  $R$  die Luft gerade so hereingezogen wie in den leeren Raum des Barometers, und deshalb jeder mit  $R_1$  verbundene Raum durch fortgesetztes Pumpen ebenso weit entleert wie mit den andern Quecksilberluftpumpen.

Man kann natürlich die Verbindung des Fallrohrs mit dem Gefäße  $T$  statt durch einen Kautschukschlauch auch dadurch herstellen, daß man mit Zwischensetzung eines Glashahnes dasselbe direkt an das Gefäß anschmilzt. Jedoch ist diese Befestigung nicht ratsam, da bei häufigem Gebrauche der Pumpe durch die Erschütterung infolge der Stöße des fallenden Quecksilbers das Fallrohr Sprünge bekommt und erneuert werden muß.

Giningham<sup>1)</sup> hat zunächst einige Verbesserungen an der Sprengel'schen Pumpe angegeben. Viel wichtiger aber war die zweckmäßige Umländerung derselben in eine selbsttätige Pumpe von Kahlbaum.

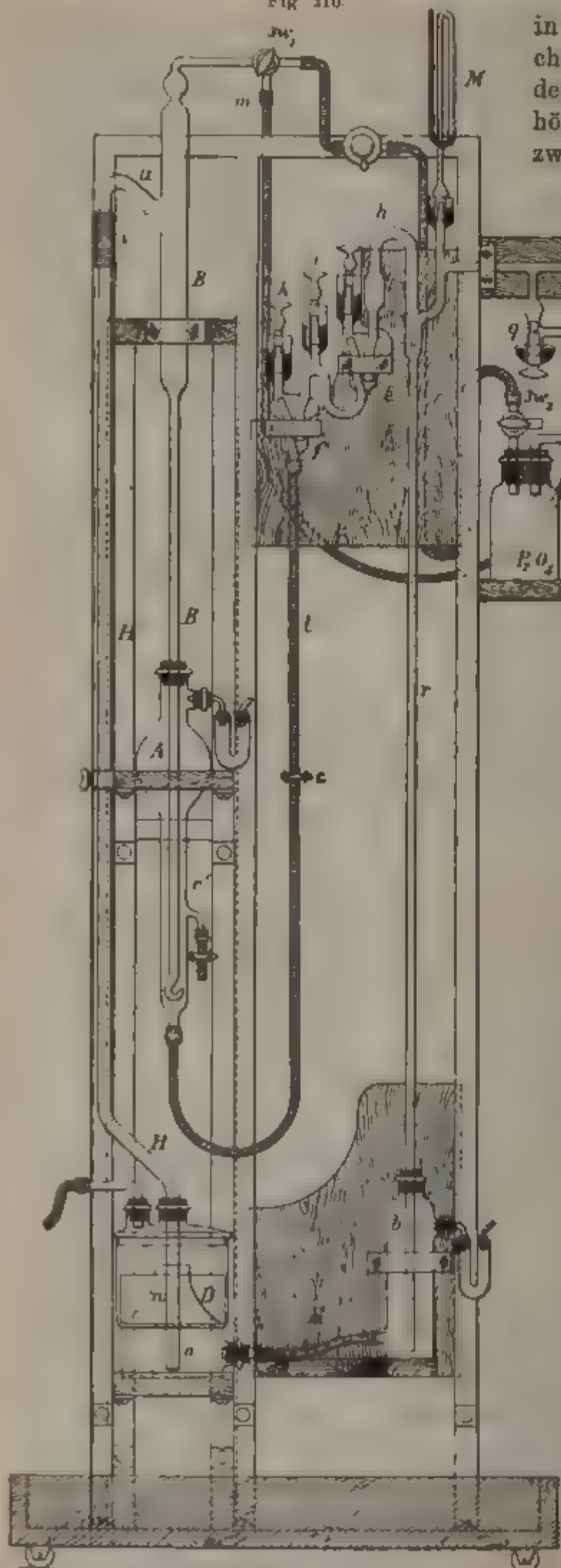
Die Kahlbaumsche Pumpe besteht aus zwei Teilen, der eigentlichen Pumpe nach dem Sprengelprinzip und dem automatischen Hebeapparat. Zur Erläuterung des Apparates diene die Fig. 210.

Das Quecksilber fließt aus dem Sammelgefäß  $A$  durch den Schlauch  $f$  nach den beiden Luftfängen  $j$  und  $i$ , die durch eine s-förmige Röhre miteinander verbunden sind. Die Luftfänge dienen dazu die dem Quecksilber anhaftende Luft zu entfernen. Die Einrichtung derselben ist aus der Zeichnung zu ersehen. Aus  $e$  gelangt das Quecksilber in das Fallrohr  $r$  und sammelt sich in  $b$  an, von wo es in den Hebeapparat  $D$  hinüberfließt. Durch den mittleren Stutzen des eingeschliffenen Deckels führt bis direkt über den Boden von  $D$  das Heberohr  $H$ ; dasselbe ist oben durch  $u$  mit einem Barometerrohr  $B$  und außerdem durch den Hahn  $3\alpha$ , mit einer Wasserstrahlpumpe in Verbindung gesetzt. Unten bei  $o$  in  $H$  ist ein kleines Luftloch angebracht. Wird die Wasserstrahlpumpe in Gang gesetzt, so wird in  $H$  Quecksilber gehoben, aber, da durch das Luftloch  $o$  gleichzeitig Luft mit eingesaugt wird, nicht in einer kontinuierlichen, sondern

<sup>1)</sup> Giningham, Proceeding of Royal Society. 25. p. 396 1877. Beiblätter zu Poggend Ann. I. p. 176. 1877.



Fig. 310.



in einer von Luftblasen unterbrochenen Säule. Das Quecksilber steigt deshalb nicht nur bis zu Barometerhöhe, sondern wesentlich höher, und zwar bis  $u$ , wo es nach  $B$  überfließt und nach

$A$  gelangt, und nun in die eigentliche Pumpe fließen kann. Vor Beginn wird die ganze Pumpe samt dem aufzupumpenden Rezipienten mit

der Wasserstrahlpumpe evakuiert, soweit wie es geht, was ohne weiteres durch passende Stellung der verschiedenen Hähne ausgeführt werden kann. Nachher dient die Wasserstrahlpumpe nur noch zum Heben des Quecksilbers. Die weiteren Einzelheiten ersieht man aus der Zeichnung und in der von Kahlbaum verfaßten Abhandlung<sup>1)</sup>. Die Pumpe wirkt rasch und evakuiert sehr hoch.

In neuester Zeit sind zahlreiche neue Konstruktionen von Quecksilberpumpen entstanden, die hier unmöglich alle erwähnt werden können. Kurz besprochen sei eine von Gaebe<sup>2)</sup> gebaute Rotationsquecksilberpumpe.<sup>3)</sup>

Die Pumpe besitzt kein Ventil und keinen Hahn. Man arbeitet auch hier mit einer Wasserstrahlpumpe vor.

1) W. A. Kahlbaum, Wied. Ann. 53 p. 199 1894.

2) W. Gaebe, Ber. d. 3ten phys. Gesellsch. 3 p. 28 1890 u. Phys. Ztschr. 6 p. 70 1891.

3) Auch Kaufmann hat eine Rotationsquecksilberpumpe konstruiert. Ztschr. für Instrumentenkunde 1905 p. 129.

Fig. 211 stellt einen Querschnitt dar. In dem Gehäuse  $g$ , das auf der Seite durch eine Glasplatte  $g'$  verschlossen ist, befindet sich die Trommel  $t$ , welche durch die luftdichte Achse  $a$  gedreht werden kann. Die Zwischenwände  $z$  stellen die Verbindung mit dem Rezipienten vor, und  $f_1$  und  $f_2$  sind zwei Öffnungen in der Trommel. Mit  $r$  wird die Wasserabpumpung in Verbindung gesetzt.

Die Wirkung der Pumpe beruht darauf, daß die durch Zwischenwände unterteilte Trommel über Quecksilber  $q$  Räume abschließt, deren Volumen beim Drehen geändert werden. Die Räume mit wachsendem Volumen kommunizieren mit dem Rezipienten, die mit abnehmendem Volumen mit dem Vorvakuum und geben den Gasinhalt an dasselbe ab. Fig. 212 stellt einen Schnitt durch den Apparat ausgeführt in der Linie  $x x$  vor. Man

Fig. 211.

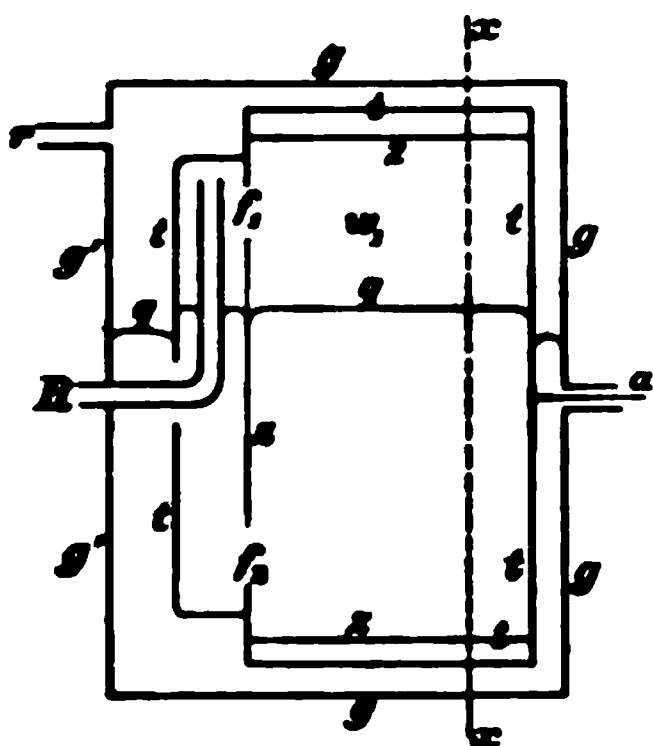
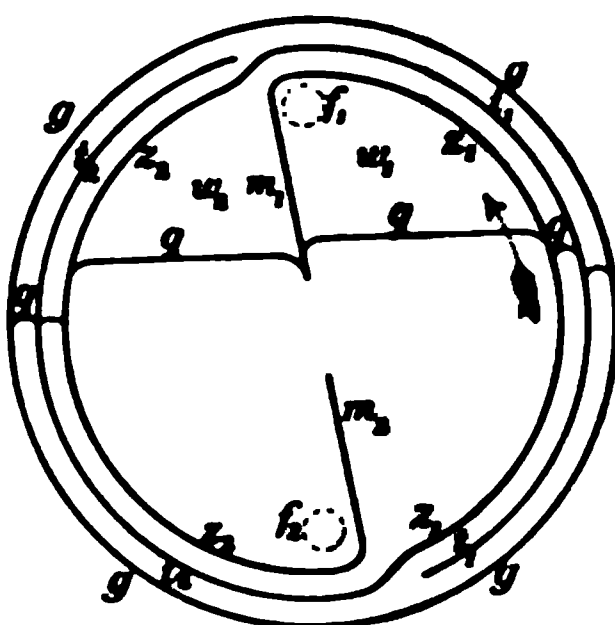


Fig. 212.



ist, daß bei der Rotation in der Richtung des Pfeiles der Rezipient durch  $f_1$  mit dem wachsenden Volumen  $m_1$  in Verbindung steht. Ist die Drehung soweit erfolgt, daß  $f_1$  unter die Quecksilberoberfläche getaucht ist, so liegen die Verhältnisse wie in der linken Trommelhälfte. Das Quecksilber wirkt als Kolben und komprimiert das Gas zwischen den Wänden  $z_1$  und  $t_1$  und bringt es in das Vorvakuum.

Die Pumpe evakuiert bis zu einem Drucke von  $0,00007^{\text{mm}}$  nach den Angaben von Gaede.

Da die Spannkraft des Quecksilbers geringer ist wie die des Öles, werden für ganz hohe Evakuierungen die Quecksilberpumpen den Ölpumpen überlegen sein.

Hagen hat die Verdünnung bestimmt, welche man mit den Quecksilberluftpumpen erreichen kann; bei der Untersuchung der Geißlerschen Pumpe pumpte er mit derselben eine Töplersche leer und maß in der ihm angegebenen Weise in der Töplerschen Pumpe die erreichte Verdünnung. Er erhielt mit einer Geißlerschen Pumpe ohne zweiten Hahn

als Grenze des erreichbaren Druckes  $0,11^{\text{mm}}$ , mit Anwendung des zweiten Hahns  $0,0082^{\text{mm}}$  und mit der Töplerschen Pumpe  $0,000012^{\text{mm}}$ . Dem Rood soll aber nach einer von Hagen in seiner Abhandlung mitgetheilten Notiz eine ebenso weit, ja vielleicht noch weiter gehende Verdünnung mit der verbesserten Sprengelschen Pumpe erhalten haben, wie

Hagen mit der Töplerschen, eine Verdünnung von etwa ein millionstel der Atmosphäre. Kahlbaum gibt als die mit seiner erreichte Maximalleistung eine Verdünnung auf  $0,000003 \text{ mm}$ .

Auf ganz demselben Prinzip wie die Sprengelsche Pumpe die Bunsensche Wasserluftpumpe, in welcher nur das Quecksilber Wasser ersetzt ist.

### § 111.

**Die Kompressionspumpe.** Die Kompressionspumpen haben derjenigen der Luftpumpen entgegengesetzte Aufgabe, sie dienen

Fig 213

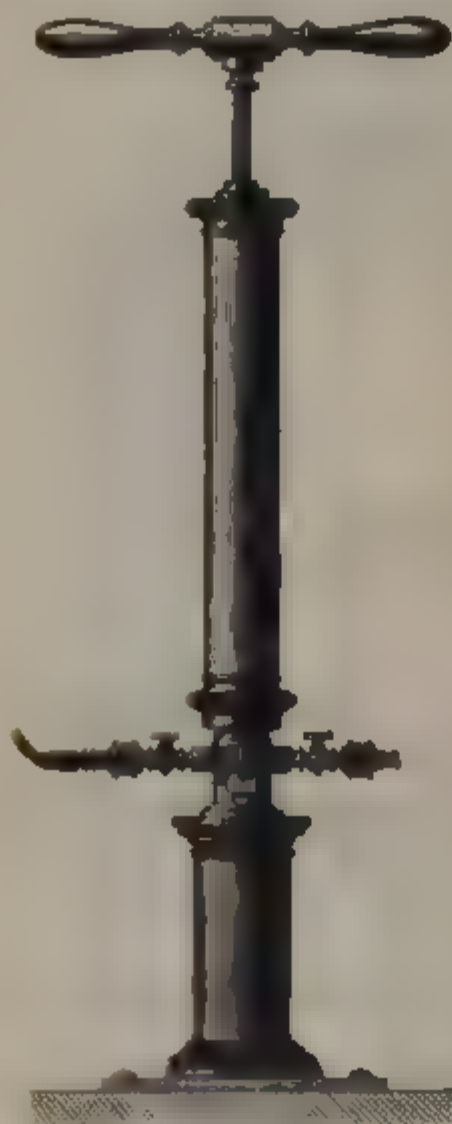
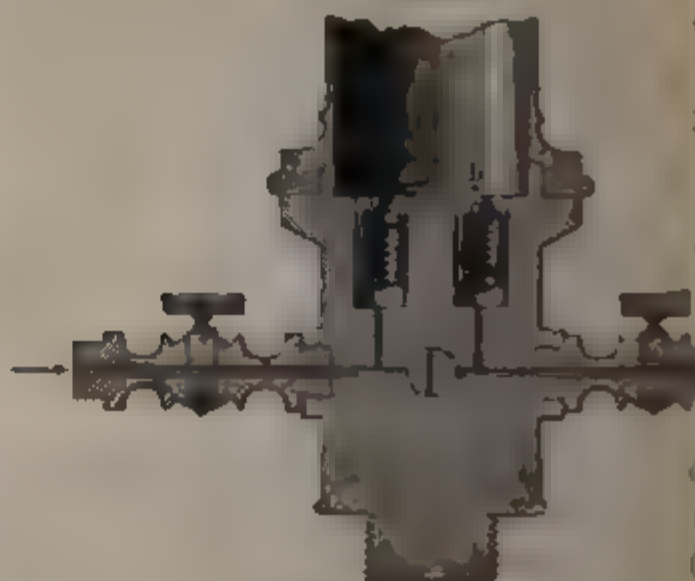


Fig 214



in irgend einem Raume ein Gas zu verdichten. Die Fig 213 der Hahnluftpumpe kann ohne jede konstruktive Veränderung unmittelbar als Kompressionspumpe benutzt werden, zu diesem Zwecke muß das Spiel der Hähne umgekehrt werden. Öffnen wir den Hahn  $l$  bei seinem  $h$ , so tritt bei Zurückziehen des Kolbens Luft aus der Atmosphäre in den Zylinder, schließen wir  $l$  und öffnen bei Rückführung des Kolbens  $k$ , so wird die Luft in den Rezipienten gepreßt. Selbstverständlich, wenn dem Falle der Rezipient auf dem Teller der Pumpe befestigt wird, so wird die im Innern desselben verdichtete Luft sonst denselben aufsteigen, wie die einstiefelige kann man auch die zweistiefelige Luftpumpe

ein Graßmannsche Hahne unmittelbar als Kompressionspumpe gebraucht, indem man den Hahn bei dem Pumpen umgekehrt legt.

Indes wendet man selten die Luftpumpen zum komprimieren an; die häufigsten zur Anwendung kommenden Kompressionspumpen sind einfache Röhren von starkem Eisen oder Messing, in denen ein massiver Kolben auf- und abgeht. Dieselben werden an das mit dem entsprechenden Anschlusse versehene Gefäß, welches die verdichtete Luft aufnehmen soll, angeschraubt. Zum Schöpfen der Luft dient dann ein Loch in der Röhre, welches nahe an dem andern Ende der Röhre sich befindet, so daß der Kolben in seiner äußersten Stellung sich über demselben befindet, die Luft frei in den innern Raum des Zylinders unter dem Kolben eintreten kann. Derart sind z. B. die kleinen Kompressionspumpen, deren man sich bedient, um die Luft in dem Kolben der Windbüchse zu komprimieren.

Eine sehr bequeme sowohl als Luftpumpe als auch als Kompressionspumpe zu benutzende Anordnung, es ist eine Ventilpumpe, zeigt Fig. 213 und Fig. 214. Sie dient zugleich, um andere Gase als atmosphärische Luft in einem Raume zu verdichten.

Die Pumpe ist einstiefelig, sie wird auf den Boden fest aufgeschraubt. In der Stange des ganz massiven Kolbens befindet sich oben ein Handgriff, den man mit beiden Händen faßt, und an dem man den Kolben abwechselnd auf und nieder bewegt. In dem Boden der Pumpe sind zwei Ventile *a* und *b*, deren eines sich von unten nach oben öffnet und den Pumpentiefel mit der freien Luft oder mit dem Gefäße in Verbindung bringt, in welchem das zu verdichtende Gas angesammelt ist; es öffnet sich, wenn man den Kolben in die Höhe zieht. Das andere Ventil *b* öffnet sich entgegengesetzter Richtung, wenn der Kolben niedergeht. Dieses setzt den Zylinder der Pumpe durch die Röhrenleitung *bd* mit dem Raume in Verbindung, in welchem das Gas komprimiert werden soll.

Man sieht, wie dieser Apparat zugleich als Luftpumpe und auch als Kompressionspumpe dienen kann. Bringt man die mit dem Ventil *a* in Verbindung stehende Röhre mit einem Rezipienten in Verbindung und läßt die Röhrenleitung *bd* mit der äußern Luft kommunizieren, so dient der Apparat als Luftpumpe, macht man die Verbindungen umgekehrt, als Kompressionsmaschine.

Eine Kompressionspumpe, welche sehr starke Verdichtungen hervorbringen imstande ist, bietet der Apparat von Natterer. Er dient vorwiegend dazu, um Gase in den flüssigen Zustand zu versetzen.

Der Natterersche Apparat (Fig. 215) besteht im wesentlichen aus einem dickwandigen Rohr *l* von sehr kleinem innern Durchmesser, in welchem ein massiver Kolben auf und ab bewegt. Zur Sicherung der vertikalen Bewegung des Kolbens ist derselbe durch einen Ring geführt. Unterhalb des Kolbens ist mit dem Kolben durch ein Scharnier die Schubstange *s* in Verbindung, die ihre auf und nieder gehende Bewegung durch das Schwungrad *R* bekommt, an dessen Achse sie mittels einer Kurbel exzentrisch befestigt ist.

Der Pumpenzylinder ist durch eine Röhrenleitung *L* mit einem Gasreservoir in Verbindung, aus welchem beim Niedergange des Kolbens das Gas in den Pumpenzylinder eingesaugt wird.

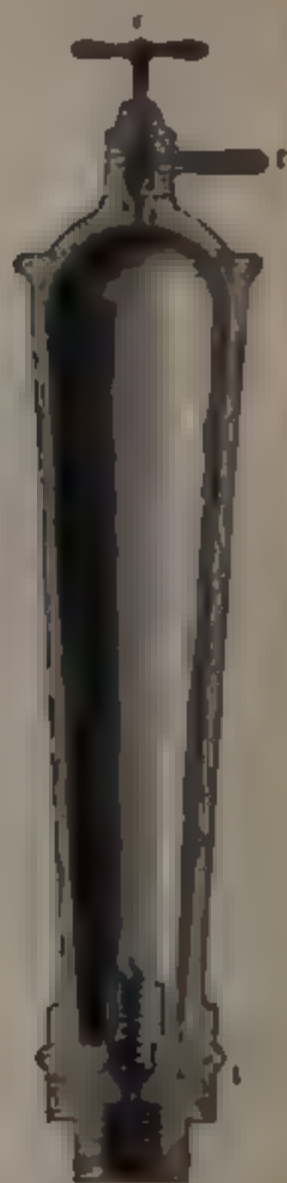
Auf dem Pumpenzylinder ist eine starke Flasche von Schmiedeeisen

(Fig. 215) befestigt, in welche das Gas hineingepreßt wird. Die Flasche wird vorher auf ihre Festigkeit geprüft, indem man mittels Wasser auf der Innenfläche derselben einen Druck von 150 Atmosphären ausübt. Nach dem Öffnen der Flasche zu öffnende Ventil *l* (Fig. 216) läßt das Gas eintreten. Um das verdichtete Gas oder das flüssig gewordene

Fig 215.



Fig 216



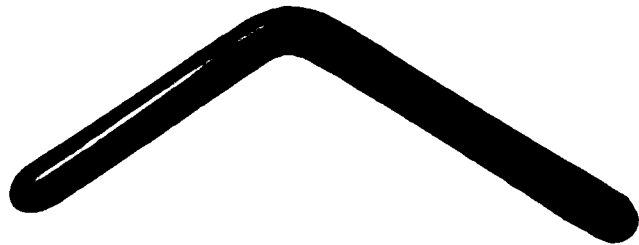
zu lassen, ist an dem obern Ende der Flasche eine kleine Öffnung, in dem Röhrchen *r* mündet, angebracht. Dieselbe wird verschlossen durch einen mit einem Schraubengewinde versehenen Stift *s*, der konisch in den Hals der Flasche eingeschliffen ist. Will man das Gas ablassen, so schraubt man die Flasche ab, kehrt sie um, so daß die Öffnung *r* unten ist, und öffnet dieselbe durch Drehen der Schraube *s*.



ick des über dem flüssigen stark verdichteten Gases treibt dann sigkeit heraus. Außer diesen Kompressionspumpen kann man auch stedschen Apparat zur Kompression der Gase benutzen, wie es ts tat (§ 99).

dfach dient auch folgendes Verfahren dazu, um ganz ohne mecha- littel ein Gas zu komprimieren. Man schließt in eine heberförmig e Röhre von starkem Glase Fig. 217 stanzen, durch deren Einwirkung auf- das Gas entwickelt wird. Durch die elung des Gases in diesem geschlos- ume und die Ansammlung desselben r Druck des Gases in der Röhre ein ormer und es bedarf großer Vorsicht, er Apparat nicht springt. Einen nach diesem Prinzip konstruier- arat wandte Thilorier an, um flüssige Kohlensäure in großen herzustellen.<sup>1)</sup>

Fig. 217.



## § 112.

üssigmachen der Gase. Im § 100 haben wir das Verhalten der ten permanenten Gase, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlen- ter hohen mit der Kompressionsmaschine herstellbaren Drucken be- , und gesehen, daß dieselben von gewissen schon ziemlich starken an sehr viel weniger zusammengedrückt werden, als es das Ma- che Gesetz verlangt, wenn man die Kompression bei gewöhnlicher tur oder auch bei derjenigen des schmelzenden Eises vornimmt. ter denselben Umständen verhalten sich die übrigen Gase ganz bei diesen zeigt sich vielmehr, daß mit steigendem Drucke die sibilität stetig wächst bis zu einem gewissen für die verschiedenen rschiedenen Drucke. Ist dieser Druck erreicht, so kann man das des Gases beliebig, bis zu einer bestimmten Grenze, weiter ver- , ohne daß die Spannung des Gases zunimmt, ohne daß man also ern Druck vermehren muß. Bei diesem Drucke ändert nämlich seinen Aggregatzustand, es hört auf Gas zu sein, es wird tropf- ng, jede Volumverminderung, welche nach Erreichung jenes Grenz- dem Gase zu teil wird, führt die dem verminderten Volumen ent- de Gasmenge in die flüssige Form über.

se Zustandsänderung geht plötzlich vor sich, sie bereitet sich aber tetiges Wachsen der Kompressibilität vor. Daraus ergibt sich aß man die vier genannten permanenten Gase durch Vermehrung ckes nicht flüssig machen kann. Es würde, nach der schon § 99 en Bemerkung über den Einfluß der Temperatur auf die Kom- ität der Gase, indes voreilig sein, daraus zu schließen, daß dies er Natur der Gase begründeter wesentlicher Unterschied zwischen nanten und nicht permanenten Gasen wäre. Es hängt die Fähig- wig zu werden wesentlich von der Temperatur ab, bei der man komprimiert.

Eben wegen des Einflusses, den der Wärmezustand des Gases auf dieses Verhalten hat, wollen wir die Frage nach der Kondensation der Gase in die Wärmelehre verweisen. Wir beschränken uns hier darauf, anzugeben, welche Gase man bei gewöhnlicher Temperatur flüssig machen kann, welche Drucke dazu erfordert werden<sup>1)</sup>, und welche spezifischen Gewichte einige der flüssigen Gase bei der Temperatur des schmelzenden Eises haben.<sup>2)</sup>

Bei nicht viel von der des schmelzenden Eises verschiedenen Temperaturen werden flüssig:

Name der Gase	Druck, unter welchem sie flüssig werden	Spezifische Gewichte bei 0°
Schwefelige Säure . . . . .	1,5 Atmosphären . . . . .	1,4333
Cyan . . . . .	2,4     „     . . . . .	0,866 <sup>3)</sup>
Ammoniak . . . . .	4,4     „     . . . . .	0,6362
Arsenwasserstoff . . . . .	8,6     „     . . . . .	
Schwefelwasserstoff . . . . .	9,9     „     . . . . .	
Chlorwasserstoff . . . . .	25,3     „     . . . . .	
Stickstoffoxydul . . . . .	31,1     „     . . . . .	0,9369
Kohlensäure . . . . .	37,2     „     . . . . .	0,94695
Ölbildendes Gas . . . . .	42,5     „     . . . . .	

Alle diese Flüssigkeiten besitzen sehr merkwürdige Eigenschaften, welche wir in der Wärmelehre weiter betrachten werden. Es sind im allgemeinen sehr flüssige, ungefärbte Flüssigkeiten, welche sich in Wasser nicht, in Alkohol und Äther aber sehr gut lösen.

§ 113.

**Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Körpern.**  
Wenn man in einen mit Gas erfüllten Raum einen festen Körper bringt, so zieht derselbe die ihn zunächst umgebenden Gasmoleküle an und die Folge davon ist eine Verdichtung des Gases an der Oberfläche des festen Körpers. Je größer die Oberfläche des festen Körpers ist, an um so mehr Punkten ist er mit dem Gase in Berührung, um so mehr Punkte desselben ziehen daher Gasteile an sich, um so mehr Gas wird an der Oberfläche des Körpers verdichtet werden. Man kann diese Tatsache leicht durch den Versuch beweisen. Füllt man eine oben geschlossene und mit ihrem offenen Ende in Quecksilber tauchende Glasröhre mit Kohlensäure, und bringt dann über das Quecksilber in die Glasröhre eine frisch in Quecksilber abgelöschte Kohle von Buchsbaumholz, so sieht man, wie sich sofort das Volumen des Gases vermindert, indem das Quecksilber in die Glasröhre aufsteigt. So wie die Kohle Kohlensäure, so absorbiert sie sowohl als auch andere Körper andere Gase.

Die ausgedehntesten Versuche über die Absorption der Gase durch feste Körper rühren von Theodor von Saussure her<sup>4)</sup>.

1) *Faraday*, Philos. Transactions of London. R. S. 135. 1845; auch Pogg Ann. Erg.-Bd. II. 1848.  
2) *Andreeff*, Liebigs Annalen. 110. 1857.  
3) *Faraday*, a. a. O.  
4) *Saussure*, Gilberts Annalen. 47. 1814.



zunächst wies derselbe nach, daß nur geglähtte und frisch abgelöschte zu den Absorptionsversuchen brauchbar sind. Der Grund dafür darin, daß Körper, die längere Zeit an der Luft gelegen haben, betmospHärische Luft und Wasserdampf an ihrer Oberfläche verdichtet. Die ausgeglühten Körper brachte Saussure unter eine Glocke, in r über Quecksilber ein gemessenes Gasvolum aufgefangen war, und ie eintretende Volumänderung. Er fand dann, daß ein und derselbe verschiedene Gase und verschiedene Körper dasselbe Gas in ver- ner Menge absorbierten. So erhielt er z. B. für Buchsbaumkohle erschaum von Valecas folgende Zahlen, welche angeben, wieviel mal enes Volum Gas unter dem darunter angeführten Drucke die Körper ieren.

	Kohle	Meerschaum
Ammoniak . . . . .	90	15
Chlorwasserstoff . . . . .	85	--
Schwefelige Säure . . . . .	65	—
Schwefelwasserstoff . . . . .	55	11,7
Stickstoffoxydul . . . . .	40	3,75
Kohlensäure . . . . .	35	5,26
Elayl . . . . .	35	3,7
Kohlenoxyd . . . . .	9,42	1,17
Sauerstoff . . . . .	9,25	1,49
Stickstoff . . . . .	7,5	1,60
Wasserstoff . . . . .	1,75	0,44
	Druck $p = 724^{mm}$	730 $^{mm}$

ie Dauer des Versuches war 24—36 Stunden, nach denen keine ng des Volumens mehr eintrat; nur bei dem Sauerstoff dauert die tion mehrere Jahre.  
an sieht, daß im allgemeinen die absorbierten Gasmengen bei den edenen Körpern in derselben Reihe folgen, und daß die Gase, welche arch Druck flüssig machen kann, in weit höherem Maße absorbiert als die permanenten Gase. Das spricht auf das entschiedenste für nahme, daß wir es hier nur mit einer Molekularanziehung der Mo- des festen Körpers auf die ihn zunächst berührende Gasschicht zu ben. Dabei ist es jedoch möglich, wie aus der nicht vollständigen istimmung der beiden Reihen zu schließen ist, daß auch chemische se mit wirksam sind.  
suchte Kohle absorbiert weniger Gas als trockne; so fand Saussure chsbaumkohle

	trocken	feucht
Kohlensäure . . . . .	33	17
Stickstoff . . . . .	7,5	6,5
Sauerstoff . . . . .	9,25	3.25.

uch über die Gasmenge, welche von den festen Körpern unter ver- nen Drucken absorbiert wird, hat Saussure Versuche angestellt, aben dieselben nichts Gesetzmäßiges ergeben. Bei gemindertem vermindert sich die Menge des absorbierten Gases.

Die Untersuchung der Gasverdichtung an der Oberfläche fester Körper, die Adsorption der Gase, wie Kayser nach einem Vorschlage du Bois-Reymonds die Erscheinung genannt hat, ist in neuerer Zeit von Chappuis<sup>1)</sup>, Joulin<sup>2)</sup> und Kayser<sup>3)</sup> wieder aufgenommen.

Chappuis suchte zunächst die auf einer der Größe nach bekannten Glasoberfläche kondensierte Gasmenge zu bestimmen, indem er in ein zylindrisches Glasgefäß 13 200 Glasfäden einfüllte, deren mittlere Länge 12,665<sup>cm</sup>, deren mittlerer Durchmesser, aus der Bestimmung des von den Fäden eingenommenen Raumes abgeleitet, 0,2851<sup>mm</sup> betrug, so daß die Oberfläche der Mantelflächen der Fäden 1,497 m<sup>2</sup> war. Mit den Endflächen der Fäden und der innern Oberfläche des Glaszylinders war in dem zylindrischen Glasgefäß eine freie Oberfläche von 1,6752 m<sup>2</sup>. Das Gefäß wurde bei der Temperatur des schmelzenden Eises mit verschiedenen Gasen nach und nach unter Atmosphärendruck gefüllt, und beobachtet, wie viel sich von den an den Wänden bei 0° verdichteten Gas Mengen bei Erwärmung des Zylinders auf 183° loslöste. Die Methode der Beobachtung ergibt sich in der Wärmelehre; wir werden sie bei der Besprechung der Messung der Ausdehnungskoeffizienten der Gase bei konstantem Druck kurz angeben können. Die in dieser Weise gemessene Verdichtung der Gase bestätigte die Folgerung Saussures, daß die Menge des verdichteten Gases im allgemeinen größer wird, unter je geringerem Drucke das Gas verflüssigt wird.

Die für die einzelnen Gase erhaltenen Zahlen, aus denen sich die Menge des an einem Quadratmeter Glasfläche unter dem Druck einer Atmosphäre adsorbierten Gases ergeben würde, haben indes nach den Versuchen Kayzers keine allgemeine Bedeutung. Wie Kayser fand, ist die an einem solchen Bündel von Glasfäden adsorbierte Gasmenge durchaus nicht einfach der Oberfläche des Glases bei gleichem Drucke proportional, sondern hängt davon ab, ob das Bündel mehr oder weniger dicht verpackt ist. Kayser beobachtete die Menge des adsorbierten Gases direkt, indem er in den mit den Glasfäden gefüllten Zylinder, welcher vorher durch einmaliges Auspumpen und tagelanges Erhitzen auf 300° von dem adsorbierten Gase befreit war, ein außerhalb des Zylinders gemessenes Gasvolumen einfüllte und darauf die infolge der Adsorption eingetretene Abnahme des Volumens bestimmte, wenn nach einiger Zeit das Gas wieder unter dem selben Druck gebracht wurde und dieser Druck konstant blieb. Außerdem war die Zunahme der adsorbierten Gasmenge mit zunehmendem Druck ganz verschieden.

So fand er<sup>4)</sup> für drei verschiedene Bündel von Fäden desselben Glases deren erstes eine Oberfläche von 7,05, das zweite 12,17, das dritte 12,03 m<sup>2</sup> hatte, folgende auf 760<sup>mm</sup> reduzierte Volumina adsorbierten Ammoniak in Kubikzentimetern:

1) Chappuis, Wiedem. Ann. 8. p. 1 u. p. 672. 1879: 12. p. 161. 1881.

2) Joulin, Comptes Rendus. 90. p. 741. 1880. Beiblätter 4. p. 762. 1881.

3) Kayser, Wiedem. Ann. 12. p. 526. 1881: 14. p. 450. 1881; 15. p. 1882.

4) Kayser, Wiedem. Ann. 14. p. 458. 1881.

I	Druck . . . . .	395,9 <sup>mm</sup>	610 <sup>mm</sup>	822 <sup>mm</sup>	977 <sup>mm</sup>
	Vol. . . . .	1,534	3,114	5,53	10,5
	Vol. pro m <sup>2</sup> .	0,218	0,441	0,784	1,49
II	Druck . . . . .	244,4	415	538	
	Vol. . . . .	0,949	3,81	5,85	
	Vol. pro m <sup>2</sup> .	0,078	0,314	0,481	
III	Druck . . . . .	274	482	639	760
	Vol. . . . .	1,547	2,739	3,73	5,43
	Vol. pro m <sup>2</sup> .	0,126	0,222	0,306	0,441.

Als ein Teil des Glases in ein möglichst feines Pulver zerrieben und 87,6<sup>o</sup> der Adsorption von Ammoniak ausgesetzt wurden, fanden sich unter ~~an~~ in der ersten Zeile angegebenen Drucken die in der zweiten Reihe adsorbierten Volumina

250 <sup>mm</sup>	450	658	810	965	1094	1250
8,44 <sup>ccm</sup>	8,83	13,3	15,80	9,21	10,73	11,85.

Die dritte und vierte Zahl dieser Beobachtungsreihe paßt zu den übrigen gar nicht; obwohl sie Kayser zweimal beobachtet hat, muß man doch irgend einen Irrtum annehmen, denn die Zahlen würden bedeuten, daß bei Vermehrung des Druckes von 810 auf 965<sup>mm</sup> Quecksilber vom Kaspulvers sich nahezu 0,4 des adsorbierten Gases loslösen würde, ein Vorgang, der sich sonst nirgendwo zeigt, da immer die adsorbierte Gasmenge mit dem Druck zunimmt.

Lassen wir diese Zahlen außer acht, so zeigt sich, daß das Gesetz, nach welchem die adsorbierte Gasmenge mit dem Drucke zunimmt, für dasselbe Glas je nach der Form der Oberflächen, Kayser meint, je nach der Größe der Zwischenräume zwischen den Glasfäden bzw. im Pulver, ein verschiedenes ist.

Für schwefelige Säure war die Zunahme der Adsorption mit steigendem Drucke wieder eine andere.

Auch verschiedene Sorten Holzkohle zeigen eine verschiedene Zunahme mit verschiedenem Druck für die Adsorption desselben Gases. So ergaben sich für verschiedene Sorten Holzkohle aus den Versuchen von Chappuis, Joulin, Kayser folgende Adsorptionen. Bei einem Drucke von 100<sup>mm</sup> und der Temperatur 19<sup>o</sup> wurden adsorbiert bei Kayser 230<sup>ccm</sup>, Chappuis 250<sup>ccm</sup>, Joulin 280<sup>ccm</sup> von 22,5<sup>g</sup> Kohle. Setzen wir bei jedem Beobachter die für diesen Druck adsorbierte Menge gleich 1, so wird sie

Druck	100	200	300	400	500	600	700
K.	1	1,70	2,14	2,55	2,77	3,00	3,32
C.	1	1,80	2,32	2,72	3,04	3,28	3,48
J.	1	1,89	2,50	2,82	3,11	3,40	3,68.

Mit steigender Temperatur nimmt die Adsorption schnell ab, Kayser meint, man könne bei einem und demselben Druck die Menge des adsorbierten Gases durch eine Gleichung von der Form  $c = A - Bt$  darstellen. Dies wird zur Darstellung dieser Abnahme sich wohl ebensowenig eine allgemeine und einfache Gleichung eignen wie zur Darstellung der Zunahme mit dem Drucke.

nommen werden. Wenn man daher eine Daguerresche mit Silber plattierte Kupferplatte, mit frisch geglühtem und unter Abschluß der Luft erkaltetem Trippel oder Kohlenpulver belegt, Kohlenpulver mit reiner Baumwolle abkehrt, so ist der Platte die Atmosphäre genommen. Beim Behauchen zeigt diese Platte eine blaue Färbung, während eine an freier Luft gelegene Platte beim Behauchen eine bräunliche Färbung zeigt.

Wenn man die Platte aber mit einem Körper in Berührung, der bei Behauchen eine dichte Gasatmosphäre besitzt, so wird die Platte an der Berührungsstelle von dem Körper Gas aufnehmen und verdichten.

Man nahm nun eine Daguerresche Platte und belegte die eine Hälfte mit frisch geglühtem und unter Abschluß der Luft in gelber Luft erkaltetem, die andere Hälfte mit frisch geglühtem, aber dann mit Kohlensäure erkaltetem Kohlenpulver und wusch sie mit reiner Baumwolle ab. Beim Behauchen zeigte die eine Hälfte eine blaue, die andere eine bräunliche Färbung.

Man brachte die Platte in Quecksilberdampf gebracht, so kondensierte sich der Dampf an der nicht mit Gas bedeckten Hälfte, die andere Hälfte blieb frei. Man nahm eine Platte mit einer Atmosphäre von Kohlensäure, in die man Kohlenpulver bedeckt, welches in der angegebenen Weise behandelt wurde, und legt dann eine kleine flache Scheibe frisch geglühter Platte auf dieselbe, so wird an der Stelle in sehr kurzer Zeit die Atmosphäre fortgenommen; behaucht man die Platte nach Entfernung der Scheibe, so zeigt sie an der Stelle, wo diese lag, eine blaue, im übrigen eine bräunliche Färbung.

Man drückte einen Stempel, putzt ihn mit einer durch Alkohol befeuchteten Leinwand, so kann man ihn von seiner Gasatmosphäre befreien. Setzt man ihn frisch gereinigt auf eine mit Kohlensäure überzogene Platte, so wird das Gas von derselben fort. Wird die Platte nach Abheben des Stempels in Quecksilberdämpfen ausgesetzt, verdichten sich letztere vorzugsweise an den vom Stempel berührten Stellen.

Man drückte den Stempel in kohlensäurehaltiges Kohlenpulver und setzt ihn auf eine von ihrer Gasatmosphäre befreite Platte, so nimmt die Platte an der Berührungsstelle Kohlenpulver auf. Wird die Platte nach Fortnahme des Stempels in Quecksilberdämpfen ausgesetzt, so zeigt sich das Bild, indem vorzugsweise an den Stellen sich der Dampf verdichtet, welche mit dem Stempel nicht in Berührung waren.

Man drückte dagegen einen frisch gereinigten Stempel auf eine frisch gereinigte Platte, so zeigt sich so gut wie kein Bild, die Dämpfe werden nicht verdichtet. Dasselbe ist der Fall, wenn man einen mit Kohlenpulver bedeckten Stempel auf eine mit Kohlensäure bedeckte Platte legt.

Man stellte ferner einen mit Kohlensäure bedeckten Stempel nach und nach auf sechs verschiedene frisch gereinigte Silberplatten. Auf der ersten ließ er ihn 30 Minuten, es zeigte sich beim Behandeln in Quecksilberdampf ein deutliches Bild, auf die dritte und vierte Platte ließ er ihn eine Stunde, die dritte zeigte ein Bild, wenn auch schwach, auf die fünfte nur die Spur eines Bildes.

Man ließ den Stempel auf der fünften Platte zwei Stunden stehen; sie zeigte beim Behauchen gar kein Bild. Auf der sechsten ließ er den Stempel zwei Stunden stehen; sie zeigte beim Behauchen, es zeigte sich gar kein Bild.

Dieser Versuch beweist auf das allerentschiedenste die Richtigkeit der Waideleschen Erklärung, daß es eine Änderung der Gasatmosphäre auf den Platten sei, welche die Moserschen Bilder erzeugt. Denn bei den ersten Versuchen war der Stempel mit der dichten Atmosphäre versehen, und in der kurzen Zeit von 30 Minuten kondensierte die Platte rings umher nicht viel Luft an ihrer Oberfläche, die Bilder wurden deutlich und scharf; je mehr aber die Gasatmosphäre am Stempel abnahm und die Verdünnung der Luft auf der übrigen Platte größer wurde, um so undeutlicher wurde das Bild.

Wir sind also berechtigt, die Moserschen Bilder als eine Folge der an einzelnen Stellen geänderten Gasatmosphäre anzusehen; denn im allgemeinen werden die Gasatmosphären an den verschiedenen Körpern immer verschieden dicht sein, eine Berührung zweier Körper also auch an der Berührungsstelle eine Änderung der Dichtigkeit hervorbringen.

Das wird selbst dann der Fall sein, wenn sich die Körper nicht unmittelbar berühren, da die Gasatmosphären eine gewisse Dicke haben müssen, und selbst wenn sie nicht so dick sind, daß sie ineinander übergehen, doch ein Austausch zwischen denselben stattfinden muß.<sup>1)</sup>

### § 115.

**Molekularwirkungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten.** In gleicher Weise, wie die festen Körper die Gase anziehen und absorbieren, tun es auch die Flüssigkeiten.

Füllt man z. B. eine oben geschlossene Glasröhre, welche in Quecksilber taucht, mit Ammoniakgas, und bringt dann über das Quecksilber in der Röhre ein wenig Wasser, so steigt das Quecksilber sofort in der Röhre in die Höhe; ein Beweis, daß das Gas vom Wasser verschluckt ist.

Ein und dieselbe Flüssigkeit verschluckt von verschiedenen Gasen bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur verschiedene Mengen, verschiedene Flüssigkeiten von demselben Gase, unter sonst gleichen Umständen ebenfalls verschiedene Mengen, so daß die Menge des absorbierten Gases bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur von der Natur des Gases sowohl, als auch von der der absorbierenden Flüssigkeit abhängt.

Seit Priestley, der zuerst die Absorption der Gase untersuchte, und dem er nachwies, daß unter gewöhnlichem Barometerdrucke ein gegebenes Volumen Wasser ein gleiches Volumen Kohlensäure absorbiere, haben sich viele Physiker und Chemiker mit den Absorptionserscheinungen beschäftigt und zu bestimmen gesucht, welche Gasmengen verschiedene Flüssigkeiten aufzunehmen imstande sind, und wie die aufgenommene Menge desselben Gases bei gleicher Flüssigkeit sich mit dem äußern Drucke, unter welchem das Gas steht, ändert.

Was die letztere Frage betrifft, so haben die Versuche von Henry ergeben, daß das Volumen des von einer Flüssigkeit aufgenommenen Gases stets dasselbe ist, welches auch der äußere Druck ist, unter welchem das Gas über dem Wasser befindet. So absorbiert ein gegebenes Wasser

1) Quincke, Poggend Ann 108. 1859

2) Henry, Philos Transact. 1803 part. I p. 29. Gilbert, Ann 30 184

olumen bei gewöhnlicher Temperatur ( $15^{\circ}$  C.) ein nahezu gleiches Volumen Kohlensäure, ob nun die Kohlensäure in dem Raume, in welchem die Absorption vor sich geht, unter dem Drucke von einer oder mehreren Atmosphären steht. Da nach dem Mariotteschen Gesetze die Dichtigkeit eines Gases sich direkt verhält, wie der äußere Druck, so folgt daraus, daß die Gewichtsmengen des absorbierten Gases sich direkt verhalten, wie die äußeren Drucke, unter denen das Gas steht.

Kennt man darnach die Gasmenge, welche unter einem bestimmten Drucke absorbiert wird, so kann man daraus leicht für alle anderen Drucke die absorbierten Gas Mengen berechnen.

Bunsen<sup>1)</sup> nennt deshalb das auf  $0^{\circ}$  und den Druck von  $760^{\text{mm}}$  reduzierte Gasvolumen, welches die Volumeinheit der Flüssigkeit unter dem Drucke von  $760^{\text{mm}}$  absorbiert, den Absorptionskoeffizienten des Gases für die Flüssigkeit.

Diese Zahl gibt dann sogleich das Volumen an, welches unter irgend einem Drucke  $P$  absorbiert wird, und wir erhalten für die Gasmenge, welche diesem Volumen entspricht,

$$g = \frac{\alpha \cdot P}{760},$$

wenn wir mit  $\alpha$  den Absorptionskoeffizienten bezeichnen und als Gasmenge das Volumen, welches eine gegebene Gasmenge unter dem Barometerdruck von  $760^{\text{mm}}$  einnimmt; von Wroblewski nennt die so bestimmte Größe  $g$  die Sättigungskoeffizienten. Für die von dem Wasservolum  $h$  absorbierte Gasmenge erhalten wir dann

$$g = \frac{\alpha \cdot h \cdot P}{760}.$$

Kennt man in einem dem eingangs erwähnten ähnlichen Versuche das Volumen des in der Röhre enthaltenen Gases  $V$  und den Druck  $P$ , unter dem es steht, die Differenz zwischen der Barometerhöhe und dem Niveauunterschied des Quecksilbers in und außer der Röhre, läßt man dann ein Flüssigkeitsvolumen  $h$  in die Röhre eintreten und bestimmt das Volumen  $V'$  und den Druck  $P'$  des nach der Absorption übrigbleibenden Gasvolumens, kann man den Absorptionskoeffizienten leicht erhalten.

Die vor dem Versuche in dem Rohre enthaltene Gasmenge ist

$$\frac{V \cdot P}{760},$$

nach dem Versuche noch vorhandene  $\frac{V' \cdot P'}{760}$ , die absorbierte also

$$\frac{V \cdot P}{760} - \frac{V' \cdot P'}{760}.$$

Da der endliche Druck  $P'$  ist, so ist die Flüssigkeit unter diesem Drucke gesättigt. Nach dem Henryschen Gesetze verhalten sich die absorbierten Gas Mengen wie die Drucke; unter dem Drucke  $760^{\text{mm}}$  würde nach der absorbierten Gasmenge

1) Bunsen, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857. Liebigs Annalen. 1846.



$$\left( \frac{VP}{760} - \frac{V'P'}{760} \right) \frac{760}{P} = \left( V \frac{P}{P'} - V' \right)$$

gewesen sein.

Diese Gasmenge würde beim Drucke 760 von der Flüssigkeit absorbiert sein, das Flüssigkeitsvolumen demnach die Menge

$$\alpha = \frac{1}{h} \left( V \frac{P}{P'} - V' \right)$$

absorbiert. Diese Größe  $\alpha$  ist es, was den Absorptionskoeffizienten nannten.

Zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten der verschiedensten Gase für Flüssigkeiten wandte Bunsen das Absorptiometer an, welchem er folgende Einrichtung (Fig. 218). Ein seiner ganzen Länge in Millimeter geteilt kalibriertes Reagenzglas oben geschlossen ist, ist mit seinem offenen Ende in eine Schraubenhülse

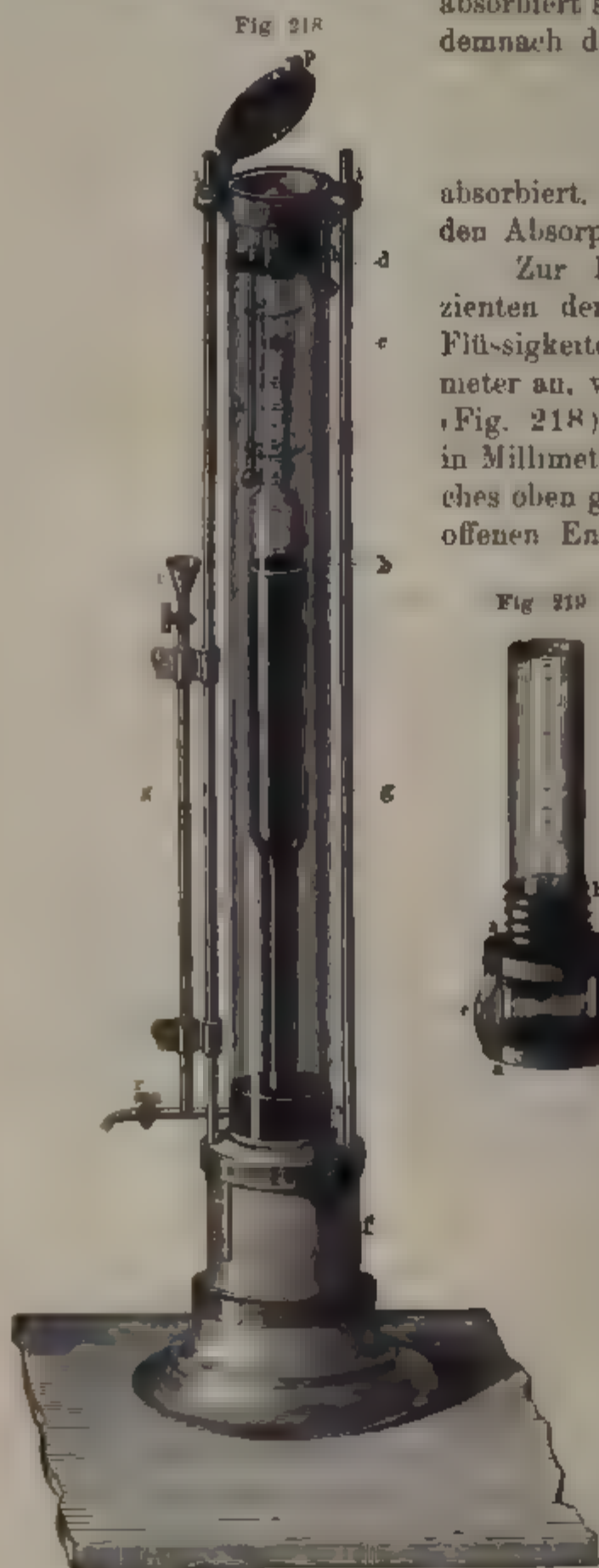


Fig. 219

(Fig. 219) eingekittet, welche eine Schraubenmutter des Stuhles *aa* entspricht. Die Bodenplatte des Stuhles ist mit Kautschuk überzogen, so daß beim Hinabschieben des Rohres *c* dessen unterer, abgeschliffener Rand gegen den Kautschuk drückt, wodurch das Rohr geschlossen wird. Zwei Federn (*e*) am Fuße (*f*) (Fig. 219) passen in den Fuß *f* (Fig. 218), so daß wenn man das Absorptiometer auf den Fuß *f* einsetzt, es nur auf und nicht aber gedreht werden kann. Eine Drehung des Rohres *c* bewirkt deshalb ein Festziehen der Schraubenmutter *aa* und damit eine Erhöhung der Bodenplatte unter dem Rohre *c*, oder ein Drücken gegen die Bodenplatte, wodurch ein dichter Verschluss des Rohres *c* dient als Absorptionsrohr. Das Rohr ist seiner ganzen Länge nach von einem Zylinder *gg* umhüllt. Der Zylinder ist mit seinen abgeschliffenen Enden auf den Kautschukringen liegen, in den Fuß *f* und gegen

den Fuß *f* einsetzt, so daß wenn man das Absorptiometer auf den Fuß *f* einsetzt, es nur auf und nicht aber gedreht werden kann. Eine Drehung des Rohres *c* bewirkt deshalb ein Festziehen der Schraubenmutter *aa* und damit eine Erhöhung der Bodenplatte unter dem Rohre *c*, oder ein Drücken gegen die Bodenplatte, wodurch ein dichter Verschluss des Rohres *c* dient als Absorptionsrohr. Das Rohr ist seiner ganzen Länge nach von einem Zylinder *gg* umhüllt. Der Zylinder ist mit seinen abgeschliffenen Enden auf den Kautschukringen liegen, in den Fuß *f* und gegen



eisernen Ringes *h* mittels der Schrauben *ii* fest angepreßt. Die welche mit dem innern Raume des Zylinders *gg* kommuniziert, Eingießen und Ablassen von Quecksilber, um den Druck im Absorptionsrohre *c* regulieren zu können. Der weitere Zylinder dem Quecksilber mit Wasser angefüllt, um das Absorptionskonstanter Temperatur zu erhalten, welche mit dem Thermometer *h* wird. Der äußere Zylinder kann mittels des Deckels *p* fest verwendet werden, in dessen Mitte eine mit einer Kautschukplatte überdeckte gegen den Kopf des Absorptionsrohres *c* drückt, um dasselbe festzustellen.

Versuche werden folgendermaßen angestellt. In einer Quecksilberkugel man in das zunächst ganz mit Quecksilber gefüllte Absorptionsrohr das zu untersuchende Gas einsteigen, und mißt das Volum *V* und den Druck *P*, unter dem es steht, um die Gasmenge (das bei 760<sup>mm</sup> Druck reduzierte Volum) zu erhalten. Darauf läßt man Quecksilber ein gemessenes Volum *h* völlig luftfreien Wassers einfließen, läßt das Rohr mittels des Stuhles *a* und setzt es in den Boden *f* des Quecksilber und darüber vollständig mit Wasser gefüllten Zylinders.

Bei einer kleinen Drehung öffnet man dann das Absorptionsrohr, setzt den Druck im Innern desselben mit dem äußern Druck ins Gleichgewicht, erschließt es wieder und schüttelt den ganzen Apparat eine Minute auf das heftigste, öffnet dann wieder das Absorptionsrohr, um es neuerdings auszugleichen, schließt und schüttelt wieder und so weiter, bis beim Öffnen des Absorptionsrohres keine Volumänderung mehr eintritt.

Dann wird das Volum *V*<sub>1</sub> des rückständigen Gases und sein Druck *P*<sub>1</sub> gemessen, und wir haben alle Daten zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten  $\alpha$ .

Bunsen fand, daß der Absorptionskoeffizient sich mit der Temperatur verändernden Flüssigkeit ändert. Ein Gesetz dieser Änderung ließ sich nicht erkennen, man mußte sich begnügen, eine empirische Formel zu finden, um die Werte von  $\alpha$  zu bestimmen.

Formeln von Bunsen haben alle die Gestalt

$$\alpha = a + bt + ct^2,$$

wo *t* die Temperatur in Graden nach der hundertteiligen Skala *a*, *b*, *c*, des Gas und jede Flüssigkeit verschiedene Konstanten sind, welche durch eine Anzahl, wenigstens drei Versuche bei verschiedenen Temperaturen bestimmt sind.

Stickstoff in Wasser ist z. B.

$$\alpha = 0,020\,346 - 0,000\,538\,87\,t + 0,000\,011\,156 \cdot t^2.$$

Stickstoff in Alkohol aber

$$\alpha = 0,126\,338 - 0,000\,418\,t + 0,000\,006\,0\,t^2.$$

Die Formeln gelten jedoch nur bis zu ungefähr 20°, bis wohin die Messungen reichen.

Wir lassen hier eine Reihe der Absorptionskoeffizienten der ersten Gase nach Bunsen für Wasser und Alkohol folgen. Indem Bunsenschen Gleichungen schreiben

$$\alpha = a \left( 1 - \frac{b}{a} t + \frac{c}{a} t^2 \right) = a (1 - \beta t + \gamma t^2)$$

gibt folgende Tabelle die Werte von  $a$ ,  $\beta \cdot 10^5$ ,  $\gamma \cdot 10^6$ .

Namen der Gase	$\alpha$ für Wasser <sup>1)</sup>			$\alpha$ für Alkoho	
	$a$	$\beta \cdot 10^5$	$\gamma \cdot 10^6$	$a$	$\beta \cdot 10^5$
Stickstoff . . . . .	0,0203	2648	548	0,126 34	331
Wasserstoff . . . . .	0,0193	0	0	0,069 25	215
Sauerstoff . . . . .	0,0412	2648	548	0,289 37	0
Kohlenoxyd . . . . .	0,0329	2430	499	0,204 42	0
Kohlensäure . . . . .	1,7967	4320	914	4,3296	2172
Stickoxydul . . . . .	1,3052	3475	496	4,1781	1671
Grubengas . . . . .	0,0545	2166	188	0,5226	548
Äthylen . . . . .	0,2563	3564	654	3,5950	1605
Stickoxyd . . . . .	—	—	—	0,3161	1103
Äthylgas . . . . .	0,0315	3320	796	—	—
Schwefelwasserstoff . .	4,3706	1914	119	17,891	3666
Atm. Luft . . . . .	0,0247	2643	548	—	—

Bei Bunsens Messungen wurden im allgemeinen nur Druck wandt, welche wenig von dem einer Atmosphäre abweichen, und stimmte Bunsen anfänglich auch Absorptionskoeffizienten unter A der Gültigkeit des Henryschen Gesetzes für die äußerst stark ab baren Gase wie Ammoniak und schweflige Säure.

Ditmar und Roscoe<sup>2)</sup> zeigten indes bald, daß für Chlorwas säure und Ammoniak das Henrysche Gesetz auch nicht annähern war. Dieselben sättigten unter verschiedenen Drucken Wasser mit treffenden Gasen und bestimmten dann durch chemische Analyse die der absorbierten Gase.

Für Salzsäuregas zeigte sich so, daß ein erheblicher Teil d mit dem Wasser gewissermaßen chemisch verbunden war, denn a äußerst geringem Drucke blieb der größte Teil des Gases in der keit absorbiert, wie folgende Zahlen, welche die in einem Gramm bei 0° absorbierten Gramme Chlorwasserstoffsäure unter den üb Zahl angegebenen Drucken geben, beweisen. Die Druckzahlen l Meter Quecksilber.

Druck	0,058	0,321	0,569	0,735	0,737	0,755	0,932
Gr. HCl	0,614	0,746	0,796	0,824	0,821	0,827	0,851

Die Zahlen zeigen, daß bei einem Drucke von 58<sup>mm</sup> Quecksill als 2/3 des Gases absorbiert ist, wie bei 1270<sup>mm</sup>, und auch daß nahme der absorbierten Gasmenge bei wachsendem Drucke ein kleinere wird.

1) Nach der Zusammenstellung von E. Wiedemann, Wiedem. Ann p. 350. 1882.

2) Roscoe und Ditmar, Liebigs Ann. 112. p. 327. 1859.

Die Versuche mit Ammoniak ergaben, daß dort ein solcher, sagen wir chemisch gebundener Anteil nicht vorhanden ist, daß vielmehr mit wachsendem Drucke die absorbierten Mengen derartig abnehmen, daß sie für den Druck Null auch auf die Absorption Null führen. Mit wachsendem Drucke nimmt aber die Menge des absorbierten Ammoniaks anfangs langsamer, später rascher zu als der Druck, wie folgende Zahlen zeigen. Die Werte gelten wie die vorigen für 0°, die erste Zeile gibt die Drucke in Meter Quecksilber, die zweite die unter dem betreffenden Drucke absorbierte Gasmenge in Gramm pro Kubikzentimeter.

Druck	0,018	0,097	0,268	0,760	1,264	1,963
Gr. NH <sub>3</sub>	0,074	0,274	0,478	0,879	1,268	2,137.

Man sieht, bis 1,2<sup>m</sup> Druck wächst die absorbierte Gasmenge langsamer als der Druck, wächst dann aber rascher, denn wenn der Druck von 1,264 auf das 1,55fache wächst, nimmt die absorbierte Gasmenge etwa auf das 1,7fache zu. Der Absorptionskoeffizient im Sinne Henrys nimmt also zunächst mit steigendem Drucke ab, dann aber wieder zu.

Sims<sup>1)</sup> fand bei seinen Versuchen für die Temperatur Null dieses relative Minimum für die Absorption des Ammoniaks nicht, er findet stets ein langsames Wachsen als jenes des Druckes.

Einen ähnlichen Gang fand Sims für schweflige Säure in Wasser.

Aus den Beobachtungen von Sims ergibt sich weiter das interessante Resultat, daß für höhere Temperaturen die Abweichung der absorbierten Mengen von dem Henryschen Gesetze erheblich abnimmt, so zwar, daß für schweflige Säure das Gesetz schon bei 50°, bei Ammoniak bei 100° richtig ist.

Auch für die Kohlensäure, obwohl sie ganz erheblich weniger absorbiert wird als die drei zuletzt genannten Gase, ergibt sich aus Versuchen von Khanikoff und Longuinine<sup>2)</sup> nach der Berechnung von v. Wroblewski und den Versuchen von v. Wroblewski selbst<sup>3)</sup> bei hohen Drucken eine Abweichung von dem Henryschen Gesetze, im gleichen Sinne wie sie Sims für schweflige Säure und Ammoniak gefunden hat, die Menge des absorbierten Gases wächst langsamer als der Druck. v. Wroblewski machte das Absorptionsrohr in ähnlicher Weise wie Cailletet bei seinen Compressionsversuchen das Gefäß, welches die zu komprimierenden Gase enthält, in einen Kompressionsapparat, bei dem aber das Stahlrohr durch ein Glasrohr ersetzt war. Auf dem Quecksilber des Absorptionsrohres befand sich eine nur geringe genau gemessene Quantität Wasser. Das zu rascher und vollständiger Absorption des Gases erforderliche Schütteln ersetzte v. Wroblewski dadurch, daß er den Druck, unter welchem das Gas stand, systematisch etwas kleiner und größer werden ließ, daß bei dem Aufsteigen des Quecksilbers zwischen dem Quecksilber und der Glaswand eine bemerkbare Quantität des Wassers festgehalten wurde. Er fand in dieser Weise für den Sättigungskoeffizienten  $\eta$  und den sich daraus ergebenden Absorptionskoeffizienten

1 Sims, Liebigs Ann. 118. p. 338. 1861.

2 Khanikoff und Longuinine, Ann. de chim. et de phys. 11. (4.) p. 412. 1867.

3 v. Wroblewski, Wiedem. Ann. 17. p. 108. 1883; 18. p. 290. 1883.

$$\alpha = \frac{g}{P} \cdot 760,$$

wenn wir  $P$  in Atmosphären ausdrücken, also  $P = n \cdot 760$  setzen, folgen die Werte bei  $0^\circ$  und bei  $12^\circ,43$  C.

Druck in Atm.	$g$		$\alpha$	
	bei $0^\circ$	bei $12^\circ,43$	bei $0^\circ$	bei $12^\circ,43$
1	1,797	1,086	1,797	1,086
5	8,65	5,15	1,730	1,030
10	16,08	9,65	1,603	0,965
20	26,65	17,11	1,332	0,855
30	33,74	23,25	1,124	0,775

Auch hier sieht man, wie in den Versuchen von Sims, daß mit steigender Temperatur die Abweichung vom Henryschen Gesetz kleiner wird. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daß zur Reduktion des absorbierten Gases auf Atmosphärendruck nicht das Boylesche Gesetz angewandt wurde, sondern das aus den früher besprochenen Versuchen sich ergebende Kompressionsgesetz der Kohlensäure.

In der Nähe des Atmosphärendruckes ist die Änderung des Absorptionskoeffizienten auch nach den Versuchen von Khanikoff und Long eine sehr geringe.

Aus Bunsens Versuchen ergab sich, daß der Absorptionskoeffizient des Wasserstoffs in Wasser von der Temperatur unabhängig sei, und ebenso jener von Sauerstoff und Kohlenoxyd in Alkohol. Neuere Versuche von Timofejew<sup>1)</sup> und Bohr und Bock<sup>2)</sup> haben jedoch für die Absorption des Wasserstoffs in Wasser und Versuche von Timofejew auch für die Absorption des Sauerstoffs in Alkohol die Abnahme der Koeffizienten gezeigt, welche indes Bohr und Bock, welche die Versuche über die Absorption des Wasserstoffs bis zur Temperatur  $100^\circ$  verfolgten, zu dem interessanten Resultat gelangten, daß über  $60^\circ$  die Absorption des Wasserstoffs in Wasser wieder zunimmt. Nach Bohr nimmt der Absorptionskoeffizient des Wasserstoffs in Wasser von 0,0203 bei  $0^\circ$  auf 0,0144 bei  $60^\circ$  ab und steigt wieder auf 0,0166 bei  $100^\circ$ . Der Bunsensche Wert entspricht nach Bohr der Absorption bei  $10^\circ$ . Timofejew erhält zwischen  $0^\circ$  und  $26^\circ$  etwas größere Werte als Bohr, er findet für den Absorptionskoeffizienten bei  $t^\circ$

$$\alpha = 0,02153(1 + 0,0090t + 0,00008t^2),$$

der Bunsensche Wert entspricht hiernach der Temperatur  $13^\circ$ .

Während Timofejew den Absorptionskoeffizienten des Sauerstoffs in Alkohol etwas kleiner findet wie Bunsen, erhält Bohr für Stickstoff und Sauerstoff in Wasser durchweg etwas größere Werte. Wir verweisen deshalb auf die betreffenden Abhandlungen.

1) *Timofejew*, Zeitschr. f. phys. Chemie. 6. p. 141. 1893.

2) *Bohr und Bock*, Wiedem. Ann. 44. p. 318. 1891.

Das Gesetz von Henry wurde von Dalton auch auf Gasgemische ausgedehnt in dem Satze, daß wenn ein Gasgemisch der Absorption ausgesetzt wird, die von jedem Gase absorbierte Menge sich nach dem Henry'schen Gesetze aus dem Partialdrucke des betreffenden Gases ergebe.

Ein Volumen atmosphärischer Luft besteht z. B. aus 0,79 Stickstoff und 0,21 Sauerstoff. Übt dasselbe den Druck  $p$  aus, so ist der Druck des Stickstoffs  $0,79 p$  und der des Sauerstoffs  $0,21 p$ . Ist der Absorptionskoeffizient des Stickstoffs  $\alpha_1$ , der des Sauerstoffs  $\alpha_2$ , so ist die von einem Wasservolumen  $h$  absorbierte Menge Stickstoff

$$g_1 = \frac{\alpha_1 h \cdot 0,79 p}{760}$$

und des Sauerstoffs

$$g_2 = \frac{\alpha_2 h \cdot 0,21 p}{760}$$

Setzen wir  $h = 1$ ,  $p = 760$ , so muß  $g_1 + g_2 = \alpha$  gleich dem Absorptionskoeffizienten der Luft sein. Die Bunsenschen Zahlen ergeben

$$g_1 = 0,79 \cdot \alpha_1 = 0,01604 (1 + 0,02648 t + 0,000548 t^2)$$

$$g_2 = 0,21 \cdot \alpha_2 = 0,00865 (1 + 0,02648 t + 0,000548 t^2)$$

$$g_1 + g_2 = \alpha = 0,02469 (1 + 0,02648 t + 0,000548 t^2)$$

und der Wert von  $\alpha$  ist der von Bunsen gefundene Absorptionskoeffizient der Luft

Hat man allgemein ein Gasgemisch unter dem Drucke  $p$ , welches in der Volumeinheit des Gemisches  $r_1$  Teile eines Gases,  $r_2$  eines zweiten,  $r_3$ ,  $r_4 \dots r_n$  Teile eines 3, 4  $\dots n$  Gases enthält, so sind die von jedem Gase absorbierten, in der Volumeinheit enthaltenen Gasmenngen

$$g_1 = \alpha_1 \cdot r_1 \frac{p}{760}$$

$$g_2 = \alpha_2 \cdot r_2 \frac{p}{760}$$

$$\vdots$$

$$g_n = \alpha_n \cdot r_n \frac{p}{760}$$

Kennt man die Zusammensetzung des zur Absorption verwandten Gases nicht, aber kann man die Zusammensetzung des absorbierten Gases und somit  $g_1, g_2, g_3 \dots$  bestimmen, so kann man daraus  $r_1, r_2 \dots$  oder die Zusammensetzung des zur Absorption verwandten Gases berechnen. Auf diese Weise hat Bunsen der Absorptiometrie in der Analyse der Gase eine wichtige Anwendung gegeben.

## § 116.

**Ausströmen der Gase.** Wenn in die Wand eines mit Gas unter dem Drucke  $p$  gefüllten Gefäßes eine Öffnung gemacht wird, und vor der Öffnung weniger dichtes Gas oder ein leerer Raum ist, so strömt das Gas aus der Öffnung hervor, um so rascher, je höher der Druck ist, unter welchem das Gas im Gefäße steht und je geringer der Druck des äußern

Gases ist. Wegen der freien Beweglichkeit der Teile, welche die Gase mit den tropfbaren Flüssigkeiten gemein haben, müssen auch die Ausströmungsgesetze der Gase mit denen der Flüssigkeiten übereinstimmen.

Wir gelangen daher zur Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas aus einer Öffnung in der Wand eines Gefäßes, in welchem es unter stärkerem Druck steht, als der Druck außerhalb des Gefäßes ist, ausfließt, durch Anwendung ganz derselben Prinzipien, welche wir auch § 87 anwandten. Wir denken uns zunächst das Gas im Innern des Gefäßes unter einem konstanten Drucke  $p_0$  und ebenso werde der Druck außerhalb auf konstanter Höhe erhalten, so daß ein stationärer Strömungszustand eintritt. Das Kennzeichen dieses stationären Zustandes ist dann, daß durch jeden Querschnitt, durch welchen das Gas hindurchtritt, in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Gases hindurchgehen müssen. Haben wir deshalb zwei Querschnitte  $Q$  und  $Q_1$  und sind die mittleren gegen diese Querschnitte senkrechten Geschwindigkeiten  $u$  und  $u_1$ , so sind die durch die Querschnitte in der Zeiteinheit hindurchtretenden Gasvolumina  $Q \cdot u$  und  $Q_1 \cdot u_1$ . Diesen Volumen entsprechen aber nur dann gleiche Mengen, wenn in diesen Querschnitten die Drucke, welchen die Gase dort ausgesetzt sind, gleich sind, da nur dann die Dichtigkeit des Gases dieselbe ist. Sind die Drucke nicht gleich, sondern ist der Druck im Querschnitt  $Q$  gleich  $P$ , im Querschnitt  $Q_1$  gleich  $P_1$ , so ist die Dichtigkeit im Querschnitt  $Q$  gleich  $s$ , im Querschnitt  $Q_1$  gleich  $s_1$ , und die durch diese Querschnitte hindurchfließenden Gasmengen, die einander gleich sein müssen, sind

$$s Q u = s_1 Q_1 u_1.$$

Da nun, bei der von uns als überall gleich vorausgesetzten Temperatur nach dem Mariotteschen Gesetze

$$s : s_1 = P : P_1,$$

so können wir die Gleichung schreiben

$$P Q u = P_1 Q_1 u_1.$$

Eine weitere Beziehung erhalten wir auch hier wieder durch die Bemerkung, daß bei dem stationären Zustande die Gase sich in konstanten Bahnen bewegen; denken wir uns deshalb wieder, wie in § 87 einen Kanal  $OA$  von überall gleichem Querschnitt  $q$  durch das Gas gelegt, so können wir in diesem die Geschwindigkeitsänderung bestimmen. Sei Fig. 279  $MMNN$  das Gefäß, aus dem das Gas aus einer engen Öffnung ausfließt, in welchem der konstante Druck etwa dadurch erhalten wird, daß das Gefäß mit einem höher gelegenen Wasserreservoir  $R$ , welches auf konstantem Niveau erhalten wird, in Verbindung steht. Sei  $OA$  der betrachtete Kanal, und seien  $m$  und  $n$  zwei unendlich nahe Querschnitte. Tritt das Gas durch den Querschnitt  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$ , so ist die in der Zeit  $dt$  durch denselben hindurchfließende Gasmenge gleich  $s q v dt$ . In derselben Zeit erreicht das Gas den Querschnitt  $n$ , den es mit der Geschwindigkeit  $v + dv$  passiert, so daß die in der Zeit  $dt$  durch den Querschnitt  $m$  fließende Gasmenge in derselben Zeit den Geschwindigkeitswachs  $dv$  erfährt; die Bewegungsgröße nimmt also zu um

$$s q v dt dv.$$

Die Zunahme der Bewegungsgröße wird durch die in der Zeit  $dt$  Kraft erteilt; als solche haben wir hier nur die Änderung  $dp$  zu betrachten, da dieser gegenüber die Wirkung der Schwere geringen Gewichtes der Gase vernachlässigt werden darf. Ändert sich von  $m$  bis  $n$  der Druck um  $dp$ , so ändert sich die Größe der wirksamen Querschnittsfläche  $\sigma$  so, daß wir die Gleichung erhalten

$$\sigma v dt dv = - q dp dt,$$

auf der rechten Seite das negative Zeichen setzen müssen, weil mit dem Druck abnehmende Geschwindigkeit, abnehmendem Druck entsprechende Geschwindigkeit entspricht.

Wenn wir die Dichtigkeit des Gases mit  $\sigma$  und den Drucke  $\pi$  der Atmosphäre mit  $p_0$ , so ist, wenn  $p$  den Druck im Querschnitt  $m$  bedeutet,

$$\sigma = \frac{p_0}{p} \pi.$$

Setzen wir unsere Gleichung

$$\frac{p_0}{p} \pi v dt dv = - q dp dt$$

$$v dv = - \frac{\pi}{\sigma} \frac{dp}{p}.$$

die Geschwindigkeit an der Grenze des Gases bei  $O$  gleich  $v_0$ , und dort  $p_0$ , so erhalten wir die Geschwindigkeit, welche das Gas bei dem Druck  $p$  besitzt, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung integrieren, wie im § 87. auf der linken von  $v_0$  bis  $v$ , auf der rechten von  $p_0$  bis  $p$ .

Die Summen sind, wie wir schon öfter sahen, nach E VIII, E I

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \frac{\pi}{\sigma} \log \frac{p_0}{p}.$$

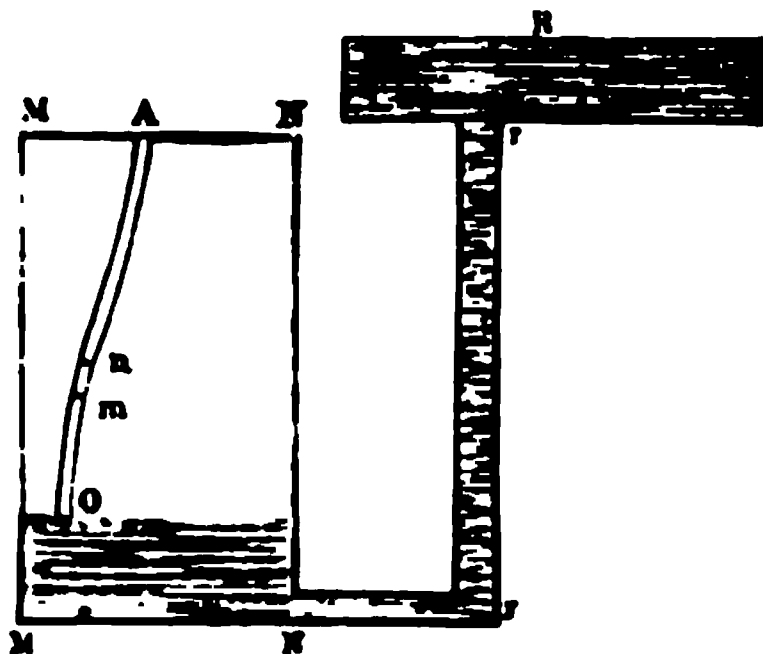
wir über die Lage des gedachten Gaskanals gar keine besondere Annahme gemacht haben, so gilt, wie wir schon § 87 für die ausströmende Flüssigkeit bemerkten, diese Gleichung für die ganze ausströmende Gasmasse, es ist überall dort die Geschwindigkeit der strömenden Gasmasse, wo der Druck gleich  $p$  ist.

Bezeichnen wir den Druck in der Ausströmungsöffnung mit  $p_1$ , die Dichtigkeit des Gases dort mit  $\sigma_1$ , so erhalten wir

$$v_1^2 \left( 1 - \frac{v_0^2}{v_1^2} \right) = 2 \frac{\pi}{\sigma_1} \log \frac{p_0}{p_1}.$$

Um schließlich das Verhältnis  $\frac{v_0}{v_1}$  zu bestimmen, setzen wir wieder  $v_0$  in der Fläche bei  $O$ , wo die Bewegung des Gases beginnt und

Fig. 220.





in der Öffnung bei  $A$ , die wir als sehr klein nehmen, die Geschwindigkeiten  $v_0$  und  $v_1$  die mittlern gegen die betreffenden Querschnitte senkrechten Geschwindigkeiten seien. Ist dann  $Q$  der Querschnitt des Gefäßes,  $q_1$  der der Öffnung, so ist

$$p_1 q_1 v_1 = p_0 Q v_0$$

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_1 q_1}{p_0 Q}$$

und damit

$$v_1^2 = \frac{2 \frac{\pi}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}}{1 - \left( \frac{p_1 q_1}{p_0 Q} \right)^2}.$$

Ist der Querschnitt der Öffnung gegen jenen des Gefäßes hinreichend klein, so können wir, da auch  $p_1 < p_0$  sein muß, wenn überhaupt ein Ausströmen stattfindet, das zweite Glied des Nenners vernachlässigen, und dann wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \pi}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}}.$$

Der Ausdruck für  $v_1$  wird einfacher, wenn der Druck  $p_0$  nur wenig von dem Drucke  $p_1$  in der Ausflußöffnung verschieden ist. Wir erhalten zunächst

$$\log \frac{p_0}{p_1} = -\log \frac{p_1}{p_0} = -\log \left( 1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0} \right).$$

Nun ist, wie in der Analysis bewiesen wird

$$-\log \left( 1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0} \right) = \frac{p_0 - p_1}{p_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{p_0 - p_1}{p_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{p_0 - p_1}{p_0} \right)^3 + \dots$$

Wenn  $p_0$  nur wenig größer als  $p_1$  ist, so können in dieser Reihe alle Glieder nach dem ersten vernachlässigt werden, und es wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \pi}{\sigma} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Es ergibt sich somit, daß bei kleinen Überdrucken die Geschwindigkeit des Ausströmens bei einem und demselben Gase der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Überdruckes  $p_0 - p_1$  und des Druckes im Gefäß proportional ist; bei gleicher Druckdifferenz  $p_0 - p_1$  nimmt also die Ausflußgeschwindigkeit proportional der Quadratwurzel aus dem Drucke  $p_0$  ab.

Für Luft von der Temperatur  $0^\circ$  wird der Wert des Koeffizienten  $\sqrt{\frac{2 \pi}{\sigma}}$ , da die Dichtigkeit der Luft bei dem Drucke der Atmosphäre  $0^\circ$  Quecksilber gleich 0,001293 ist, und die Dichtigkeit des Quecksilbers gleich 13,59 ist, und da wir den in Kilogrammen pro Quadratmeter hieraus sich ergebenden Druck mit  $g = 9,808$  multiplizieren müssen, weil die Massen einfach durch die Gewichte ausgedrückt haben,

$$\sqrt{\frac{2 \pi}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,76 \cdot 13,59 \cdot 9,808}{0,001293}} = 396^m.002,$$

somit

$$c_1 = 396^{\text{m}},002 \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Bezeichnen wir das spezifische Gewicht irgend eines andern Gases, ~~essen~~ der Luft gleich 1 gesetzt, mit  $d$ , so erhalten wir für die Ausflußgeschwindigkeit desselben

$$c_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma d} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}} = \frac{396^{\text{m}},002}{\sqrt{d}} \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}$$

der bei gleichen Drucken  $p_0$  und  $p_1$  ist die Ausflußgeschwindigkeit verschiedener Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt proportional.

Eine Prüfung dieser Sätze durch Messung der Geschwindigkeit  $c_1$  ist nicht möglich, da die Geschwindigkeit des Gases in der Ausflußöffnung sich nicht messen läßt. Dieselbe ist dagegen möglich, indem man die Menge des ausgeflossenen Gases mißt.

Man kann das am besten, indem man bei einer der in Fig. 220 angedeuteten ähnlichen Vorrichtung die Volumverminderung des Gases in dem Gefaße mißt, welche sich unmittelbar aus dem Volumen oder Gewichte der ausströmenden Flüssigkeit ergibt. Ist der Querschnitt der Öffnung  $q_1$ , so ist das in der Sekunde ausfließende Gasvolumen

$$w_1 = q_1 c_1.$$

Da dieses Volumen aus der Öffnung bei dem Drucke  $p_1$  hervortritt, so entspricht in dem Gefaße, in welchem der Druck, wenn wir dasselbe als ein zylindrisches Reservoir voraussetzen, überall gleich  $p_0$  ist, ein Volumen  $w$ , welches nach dem Mariotteschen Gesetze sich ergibt

$$w : w_1 = p_1 : p_0$$

$$w = \frac{w_1 p_1}{p_0} = q_1 \frac{p_1}{p_0} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma d} \frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Läßt man die Gase in die freie Luft ausströmen und wendet nur einen kleinen Überdruck an, so kann man für den Druck in der Ausflußöffnung den Druck der äußern Atmosphäre einsetzen, und erhält dann, wenn  $q_1$  in Quadratmetern gegeben ist, das Volumen der ausgeflossenen Gasmenge in Kubikmetern.

Die Versuche ergeben auch hier, wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten, daß die wirkliche Ausflußmenge kleiner ist als die theoretische; während indes bei den tropfbaren Flüssigkeiten der sogenannte Erfahrungskoeffizient konstant war, scheint er bei den Gasen mit wachsendem Drucke  $p_0$  etwas abzunehmen, schon innerhalb der Grenze, bei welcher die angenäherte Formel noch ausreicht, was bis etwa 1<sup>m</sup> Wasserdruck als Überdruck der Fall ist. Bei sehr geringen Differenzen der Drucke  $p_0 - p_1$ , zwischen 0,028 und 0<sup>m</sup>,14 Wasserdruck fand D'Aubuisson<sup>1)</sup> den Erfahrungskoeffizienten bei Öffnungen in dünner Wand

$$\mu = 0,65,$$

<sup>1)</sup> D'Aubuisson, Annales de chim. et de phys. 32 1826.

Weisbach<sup>1)</sup> erhielt bei ähnlichen Verhältnissen

$$\mu = 0,671,$$

also sehr nahe mit dem übereinstimmend, mit welchem man die theoretisch berechnete Ausflußmenge der Flüssigkeiten multiplizieren muß, um die beobachtete Ausflußmenge zu erhalten.

G. Schmidt<sup>2)</sup> erhielt für eine Druckhöhe von 0<sup>m</sup>,913 als Koeffizienten

$$\mu = 0,52$$

und einen nicht viel davon verschiedenen Wert bestimmte Koch<sup>3)</sup> für das Ausströmen der Luft aus Öffnungen in dünner Wand.

Diese Verschiedenheit der Resultate aus den Beobachtungen und der Theorie weist darauf hin, daß bei der theoretischen Entwicklung der Ausflußgesetze nicht alle Umstände in Betracht gezogen sind, welche auf die Bewegung des Gases von Einfluß sind. Wir erkennen dieselben leicht in ähnlichen Verhältnissen wie bei den Flüssigkeiten, das Gas bewegt sich von allen Seiten gegen die Öffnung hin und dadurch wird die gegen die Öffnung senkrechte Geschwindigkeit des ausfließenden Gases gestört.

Den experimentellen Beweis dafür liefert uns der Einfluß von Ansatzröhren an die Gefäßöffnung auf die Menge des ausfließenden Gases. Nach den Versuchen von D'Aubuisson, Schmidt, Koch und Weisbach wird die Menge des ausfließenden Gases durch solche Röhren ähnlich wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten größer, so lange die Röhren nicht zu eng und zu lang sind. Nach den Versuchen von D'Aubuisson ist für kurze zylindrische Röhren, deren Länge gleich ist dem fünffachen Durchmesser  $\mu = 0,92$  und für kurze konische Ansatzröhren, den engern Durchmesser nach außen gekehrt,  $\mu = 0,93$ , Weisbach findet für zylindrische Ansatzrohre  $\mu = 0,839$ , für konische 0,883.

Schmidt findet für konische Ansatzröhren, wenn der größere Durchmesser nach außen gekehrt ist,  $\mu$  noch um vieles größer, nämlich 1,122, so daß also die beobachtete Ausflußmenge selbst größer ist als die theoretisch berechnete.

Wendet man anstatt kurzer verhältnismäßig weiter Ansatzröhren lange und enge Röhren an, so zeigt sich auch hier ähnliches wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten; der Ausfluß der Gase folgt ganz anderen Gesetzen als bei Anwendung von Öffnungen in dünnen Wänden. Nach den ausgedehnten Versuchen von Girard<sup>4)</sup> verhalten sich die Ausflußmengen bei nicht zu engen Röhren direkt wie die Drucke, unter welchen das ausfließende Gas steht, und umgekehrt wie die Quadrate der Röhrenlängen, durch welche das Gas abfließt.

Daß die Ausflußgeschwindigkeit der Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt proportional ist, kann man am bequemsten dadurch nachweisen, daß man gleiche Volume verschiedener Gase unter denselben

1) Weisbach, Experimental-Hydraulik. p. 184 ff.

2) G. G. Schmidt, Gilbert Annalen. 66. 1820.

3) Fr. L. Koch, Versuche und Beobachtungen über die Geschwindigkeit u. Quantität verdichteter Luft, welche aus Öffnungen usw. ausströmt. Göttingen 1811.

4) Girard, Mémoires de l'Institut de France. 5. 1826. — Neuere Versuche Saint-Venant und Wantzel, Comptes rendus 17. 1843.

hältnissen aus einer engen Öffnung ausströmen läßt und die dazu iche Zeit beobachtet. Die Quadrate dieser Zeiten müssen sich halten wie die Dichtigkeiten der Gase. Bunsen hat diese Me- igewandt und darauf ein Verfahren gegründet, die spezifischen der Gase miteinander zu vergleichen<sup>1)</sup>, ein Verfahren, welches s für technische Zwecke, wie zu Dichtigkeitsbestimmungen von u, sehr bequem ist.

lt man verschiedene Gase durch lange Röhrenleitungen gehen, so ach den Versuchen von Girard die Ausflußgeschwindigkeit nicht n der Dichtigkeit des Gases ab; unter Voraussetzung gleicher hhältnisse ist die Ausflußgeschwindigkeit für die verschiedenen Gase

h in einer andern Weise können wir die abgeleiteten Gleichungen ndem wir aus ihnen die Verteilung des Druckes in der strömenden e berechnen. Bezeichnen wir in irgend einem Querschnitt  $q$  der en Gasmasse den Druck mit  $p$ , die Geschwindigkeit mit  $v$ , so er- ir für die Ausflußgeschwindigkeit  $v_1$ , wenn in der Ausflußöffnung k gleich  $p_1$  ist, aus der vorhin aufgestellten Gleichung

$$v dv = - \frac{\pi}{\sigma} \frac{dp}{p},$$

ir jetzt von  $v$  bis  $v_1$  und von  $p$  bis  $p_1$  summieren

$$v_1^2 \left( 1 - \frac{v^2}{v_1^2} \right) = 2 \frac{\pi}{\sigma} \log \frac{p}{p_1},$$

ichung, welche uns mit Hilfe der Beziehung

$$pqv = p_1 q_1 v_1,$$

alt, wenn wir eine derartige Form des Gefüßes und der Ausfluß- voraussetzen, daß wir die Geschwindigkeiten als senkrecht zu den len Querschnitten annehmen dürfen, den in den verschiedenen itten des Gefüßes vorhandenen Druck  $p$  zu berechnen gestattet. erhalten wir

$$v_1^2 \left( 1 - \left( \frac{p_1}{p} \right)^2 \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 \right) = 2 \frac{\pi}{\sigma} \log \frac{p}{p_1}.$$

en wir nun voraus, daß das Ausfließen überhaupt nur unter kleinen erfolge, so können wir zunächst setzen

$$\log \frac{p}{p_1} = \log \left( 1 + \frac{p - p_1}{p_1} \right) = \frac{p - p_1}{p_1}$$

er

$$= \left( \frac{p}{p_1} \right)^{-2} = \left( 1 + \frac{p - p_1}{p_1} \right)^{-2} = 1 - 2 \frac{p - p_1}{p_1} + 3 \left( \frac{p - p_1}{p_1} \right)^2 + \dots$$

nen in dieser Reihe schon das dritte Glied vernachlässigen. Dann wir

$$v_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 - 2 \frac{p - p_1}{p_1} \left( \frac{q_1}{q} \right)^2 \right] = 2 \frac{\pi}{\sigma} \frac{p - p_1}{p_1}$$

und daraus

$$\frac{p - p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{\frac{2\pi}{\sigma v_1^2} q^2 - 2q_1^2}$$

oder, indem wir im Nenner rechts  $v_1^2$  durch seinen Wert

$$v_1^2 = \frac{\frac{2\pi}{\sigma} \frac{p_0 - p_1}{p_1}}{1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2}$$

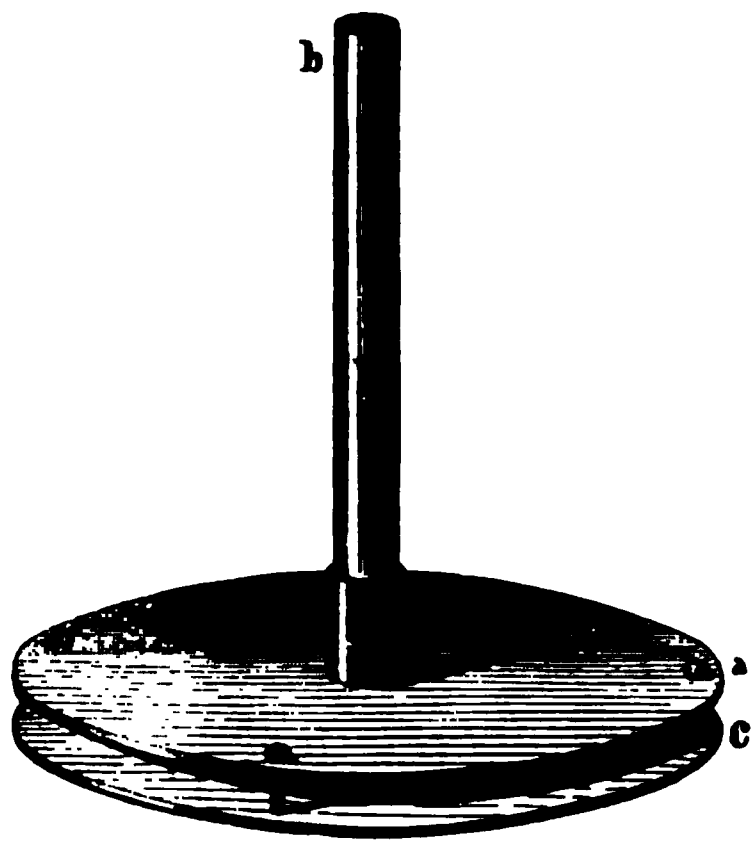
ersetzen,

$$\frac{p - p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{\frac{p_1}{p_0 - p_1} q^2 \left(1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2\right) - 2q_1^2}$$

Das Vorzeichen auf der rechten Seite hängt davon ab, ob  $q > q_1$  oder  $q < q_1$ , denn da unsere ganze Entwicklung nur gilt, so lange  $p_0 - p_1$  gegen  $p_1$  sehr klein ist, so ist der Nenner der rechten Seite bei allen in der Praxis herzustellenden Vorrichtungen als positiv zu nehmen. Dann ergibt sich, daß in allen Querschnitten, welche größer sind als die Ausflußöffnung,  $p > p_1$ , in allen, welche kleiner sind als die Ausflußöffnung, dagegen  $p < p_1$ . Läßt man deshalb Gas oder Luft in die äußere Atmosphäre ausströmen, so daß in der Ausflußöffnung der Druck  $p_1$  gleich dem der äußeren Atmosphäre ist, so wird an allen Stellen, an welchen das ausströmende Gas einen Querschnitt passiert, der kleiner ist als die Ausströmungsöffnung, der Druck kleiner als derjenige der Atmosphäre.

Mit Hilfe des kleinen Apparates Fig. 221 kann man diesen geringeren Druck leicht nachweisen. Eine Glasröhre mündet in der Mitte einer

Fig. 221.

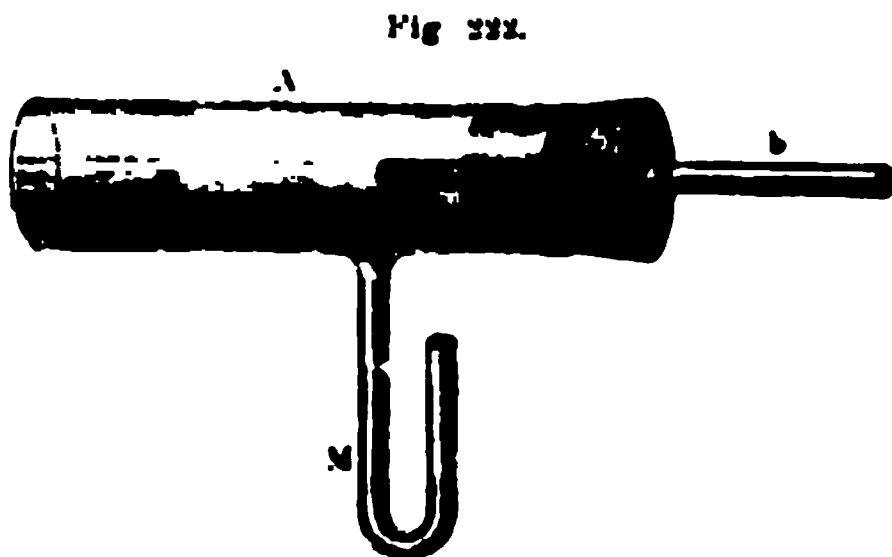


Scheibe und in einiger Entfernung von letzterer ist eine zweite nicht durchlöchernte Scheibe mittels dreier Drähte festgehalten, welche sich der Mündung der Röhre nähern kann. Bläst man kräftig in die Röhre  $b$  hinein, so sieht man, wie sich die Scheibe  $c$  der Schwere entgegen zur Scheibe  $a$  hinbewegt, ein Moment die Öffnung der Röhre verschließt, dann wieder abgestoßen wird, wieder sich gegen  $a$  hinbewegt und so auf und nieder sich bewegt, so lange man in die Röhre hineinbläst. Die Ausflußöffnung ist hier die ringförmige Spalte zwischen den Rändern der beiden Scheiben, nach welcher von der Mitte aus die Luft sich auf den Rändern hinbewegt. Die einzelnen um den

Mittelpunkt der Scheibe  $a$  gelegten zur Scheibe  $a$  und  $c$  senkrechten kreisförmigen Schnitte bilden also die verschiedenen Querschnitte, welche sonst alle kleiner sind als die Ausflußöffnung, so daß auf die ganze Scheibe  $c$  unten nach oben ein stärkerer Druck wirkt als von oben nach unten. In dem Augenblicke aber, in welchem infolge dieses Druckes die Platte  $c$  in

die Öffnung der Röhre legt, die Luft also am Ausfließen gehindert ist, tritt der statische Druck der in der Röhre *b* verdichteten Luft in Tätigkeit, und treibt die Platte fort, welche dann wieder gegen *a* gedrückt wird, und so fort.

Mit der Anordnung Fig. 222 kann man diesen kleinern Druck ebenso sichtbar machen. Man steckt in ein weiteres Glasrohr *A*, an welches kleines Manometerrohr *M* angeschlossen ist, mit einem Stopfen engeres Rohr *b* und schiebt selbe soweit hinein, daß das Rohr *b* sich in dem Querschnitt befindet, in welchem das Manometerangeschmolzen ist. Füllt man das Manometer mit Wasser, bläst durch das Röhrchen *b*, steigt das Wasser in dem Manometerrohr an, welcher mit der Röhre *A* Verbindung steht. Die Niveaudifferenz in den beiden Röhren gibt die Differenz der Drucke in der Mündung des engen Rohres und an der Ausmündung.



### § 117.

**Reibung der Gase.** Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Beziehungen gelten nur für das Ausfließen der Gase durch eine Öffnung in der Wand oder durch Röhren, welche einen im Verhältnis zu ihrer Länge nicht zu kleinen Querschnitt haben; läßt man die Gase durch enge Röhren ausfließen, so werden, wie das sich zuerst aus ausgeführten Versuchen von Graham<sup>1)</sup> ergab, die Gesetze des Ausflusses wie bei Flüssigkeiten ganz andere, welche beweisen, daß auch bei den Gasen eine innere Reibung vorhanden ist, und ebenso eine Reibung an den Wänden der Röhre, durch welche die Gase fließen.

Daß in der Tat bei den Gasen eine innere Reibung vorhanden sein muß, und welchen Gesetzen dieselbe folgen muß, ergibt sich unmittelbar aus der kinetischen Gastheorie, wie zuerst Maxwell<sup>2)</sup> aus seiner ältern, wie wir erwähnten, im wesentlichen mit derjenigen von Clausius übereinstimmenden Anschauung über die Natur der Gase abgeleitet hat. Später wurde die Theorie der Reibung von O. E. Meyer<sup>3)</sup>, Tait<sup>4)</sup>, Clausius<sup>5)</sup> verbessert worden und in sehr einfacher Weise von v. Lang<sup>6)</sup>.

<sup>1)</sup> Graham, Philosophical Transactions of London R. S. 136. 1846 und 1849.

<sup>2)</sup> Maxwell, Philosophical Mag. 19. 4. 1860. Eine etwas andere Theorie der Reibung aus seiner spätern Gastheorie gibt Maxwell, Phil. Mag. 35. 4) 1868.

<sup>3)</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann. 125. 1865. Kinetische Theorie der Gase. Breslau 1894—1899 p. 171 ff. Mathem. Zusätze. p. 96.

<sup>4)</sup> Tait, Transactions of the Royal Society of Edinburgh. 33. I. p. 65. 1888.

<sup>5)</sup> Clausius, Mechanische Wärmetheorie. II. Aufl. 3. Abschn. III. Braunschweig 1891.

<sup>6)</sup> v. Lang, Poggend. Ann. 145. 1872. Man sehe auch Stefan, Wiener Berichte. 65. p. 343. 1872. Boltzmann, Wiener Berichte. 66. p. 325. 1872.

Wir denken uns zu dem Ende eine Gasmasse, welche nach einer Richtung strömt, nehmen an, daß die einander parallelen Schichten mit verschiedener Geschwindigkeit strömen, und untersuchen, welche Verzögerung eine Schicht dadurch erhalten muß, daß die an einer Seite neben ihr befindliche eine kleinere Strömungsgeschwindigkeit hat. Denken wir uns jetzt durch die strömende Gasmasse der Strömungsrichtung parallel, und zwar so eine Ebene gelegt, daß die sämtlichen in einer der Ebene parallelen Gasschicht liegenden Teilchen dieselbe Strömungsgeschwindigkeit haben, daß aber mit der Entfernung von der Ebene nach der einen Seite die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung zunimmt, nach der andern Seite mit wachsender Entfernung abnimmt. In einer ruhenden Gasmasse nehmen wir, was allerdings, wie wir sahen, nicht der Wirklichkeit entspricht, für alle Moleküle dieselbe Geschwindigkeit an, welche nach allen Richtungen des Raumes gerichtet ist, so daß keine Richtung vor der andern bevorzugt ist. In einer parallel einer bestimmten Richtung bewegten Gasmasse haben die Moleküle zunächst diese, von uns bisher mit  $u$  bezeichnete Geschwindigkeit und außerdem eine der Bewegungsrichtung parallele Geschwindigkeit, welche der Strömungsgeschwindigkeit des Gases gleich ist. Nennen wir diese Strömungsgeschwindigkeit in der gedachten durch die strömende Gasmasse gelegten Ebene  $v_0$ , so ist sie in dem von uns angenommenen Falle für alle Gasschichten an der einen Seite der Ebene  $v_0 + \varphi$ , an der andern  $v_0 - \varphi$ , worin  $\varphi$  mit wachsendem Abstände von der gedachten Ebene größer wird. Infolge der den Gasmolekülen eigentümlichen nach allen Richtungen des Raumes gleichmäßig mit der Geschwindigkeit  $u$  stattfindenden Bewegung werden durch die gedachte Ebene in jedem Momente Moleküle von der einen zur andern Seite gehen, und zwar muß, da die Dichtigkeit an allen Stellen der Gasmasse dieselbe bleibt, die Zahl der Moleküle, welche von Seiten der rascher bewegten zu den langsamer strömenden Schichten hinüber gehen, genau so groß sein als die Zahl der umgekehrt von den langsamer zu den rascher strömenden Schichten übertretenden Moleküle. Da diese letztern nun aber eine geringere Geschwindigkeit in der Richtung der Strömung besitzen, so muß ihnen von der strömenden Gasmasse eine gewisse Geschwindigkeit mitgeteilt werden: ebenso übertragen die zu der langsamer strömenden Gasmasse hinüber tretenden Moleküle dorthin eine gewisse Bewegungsgröße. Das geht aber nur auf Kosten der Bewegung der rascher strömenden Gasmasse, so daß diese eine der den eintretenden Molekülen erteilten und der an die langsamer strömenden übertragenen genau gleiche Bewegungsgröße verliert. Diese verlorene Bewegungsgröße der rascher strömenden Gasmasse ist der Effekt der Reibung. Eine genau gleiche Bewegungsgröße erhalten die langsamer fließenden Schichten, so daß diese eine Beschleunigung erhalten müssen, deren Wert ebenso groß ist, als derjenige der Verzögerung der rascher strömenden Schichten.

Man sieht, daß hieraus zunächst die Tatsache der Reibung, wie sie bei den Beobachtungen sich ergibt, als in der Konstitution der Gase begründet erscheint.

Um die Größe der Reibung zu bestimmen, haben wir die Bewegungsgröße zu berechnen, welche den in der Zeiteinheit durch die Flächeinheit der vorhin gedachten Ebene von der Seite der langsamer strömenden



schichten auf die Seite der rascher strömenden Schichten hinüber treten-  
den Molekülen mitzuteilen ist.

Um die überhaupt durch eine Ebene hindurchtretenden Moleküle zu  
halten, können wir die vereinfachende Annahme machen, daß nur solche  
Moleküle durch sie hindurchgehen, welche in der Richtung ihrer Bewegung  
nicht weiter von ihr entfernt sind, als die mittlere Wegelänge  $l$  beträgt,  
und daß aus allen Schichten bis zu dieser Entfernung die gleiche Anzahl  
von Molekülen übertritt. Denken wir uns also etwa ein Flächenelement  $ds$   
auf diesem unter dem Winkel  $\vartheta$  einen prismatischen Raum von der  
Höhe  $l$ , so wird aus jeder Schicht dieses Raumes von der Dicke  $d\xi$  die  
gleiche Anzahl von Molekülen durch das Flächenelement  $ds$  hindurchtreten.

Ergibt sich das unmittelbar aus der Bedeutung der mittleren Wege-  
länge. Die gesamten zwischen zwei Zusammenstößen der Moleküle zurück-  
gelegten Wege dividiert durch die Zahl der Moleküle sind diese mittleren  
Wege; anstatt die einzelnen Moleküle mit ihren Wegen in Betracht zu  
nehmen, ist es somit im Effekt dasselbe, wenn wir annehmen, alle Moleküle  
wären von einem Stoß zum andern diesen Weg zurück. Dann wird aber  
ein Molekül, welches weiter in der Richtung seiner Bewegung von der  
Ebene, als die Strecke  $l$  beträgt, entfernt ist, in Betracht zu ziehen sein,  
wenn es vor Erreichung der gedachten Grenzebene an ein Molekül stößt und  
zurückkehrt; alle in der Richtung  $\vartheta$  sich bewegenden aber, deren Ent-  
fernung zwischen Null und  $l$  beträgt, treten über, und zwar so weit, daß  
ihr zurückgelegter Weg gleich  $l$  geworden ist. Da nun die Moleküle ganz  
gleichmäßig im Raume verteilt sind, so müssen dann auch aus jeder Schicht  
in gleicher Dicke gleich viel Moleküle sich herausbewegen.

Wie wir im § 103 sahen, ist die Zahl der Moleküle, welche gegen  
eine Fläche von der Größe  $s$  in der Richtung  $\vartheta$  anprallen,

$$\frac{s N u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2 l}.$$

Nennen wir die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle  
 $n$

$$\frac{N}{l^3} = n$$

und setzen wir für  $s$  die Flächeneinheit, so gibt uns der Ausdruck

$$\frac{n u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2}$$

die Anzahl der in der Richtung  $\vartheta$  durch die betrachtete Fläche des  
Gases pro Flächeneinheit hindurchgehenden Zahl von Molekülen; denn ist  
an der betreffenden Stelle keine Wand, so gehen die Moleküle eben durch  
die Fläche hindurch, die, wenn eine Wand vorhanden ist, an dieselbe an-  
prallen.

Da alle diese Moleküle aus der zwischen Null und  $l$  liegenden Ent-  
fernung herkommen, so kommen aus jeder Schicht zwischen Null und  $l$   
in der Richtung  $\vartheta$  von der Dicke  $d\xi$  eine Anzahl von Molekülen, welche  
zur Gesamtzahl verhält wie  $\frac{d\xi}{l}$ . Aus einer in der Richtung der Be-  
wegung genommenen Entfernung  $\xi < l$  und einer Schicht, welche in dieser

Richtung die Dicke  $d\xi$  hat, passieren also unsere gedachte Grenzebene pro Flächeneinheit

$$\frac{nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\xi}{2 l}$$

Moleküle. Wir berechnen jetzt die Bewegungsgröße, welche diesen aus der Entfernung  $\xi$  kommenden und durch die gedachte Grenzebene von den langsamer zu den rascher strömenden Schichten in der Richtung  $\vartheta$  hinübergehenden Molekülen erteilt werden muß. Indem wir dann für  $\xi$  nach und nach alle Werte von Null bis  $l$  einsetzen und die so für alle innerhalb dieser Entfernung befindlichen Moleküle erforderliche Bewegungsgröße bilden, erhalten wir in der Summe aller dieser Werte zunächst die Bewegungsgröße, welche den in der Richtung  $\vartheta$  übertretenden Molekülen erteilt werden muß.

Wir bezeichneten schon vorhin die Strömungsgeschwindigkeit in der gedachten Grenzebene mit  $v_0$  und in einiger Entfernung davon an Seite der langsamer strömenden Schichten mit  $v_0 - \varphi$ ; die Größe  $\varphi$  wächst mit der Entfernung der Schichten von der Grenzebene. Da es sich hier nur um äußerst kleine Entfernungen handelt, dürfen wir  $\varphi$  dem senkrechten Abstände  $z$  der betrachteten Schicht von der Grenze proportional, also setzen

$$\varphi = \frac{dv}{dz} z,$$

worin  $dv$  die Abnahme der Geschwindigkeit gibt, wenn  $z$  um  $dz$  wächst, somit der Quotient die Abnahme der Geschwindigkeit bedeutet, wenn der senkrechte Abstand von der Grenze um die Einheit der Entfernung zunimmt, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeitsabnahme überall gleichmäßig erfolgen würde, wie an der gerade betrachteten Stelle.

Ein aus dem Abstände  $\xi$  in einer Richtung, welche mit der Normalen den Winkel  $\vartheta$  bildet, kommendes Molekül kommt aus einer Schicht, deren senkrechter Abstand von der Grenze

$$z = \xi \cos \vartheta$$

ist, es hat somit die Strömungsgeschwindigkeit

$$v_0 - \frac{dv}{dz} \cdot \xi \cos \vartheta.$$

Dieses Molekül geht an der andern Seite der Grenzebene bis zu einem Abstände

$$z = (l - \xi) \cos \vartheta,$$

es muß somit dort eine Strömungsgeschwindigkeit erhalten

$$v_0 + \frac{dv}{dz} (l - \xi) \cos \vartheta,$$

seine Strömungsgeschwindigkeit muß somit um

$$\left( v_0 + \frac{dv}{dz} (l - \xi) \cos \vartheta \right) - \left( v_0 - \frac{dv}{dz} \xi \cos \vartheta \right) = \frac{dv}{dz} l \cos \vartheta$$

zunehmen. Ist  $m$  die Masse des einzelnen Moleküls, so entspricht das

geschwindigkeitszunahme die Bewegungsgröße

$$m \frac{dv}{dz} l \cos \vartheta.$$

Für die aus der Entfernung  $\xi$  von Seiten des langsamer strömenden Gases kommenden unter einem Winkel  $\vartheta$  die Grenzebene durchsetzenden Moleküle ist somit der Zuwachs an Bewegungsgröße, welche sie auf Kosten der strömenden Gasschicht erhalten

$$\frac{1}{2} n u \cos \vartheta \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\xi} \frac{d\xi}{l} \cdot m \frac{dv}{dz} l \cos \vartheta.$$

Für die überhaupt in der Richtung  $\vartheta$  übertretenden Moleküle ergibt sich dann die erforderliche Bewegungsgröße aus der Überlegung, daß auf der Strecke  $l$ , von welcher überhaupt Moleküle in dieser Richtung übertreten,  $\frac{l}{d\xi}$  Schichten von der in der Bewegungsrichtung genommenen Dicke  $d\xi$  sind. Da aus jeder dieser Schichten die gleiche Zahl von Molekülen kommt, und da nach der eben gemachten Entwicklung für jedes der Moleküle die gleiche Zunahme der Bewegungsgröße eintreten muß, erhalten wir die für alle in der Richtung  $\vartheta$  übertretenden Moleküle erforderliche Bewegungsgröße, indem wir den eben gefundenen Ausdruck mit  $\frac{l}{d\xi}$  multiplizieren. Dieselbe wird somit

$$\frac{1}{2} m n u l \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \frac{dv}{dz}.$$

Diesen Verlust an Bewegungsgröße erfährt die rascher strömende Gasmasse durch die von Seite der langsamer strömenden Schichten in sie in der Richtung  $\vartheta$  eintretenden Moleküle. Einen genau ebenso großen Verlust an Bewegungsgröße erfährt sie dadurch, daß von Seiten der rascher strömenden Gasmasse genau so viel Moleküle in die langsamer strömende Gasmasse eintreten und dort genau denselben Zuwachs an Bewegungsgröße übergeben. Denn die Zahl der übertretenden Moleküle ist genau dieselbe, und das legt den Weg  $l$  in der Richtung von der rascher zu der langsamer strömenden Gasmasse zurück, gibt also an diese genau die gleiche Bewegungsgröße ab, welche das aus der entsprechenden Lage von der andern Seite kommende zu erhalten hat.

Der Gesamtverlust, den die durch die Grenzebene in der Richtung  $\vartheta$  sich austauschenden Moleküle in der rascher strömenden Gasmasse bewirken, ist somit das Doppelte des eben berechneten, oder

$$m n u l \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \frac{dv}{dz}.$$

Wir erhalten dann den Verlust an Bewegungsgröße, den die rascher strömende Gasmasse überhaupt durch die sich austauschenden Moleküle erfährt, wenn wir obigen Wert für jeden zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  liegenden Winkel  $\vartheta$  bilden und alle diese Werte summieren, also in der Summe

$$m n u l \frac{dv}{dz} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

da  $mnul \frac{dv}{dz}$  für jede Richtung  $\vartheta$  denselben Wert hat. Diese Summe ist wie wir schon mehrfach sahen,

$$\frac{1}{3} mnul \frac{dv}{dz}.$$

Dieser Verlust der Bewegungsgröße der rascher strömenden Gasmasse, dem ein genau gleicher Gewinn auf Seiten der langsamer strömenden gegenüber steht, ist der Effekt der Reibung.

Gerade wie bei den Flüssigkeiten können wir die Reibung auch hier als einen in der Grenzebene der Bewegungsrichtung entgegenwirkenden Druck definieren, der Druck muß auf die Flächeneinheit während einer Sekunde wirkend der strömenden Gasmasse denselben Verlust an Bewegungsgröße, oder dieselbe Bewegungsgröße in der der Strömung entgegengesetzten Richtung erteilen. Bezeichnen wir diesen Druck mit  $K$ , so ist

$$K = \frac{1}{3} mnul \frac{dv}{dz}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem § 89 für die Reibung in Flüssigkeiten erhaltenen Ausdruck

$$K = \eta f \frac{dv}{dz},$$

indem wir hier  $z$  für  $x$  setzen, weil wir die zur Strömungsrichtung normale Richtung mit  $z$  bezeichnet haben, so erkennt man, daß für die Gase ganz dasselbe Reibungsgesetz für die innere Reibung gilt, und daß der Reibungskoeffizient

$$\eta = \frac{1}{3} mnul$$

ist<sup>1)</sup>. In diesem Ausdrucke bedeutet  $n$  die in der Volumeinheit vorhandene Molekühlzahl. Nach § 102 können wir, wenn wir die von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllten Räume außer acht lassen, für  $l$  setzen

$$l = \frac{1}{n \frac{4}{3} \varrho^2 \pi} \varrho$$

und erhalten dann für  $\eta$

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{mu}{\frac{4}{3} \varrho^2 \pi} \cdot \varrho,$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, daß der Reibungskoeffizient von der Anzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle, also auch, soweit die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, von dem Drucke unabhängig ist. unter welchem das Gas steht.

Die Notwendigkeit dieses auf den ersten Blick sehr auffallenden Satzes ergibt sich indes aus der Natur der Gasreibung als Abgabe der Bewegung der schneller strömenden Moleküle an die in sie eindringenden langsamer fortschreitenden. Wird die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit kleiner, so nimmt in demselben Verhältnisse die Wegelänge  $l$ , also die Dicke der

1) Für den Zahlenkoeffizient des Ausdrucks für die Reibungskonstante erhält man einen etwas verschiedenen Wert, wenn man die Annahme, daß alle Moleküle dieselbe Geschwindigkeit haben, fallen läßt. Man sehe Clausius, Mechanische Wärmetheorie. 3. p. 101; je nach der Bedeutung, welche dem Mittelwerte  $u$  beigelegt wird, erhält Clausius 0,3501 oder 0,3225.

agruamer strömenden Schicht, aus welcher die Moleküle in die rascher fließende übertreten, zu, die übertragene Bewegungsgröße muß also denselben Wert behalten, vorausgesetzt, daß die strömende Gasmasse in der Richtung der Bewegung senkrechten Richtung eine solche Ausdehnung hat, daß die Schicht mit abnehmender Dichte, wegen des Wachsens von  $l$  wachsende Dicke der Schicht ganz mit Gas ausgefüllt ist.

Bei einer sehr weitgehenden Verdünnung des Gases ist indes die vorgeführte Theorie nicht mehr gültig<sup>1)</sup>, da wir dann die Annahme nicht mehr machen dürfen, daß nur Moleküle aus Schichten von der Dicke  $l$  sich ausmachen. Wir werden sehen, daß auch bei sehr hohen Drucken die Theorie nicht mehr besteht.

### § 118.

**Bestimmung der Reibungskoeffizienten der Gase.** Da nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen die Theorie für die Reibung der Gase zu dem auch für die Flüssigkeiten gültigen Reibungsgesetze führt, müssen auch die zur Beobachtung der Flüssigkeitsreibung dienenden Methoden zur Beobachtung der Gasreibung geeignet sein. Zunächst muß sich für das Ausströmen von Gasen aus kapillaren Röhren ganz der entsprechende Ausdruck ergeben wie für das Ausströmen von Flüssigkeiten. Wie von O. E. Meyer<sup>2)</sup> durchgeführte Theorie des Ausströmens von Gasen durch kapillare Röhren, die den Entwicklungen des § 89 ganz analog ist, liefert denn auch zu ganz entsprechenden Ausdrücken für das Volumen der ausströmenden Gase. Mißt man das Volumen des unter konstanten Druckverhältnissen, das heißt während des ganzen Versuches konstantem Drucke  $p_1$  beim Anfange und  $p_2$  am Ende der kapillaren Röhre durch die Röhre geströmten Gases unter dem arithmetischen Mittel der Drucke  $p_1$  und  $p_2$ , also unter dem Drucke  $\frac{p_1 + p_2}{2}$ , so liefert die Theorie für das in  $\tau$  Zeiteinheit ausströmende Volumen  $V$

$$V = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\eta L} \left( R^4 + \frac{1}{2} R^2 \right).$$

so genau denselben Ausdruck, welchen wir für das Volumen der ausfließenden Flüssigkeit fanden, wenn wie dort  $\eta$  die Konstante der innern,  $\zeta$  die der äußern Reibung,  $L$  die Länge und  $R$  den Radius der kapillaren Röhren bedeutet.

Mißt man das Volumen des ausfließenden Gases unter einem andern Drucke, etwa  $p_0$  oder  $p_1$ , so ändert sich dieser Ausdruck etwas, da dann das Volumen  $V$  ein anderes wird; messen wir das Volumen etwa einfach nach der Volumverminderung des Gases in dem Gefäße, aus welchem das Gas ausströmt, also unter dem Drucke  $p_0$ , so wird dasselbe  $V_0$  nach dem Mariotteschen Gesetze

$$V_0 \cdot p_0 = V \cdot \frac{p_1 + p_2}{2}$$

1) Kundt und Warburg, Poggend. Ann. 155 p. 337. 1875

2) O. E. Meyer, Poggend. Ann. 127. p. 253. 1866.

und deshalb

$$V_a = \frac{\pi (p_a^2 - p_e^2)}{16 \eta L p_a} (R^4 + 4 \frac{\eta}{\epsilon} R^3).$$

An den im Anfang des vorigen Paragraphen erwähnten, in den Jahren 1846 und 1849 von Graham angestellten Versuchen hat Meyer die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachgewiesen. Unter den vielen Versuchsreihen Grahams ist eine, bei welcher die Drücke  $p_e$  und  $p_a$  konstant erhalten wurden; es wurde unter konstantem Drucke  $p_e$  ein bestimmtes unter dem Drucke  $p_a$  gemessenes Volumen Luft in der Glocke einer Luftpumpe strömen gelassen, in der durch fortgesetztes Pumpen ein konstant luftverdünnter Raum erhalten wurde, und die Zeit bestimmt, welche bei verschiedenen Drucken  $p_a$  dazu erforderlich war. Bezeichnen wir die dazu erforderliche Zeit mit  $t$ , so wird, da wir  $p_e = 0$  setzen können,

$$V_a = p_a t \frac{\pi}{16 \eta L} (R^4 + 4 \frac{\eta}{\epsilon} R^3),$$

somit

$$p_a t = \frac{V_a 16 \eta L}{\pi} \frac{1}{R^4 + 4 \frac{\eta}{\epsilon} R^3}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist, da immer dasselbe Volumen  $V_a$  und dieselbe Röhre benutzt wurde, konstant, es muß also bei diesen Versuchen das Produkt aus dem Drucke  $p_a$  und der Zeit  $t$  konstant sein. Das ergaben auch die Versuche Grahams; bei drei Versuchsreihen ergaben sich folgende Werte

$p_a$	$t$	$p_a t$
1 Atmosph.	799",5	799,5
0,75 „	1050	787,5
0,5 „	1543	771,5

Werte, welche so wenig voneinander abweichen, daß man sie in Anbetracht der Schwierigkeit der Versuche als eine Bestätigung des Satzes ansehen muß, daß die Größe der Reibung von dem Drucke unabhängig ist.

Bei den übrigen Versuchen ließ Graham entweder nur  $p_a$  oder  $p_e$  konstant; indem Meyer aber aus obiger für den stationären Zustand geltenden Gleichung jene ableitete, welche für ein nur konstantes  $p_a$  oder  $p_e$  gültig sind, konnte er zeigen, daß alle Versuche Grahams mit der Theorie in Übereinstimmung sind.

Später haben dann O. E. Meyer gemeinschaftlich mit Springmühl<sup>1)</sup> und A. von Obermaier<sup>2)</sup> in ausführlichen Versuchen das Ausströmungsgesetz der Gase durch kapillare Röhren geprüft, und gleichzeitig gezeigt, daß auch für Gase sich dabei der Koeffizient  $\epsilon$  der äußern Reibung unendlich groß ergibt. Man wird also auch bei den Gasen unter diesen Umständen annehmen müssen, daß die letzte Schicht fest an den Wänden

1) Meyer und Springmühl, Poggend. Ann. 148. p. 1 und p. 526. 1873.

2) A. von Obermaier, Wiener Berichte. 73. 1877; Carl, Repertorium. 1876; 13. 1877. Man sehe auch von Lang, Wiener Berichte. 53. 1871 und Meyer, Berechnung dieser Versuche. Poggend. Ann. 148. p. 550. 1873.

die Röhre adhärirt, und daß an dieser sich die strömenden Gasschichten vorbeischieben.

Infolge dieser Erfahrung ist die Beobachtung der durch eine kapillare Röhre strömenden Gasmenge auch vortrefflich geeignet, um die Reibungskoeffizienten der Gase in absolutem Maße zu bestimmen; sie ist zu dem Zwecke von Meyer und Springmühl und von A. von Obermaier benutzt worden. Die von diesen Experimentatoren erhaltenen Resultate werden wir nachher für einige Gase zusammenstellen<sup>1</sup>).

Bei Besprechung der Reibung der Flüssigkeiten haben wir noch eine andere Methode zur Bestimmung der Reibungskoeffizienten kennen gelernt, welche darin bestand, daß man eine kreisförmige Scheibe um eine durch ihren Mittelpunkt gehende und zu ihrer Ebene senkrechte Achse in Schwingungen versetzt, und das logarithmische Dekrement dieser Schwingungen bestimmt. In welcher Weise dieses Dekrement von der Reibung, welche eine Platte in ihrer Bewegung erleidet, abhängig ist, haben wir § 89 abgeleitet.

Wie wir dort sahen, erhält man den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeiten aus der Differenz der logarithmischen Dekremente, wenn man die Schwingungen der Scheibe in der Luft und in der Flüssigkeit beobachtet. In dieser Form ist die Methode zur Bestimmung der Reibungskoeffizienten in der Luft nicht anzuwenden, da man einen luftleeren Raum nicht herstellen kann. O. E. Meyer, der diese Methode zuerst zur Messung der Luftreibung benutzte, verfuhr deshalb folgendermaßen.<sup>2</sup> An dem Draht, dessen Torsion die Schwingungen bewirken soll, deren Dekrement beobachtet wird, wurde ein vertikal herabhängender zylindrischer Stab befestigt. Auf diesen wurden drei kreisförmige Scheiben von gleichem Durchmesser, entweder Glasscheiben von 150<sup>mm</sup> oder Messingscheiben von 200<sup>mm</sup> Durchmesser, verschiebbar aufgesetzt, so daß man entweder die Scheiben in einem gewissen Abstände voneinander einklemmen konnte, oder alle drei fest aneinander geschoben und in einer Scheibe vereinigen konnte. In dem letztern Falle wirkt die Luftreibung nur auf eine Scheibe, in dem erstern dagegen auf drei Scheiben, und das von der Luftreibung herrührende Dekrement der Schwingungen ist dann das dreifache von demjenigen, welches man mit einer Scheibe erhält. Die Rechnungen führen im übrigen zu denselben Gleichungen, die auch die Flüssigkeitsrechnung ergeben; wir gehen nicht weiter darauf ein. O. E. Meyer nach dieser Methode nur wenig befriedigende Resultate

<sup>1</sup> Schumann, Wiedem. Ann. 23. p. 337. 1884 spricht die Ansicht aus, daß die Beobachtung des Durchflusses durch kapillare Röhren kein geeignetes Mittel zur Erlangung absoluter Werte der Reibungskoeffizienten sei; ganz besonders ist er, die Methode sei nicht geeignet die Änderungen der Reibungskoeffizienten mit der Temperatur zu erkennen. Einen wesentlichen Grund für seine Ansicht sieht er in der Änderung des äußeren Reibungskoeffizienten  $\lambda$  mit der Temperatur, auf welche wir später zu sprechen kommen, und in der mit der Temperatur sich ändernden Adsorption der Gase, die zudem nach den Versuchen von Kayser in Röhren verschiedenen Durchmessers verschieden sei. Ich kann die Einwürfe Schumanns nicht für richtig halten, er überschätzt ohne Zweifel den Einfluß der Adsorption der Gase. Man sehe in bezug auf die Bemerkungen Schumann auch Barus, Wiedem. Ann. 36. p. 358. 1889.

<sup>2</sup> O. E. Meyer, Poggend. Ann. 125. p. 177, 401, 564. 1865.



erhielt, auch nachdem er die im § 89 erwähnte Korrektur von W. König in seinen Rechnungen angewandt hatte.<sup>1)</sup>

Eine sehr wesentliche Verbesserung wurde dieser Methode durch Maxwell<sup>2)</sup> gegeben, die darin bestand, daß er die beweglichen Scheiben zwischen denselben sehr nahestehenden festen, den beweglichen parallelen Scheiben schwingen ließ. Es wurden über und unter die schwingenden Scheiben und zwischen dieselben dünne aus zwei Halbkreisen bestehende Platten geschoben, so daß sich zwischen den schwingenden und festen Scheiben nur wenige Millimeter dicke Luftplatten befanden. Durch diese Modifikation des Coulombschen Verfahrens wird die dämpfende Wirkung der Luftreibung eine ganz erheblich stärkere; läßt man nämlich die Scheiben ohne zwischen oder nahe gestellte Platten schwingen, so überträgt sich von der schwingenden Platte aus die Bewegung erheblich weiter, während bei den zwischen gestellten Platten die an der festen Platte anliegende Luftschicht durch die Adhäsion in Ruhe bleibt; infolgedessen ist die Geschwindigkeitsabnahme der Bewegung mit Entfernung von der schwingenden Platte, der § 89 als  $\frac{d\psi}{dx}$  bezeichnete Differentialquotient erheblich größer. Die theoretische Behandlung der zwischen den Platten stattfindenden Bewegung der Luft zeigt ferner, daß das von der Reibung an der Luft abhängige logarithmische Dekrement in diesem Falle direkt dem Reibungskoeffizienten proportional ist. Ist nämlich jetzt  $\lambda$  das beobachtete,  $\lambda_0$  das von der Luftreibung nicht abhängige Dekrement, so wird nach Maxwell

$$\lambda - \lambda_0 = N \frac{\pi(R + \alpha)^4}{4DM} T\eta(1 + \vartheta),$$

wenn  $N$  die Anzahl der Oberflächen der Scheiben ist, welche der Luftreibung ausgesetzt sind,  $D$  den Abstand der Oberfläche der beweglichen von der zugewandten Seite der festen Scheibe bedeutet.

Läßt man eine Scheibe zwischen zwei festen schwingen, so wird  $N=2$  und der Ausdruck wird

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{\pi(R + \alpha)^4}{2DM} T\eta(1 + \vartheta).$$

Die Größe  $\alpha$  ist eine Korrektur wegen des Scheibenrandes, welche nach Maxwell gegeben ist durch

$$\alpha = \frac{2b}{\pi} \log \text{nat } 10 \left( \log_{10} 2 - \log_{10} \sin \frac{D\pi}{2b} \right),$$

wo das Zeichen  $\log_{10}$  Briggsche Logarithmen andeuten soll;  $2b$  ist der Abstand der einander zugewandten Flächen der festen Scheiben, also gleich  $D$ , vermehrt um die Dicke der schwingenden Scheibe. Setzen wir die Zahlenwerte für die Logarithmen ein, so wird

$$\alpha = 0,73125 \cdot 2b \left( 0,30103 - \log \sin \frac{D\pi}{2b} \right).$$

Die Größe  $\vartheta$  ist ein Korrektionsglied, das durch eine Reihe gegeben

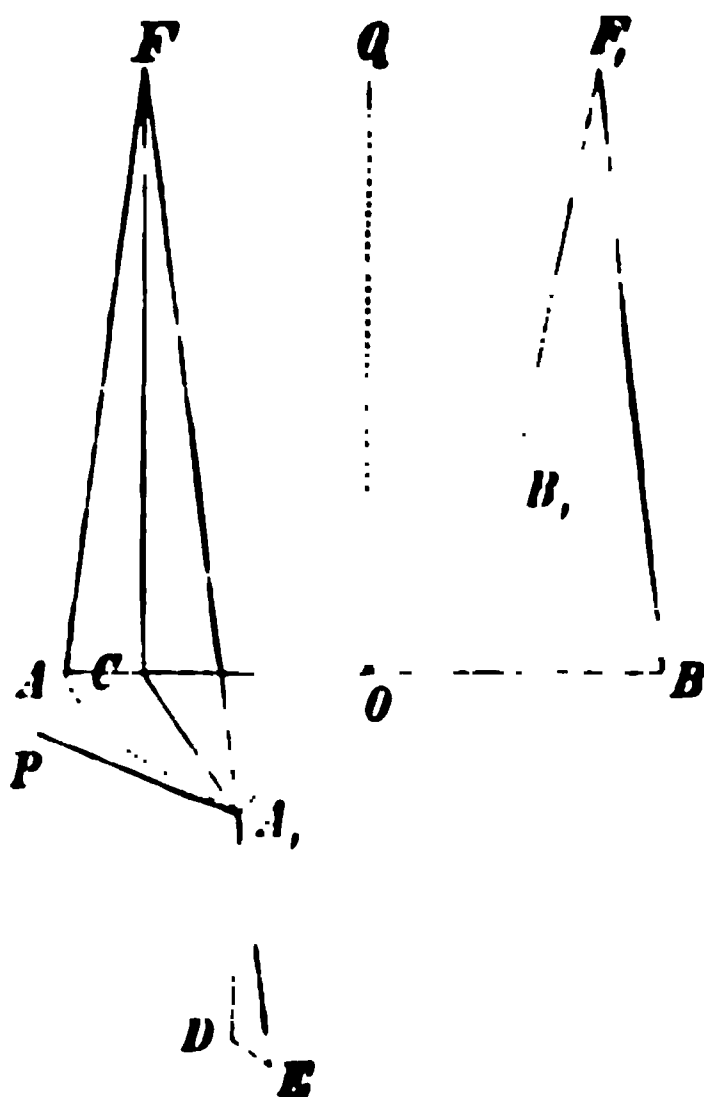
1) O. E. Meyer, Wiedem. Ann. 32. p. 657. 1887.

2) Maxwell, Philos. Transactions. 156. p. 249. 1866.

, deren Wert von der Dichte der Luft abhängt, und welche um so näher sich Null wird, je kleiner der Abstand  $D$ , je größer die Schwingungsdauer  $T$  und je geringer die Luftdichte ist. Bei einem Werte  $D = 4,6^{\text{mm}}$  und  $T = 36''$  wird nach Maxwell, wenn die Luft unter dem Drucke der Atmosphäre steht,  $\vartheta = -0,00058$ . Bei kleinern Werten  $D$  und geringerer Luftdichte nimmt der Wert rasch ab; bei den gleich zu besprechenden Versuchen von Kundt und Warburg war er gleich Null zu setzen.

Wegen der Größe und Unsicherheit in der Bestimmung der inneren Reibung wandten später Meyer<sup>1)</sup> sowie Kundt und Warburg<sup>2)</sup> zur Aufhebung der Scheiben, die zuerst von Gauss<sup>3)</sup> bei magnetischen Beobachtungen benutzte Bifilarsuspension an. Dieselbe besteht darin, daß man einen Körper, der Schwingungen vollführen soll, an zwei Fäden von gleicher Länge aufhängt, welche sich in größerer oder geringerer Entfernung voneinander befinden, und welche entweder einander parallel hängen, wenn ihre oberen und unteren Anknüpfungspunkte gleich weit voneinander entfernt sind, oder symmetrisch zur vertikalen, wenn die unteren Anknüpfungspunkte näher oder auch voneinander entfernter sind als die oberen. Ein aufgehängter Körper befindet sich in der Gleichgewichtslage, wenn die beiden Fäden sich ihrer ganzen Länge nach in einer Vertikalebene befinden, d. h. eine durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Vertikale sich in derselben Ebene befindet. Bringt man den Körper aus seiner Lage durch eine Drehung um die Mittellinie der beiden Fäden, so wird das Gleichgewicht gestört, da die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr bestehen; die Fäden sind nicht mehr parallel, nicht mehr in einer Ebene, und gleichzeitig wird der Schwerpunkt des Körpers etwas gehoben. Es entsteht daher ein Drehungsmoment, welches den Körper in die Gleichgewichtslage zurückzuführen bestrebt. Um die Größe dieses Drehungsmomentes zu bestimmen, sei  $AB$  (Fig. 223) ein Durchschnitt durch den Körper in der Aufhängeebene.  $FA$ ,  $F_1B$  seien die Aufhängefäden und der Schwerpunkt des Körpers sei in der Mittellinie  $QO$ . Ist das Gewicht des Körpers  $p$ , so können wir unsere Betrachtung annehmen, in jedem der Aufhängepunkte  $A$  und  $B$  wirke das Gewicht  $\frac{p}{2}$ . Nun werde der Körper in die Lage  $A_1B_1$  gedreht, wobei wir voraussetzen wollen, daß die Fäden eine solche Lage gegenüber den Abständen  $AB = 2a$  oder  $FF_1 = 2b$  haben, daß wir die durch die Drehung eintretende Hebung des Schwerpunktes außer acht lassen können.

Fig. 223.



1) O. E. Meyer, Poggend. Ann. 148. p. 14. 1871.

2) Kundt und Warburg, Poggend. Ann. 155. p. 373. 1875.

3) Gauss, Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins für das Jahr 1837. p. 1. für das Jahr 1840. p. 1.

Dann befinden sich  $AB$  und  $A_1B_1$  in derselben Horizontalebene und  $AOA_1 = \varphi$  ist der Winkel, um welchen der Körper gedreht ist. Das Gewicht  $\frac{p}{2}$ , das durch die Länge  $A_1D$  dargestellt sei, greift dann in  $A_1$  vertikal abwärts an, und bildet mit der Richtung des Fadens einen Winkel  $DA_1E$ , der gleich ist dem Winkel  $CFA_1$ , wenn  $CFA_1$  die durch den Faden  $FA_1$  und die Vertikale gelegte Ebene ist. Den parallel  $A_1D$  gerichteten Zug  $\frac{p}{2}$  können wir in zwei Komponenten zerlegen, deren eine parallel der Richtung des Fadens  $A_1E$ , deren andere in der Ebene  $CA_1D$  senkrecht zum Faden den Körper wieder gegen die Gleichgewichtslage zurückzieht. Die parallel  $A_1P$  senkrecht zu  $A_1O$  genommene Komponente dieser letztern Kraft multipliziert mit  $A_1O = a$  gibt uns dann das den Körper in die Gleichgewichtslage zurückführende Drehungsmoment. Nennen wir den Winkel, den der Faden  $FA_1$  mit der Vertikalen bildet,  $\delta$ , so ist die zum Faden senkrechte Komponente  $\frac{p}{2} \sin \delta$ ; da die zum Faden senkrechte Komponente  $ED$  mit der Horizontalen  $CA_1$  denselben Winkel  $\delta$  bildet, ist die parallel  $CA_1$  genommene Komponente dieser Kraft  $\frac{p}{2} \sin \delta \cdot \cos \delta$  und die zu  $A_1O$  senkrechte  $\frac{p}{2} \sin \delta \cos \delta \cos CA_1P$ ; zur Bildung des Drehungsmomentes haben wir diesen Ausdruck mit  $A_1O = a$  zu multiplizieren. Da nun an dem andern Aufhängepunkte  $B_1$  ein ganz ebenso solches Drehungsmoment wirkt, ist das gesamte den Körper zurückführende Drehungsmoment

$$ap \sin \delta \cos \delta \cos CA_1P.$$

In diesem Ausdrücke ist

$$\sin \delta = \sin DA_1E = \sin CFA_1 = \frac{CA_1}{FA_1} = \frac{CA_1}{l}$$

$$\cos \delta = \frac{CF}{l} = \frac{h}{l}.$$

wenn wir die Länge der Fäden mit  $l$  und den vertikalen Abstand der unteren von den oberen Aufhängepunkten mit  $h$  bezeichnen. Da weiter

$$\cos CA_1P = \sin CA_1O$$

und

$$\sin CA_1O = \sin COA_1 \frac{CO}{CA_1},$$

so wird das Drehungsmoment unter Beachtung, daß  $CO = b$  und der Winkel  $COA_1 = \varphi$ ,

$$ap \frac{CA_1}{l} \frac{h}{l} \frac{b}{CA_1} \sin \varphi = ap \frac{h}{l} \frac{b}{l} \sin \varphi.$$

Wir erhalten demnach ein dem Sinus des Drehungswinkels proportionales Drehungsmoment; somit vollführt der aus der Gleichgewichtslage gebrachte Körper Pendelschwingungen um die Gleichgewichtslage.

Den mit  $\sin \varphi$  multiplizierten Faktor, das Drehungsmoment, wenn  $\sin \varphi = 1$ , nennt man die bifilare Direktionskraft. Ist die Länge der aufgehängten Fäden so groß, daß wir die Hebung des Schwerpunktes vernachlässigen

rfen, dann dürfen wir auch  $h = l$  setzen, und erhalten für die bifilare  
irektionskraft

$$p \frac{ab}{l},$$

ist dem Gewichte des Körpers, dem Produkte aus den halben Abständen  
oberen und unteren Aufhängepunkte direkt und der Länge der Fäden  
umgekehrt proportional.

Da bei einer solchen Aufhängung die innere Reibung des Aufhänge-  
zuges wegen der sehr geringen Torsion der Aufhängedrähte nur sehr  
ein ist, hängt das Dekrement der Schwingungen wesentlich von dem  
Widerstande, den die Bewegung in der Luft findet, also wesentlich von  
der Reibung des an den Fäden hängenden Körpers ab. Indem nun Kundt  
und Warburg sehr feine und einander sehr nahe Fäden anwandten, waren  
die Dekremente innerhalb der Beobachtungsfehler nur von der Luftreibung  
nach der Maxwell'schen Methode schwingenden Scheibe abhängig.  
Statt der Scheibe ein kleines Gewicht angehängt, welches aus  
einer kleinen Zinkscheibe bestand, so war das logarithmische Dekrement  
so klein, daß die aus demselben berechnete dämpfende Kraft nur 1 Prozent  
von der bei den Reibungsversuchen sich zeigenden Dämpfung betrug. Kundt  
und Warburg konnten deshalb, da der Einfluß der dämpfenden Kraft nach  
§ 89 dem Trägheitsmoment des schwingenden Systems umgekehrt propor-  
tional ist, das ganze bei den Schwingungsversuchen nach der Maxwell-  
schen Methode auftretende Dekrement als von der Luftreibung herrührend  
ansehen, also das  $\lambda_0$  unserer Gleichungen gleich Null setzen.

Die von Kundt und Warburg bei ihren Versuchen benutzte Anord-  
nung zeigt Fig. 224. Die schwingende Scheibe sitzt zunächst an einem  
festen Stiel, der zugleich oben bei  $\kappa$  den zur Beobachtung der Schwingungen  
dienenden Spiegel trägt. An diesem Stiel sind die Fäden der bifilaren  
Aufhängung angeknüpft. Die festen Scheiben, zwischen denen die beweg-  
liche schwingen soll, deren obere aus zwei gegeneinander geschobenen Halb-  
kreisen besteht, die erst an ihre Stelle gebracht werden, wenn die schwin-  
gende Scheibe richtig hängt, werden von einem Rahmen getragen, auf  
welchem auch die galgenartige Vorrichtung befestigt ist, an der oben die  
Bifilarfäden angeknüpft sind. Die ganze Vorrichtung ist mit einer Glas-  
glocke bedeckt, welche auf dem Teller  $pq$ , der Basis des ganzen Apparates  
fest aufgeschliffen ist. Aus der Glocke führt eine mit einem Glas-  
stopfen verschließbare Röhre zu einem weitem ebenfalls abzusperrenden  
T-förmigen Rohr, dessen einer Schenkel zu einer Luftpumpe, dessen anderer  
zu einem Behälter führt, welcher das Gas enthält, dessen Reibungskoeffi-  
zient bestimmt werden soll. Um die Scheibe in Schwingungen zu setzen,  
reißt man oben an dem dieselbe tragenden Stiel ein Stückchen Eisendraht be-  
festigt. Die Schwingungen werden dann durch Annäherung eines Magnets  
an diesen Eisendraht bewirkt.

Kundt und Warburg haben bei ihren Versuchen in sehr hohem  
Maße die Dichtigkeit der Gase geändert, zur Prüfung des aus der Theorie  
ergehenden Gesetzes, daß die Reibung von der Dichtigkeit des Gases  
abhängig sei. Da die Reibungskoeffizienten bei diesen Beobachtungen  
als logarithmischen Dekremente proportional sind, so muß, wenn das  
Gesetz richtig ist, der Wert des logarithmischen Dekrementes von der Dichte

des Gases unabhängig sein. In der Tat zeigte sich das, so lange der Druck mehr als  $20^{\text{mm}}$  Quecksilber betrug; wurde er kleiner, so nahmen die logarithmischen Dekremente nicht unerheblich ab. Die beiden Physiker zeigten indes, daß hieraus nicht ein Mangel der aus unserer Auffassung sich ergebenden Theorie der Reibung folgt, daß vielmehr die bei der Ableitung der schwingenden Bewegung mit Berücksichtigung der Reibung gemachte Voraussetzung, daß die an den festen Körpern anliegende Gasschicht an derselben fest haftet, nicht mehr zulässig ist. Wird der Druck kleiner als

$20^{\text{mm}}$  Quecksilber, so ist der mit  $\alpha$  bezeichnete Koeffizient der äußern Reibung nicht mehr unendlich zu setzen, es tritt ein Gleiten des Gases an den Wänden des festen Körpers ein. Mit Berücksichtigung dieses Gleitens, dessen Theorie wir entwickeln<sup>1)</sup>, konnten die beiden Physiker zeigen, daß bis zu einem Drucke von  $0,6^{\text{mm}}$  Quecksilber die Koeffizienten der innern Reibung konstant sind.

Andererseits haben aber Warburg und von Babo<sup>2)</sup> gezeigt, daß bei großer Dichte, der Reibungskoeffizient mit wachsender Dichte, und zwar schneller als die Dichte wächst, zunimmt, indem sie die Reibungskoeffizienten der Kohlensäure bis zu Drucken von über 100 Atmosphären verfolgten, in Temperaturen, in welchen die Kohlensäure nicht flüssig wird. Das

Vergleichung mit den Reibungskoeffizienten der flüchtigen Kohlensäure führt zu dem Schlusse, daß, wenn man die Kohlensäure bis zu einer Temperatur in Form der flüchtigen Kohlensäure halten würde, der Reibungskoeffizient der flüssigen Kohlensäure kleiner sein würde, als derjenige der gasförmigen bei gleicher Dichte.

Die Methode der Untersuchung war die des Durchflusses durch capillare Röhren; wegen der geistreichen Anordnung dieser äußerst schmalen Versuche müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen, wir beschränken uns auf Angabe der Resultate und bemerken zu den Zahlen 1 und 2.

Der Reibungskoeffizient der Kohlensäure unter dem Drucke der Atmosphäre



1 Kundt und Warburg, Poggend. Ann. 155 p. 345 ff. 1875.

2 Warburg und von Babo, Wiedem. Ann. 17 p. 390. 1882.

bei 32°,6 C. gleich 0,000 162 und bei 40°,3 gleich 0,000 165 in ab-  
gem Maße (gr cm<sup>-1</sup> sec<sup>-1</sup>). Die unter *p* angegebenen Drucke sind die  
erhaltenen Werte eines beobachteten Volumens Stickstoff, dessen Volumen  
mit dem Druck einer Atmosphäre gleich 1 gesetzt wurde, sie sind dem-  
nach unter Annahme der Gültigkeit des Mariotteschen Gesetzes nach  
Gleichung

$$p = \frac{1}{v}$$

berechnet. Die den Drucken *p* entsprechenden Dichten *s*, Gewicht des  
Kohlensäure in Gramm sind durch direkte Versuche er-  
halten. Die über den betreffenden Spalten angegebenen Werte *L* bedeuten  
Gehalt der Kohlensäure an atmosphärischer Luft

<i>s</i>	<i>t</i> ° = 32°,6		<i>t</i> ° = 40°,3	
	<i>L</i> = 0,000 74		<i>L</i> = 0,000 85	
	<i>p</i>	<i>η</i> · 10 <sup>6</sup>	<i>p</i>	<i>η</i> · 10 <sup>6</sup>
0,100	43,1	—	45,3	180
0,170	60,3	188	64,3	196
0,240	69,9	218	75,9	218
0,310	74,6	239	82,7	243
0,380	76,6	270	86,8	275
0,450	77,2	304	89,2	316
0,520	77,6	351	91,7	366
0,590	78,2	414	94,9	426
0,660	80,7	493	101,6	499
0,730	88,5	574	114,6	580
0,800	107,3	677	—	—

Die Dichtigkeit *s* der Kohlensäure unter dem Drucke einer Atmosphäre  
40° ist 0,001 72; während die Dichtigkeit der Kohlensäure bis auf  
58fache zunimmt, nimmt hiernach der Reibungskoeffizient bei 40° nur  
165 auf 180, also um etwa 9% zu; von da ab wächst der Reibungs-  
koeffizient rascher, und zwar mit steigendem Druck für gleiche Druck-  
höhe immer schneller.

Folgende kleine Tabelle gibt die Reibungskoeffizienten der flüssigen  
Kohlensäure bei einer Temperatur von 25°,1. Die Kohlensäure enthielt  
0,44 Luft

<i>p</i>	<i>s</i>	<i>η</i> · 10 <sup>6</sup>
105	0,898	822
95	0,873	742
85	0,859	705
75	0,826	686
70	0,810	629.

Man sieht, daß die Kohlensäure einen erheblich kleinern Reibungs-  
koeffizienten hat, als die im § 89 erwähnten Flüssigkeiten, und daß der  
Reibungskoeffizient mit wachsender Dichte zunimmt. Als Kompressions-  
koeffizient der Kohlensäure würde sich 0,003 04 ergeben.



Versuche, welche durch diese Resultate veranlaßt, Warburg und Sachs<sup>1)</sup> über die Änderung der Reibungskoeffizienten mit dem Drucke für Äthyläther und Benzol anstellten, ergaben für diese ebenfalls eine wenn auch erheblich geringere Zunahme der Reibung mit zunehmendem Drucke. Für Wasser ergab sich in Übereinstimmung mit früheren Versuchen von Röntgen<sup>2)</sup> eine Abnahme der Reibung mit steigendem Druck.

Unsere Theorie der Reibung führt allerdings nicht zu einer Zunahme der Reibungskoeffizienten der Gase mit wachsendem Drucke bzw. wachsender Dichtigkeit der Gase. Indes ist zu beachten, daß wir bei der Entwicklung der Theorie der Reibung auf die zwischen den Molekülen wirkenden Molekularkräfte gar keine Rücksicht genommen haben. Nach der Theorie von van der Waals sind zwischen den Molekülen anziehende Kräfte vorhanden, welche um so mehr zur Wirksamkeit kommen, je näher sich die Moleküle rücken, je größer also die Dichte des Gases wird. Bei hinreichend großer Dichte muß deshalb zu der Gasreibung infolge des Austausches der Moleküle noch eine Reibung nach Art der Flüssigkeitsreibung hinzutreten und demnach der Reibungskoeffizient wachsen. Dem entspricht es auch, daß die Zunahme des Reibungskoeffizienten bei großer Dichte mit gleichem Wachsen der Dichte eine größere ist, als bei kleinerer Dichte. Würde man bei gleicher Temperatur und gleicher Dichte die Reibung im flüssigen und gasförmigen Zustande vergleichen können, so würde man im gasförmigen Zustande die größere Reibung finden müssen. Die Versuche Warburgs lassen das erkennen, eine wirkliche Vergleichung ist nicht möglich, da in den Temperaturen, in welchen die gasförmige Kohlensäure die Dichte der flüssigen annehmen kann, die Kohlensäure nicht mehr flüssig sein kann, wie wir in der Wärmelehre bei Besprechung der kritischen Temperaturen zeigen werden.

Ehe wir die von den verschiedenen Experimentatoren erhaltenen Werte für die Reibungskoeffizienten einiger Gase zusammenstellen, wollen wir, um nicht später auf diese Untersuchungen noch zurückkommen zu müssen, noch auf eine Folgerung der Theorie hinweisen. Die Theorie gibt für den Reibungskoeffizienten den Wert

$$\eta = \frac{1}{3} m n u l,$$

sie zeigt somit, daß derselbe der Geschwindigkeit  $u$  der Moleküle proportional ist. Für diese gaben wir § 104 an, daß, wenn  $u_0$  die Geschwindigkeit bei  $0^\circ$  ist, bei der Temperatur  $t^\circ$  C.

$$u = u_0 \sqrt{1 + 0,00367 t} = u_0 (1 + 0,00367 t)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Nach demselben Gesetze müßte also auch der Reibungskoeffizient mit der Temperatur wachsen. Diese Folgerung hat sich in den Versuchen nicht bestätigt, sämtliche Versuche ergeben ein rascheres Wachsen des Reibungskoeffizienten. Maxwell<sup>3)</sup> folgerte aus seinen Versuchen, daß der Reibungskoeffizient der Luft nicht der Quadratwurzel, sondern direkt  $1 + 0,00367 t$

1) Warburg und Sachs, Wiedem. Ann. 22. p. 518. 1884.

2) Röntgen, Wiedem. Ann. 22. p. 510. 1884.

3) Maxwell, Philosophical Transactions for 1866. p. 267.



proportional zunehme. O. E. Meyer<sup>1)</sup> erhielt für Luft einen zwischen dem theoretischen und dem von Maxwell gefundenen liegenden Wert, er fand

$$\eta = \eta_0 (1 + 0,0025 t) = \eta_0 (1 + 0,00367 t)^{\frac{1}{2}},$$

man bei der Kleinheit der Koeffizienten von  $t$  sich bei Entwicklung der Potenz  $\frac{1}{2}$  auf das erste Glied beschränken kann. Denselben Wert des Exponenten für Luft fand Warburg<sup>2)</sup>, für Wasserstoff erhielt er 0,60 bis 0,65, also etwa  $\frac{2}{3}$ .

Ausführlicher ist die Abhängigkeit der Reibungskoeffizienten von der Temperatur fast gleichzeitig von Puluj<sup>3)</sup> durch Ausflußversuche und Zwingungsversuche, und von A. von Obermaier<sup>4)</sup> durch Ausflußversuche verfolgt worden. Beide Experimentatoren gelangen übereinstimmend zum Resultate, daß die Änderung der Reibungskoeffizienten mit der Temperatur für die verschiedenen Gase verschieden ist, für alle aber erheblich rascher erfolgt, als es nach der vorggeführten Theorie der Reibung der Fall sein sollte. Für Luft finden beide Experimentatoren fast denselben Wert wie O. E. Meyer; Puluj gibt als Exponenten des Temperaturkoeffizienten anstatt  $\frac{1}{2}$  den Wert 0,722, A. von Obermaier 0,76; für Wasserstoff erhält der erstere 0,693, der letztere 0,70, für Kohlensäure die Werte 0,917 und 0,94, wie man sieht, vortrefflich übereinstimmende Werte. Einen ähnlichen fast der Einheit gleichen Wert erhielt von Obermaier für Stickoxydul, Chloräthyl und Äthylen. Gase, die zum Teil bei gewöhnlicher Temperatur durch Druck flüssig gemacht werden können, teils, wie das Äthylen nach § 100, sehr stark von dem Mariot'schen Gesetze abweichen.

Schumann<sup>5)</sup> schließt aus seinen nach der Maxwell'schen Schwingungsmethode ausgeführten Versuchen, daß die Zunahme der Reibung mit der Temperatur sich nicht durch eine Gleichung von der Form

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^c,$$

mit  $\alpha$  für den Ausdehnungskoeffizienten der Gase  $\alpha = 0,00367$  gesetzt, mit einem konstanten  $c$  darstellen lasse, er findet, daß mit steigender Temperatur schon bis 100° das  $c$  merkbar zunimmt, und setzt deshalb, in den gleich zu erwähnenden theoretischen Betrachtungen Stefans anknüpfend,

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}} (1 + \beta t)^{\frac{1}{2}}$$

Indem er für Luft  $\beta = 0,000802$  einsetzt, konnte er seine Beobachtungen vortrefflich darstellen. Für Kohlensäure fand er als Wert für  $\beta = 0,0000889$ .

Schumann findet auch in den Zahlen von Puluj eine Zunahme von  $c$  mit wachsender Temperatur, während in den von E. Wiedemann<sup>6)</sup> bei 100° - 184° nach der Transpirationsmethode gefundenen Zahlen sich

1) O. E. Meyer, Poggend. Ann. 143. 1871; 148. 1873.

2) Warburg, Poggend. Ann. 159 p. 399. 1876.

3) Puluj, Wiener Berichte 69. 1874; 70. 1874; 73. 1876. (Arch. Repertor. 13. 1877)

4) A. von Obermaier, Wiener Berichte 71. 1875; 73. 1876.

5) Schumann, Wiedem. Ann. 23 p. 363. 1884.

6) E. Wiedemann, Arch. des sciences phys. de Genève 44. 2. p. 278. 1872.

eher eine Abnahme der Exponenten  $c$  mit wachsender Temperatur erkennen läßt.

Barus<sup>1)</sup> hat die Reibungskoeffizienten der Luft und des Wasserstoffs bis gegen  $1400^{\circ}$  C. verfolgt. Er ließ die Gase durch Platinspiralen fließen, von so geringem Durchmesser und solcher Länge, daß das Poiseuillesche Gesetz gültig war, und verglich die bei  $7^{\circ}$ – $8^{\circ}$  aus seinen Versuchen sich ergebenden Werte mit denen, welche sich bei  $400^{\circ}$ – $700^{\circ}$ – $900^{\circ}$ – $1000^{\circ}$  usw. ergaben. Die Temperaturen der in einer Heizvorrichtung befindlichen Platinspiralen wurden in später zu besprechender Weise durch den Thermostrom eines aus Platin und Platiniridium hergestellten Thermoelementes gemessen, dessen Angaben mit dem eines Luftthermometers verglichen waren. Barus gelangt zu dem Resultate, daß sowohl für Luft wie für Wasserstoff sich die beobachteten Berechnungsexponenten durch

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{2}{3}}$$

oder durch

$$\eta = \eta_0 (1 + 0,00238 t)$$

darstellen lassen. Es würde also für höhere Temperaturen der Temperaturkoeffizient auch für Luft gleich dem von Warburg schon in niedriger Temperatur gefundenen Koeffizienten des Wasserstoffs sein. Für Luft zeigt sich somit in wachsender Temperatur, entgegen den Schlüssen von Schumann, eine Abnahme des Koeffizienten.

Barus neigt zu der Ansicht, daß der Temperaturkoeffizient für alle Gase bei hinreichend hoher Temperatur gleich jenem für Wasserstoff werde.

Die Resultate, betreffend die Änderung der Reibungskoeffizienten mit der Temperatur, weichen demnach, was bei der Schwierigkeit der Untersuchungen nicht Wunder nehmen kann, noch ziemlich voneinander ab, sie stimmen aber alle darin überein, daß die Zunahme eine raschere ist, als unsere Theorie der Gasreibung es verlangt. Um diese Abweichung von der Theorie mit unserer Anschauung der Gase in Einklang zu bringen, nimmt Stefan<sup>2)</sup> an, daß die mittlern Wegelängen mit der Temperatur der Gase auch bei konstanter Dichte derselben etwas größer werden. Nach unserer Gleichung für die Reibungskoeffizienten

$$\eta = \frac{1}{3} n m u l$$

sieht man, daß ein solches Wachsen von  $l$  die raschere Zunahme von  $\eta$  zur Folge haben müßte. Da wir die mittlere Wegelänge  $l$ , wie wir vorher gesehen, setzen können

$$l = \frac{1}{n \frac{4}{3} \rho^2 \pi} \cdot \rho = \frac{1}{n \frac{4}{3} \rho^2 \pi},$$

so bedeutet die Annahme Stefans eine Abnahme des Radius der Wirkungssphäre mit steigender Temperatur. Setzen wir

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t},$$

so würden wir zu dem Ausdrücke von Schumann für die Zunahme der Reibungskoeffizienten gelangen.

1) Barus, Wiedem. Ann. 36. p. 358. 1889.

2) Stefan, Wiener Berichte. 65. p. 338. 1872.

Die Korrektur, die Sutherland<sup>1)</sup> an der Berechnung der mittlern Wegelänge infolge der gegenseitigen Anziehung der Moleküle der Gase gebracht hat, führt unmittelbar zu einem Wachsen der mittlern Wegelänge mit der Temperatur und damit zu einem schnelleren Wachsen des Reibungskoeffizienten als es ohne Berücksichtigung der Veränderlichkeit von  $l$  eintreten würde. Wir fanden im § 103 nach Sutherland für die mittlere Wegelänge

$$l = \frac{\lambda^2}{\frac{1}{2} \rho^2 \pi} \frac{1}{1 + k \frac{E}{\frac{1}{2} m u^2}}.$$

hierin können wir setzen, wenn  $\alpha$  der Ausdehnungskoeffizient der Gase,  $\alpha = 0,00367$ , ist

$$u^2 = u_0^2 (1 + \alpha t) = \alpha u_0^2 \left( \frac{1}{\alpha} + t \right).$$

Setzen wir  $\frac{1}{\alpha} + t = T$  und  $\frac{kE}{\frac{1}{2} \alpha u_0^2 m} = C$ , so wird

$$l = \frac{\lambda^2}{\frac{1}{2} \rho^2 \pi} \frac{1}{1 + \frac{C}{\frac{1}{\alpha} + t}}.$$

Um die mittlere Wegelänge bei der Temperatur  $t$ : um die mittlere Wegelänge  $l_0$  bei der Temperatur  $0^\circ$  des schmelzenden Eises zu erhalten, haben wir in dem letzten Ausdruck nur  $t = 0$  zu setzen, so daß

$$l_0 = \frac{\lambda^2}{\frac{1}{2} \rho^2 \pi} \frac{1}{1 + \alpha C}.$$

Für  $l$  durch  $l_0$  ausgedrückt wird  $l$ , wenn wir  $\frac{1}{\alpha} + t = T$ , die von dem absoluten Nullpunkt an gerechnete Temperatur setzen

$$l = l_0 \frac{1 + \frac{\alpha C'}{T}}{1 + \frac{C'}{T}}.$$

Die Größe  $C'$  ist eine von der Natur des Gases bedingte Konstante, die man als Kohäsionskonstante des Gases bezeichnen kann. Man sieht, da der Nenner mit wachsendem  $T$  kleiner wird, wächst bei konstanter Dichte des Gases die mittlere Wegelänge mit steigender Temperatur. Für den Reibungskoeffizienten bei der Temperatur  $t$  erhalten wir mit

$$\eta = \frac{1}{2} m n u_0 l_0 \frac{1 + \frac{\alpha C'}{T}}{1 + \frac{C'}{T}} \sqrt{1 + \alpha t} = \eta_0 \frac{1 + \frac{\alpha C'}{T}}{1 + \frac{C'}{T}} \sqrt{1 + \alpha t}.$$

Sutherland prüfte seine Gleichung zunächst an Versuchen von Holman<sup>2)</sup> und Barus<sup>3)</sup> über die innere Reibung der Luft; das von Holman benutzte Temperaturintervall war  $14^\circ$  bis  $124^\circ$  C., das von Barus benutzte

1) Sutherland, Phil. Mag. 36 (5.) p. 507. 1893.

2) Holman, Proc. of the Amer. Acad. 21. p. 13. 1885.

3) Barus, Amer. Journ. 35. (3.) p. 408. 1888.

Namen des Gases	$10^6 \cdot \eta$ nach					
	Breitenbach <sup>1)</sup>	O. E. Meyer <sup>2)</sup>	Puluj <sup>3)</sup>	Kundt u. Warb. <sup>4)</sup>	v. Obermaier <sup>5)</sup>	Markowski <sup>6)</sup>
Luft . . . . .	180,7	189	182	187	174	—
Wasserstoff . .	88,9	98	93	92	89	87,7
Kohlensäure . .	145,7	160	152	152	146	—
Sauerstoff . . .	—	212	—	—	195	202,3
Stickstoff . . .	—	184	—	—	173	174,7
Kohlenoxyd . .	—	—	—	—	169	—
Wasserdampf . .	—	—	96,7	98,7	—	—

Im großen und ganzen weichen die von den verschiedenen Beobachtern für dasselbe Gas erhaltenen Zahlen nicht sehr voneinander ab, nur die Zahlen von v. Obermaier sind etwas kleiner als die übrigen.<sup>7)</sup>

## § 119.

**Diffusion der Gase.** Verbindet man zwei Gefäße etwa durch eine Öffnung in dünner Wand, welche dasselbe Gas enthalten, so tritt eine Bewegung der Gase nur ein, wenn in dem einen Gefäß der Druck kleiner ist als in dem andern, ist keine Druckdifferenz in beiden Gefäßen vorhanden, so tritt auch keine Strömung des Gases ein. Das ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn in den beiden durch eine Öffnung in Verbindung stehenden Räumen verschiedene Gase vorhanden sind. Zwar läßt sich durch den Versuch nachweisen, daß substantiell verschiedene Gase denselben Druck aufeinander ausüben, wie die Teilchen gleichartiger Gase, aber dennoch tritt stets eine Vermischung ein, wenn verschiedene Gase unter gleichem Drucke durch eine Öffnung miteinander in Verbindung stehen. Daß ersteres der Fall ist, zeigt folgender Versuch.<sup>8)</sup> Wenn man eine mit Luft gefüllte unten verschlossene Glasröhre vom Boden aus mit einem gefärbten Gase zur Hälfte anfüllt, welches schwerer ist als Luft, z. B. mit unterchloriger Säure, so ruht in dem oberen Teile der Röhre anfänglich eine farblose Luftsäule auf dem gefärbten Gase. Bringt man dann rasch das obere Ende der Röhre mit einer Luftpumpe in Verbindung und pumpt einen Teil der Luft aus, so rückt die an der Farbe erkenntliche Grenzfläche beider Gase mit der zunehmenden Verdünnung aufwärts, der Druck der Gase ändert sich aber

1 Breitenbach, Wiedem. Ann. 67. p. 803. 1899.

2 O. E. Meyer, Poggend. Ann. 148. p. 226 u. 549. 1873; an letzterer Stelle gibt Meyer die Reibungskoeffizienten einer größeren Zahl von Gasen an.

3 Puluj, Wiener Berichte. 70. 1874; 73. 1876.

4 Kundt und Warburg, Poggend. Ann. 155. p. 529. 1875; auch Warburg, Poggend. Ann. 159. p. 399. 1876.

5 A. von Obermaier, Wiener Berichte 73. 1876; Carls Repert. 13. 1877.

6 Markowski, Ann. d. Phys. 14. p. 742. 1904.

7 Über Reibungskoeffizienten von Dämpfen siehe man Puluj, Carls Repert. 14. p. 573. 1878; Lothar Meyer, Wiedem. Ann. 7. p. 497. 1879; 13. p. 1. 1881, gemeinschaftlich mit Schumann, 16. p. 393. 1882; Schumann, Wiedem. Ann. 21. p. 353. 1884. Eine Tabelle wohl sämtlicher bis 1904 bestimmter Reibungskoeffizienten von Gasen und Dämpfen findet sich in Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemischen Tabellen 3. Aufl. Berlin 1905.

8 Bunsen, Gasometrische Methoden. p. 208.

in der ganzen Ausdehnung der Röhre in gleicher Weise, denn seitlich angebrachte Manometer zeigen in jedem Momente an allen Stellen der Röhre den gleichen Druck. Aber ungeachtet dessen, daß die verschiedenen Gase aufeinander denselben Druck ausüben, als die einzelnen Teile desselben Gases, vermag ein Gas ein anderes nicht in einem Raume abzusperren.

Der erste, welcher diese Vermischung verschiedener Gase nachwies, war Dalton<sup>1)</sup>, er wandte zwei Flaschen von gleicher Kapazität an, welche durch einen Hahn miteinander in Verbindung gesetzt werden konnten. Die eine füllte er mit Kohlensäure, die andere mit atmosphärischer Luft unter gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur, und stellte sie so auf, daß die Kohlensäure in der untern, die Luft in der obern Flasche sich befand. Auf diese Weise konnte durch die verschiedenen spezifischen Gewichte der Gase eine Mischung derselben nicht eintreten, da die Kohlensäure als das spezifisch schwerere Gas unten und die leichtere Luft darüber war. Nach geöffnetem Hahne war der Druck im Innern der Flaschen ungeändert derselbe geblieben, nach mehreren Stunden waren aber beide Gase gleichmäßig in beiden Flaschen verteilt, ungeachtet, daß die Schwere dieselben getrennt zu erhalten suchte. Es folgt daraus, daß jedes der beiden Gase sich in dem ganzen Raum verbreitet hatte, als wenn es in demselben allein vorhanden gewesen wäre. Man bezeichnet diesen Satz als das Dalton'sche Gesetz.<sup>2)</sup> Jedes der Gase dehnte sich dadurch auf den doppelten Raum aus, sein Druck mußte dadurch die Hälfte des frühern werden; die Unveränderlichkeit des äußern Druckes zeigt daher ebenfalls, daß auch die Drucke verschiedener Gase sich summieren.

Ein ausgezeichnetes Beispiel dieser Mischung der Gase ihrem Gewichte entgegen zeigt uns unsere Atmosphäre, welche, wie wir bereits früher erwähnten, ein Gemische zweier Gase, Sauerstoff und Stickstoff ist. Obwohl nämlich der Sauerstoff schwerer ist als der Stickstoff, und zwar im Verhältnis 110 zu 97, so zeigt doch die Luft an allen Stellen, wo sie geschöpft wird, nahezu dieselbe Zusammensetzung von 79 Teilen Stickstoff und 21 Teilen Sauerstoff.

Man bezeichnet diese Mischung von unter gleichem Drucke stehenden Gasen ähnlich wie die allmähliche Mischung zweier verschiedener übereinander gelagerter mischbarer Flüssigkeiten, als Diffusion der Gase.

Die Diffusion der Gase ineinander zeigt auch darin eine Analogie mit der Diffusion der Flüssigkeiten, daß die Schnelligkeit, mit welcher zwei Gase sich mischen, wesentlich von der Natur der Gase abhängig ist, wie das schon die ersten messenden Versuche von Graham<sup>3)</sup> zeigten. Graham gibt an, daß sich Wasserstoff in Luft sehr viel schneller verbreitet als Kohlensäure.

Der erste, welcher die Diffusion der Gase genauer untersuchte, war Loschmidt<sup>4)</sup>, er ging davon aus, daß die Diffusion der Gase ganz denselben Gesetzen folgen müsse wie diejenige der Flüssigkeiten. Die Menge eines Gases, welche, konstante Verhältnisse vorausgesetzt, in der Zeiteinheit

1) Dalton, Gilbert Annalen. 17. 1804.

2) Auf das Dalton'sche Gesetz kommen wir in der Wärmelehre noch zurück.

3) Graham, Philosoph. Magazin. 26. (4.) 1863; Poggend. Ann. 120. 1

4) Loschmidt, Wiener Ber. 61. u. 62. 1870.

urschnittseinheit wandert, wenn auf den beiden Seiten des die Konzentration des Gases eine verschiedene ist, wird der differenz, und einem von der Natur der beiden Gase abhizienten, der Diffusionsgeschwindigkeit oder dem Diffusionsproportional gesetzt. Als Konzentration des Gases können ch den Druck des betreffenden Gases an der betrachteten n, indem nach dem vorhin erwähnten Gesetze von Dalton eines zwei Gase enthaltenden Raumes sich die Drucke beider im ganzen Raume konstanten Gesamtdrucke summieren, jedes a solchen Teil des Gesamtdruckes ausübt, als es einen Bruch- r Volumeinheit an der betreffenden Stelle vorhandenen Ge- Gases ausmacht. Der Diffusionsvorgang wird demnach durch hungen, die wir § 85 für die Diffusion der Flüssigkeiten ab- stellt, wenn wir die dort eingeführte Konzentration durch les betreffenden Gases ersetzen, also durch die Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = -k \frac{d^2 p}{dx^2}.$$

h jetzt den Diffusionskoeffizienten mit  $k$  bezeichnen. desselben ist nur zu bemerken, daß der Diffusionskoeffizient f zwei Gase beziehen muß, daß wir also z. B. für Kohlen- a bestimmten Diffusionskoeffizienten einem bestimmten zweiten r, also etwa dem Wasserstoff gegenüber erhalten, und daß isionskoeffizient des Wasserstoffs gegenüber der Kohlensäure s derjenige der Kohlensäure gegenüber dem Wasserstoff. Daß 'all sein muß, ergibt sich unmittelbar aus dem Daltonschen sich die Drucke beider Gase an jeder Stelle eines Gefäßes unten Gesamtdrucke summieren. Ist also in einem gegebenen iner Stelle des Raumes  $p_1$  der Druck des einen,  $p_2$  der des so ist immer

$$p_1 + p_2 = p$$

onstanten Gesamtdrucke. Geht dann durch Zuströmen des i der Zeit  $dt$  der Druck desselben in  $p_1 + dp_1$  über, so muß men des andern der Druck desselben in  $p_2 - dp_2$  übergehen,

$$p_1 + dp_1 + p_2 - dp_2 = p$$

t  $dp_1 = dp_2$ . Es ist somit der Strom des einen Gases  $g$  gen ts gleich dem des zweiten gegen das erste.

hysikalische Bedeutung des Diffusionskoeffizienten zu erkennen, is wieder den stationären Zustand hergestellt, das heißt also, is ein Gefäß mit Kohlensäure gefüllt, etwa unter dem Druck äure und dieses durch einen Zylinder von  $q'''$  Querschnitt mit einem ebensolchen mit Wasserstoff gefüllten Gefäße ver- Gefäße denken wir uns von solcher Größe, daß die durch Gase in sie übertretenden Mengen des andern Gases keine unreinigung des in dem Gefäße vorhandenen Gases bewirken, r denken uns durch irgend ein Mittel die in das Wasserstoff- retene Kohlensäure und den in das Kohlensäuregefäß über-

gegangenen Wasserstoff sofort weggenommen. Dann ist auf der ein des Zylinders der Druck des einen Gases stets konstant und gleich der andern stets gleich Null, und auf der  $l^{\text{cm}}$  langen Strecke des Z nimmt der Druck von  $p_0$  auf 0, und zwar nach Eintritt des sta Zustandes in solcher Weise ab, daß, wie sich durch eine der im § den analogen Fall gemachten gleiche Entwicklung ergibt, im Abstand dem Beginne des Zylinders der Druck des betreffenden Gases  $p_1$  g

$$p_1 = p_0 - \frac{p_0}{l} \cdot x.$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit der Dichtig Gases, welche dem Drucke  $p_0$  entspricht, mit  $c_0$  und dividieren d so wird

$$c_0 \frac{p_1}{p_0} = c_0 - \frac{c_0}{l} x,$$

und da die linke Seite der Dichtigkeit  $c$  des Gases an der Stelle spricht, so ist diese Gleichung

$$c = c_0 - \frac{c_0}{l} x$$

genau jene, welche wir § 85 erhielten. Die Quantität des Gases, in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt des Zylinders wandert um aus dem einen Gefäße in das andere übertritt, ergibt sich ebenf in § 85

$$S = kq \frac{c_0}{l}.$$

Hiernach bedeutet der Diffusionsquotient  $k$  jene Gasmenge, in der Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnitts in ein ander bei stationärem Zustande übertritt, wenn auf der Strecke von der Eins die Dichte, das heißt die in der Volumeinheit enthaltene Ga dieses Gases von der dem Drucke einer Atmosphäre entsprechende malen Dichte, auf Null abnimmt, oder auch, wenn der Druck dies von dem einer Atmosphäre auf Null abnimmt, der Druck des zweiten von Null auf den einer Atmosphäre zunimmt. Der Diffusionskoeffiz zweiten Gases in das erste ist dann genau derselbe.

Die Dimension des Diffusionskoeffizienten ergibt sich hiernach  $S$  ist eine Masse dividiert durch eine Zeit,  $q$  das Quadrat einer  $c$  der Quotient einer Masse und der dritten Potenz einer Länge, so

$$k = \frac{Sl}{qc_0} = \frac{\mu l \lambda^3}{\tau \lambda^2 \mu} = \frac{\lambda^2}{\tau}.$$

Die Dimension ist, wie es auch sein muß, dieselbe wie diejen Diffusionskoeffizienten der Flüssigkeiten.

Das hier gedachte einfache Verfahren läßt sich in der Praxis dings nicht durchführen. Loschmidt verfuhr deshalb zur Bestimm Diffusionskoeffizienten folgendermaßen. Ein vertikal zu stellendes Gl von  $97,5^{\text{cm}}$  Länge und  $2,6^{\text{cm}}$  Durchmesser wird an beiden Enden Spiegelglasplatten geschlossen, in welche je zwei Glashähne eingekitt In der Mitte ist dasselbe durchschnitten und beide Hälften sind u durch untergelegte Metallplatten verstärkte Spiegelglasplatten eing



an denen sich ein Schieber von dünnem Stahlblech mittels eines Hebengewindes hin und herführen läßt. Derselbe ist mit einer dem Querschnitt des Glasrohres entsprechenden kreisförmigen Öffnung versehen, und so eingerichtet, daß er in der einen Stellung I die beiden Hälften voneinander gasdicht absperrt, in der andern Stellung II die Kommunikation zwischen ihnen vollkommen frei läßt. Es wurden in der Schieberstellung I beide Rohrhälften mit Quecksilber gefüllt, das dann durch die wohlgetrockneten Gase verdrängt, und der Apparat in Vertikalstellung gebracht.

Nach etwa einer Viertelstunde wurde der Schieber möglichst rasch in Stellung II gebracht, wodurch der Beginn der Diffusion herbeigeführt wurde. Nach Ablauf einer passenden Zeit, eine halbe oder eine Stunde, ward der Schieber geschlossen, und damit die Diffusion beendet.

Das Resultat der Diffusion wurde durch eine genaue Analyse der in der Rohrhälfte vorhandenen Gase festgestellt. Wie man sieht, entspricht das Verfahren im wesentlichen dem einen von Schumeister (§ 85) zur Untersuchung der Diffusion der Salze angewandten. Der Diffusionskoeffizient ergibt sich in ähnlicher Weise aus den gefundenen Gasmengen.<sup>1)</sup> In dieser Hinsicht erhielt Loschmidt unter andern folgende Diffusionskoeffizienten ausgedrückt in den Einheiten Zentimeter, Sekunde

Wasserstoff — Kohlensäure	$k = 0,556$
Sauerstoff — Kohlensäure	$0,141$
Wasserstoff — Sauerstoff	$0,722$
Luft — Kohlensäure	$0,142.$

Loschmidt fand weiter, daß die Diffusionskoeffizienten einer und derselben Kombination der Summe der Gasdrucke, oder dem in dem Diffusionsrohr vorhandenen Gesamtdrucke umgekehrt proportional seien, und daß diese Koeffizienten erheblich mit der Temperatur wachsen. Obige Werte beziehen sich auf die Temperatur des schmelzenden Eises.

Für die bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur den verschiedenen Kombinationen entsprechenden Werte der Diffusionskoeffizienten ergaben die Beobachtungen Loschmidts, daß dieselben der Quadratwurzel der Produkte der spezifischen Gewichte umgekehrt proportional sind, wenn wir die Dichtigkeit der beiden Gase mit  $\delta_1$  und  $\delta_2$  bezeichnen, so läßt sich

$$k \sqrt{\delta_1 \delta_2} = k_0$$

konstante GröÙe ist. Setzen wir das spezifische Gewicht der Luft gleich 1, so wird:

	$\delta = 1$	Luft — Kohlensäure	$k \sqrt{\delta_1 \delta_2} = 0,1775$
Kohlensäure	1,53	Wasserstoff — Kohlensäure	„ $= 0,1811$
Wasserstoff	0,0693	Wasserstoff — Sauerstoff	„ $= 0,1990$
Sauerstoff	1,103	Sauerstoff — Kohlensäure	„ $= 0,1848.$

Ungefährnd bestätigen die Zahlen der letzten Spalte den Satz, immerhin schwanken die Zahlen um mehr als 0,1 des Mittelwertes.

<sup>1)</sup> Man sehe außer Loschmidt a. a. O. Stefan, Wiener Ber. 63. p. 79. 1871. *Ann. Phys.* 1. 6. Aufl.

Die Änderung des Diffusionskoeffizienten mit der Temperatur wurde von v. Obermaier<sup>1)</sup> näher verfolgt. Die Versuchsanordnung entsprach der von Loschmidt mit kleinen Abänderungen, die Messung der Diffusionskoeffizienten geschah bei Zimmertemperatur und bei der Temperatur des erstarrenden Paraffins, 61<sup>0</sup>,5, indem der Diffusionsapparat in ein Paraffinbad gesetzt wurde, in welchem während der Dauer des Versuches das Paraffin auf der Schmelztemperatur gehalten wurde. Zur Darstellung der Versuche benutzte Obermaier die Form

$$k_t = k_0 (1 + \alpha t)^h,$$

worin  $\alpha$  der Ausdehnungskoeffizient der Gase gleich 0,003 67 ist. Die von Obermaier für den Exponenten  $h$  gefundenen Werte, sowie die Diffusionskoeffizienten  $k_0$  enthält folgende kleine Tabelle:

Luft — Kohlensäure	$k_0 = 0,1347$	$k = 1,958$
Wasserstoff — Luft	0,6766	1,755
Kohlensäure — Stickoxydul	0,0920	2,050
Kohlensäure — Wasserstoff	0,5463	1,742
Sauerstoff — Stickstoff	0,1774	1,792.

Wie man sieht, weichen die Werte  $k_0$  nicht unerheblich von den von Loschmidt gefundenen ab, sie sind durchweg kleiner.

v. Obermaier<sup>2)</sup> wiederholte deshalb die Messung der Diffusionskoeffizienten nach einer andern Methode, welche der zweiten von Schumeister bei Untersuchung der Diffusion der Salzlösungen benutzten entsprach; es wurde über die das eine Gas enthaltende Diffusionsröhre ein konstanter Strom des zweiten Gases geführt, so daß alles aus der Röhre herausdiffundierte Gas sofort weggeführt wurde, somit am oberen Ende stets die Dichte des Gases Null war. Nachdem das Gas längere oder kürzere Zeit über dem Rohre hingestrichen war, wurde der Inhalt des Diffusionsrohres analysiert.

Die Versuche führten zu dem Resultate, daß die Diffusionskoeffizienten mit der Dauer der Diffusion etwas zunahmen; da mit wachsender Diffusion das Dichtigkeitsgefälle, die Abnahme der Dichtigkeit der Gase für die Längeneinheit, kleiner wird, würde darnach der Diffusionskoeffizient mit abnehmendem Dichtigkeitsgefälle bis zu einer gewissen oberen Grenze wachsen.

So findet v. Obermaier für Luft — Kohlensäure den Diffusionskoeffizienten nach einer Versuchsdauer von

25 Min.	30 Min.	1 Stunde	2 Stunden	2,5 und 3 Stunden
0,1297	0,1299	0,1325	0,1347	0,1355.

Eine Wiederholung<sup>3)</sup> der Versuche nach der ersten Methode gab ähnliche Zunahme mit der Zeit, so für Luft — Kohlensäure nach

10 Min.	15 Min.	40 und 45 Min.	1 Stunde
0,1299	0,1320	0,1337	0,1351.

1) von Obermaier, Wiener Berichte. 81. p. 1102. 1880.

2) von Obermaier, Wiener Berichte. 85. p. 147. 1882.

3) von Obermaier, Wiener Berichte. 85. p. 748. 1882; 87. p. 183. 1883.

Ähnliche Änderungen, zum Teil kleinere, wurden bei einer sehr großen Zahl von Gaskombinationen erhalten. Die Änderungen sind sehr klein, nahe innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler; da indes bei fast allen Versuchen sich derselbe Gang der Diffusionskoeffizienten zeigt, so ist eine solche Veränderlichkeit durch dieselben doch wahrscheinlich gemacht.

Auch Waitz<sup>1)</sup> findet den Diffusionskoeffizienten, aber in anderer Weise als v. Obermaier variabel. Waitz füllte einen Kasten, dessen Tiefe 50,3<sup>cm</sup>, dessen Breite 7,1<sup>cm</sup>, dessen Länge 50,3<sup>cm</sup> war und der mit einem abnehmbaren Deckel versehen war, mit Kohlensäure. Auf die eine breite Außenseite des Kastens waren drei rechteckige hinten und vorn offene Röhren von Eisenblech aufgelötet, die möglichst gleiche Länge mit dem Kasten hatten. Neben den Öffnungen dieser Röhre waren in den schmalen Seitenwänden des Kastens Fenster eingeschnitten, die nebst den Mündungen der drei Röhren durch planparallele Glasplatten luftdicht geschlossen waren; dabei war dafür gesorgt, daß der Raum der Röhren von demjenigen des Kastens vollkommen abgeschlossen war. Die Röhren enthielten Luft. Die Einrichtung hatte den Zweck, von zwei parallelen Lichtstrahlenbündeln das eine durch die Luft der Röhre, das andere, unmittelbar neben dem ersten, durch das Gas des Kastens zu führen. Die beiden Lichtstrahlenbündel waren die zur Interferenz in einen Jaminschen Interferentialrefraktor gelangenden Strahlen. Wir werden in der Optik sehen, wie man aus der hierbei sich zeigenden Erscheinung die Änderung in der Zusammensetzung des Gasgemisches im Innern des Kastens ableiten kann.

Zur Einleitung der Diffusion wurde der Deckel von dem Kasten entfernt und die Kohlensäure in die freie Luft diffundieren gelassen. Es wurde dann mit der angedeuteten optischen Methode die Änderung in der Zusammensetzung des in dem Kasten vorhandenen Gasgemisches sowohl in der oberen etwa 10<sup>cm</sup>, in der mittlern etwa 20<sup>cm</sup> und in der untern etwa 35<sup>cm</sup> unter dem oberen Rande des Kastens befindlichen Gasschicht beobachtet.

Aus der Änderung der Zusammensetzung in ihrer Abhängigkeit von der Zeit läßt sich für die drei Schichten der Diffusionskoeffizient in allerdings ziemlich komplizierter Weise berechnen.

Waitz fand zunächst in jeder Schicht, daß der Diffusionskoeffizient mit wachsender Zeit kleiner wurde, sich aber einem für jede Schicht bestimmten Grenzwert annäherte. Dieser Grenzwert nahm an Größe mit der Tiefe im Diffusionsgefäße zu, er war 10<sup>cm</sup> unter dem oberen Rande 0,148, in der 20<sup>cm</sup> tiefen Schicht 0,152 und in der tiefsten 35<sup>cm</sup> unter dem Rande befindlichen Schicht 0,159.

Mit wachsender Zeit nimmt, bis eine Zeitlang ein annähernd stationärer Zustand eintritt, an jeder Stelle der Gehalt an Kohlensäure ab, andererseits nimmt für die ganze Dauer der Diffusion der Gehalt der Kohlensäure mit der Tiefe zu; beide Sätze von Waitz würden also zu dem Schlusse führen, daß der Diffusionskoeffizient Luft — Kohlensäure mit wachsendem Kohlensäuregehalt einer Schicht zunähme. Da nach v. Obermaier der

1. K. Waitz, Wiedem. Ann. 17. p. 201. 1882. Über die von Waitz erhaltenen Resultate sehe man auch Hausmanninger, Wiener Ber. 86. p. 1073. 1882; v. Obermaier, Wiener Ber. 87. p. 188. 1883

Diffusionskoeffizient mit abnehmendem Dichtigkeitsgefälle etwas zunimmt, müßte die Abnahme mit abnehmendem Kohlensäuregehalt stärker sein als die von v. Obermaier gefundene Zunahme; denn bei den Versuchen von Waitz nimmt gleichzeitig mit dem Gehalte an Kohlensäure auch das Dichtigkeitsgefälle ab. Eine volle Vergleichbarkeit zwischen den Resultaten von Waitz und v. Obermaier ist nicht vorhanden, da der von beiden gemessene Diffusionskoeffizient nicht genau derselbe ist; v. Obermaier bestimmte den Diffusionskoeffizienten aus der in einer gewissen Zeit aus den Diffusionsröhren ausgetretenen Gasmenge, während Waitz denselben für die einzelnen Schichten aus der dort stattfindenden Änderung der Zusammensetzung des Gasgemisches ableitete. Gegenüber dem letztern ist also der Diffusionskoeffizient, den v. Obermaier bestimmt hat, ein mittlerer Wert.

Stefan<sup>1)</sup> hat gezeigt, daß man aus der Geschwindigkeit der Verdampfung einer Flüssigkeit, wenn man über die Mündung einer engen, die Flüssigkeit enthaltenden Röhre einen stetigen Gasstrom hinführt, die Diffusionskoeffizienten der Dämpfe in dem betreffenden Gase bestimmen kann. Winkelmann<sup>2)</sup> hat dieses Verfahren zu einer Untersuchung der Diffusion der Dämpfe und ganz besonders auch zur Beantwortung der Frage benutzt, ob sich der Diffusionskoeffizient mit dem Mengenverhältnisse der Gase ändert. Wir werden die Theorie von Stefan und die sich aus derselben ergebende Methode in der Wärmelehre besprechen und geben hier nur die Resultate an, zu denen Winkelmann gelangt ist.

Entgegen den Resultaten von Waitz und v. Obermaier findet Winkelmann den Diffusionskoeffizienten unabhängig von dem Verhältnisse der in dem Gasgemische vorhandenen Gase ebenso auch von dem Dichtigkeitsgefälle. So ließ Winkelmann aus einer engen Glasröhre Wasser bei  $17^{\circ},08$  verdampfen und führte einmal in einem luftverdünnten Raume in welchem  $6,11^{\text{cm}}$  Quecksilberdruck war, das anderemal unter dem Druck der Atmosphäre,  $74,81^{\text{cm}}$  Quecksilber, einen Luftstrom darüber her. Der Druck des Wasserdampfes unmittelbar über dem Wasser in dem Röhrrchen war bei  $17^{\circ},08$  gleich  $1,447^{\text{cm}}$  Quecksilber. Im ersten Falle war somit der Gesamtdruck  $7,557$ , im zweiten Falle  $76,257$ , also mehr als das zehnfache, während der Partialdruck des Wasserdampfes in beiden Versuchen der gleiche, im ersten Falle etwa  $0,2$ , im letztern  $0,02$  des Gesamtdruckes war. Nach dem schon von Loschmidt bewiesenen Satze, daß der Diffusionskoeffizient dem Gesamtdruck umgekehrt proportional ist, wurden die direkt gefundenen Diffusionskoeffizienten auf  $76^{\text{cm}}$  Druck reduziert, und es ergab sich für den Gesamtdruck

$$k = \frac{7,557^{\text{cm}}}{76,257^{\text{cm}}} = 0,241$$

für die Temperatur von  $17^{\circ},08$ .

Gibt man der verdampfenden Flüssigkeit bei gleichem Gesamtdruck, indem man das vorbeistreichende Gas unter dem Druck der Atmosphäre hält, eine verschiedene Temperatur, so ändert sich gleichzeitig der Partialdruck, und bei Anwendung desselben Apparats das Dichtigkeitsgefälle.

1) Stefan, Wiener Berichte 68. p 386 1873

2) Winkelmann, Wiedem. Ann. 22 p 1 u 152 1884: 23. p 303 1885 & p. 106. 1885, 38 p 445 1886; 36 p 93 1889

über der Flüssigkeit mit steigender Temperatur der Dampfdruck wächst, und von dort bis zu dem vorüberstreichenden Gasstrom auf den Druck Null abnimmt. Direkt beobachtet wird der Diffusionskoeffizient bei verschiedenen Temperaturen, Winkelmann reduzierte die beobachteten Werte auf 0°, indem er in der Gleichung

$$k_t = k_0 (1 + \alpha t)^h$$

den Exponenten  $h = 2$  setzte.

Bei seinen ersten Versuchen erhielt er so bei den über jeder Reihe in Form eines Bruches, dessen Zähler den Partialdruck des Wasserdampfes, dessen Nenner den Gesamtdruck angibt, ausgedrückten Mengenverhältnissen der diffundierenden Gase, und bei der neben diesem Bruche angegebenen Temperatur folgende auf 0° reduzierte Werte der Diffusionskoeffizienten:

	$\frac{576}{730}, t = 92^\circ,$	$\frac{89,6}{730}, t = 49^\circ,5$
Wasserdampf — Wasserstoff	0,658	0,716
„ Luft	0,193	0,203
„ Kohlensäure	0,133	0,130.

Ferner mit Äthylalkohol und Äthyläther

	Alkohol		Äther	
	$\frac{476}{728,6}, t = 66^\circ,9$	$\frac{129,2}{732,7}, t = 40^\circ,45$	$\frac{431,2}{725}, t = 19^\circ,9$	$\frac{292,1}{725,6}, t = 10^\circ,4$
Dampf in Wasserst.	0,374	0,382	0,296	0,297
„ „ Luft	0,0986	0,1046	0,0776	0,0775
„ „ Kohlens.	0,0684	0,0687	0,0552	0,0553.

Die Zahlen für Äther sind ganz unabhängig vom Partialdruck, die Zahlen für Alkohol schwanken etwas, allerdings stets im gleichen Sinne, die Zahlen für Wasser stärker, aber für Kohlensäure im entgegengesetzten Sinne als für die beiden andern Gase.

Die in der zuletzt zitierten Abhandlung wiederholten Versuche, bei welchen die Temperaturbestimmung eine genauere war, führten in den höhern Temperaturen zu größeren Werten von  $k$  für den Wasserdampf. Setzte man für Wasserdampf in Luft den Exponenten  $h = 1,774$ , so führten Versuche bei 16° und 99° zu  $k_0 = 0,2162$ , für Wasserdampf — Wasserstoff mit  $h = 1,712$  zu  $k_0 = 0,7516$  und für Wasserdampf — Kohlensäure mit  $h = 1,972$  zu  $k_0 = 0,1378$ .

Auch R. Schmidt gelangte bei Untersuchung von Argon und Helium zu dem Resultate<sup>1)</sup>, daß bei konstantem Gesamtdruck der Diffusionskoeffizient von dem Partialdrucke nicht merklich abhängig sei.

Wir werden es demnach, wenn auch noch nicht sicher bewiesen, so doch als wahrscheinlich hinstellen dürfen, daß bei konstantem Gesamtdrucke beider Gase der Diffusionskoeffizient für zwei gegebene Gase konstant ist.

1. R. Schmidt, Ann. d. Phys. 14. p. 801. 1904.



## § 120.

**Ableitung der Diffusion aus der kinetischen Gastheorie.** Die langsame Mischung, welche bei der Diffusion zweier Gase eintritt, glaubte Buys-Ballot<sup>1)</sup> als mit der kinetischen Gastheorie unvereinbar ansehen zu müssen, da bei der großen Geschwindigkeit der molekularen Bewegung es nur sehr kurze Zeit dauern könne, bis in geschlossenen Räumen zwei Gase sich mischen. Clausius<sup>2)</sup> wies dem entgegen darauf hin, daß die Schnelligkeit, mit welcher zwei Gase sich mischen, nicht von der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Moleküle allein, sondern ebenso sehr von den Strecken abhängig sein müsse, welche die Gasmoleküle ungestört zurücklegen. Es war das für Clausius der Anlaß, die mittleren Wegelängen der Gasmoleküle zu untersuchen; für welche sich Werte ergaben, § 102, welche nicht sehr große Vielfache des Radius der Wirkungssphäre sind. Eine vollständigere Ableitung der Diffusion gaben später Maxwell<sup>3)</sup>, Stefan<sup>4)</sup> und O. E. Meyer<sup>5)</sup>. Wir begnügen uns damit, die Theorie der Diffusion soweit zu führen, daß wir den Zusammenhang des Diffusionskoeffizienten mit den die Gase in der kinetischen Gastheorie charakterisierenden Größen, Geschwindigkeit und Wegelängen der Moleküle, erkennen. Wir folgen der Theorie von Stefan, da aus dieser sich ein von dem Mischungsverhältnis der Gase unabhängiger Diffusionskoeffizient ergibt, wie er nach den vorliegenden Versuchen wahrscheinlich ist. Die Theorie von O. E. Meyer führt zu einem von dem Mischungsverhältnisse der Gase abhängigen Diffusionskoeffizienten.

Stefan geht von der Anschauung aus, daß wenn in einem Raume zwei Gase vorhanden sind, welche noch nicht gleichförmig gemischt sind, jedes nach dem Orte hinströmt, an welchem die Dichtigkeit des Gases die geringere ist. Den Kräften aber, welche die Strömung bewirken, steht ein Widerstand entgegen.

Wir denken uns eine Röhre, in welcher zwei Gase übereinander geschichtet sind, so daß nur eine Diffusionsströmung nach der Richtung der Röhrenachse stattfindet. Die Röhrenachse nehmen wir als die Richtung der  $x$ . In der zur Achse senkrechten Richtung legen wir jene der  $y$  und  $z$ . In einem Querschnitt der Röhre sei der Druck des einen Gases  $p_1$ , des andern  $p_2$ , der Gesamtdruck  $p_1 + p_2 = p$  ist an allen Stellen der gleiche. Parallel der Röhrenachse ist der Druck  $p_1$  und ebenso  $p_2$  veränderlich. Jedes der beiden Gase wird nach der Richtung hingetrieben, nach welcher der Druck desselben abnimmt, die treibende Kraft ist der Druckabnahme proportional, gerade wie wenn das Gas allein vorhanden wäre. Das in einem Volumenelemente  $dx dy dz$  vorhandene Gas der einen Art erhält auf der einen zur Achse der  $x$  senkrechten Fläche den Druck  $p_1 dy dz$ , auf der andern gegenüberliegenden den Druck  $(p_1 + \frac{dp_1}{dx} dx) dy dz$ ; die Kraft, mit

1) Buys-Ballot, Poggend. Ann. 103. p. 240. 1858.

2) Clausius, Poggend. Ann. 105. p. 239. 1858.

3) Maxwell, Philosoph. Magazin. 20. (4) p. 21. 1860.

4) Stefan, Wiener Berichte. 63. p. 63. 1871; 65. p. 323. 1872.

5) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877. p. 161 f.

elcher das Gas Eins in diesem Volumelement getrieben wird, ist demnach

$$-\frac{dp_1}{dx} dx dy dz.$$

Die Kraft, mit welcher das zweite Gas an eben der Stelle nach entgegengesetzter Seite getrieben wird, ist

$$-\frac{dp_2}{dx} dx dy dz.$$

Dieser Kraft wirkt der Widerstand entgegen, von welchem Stefan nimmt, daß jedes Molekül des einen Gases, wenn es sich bewegt, von dem andern Gase einen Widerstand erfährt, welcher der Dichte des andern Gases und der relativen Geschwindigkeit der beiden Gase gegeneinander proportional ist. Nennen wir  $\sigma_1$  die Dichtigkeit des ersten,  $\sigma_2$  die Dichtigkeit des zweiten Gases an der Stelle des Volumelementes,  $c_1$  die Geschwindigkeit der Strömung des einen,  $c_2$  jene der Strömung des zweiten Gases, so daß  $c_1 - c_2$  die relative Geschwindigkeit des Gases Eins gegen das Gas Zwei ist, so wird, da jedes Molekül des Gases Eins den gleichen Widerstand erfährt, das in dem Volumelement vorhandene Gas  $\sigma_1 dx dy dz$  den Widerstand

$$W_1 = A_{12} \sigma_1 \sigma_2 (c_1 - c_2) dx dy dz$$

erfahren, wenn  $A_{12}$  die Proportionalitätskonstante bedeutet. Die Differenz zwischen der bewegenden Kraft und diesem Widerstande gibt uns somit die das Gas fortreibende Kraft, diese Differenz ist somit gleich dem Produkte aus der in dem Volumelemente vorhandenen Masse und der Beschleunigung, welche diese Masse erhält. Bei der Diffusion erhält das Gas eine beschleunigte Bewegung, es wird das Gas Eins mit gleichförmiger Bewegung in das Gas Zwei hindübergeführt, es folgt deshalb, daß die Kraft gerade ausreicht, um den Widerstand zu überwinden, oder daß

$$-\frac{dp_1}{dx} dx dy dz = W_1 = A_{12} \sigma_1 \sigma_2 (c_1 - c_2) dx dy dz$$

Für die Verbreitung des zweiten Gases im ersten muß der Widerstand ganz genau derselbe sein, da der Widerstand Folge der Wechselwirkung der Teilchen des ersten und des zweiten Gases in dem betrachteten Volumelemente ist, und die Wirkung stets der Gegenwirkung gleich sein muß. Für das zweite Gas erhalten wir daher die Gleichung

$$-\frac{dp_2}{dx} dx dy dz = A_{12} \sigma_1 \sigma_2 (c_2 - c_1) dx dy dz.$$

Wir können demnach die beiden Gleichungen, welche als erste die Bewegungen der beiden Gase bestimmen, schreiben

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dx} + A_{12} \sigma_1 \sigma_2 (c_1 - c_2) &= 0 \\ \frac{dp_2}{dx} + A_{12} \sigma_1 \sigma_2 (c_2 - c_1) &= 0 \end{aligned} \right| \dots \dots \dots 1$$

Ein zweites Paar von Gleichungen für die Bewegung der beiden Gase erhalten wir aus der Erwägung, daß infolge der Strömung sich die Dichtig-



keit jedes Gases in dem Volumelement ändert, da von der Seite des höheren Druckes mehr Teilchen in das Volumelement eintreten als austreten. In dem Zeitelement  $dt$  legt jedes Molekül des ersten Gases die Strecke  $c_1 dt$  zurück, es tritt demnach von der einen Seite durch die Fläche  $dy dz$  die Gasmenge  $\sigma_1 c_1 dt dy dz$  ein, denn es rückt gewissermaßen durch das Flächenelement  $dy dz$  ein Parallelepiped, dessen Querschnitt  $dy dz$ , dessen Länge  $c_1 dt$  in das betrachtete Volumelement ein; da die Dichte des Gases hier  $\sigma_1$  ist, so ist die eintretende Menge  $\sigma_1 c_1 dt dy dz$ . Geht auf der Strecke  $dx$  die Geschwindigkeit in  $c_1 + \frac{dc_1}{dx} dx$  und die Dichte in  $\sigma_1 + \frac{d\sigma_1}{dx} dx$  über, so ist der Überschuß der austretenden über die der eintretenden

$$\left(c_1 + \frac{dc_1}{dx} dx\right) \left(\sigma_1 + \frac{d\sigma_1}{dx} dx\right) dt dy dz - \sigma_1 c_1 dt dy dz = \frac{d(c_1 \sigma_1)}{dx} dx dt dy dz.$$

Ist dieser Überschuß positiv, so geht die Dichtigkeit in  $\sigma_1 - d\sigma_1$  über, ist derselbe negativ, so geht die Dichtigkeit in  $\sigma_1 + d\sigma_1$  über, es ist demnach

$$d\sigma_1 dx dy dz = - \frac{d(c_1 \sigma_1)}{dx} dt \cdot dx dy dz$$

oder

$$\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{d(c_1 \sigma_1)}{dx} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

und ganz entsprechend bekommen wir für das zweite Gas

$$\frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{d(c_2 \sigma_2)}{dx} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

Die Dichtigkeiten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  der Gase in dem Volumelement können wir durch die Drucke  $p_1$  und  $p_2$  ausdrücken. Ist  $\delta_1$  die Dichtigkeit des Gases Eins,  $\delta_2$  jene des Gases Zwei unter dem Druck  $p_0$  der normalen Atmosphäre und der Temperatur des schmelzenden Eises, und ist die Temperatur des Gases  $\vartheta$ , so ist

$$\sigma_1 = \delta_1 \frac{p_1}{p_0} \frac{1}{1 + \alpha \vartheta}, \quad \sigma_2 = \delta_2 \frac{p_2}{p_0} \frac{1}{1 + \alpha \vartheta},$$

$$\sigma_1 \sigma_2 = \frac{\delta_1 \delta_2}{p_0^2 (1 + \alpha \vartheta)^2} \cdot p_1 p_2.$$

Setzen wir weiter  $p_1 c_1 = q_1$ ;  $p_2 c_2 = q_2$ , so werden die Gleichungen (1)

$$\frac{dp_1}{dx} + A_{12} \frac{\delta_1 \delta_2}{p_0^2 (1 + \alpha \vartheta)^2} (p_2 q_1 - p_1 q_2) = 0.$$

Der Faktor des zweiten Gliedes vor der Klammer wollen wir mit  $b_{12}$  bezeichnen, dann wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dx} + b_{12} (p_2 q_1 - p_1 q_2) &= 0 \\ \frac{dp_2}{dx} + b_{12} (p_1 q_2 - p_2 q_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

und die Gleichungen (2) werden, wenn wir den gemeinschaftlichen Faktor fortlassen

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dq_1}{dx} = 0, \quad \frac{dp_2}{dt} + \frac{dq_2}{dx} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

Addieren wir die beiden Gleichungen (4), so wird

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{dt} + \frac{d(q_1 + q_2)}{dx} = 0.$$

Da in dem ersten Gliede  $p_1 + p_2 = p$  in dem ganzen Rohre konstant ist, so ist das erste Glied für sich Null, es muß deshalb auch das zweite Glied für sich gleich Null und deshalb  $q_1 + q_2$  in dem ganzen Rohre denselben Wert haben. An den festgeschlossenen Enden des Rohres tritt Gas weder ein noch aus, die Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  sind dort Null, deshalb muß für das ganze Rohr  $q_1 + q_2 = 0$  oder  $q_1 = -q_2$  sein. Setzen wir das in die Gleichungen (3), so wird unter Beachtung, daß  $p_1 + p_2 = p$  ist,

$$\frac{dp_1}{dx} + b_{12} p q_1 = 0, \quad \frac{dp_2}{dx} + b_{12} p q_2 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Differenzieren wir diese beiden Gleichungen nach  $x$ , so wird

$$\frac{1}{b_{12} p} \frac{d^2 p_1}{dx^2} + \frac{dq_1}{dx} = 0, \quad \frac{1}{b_{12} p} \frac{d^2 p_2}{dx^2} + \frac{dq_2}{dx} = 0$$

und unter Beachtung der Gleichungen (4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{1}{b_{12} p} \cdot \frac{d^2 p_1}{dx^2} = k \frac{d^2 p_1}{dx^2} \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{1}{b_{12} p} \cdot \frac{d^2 p_2}{dx^2} = k \frac{d^2 p_2}{dx^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Wir haben hier die Grundgleichung der Diffusion, in welcher  $k$  der Diffusionskoeffizient ist; derselbe ist hiernach für beide Gase derselbe und wie es Loschmidt schon fand, dem Gesamtdruck  $p$  umgekehrt proportional. Nach der Bedeutung des Diffusionskoeffizienten

$$k = \frac{1}{b_{12} p} = \frac{1}{p} \frac{1}{A_{12}} \frac{p_0 p_0}{\sigma_1 \sigma_2} (1 + \alpha \vartheta)^2$$

sehen wir, daß der früher eingeführte Proportionalitätsfaktor  $A_{12}$  von der Natur der Gase abhängig sein muß. Um denselben zu bestimmen, untersuchen wir die Umstände, von welchen der Widerstand abhängig ist, welchen Wert für die Volumeinheit ist

$$W = A_{12} \sigma_1 \sigma_2 (c_1 - c_2).$$

Dieser Widerstand rührt daher, daß die Moleküle des einen Gases an die Moleküle des andern Gases prallen; infolgedessen geben die Moleküle des Gases I eine gewisse Bewegungsgröße an jene des Gases II ab, und diese Bewegungsgröße für die Zeiteinheit ist der Widerstand, den die in der Volumeinheit befindlichen Moleküle ihrer Bewegung entgegen erfahren.

Wir führen zur Berechnung derselben wie früher die Voraussetzung ein, daß die Geschwindigkeit der Molekularbewegung für alle Moleküle des selben Gases dieselbe ist. Stößt eine Kugel von der Masse  $m_1$  und der Geschwindigkeit  $c_1$  in zentralem Stoße an eine andere mit der Masse  $m_2$  und der Geschwindigkeit  $c_2$ , so ist die Bewegungsgröße, welche die Kugel  $m_1$  an die Kugel  $m_2$  abgibt, wenn wir die Geschwindigkeit nach dem Stoße  $c_1'$  bezeichnen,

$$m_1 (c_1 - c_1').$$

Nach § 59 ist  $v_1$

$$v_1 = \frac{2m_2c_2 + (m_1 - m_2)c_1}{m_1 + m_2},$$

somit

$$m_1(c_1 - v_1) = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2).$$

Würden alle Moleküle des Gases I diejenigen des Gases II in zentralem, der Bewegungsrichtung  $x$  parallelem Stoße treffen, so hätten wir nur die Gesamtzahl der Stöße der Moleküle des ersten an jene des zweiten Gases mit diesem Werte zu multiplizieren, um die verlorene Bewegungsgröße, somit den Widerstand  $W$  zu erhalten. Infolge der nach allen Richtungen stattfindenden, von der Strömung unabhängigen Bewegungen der Moleküle kommen aber neben dem zentralen Stoße alle möglichen schiefen Stöße, und zwar für jede mögliche Richtung in gleicher Anzahl vor. Bei schiefem Stoße wird aber nur die der Richtung  $x$  parallele Komponente der soeben berechneten Bewegungsgröße abgegeben. Diese Komponenten haben alle möglichen Werte zwischen 0 und dem oben angegebenen; anstatt aber alle diese Komponenten auszurechnen, können wir mit Hilfe der in Betracht kommenden Zahl  $Z_1$  der Stöße die verlorene Bewegungsgröße in folgender Weise erhalten. Bildet die Stoßrichtung mit der zentralen parallel  $x$  den Winkel  $\varphi$ , so geht bei diesem Stoße für die Strömungsbewegung nur die in die Richtung der strömenden Bewegung fallende Komponente

$$2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2) \cos \varphi$$

verloren. Von der Zahl  $Z_1$  fallen in diese Richtung, wie ganz analog dem § 102 Seite 572 durchgeführte Überlegungen zeigen, die Anzahl

$$Z_1 \sin \varphi d\varphi,$$

wo hier nicht wie an der frühern Stelle im Nenner 2 steht, weil hier nicht nur spitze Winkel  $\varphi$ , sondern auch deren Supplement vorkommen kann, welche mit der Richtung des geraden Stoßes somit denselben Winkel bildet. Für die unter dem Winkel  $\varphi$  auftreffenden Stöße ist demnach die verlorene Bewegungsgröße

$$2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2) \cos \varphi \cdot Z_1 \sin \varphi d\varphi.$$

Um den Gesamtverlust zu erhalten, haben wir für  $\varphi$  alle Werte zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  nach und nach einzusetzen und alle für die verschiedenen Werte von  $\varphi$  sich ergebenden Ausdrücke zu summieren, oder was dasselbe ist nach  $\varphi$  von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$  zu integrieren und erhalten

$$Z_1 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = Z_1 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2),$$

da das Integral den Wert  $\frac{1}{2}$  hat, wie wir schon mehrfach sahen.

Die Zahl  $Z_1$  der in Betracht kommenden Stöße ist etwas größer als Zahl derselben, wenn die Moleküle nur ihre Molekularbewegung hätten, die Moleküle parallel der Strömungsrichtung sich rascher nähern, als die Strömungsbewegung nicht vorhanden wäre. Stefan weist nach, wenn  $Z$  die Stöße sind, welche ohne die Strömungsbewegung vor- en sind, wir den Verlust an Bewegungsgröße erhalten, wenn wir in n Ausdruck für  $Z_1$  einsetzen  $\frac{1}{2} Z$ , so daß also die abgegebene Be- ngsgröße oder der der Strömung entgegenstehende Widerstand

$$W = \frac{1}{2} Z \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)$$

Die Stoßzahl  $Z$  haben wir zu berechnen. Wir schlagen dazu genau lben Weg ein wie im § 102.

Die molekulare Geschwindigkeit des Gases I sei  $u$ , die des Gases II , der Radius der Wirkungssphäre des ersten Gases sei  $\varrho_1$ , der des en sei  $\varrho_2$ .

Bewegt sich ein Molekül in einem Raume von der Größe  $V$ , in wel- sich  $N$  Moleküle befinden, und ist  $\varrho$  der Abstand, bis zu welchem die Mittelpunkte der als Kugeln gedachten Moleküle nähern können, t nach § 102, wenn die Moleküle, mit Ausnahme des einen bewegten, d sind, die Stoßzahl  $Z'$

$$Z' = \frac{N + \varrho^2 \pi}{4(V - N \frac{1}{2} \varrho^2 \pi)} u.$$

Die Größe  $\varrho$  können wir hier aber nicht als die Radien der Wirkungs- e der ruhenden Moleküle bezeichnen, da wir die Stöße der Moleküle iases I an jenen des Gases II aufsuchen. Wir nehmen als ruhende ülle die des Gases II, das eine bewegte ist eines des Gases I. Der nd, bis zu welchem die Mittelpunkte eines Moleküles des Gases I und des Gases II sich nähern können, ist bei der Annahme, daß die Mole- Kugeln wären, gleich der Summe der beiden Kugelradien. Da nach ben Anschauung der Radius der Wirkungssphäre gleich dem doppel- er Kugelradien ist, so müssen wir setzen

$$\varrho = \frac{1}{2} (\varrho_1 + \varrho_2).$$

Da wir hier nur Stöße an den Molekülen aufsuchen, haben wir in Ausdrucke für  $Z'$  die Wandfläche  $\Sigma = 0$  zu setzen. Vernachlässigen n von den Molekülen des Gases II eingenommenen Raum, und setzen

$$\frac{N}{V} = n_2$$

der Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle des zweiten so, wird

$$Z' = n_2 \varrho^2 \pi u.$$

und die Moleküle  $n_2$  nicht in Ruhe, so müssen wir die Geschwindig- ersetzen durch die mittlere relative Geschwindigkeit  $\bar{v}$  des Moleküls I die mit der mittlern Geschwindigkeit  $v$  bewegten Moleküle II. Wir n dieselbe genau wie im § 102; nur dürfen wir hier nicht  $v = u$

setzen. Beachten wir das, so wird die mittlere relative Geschwindigkeit des Moleküls I gegen die Moleküle II

$$\bar{r} = \frac{1}{n_2} \int_0^\pi n_2 \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi}.$$

In dem Ausdrucke unter dem Integralzeichen ist

$$\sin \varphi d\varphi = -dx \cos \varphi.$$

Setzen wir  $\cos \varphi = x$ , so ist  $\sin \varphi d\varphi = -dx$ , setzen wir ferner  $u^2 + v^2 = a$ ,  $2uv = b$ , so wird das Integral, wenn wir gleichzeitig  $n_2$  in Zähler und Nenner wegheben,

$$\bar{r} = \int -\frac{1}{2} dx \sqrt{a - bx},$$

wo jetzt nur die Grenzen zu bestimmen sind, zwischen welchen wir das Integral, in welchem jetzt die veränderliche  $x$  ist, zu nehmen haben. Nach  $\varphi$  hatten wir das Integral von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \pi$  zu nehmen. Dem Werte  $\varphi = 0$  entspricht der Wert  $x = \cos \varphi = 1$ , dem Werte  $\varphi = \pi$  der Wert  $x = \cos \pi = -1$ . Wir haben also das Integral von  $x = 1$  bis  $x = -1$  zu nehmen. Zur Durchführung der Integration setzen wir

$$a - bx = t^2.$$

Dann wird

$$-dx = \frac{2t dt}{b}$$

und wir erhalten

$$\bar{r} = \int \frac{t^2}{b} dt.$$

Da für  $x = 1$ ,  $t^2 = a - b$ , für  $x = -1$  dagegen  $a + b$  wird, sind die Grenzen, zwischen denen wir dieses Integral zu nehmen haben  $\sqrt{a - b}$  und  $\sqrt{a + b}$ . Da unter dem Integralzeichen das Differential des Ausdruckes  $\frac{1}{3b} t^3$  steht, so wird

$$\bar{r} = \frac{1}{3b} \{ (a + b)^{\frac{3}{2}} - (a - b)^{\frac{3}{2}} \}$$

und setzen wir für  $a$  und  $b$  ihre Werte  $a + b = (u + v)^2$ ;  $a - b = (u - v)^2$ , so wird

$$\bar{r} = \frac{1}{6uv} \{ (u + v)^3 - (u - v)^3 \}.$$

Ebenso aber, wie wir  $a - b = (u - v)^2$  setzen, können wir auch  $a + b = (v - u)^2$  setzen, und in der Tat ist  $v$  größer als  $u$ , so setzen wir diesen Wert einsetzen. Dann setzen wir die Geschwindigkeiten des Moleküls des einen Gases  $s_1$ , die andern  $v = s_2$  und nehmen ausdrücklich an, daß  $s_1 > s_2$ , so erhalten wir, wenn wir  $(s_1 + s_2) = f$  und  $s_1 - s_2 = h$  setzen, in der Klammer den Wert  $f^3 - h^3$ . Wir müssen aber genau selbe mittlere Geschwindigkeit bekommen, wenn  $u = s_2$  und  $v = s_1$ . Bilden wir aber jetzt die Differenz  $u - v$ , so würde dieselbe  $s_2 - s_1 =$

der Klammer würde  $f^3 + h^3$ , setzen wir aber jetzt das Glied wird der Wert der Klammer  $f^3 - h^3$  wie vorher.

Wir erhalten wir nach Durchführung der Rechnung

$$\dot{r} = \frac{3u^3 + v^3}{3u},$$

gegen

$$r = \frac{3v^3 + u^3}{3v}.$$

Wir nehmen stets an, es sei  $u > v$ , das heißt, wir nennen Gas I, welches die größere Molekulargeschwindigkeit hat. Die Anzahl der Moleküle I an den  $n_2$  Molekülen des Gases II wird damit

$$Z' = n_2 \rho^2 \pi \frac{3u^3 + v^3}{3u}.$$

Die Anzahl der Moleküle des Gases I in der Volumeinheit, so ist die Anzahl  $= n_1 Z'$ , somit

$$Z = n_1 n_2 \rho^2 \pi \frac{3u^3 + v^3}{3u}.$$

Wir haben gleichzeitig, daß, wenn  $u = v$  ist, der letzte Faktor, wie § 102 fanden, gleich  $\frac{4}{3}$  ist.

Widerstand  $W$  erhalten wir demnach

$$W = \frac{4}{3} n_1 n_2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rho^2 \pi \frac{3u^3 + v^3}{3u} (c_1 - c_2).$$

Wir setzen diesen Ausdruck mit dem für den Widerstand  $W$  auf-

$$W = A_{12} \sigma_1 \sigma_2 (c_1 - c_2),$$

unter Beachtung, daß  $\sigma_1 = n_1 m_1$ ,  $\sigma_2 = n_2 m_2$ , daß der Proportionalitätskoeffizient  $A_{12}$  wird

$$A_{12} = \frac{4}{3} \frac{\rho^2 \pi}{m_1 + m_2} \frac{3u^3 + v^3}{3u}.$$

Der Diffusionskoeffizient  $k$  wird demnach

$$k = \frac{1}{p} \frac{3(m_1 + m_2)u}{\frac{4}{3} \rho^2 \pi (3u^3 + v^3)} \frac{p_0 p_0}{\delta_1 \delta_2} (1 + \alpha \theta)^2.$$

Um die Diffusionskoeffizienten weiter diskutieren zu können, machen wir die Annahme, in dem Diffusionsgefäß sei der normale Druck vorhanden,  $\theta$  die Temperatur des Diffusionsgefäßes ist,  $p = p_0 (1 + \alpha \theta)$  ist. Dann

$$k = \frac{3(m_1 + m_2)u p_0}{\frac{4}{3} \rho^2 \pi (3u^3 + v^3) \delta_1 \delta_2} (1 + \alpha \theta).$$

Wir bestimmen den Koeffizienten von  $(1 + \alpha \theta)$ , berechnen somit  $k$

die Anzahl der Moleküle eines Gases in der Volumeinheit zum Drucke  $p_0$ , die Masse der Moleküle  $m$ , ihre Molekulargeschwindigkeit bei  $0^\circ$   $w_0$ , so ist der Druck  $p_0$  nach § 103

$$p_0 = \frac{1}{3} n m w_0^2.$$

Nach einem schon früher herangezogenen Satze von Avogadro ist die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle unter demselben Drucke und bei derselben Temperatur immer die gleiche, einerlei welches Gas wir nehmen. Wir können deshalb ebenso auch für 0° setzen

$$p_0 = \frac{1}{3} n m_1 u_0^2 = \frac{1}{3} n m_2 v_0^2.$$

Setzen wir also für  $m$  und  $w_0$  Masse und Geschwindigkeit der Luftmoleküle, so können wir die Geschwindigkeiten  $u_0$  und  $v_0$  durch diejenige der Luftmoleküle ausdrücken

$$u_0^2 = \frac{m}{m_1} w_0^2 \quad v_0^2 = \frac{m}{m_2} w_0^2.$$

Setzen wir diese Werte in den Ausdruck für  $k$  ein und beachten, daß

$$\delta_1 = n m_1 \quad \delta_2 = n m_2,$$

so wird

$$k = \frac{(m_1 + m_2) \sqrt{m} \cdot w_0}{(3 m_2 + m_1) \sqrt{m_1} \cdot \frac{1}{3} n \varrho^2 \pi}.$$

Das spezifische Gewicht eines Gases bezogen auf Luft ist gleich dem Quotienten des Gewichtes des Moleküls dieses Gases und des Gewichtes des Moleküls Luft. Nennen wir das so definierte spezifische Gewicht des Gases I  $d_1$ , des Gases II  $d_2$ , so wird, wenn wir Zähler und Nenner mit  $m \sqrt{m}$  dividieren,

$$k = \frac{(d_1 + d_2) w_0}{(3 d_2 + d_1) \sqrt{d_1} \cdot \frac{1}{3} n \varrho^2 \pi},$$

worin für  $d_1$ , weil  $u > v$  sein muß, als Gas I immer jenes mit dem kleineren spezifischen Gewicht genommen werden muß.

Den hier im Nenner noch vorkommenden Ausdruck  $\frac{1}{3} n \varrho^2 \pi$  können wir durch die mittlere Wegelänge der einzelnen Gase ausdrücken. Vernachlässigen wir den von den Molekülen eingenommenen Raum, so ist nach § 102, wenn  $n$  die Molekülzahl eines Gases in der Volumeinheit und  $\varrho_0$  der Radius der Wirkungssphäre ist, die mittlere Wegelänge  $l$  gegeben durch

$$l = \frac{1}{\frac{1}{3} n \varrho_0^2 \pi}.$$

In unserm Ausdrücke für  $k$  ist  $\varrho = \frac{1}{2} (\varrho_1 + \varrho_2)$ , den Wert des Ausdruckes  $\frac{1}{3} n \left( \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \right)^2 \pi$  erhalten wir demnach in folgender Weise. Ist  $l_1$  die mittlere Wegelänge des Gases eins,  $l_2$  jene des Gases zwei, so ist

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{3} n \varrho_1^2 \pi \quad \frac{1}{l_2} = \frac{1}{3} n \varrho_2^2 \pi$$

demnach

$$\frac{1}{3} n \left( \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \right)^2 \pi = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}} \right)^2$$

und damit schließlich  $k$

$$k = \frac{d_1 + d_2}{(3 d_2 + d_1) \sqrt{d_1}} \cdot \frac{4 w_0}{\left( \frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}} \right)^2}.$$



Ist die Temperatur der diffundierenden Gase nicht  $\vartheta = 0$  sondern andere, so haben wir diesen Ausdruck mit  $(1 + \alpha\vartheta)$  zu multiplizieren anstatt  $\kappa_0$  die Geschwindigkeit der molekularen Bewegung bei  $0^\circ$  zu setzen durch die molekulare Geschwindigkeit bei  $\vartheta^\circ$ . Wie wir bereits § 104 bemerkt haben, ist diese Geschwindigkeit  $\kappa = \kappa_0 \sqrt{1 + \alpha\vartheta}$ . mit wird  $k$

$$k = \frac{d_1 + d_2}{(3d_2 + d_1)\sqrt{d_1}} \cdot \frac{4\kappa_0(1 + \alpha\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2}.$$

Die Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten von der Temperatur, wie die Theorie liefert, entspricht, wie wir sahen, der Erfahrung nicht, denn Exponent von  $(1 + \alpha\vartheta)$  ist nicht gleich 1,5, sondern liegt zwischen 1 und 2. Indes ist zu beachten, daß wir hier ebenso, wie bei der Berechnung der mittlern Wegelängen bei gleichem Druck der Gase infolge der Anziehung der Moleküle als mit der Temperatur veränderlich ansehen müssen; wir müssen demnach auch hier die von Sutherland angegebene Korrektur anbringen. Da auch hier die mittlern Wegelängen in der ersten Potenz im Zähler stehen, müssen wir, wenn wir die Diffusionskoeffizienten der Temperatur  $\vartheta = 0$  mit  $k_0$  bezeichnen, setzen

$$k = k_0 \frac{1 + \frac{\alpha C_1}{T}}{1 + \frac{C_1}{T}} (1 + \alpha\vartheta)^{\frac{1}{2}},$$

in  $C_1$  die Kohäsionskonstante der gemischten Gase ist.

Sutherland<sup>1)</sup> hat diese Gleichung an den Beobachtungen von v. Obermayer geprüft und gezeigt, daß die Diffusionskoeffizienten in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur durch sie vortrefflich dargestellt werden. Die Konstante  $C_1$  erhält Sutherland die Werte

Kohlen-säure — Luft	250	Sauerstoff — Wasserstoff	100
Kohlensäure — Wasserstoff	106	Sauerstoff — Stickstoff	136
Kohlensäure — Stickoxydul	380	Sauerstoff — Kohlenoxyd	124.

Bemerkenswert ist, daß wir den Diffusionskoeffizienten durch den Viskositätskoeffizienten ausdrücken können. Wir fanden im § 117

$$\eta_1 = \frac{1}{3} n m_1 u l_1 \quad \eta_2 = \frac{1}{3} n m_2 v l_2.$$

Drücken wir zunächst  $u$  und  $v$  durch  $\kappa$  aus, so können wir schreiben

$$\eta_1 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n m}{n m_1}} \kappa l_1, \quad \eta_2 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n m}{n m_2}} \kappa l_2.$$

Hierin ist  $n m$  das Gewicht von  $1 \text{ cm}^3$  Luft, das wir gleich  $\delta$  setzen können, damit wird

$$l_1 = \frac{3 \eta_1}{\delta \kappa \sqrt{d_1}} \quad \text{und ebenso} \quad l_2 = \frac{3 \eta_2}{\delta \kappa \sqrt{d_2}}.$$

<sup>1)</sup> Sutherland, Phil. Mag. 38. (5.) p. 1. 1894

Setzen wir diese Werte von  $l_2$  und  $l_1$  in den Ausdruck für  $k$ , und beachten, daß  $w = w_0 \sqrt{1 + \alpha \vartheta}$ , so erhält man leicht

$$k = 36 \frac{d_1 + d_2}{(3d_2 + d_1) \sqrt{d_1}} \frac{\eta_1 \eta_2}{\delta (\sqrt{3\eta_1} \sqrt{d_2} + \sqrt{3\eta_2} \sqrt{d_1})^2} (1 + \alpha \vartheta) \frac{1 + \frac{\alpha C_1}{T}}{1 + \frac{C_1}{T}}$$

ein Ausdruck, der nur die Reibungskoeffizienten, die spezifischen Gewichte der Gase bezogen auf Luft und das Gewicht der Volumeinheit Luft enthält.

Schließlich sei darauf aufmerksam gemacht, daß wenn der Gesamtdruck im Diffusionsgefäße  $p$  nicht gleich  $p_0(1 + \alpha \vartheta)$ , sondern etwa gleich  $P_0(1 + \alpha \vartheta)$  ist, wir den oben erhaltenen Wert mit dem Quotienten  $\frac{P_0}{p}$  dividieren haben. Die Theorie führt demnach zu dem schon von Loschmidt gefundenen Resultate, daß der Diffusionskoeffizient dem Gesamtdrucke umgekehrt proportional ist.

Bei der Bestimmung des Diffusionskoeffizienten haben wir, wie bisher stets vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$  für alle Moleküle der gleichen Art dieselben sind. Wie wir schon erwähnten macht Maxwell diese Annahme nicht, derselbe berechnet unter Annahme, daß die Moleküle alle möglichen Geschwindigkeiten haben, die mittlere Geschwindigkeit anders. Damit wird auch die Stoßzahl eine andere, und damit werden die mittlern Wegelängen andere. Geht man von der Maxwell'schen Bestimmung der mittlern Geschwindigkeiten aus, so wird nach den Rechnungen Stefans der Diffusionskoeffizient

$$k = \frac{3\pi^{1/2}}{8} \frac{\sqrt{d_1 + d_2}}{\sqrt{d_1 d_2}} \cdot \frac{w_0 (1 + \alpha \vartheta)^{1/2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2} \cdot \frac{p_0}{P_0} \frac{1 + \frac{\alpha C_1}{T}}{1 + \frac{C_1}{T}}$$

ein Ausdruck, welcher in der Form übersichtlicher ist als der obige aus unserer nach Clausius gemachten Annahme gleicher Geschwindigkeit der Moleküle sich ergebende, besonders da er von den spezifischen Gewichten beider Gase in ganz gleicher Weise abhängt.

Die zahlenmäßige Prüfung dieser Ausdrücke wollen wir im nächsten Paragraphen nach Berechnung der mittlern Wegelängen vornehmen.

## § 121.

**Absolute Werte der mittlern Wegelängen; Größe und Zahl der Moleküle.** Die experimentelle Bestimmung der Reibungs- und Diffusionskoeffizienten setzt uns in den Stand die absoluten Werte der Wegelängen der Gasmoleküle zu bestimmen; in der Übereinstimmung der auf beiden Wegen gefundenen Werte erhalten wir eine wertvolle Bestätigung der kinetischen Gastheorie. Für den Reibungskoeffizienten eines Gases findet wir § 117

$$\eta = \frac{1}{3} m n u l.$$

Wir haben im § 118 die Reibungskoeffizienten in absolutem Maß angegeben, für Luft ist derselbe so aus den Beobachtungen von Mey

uluj. Kundt und Warburg, von Obermaier bei der Temperatur 15°

$$\eta = 0,000\,183 \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}}$$

Wir erhalten demnach aus der Gleichung

$$l = \frac{3\eta}{nm\alpha}$$

ist Luft die mittlere Wegelänge bei normalem Druck der Atmosphäre, wenn wir für  $m$  das Gewicht eines Kubikcentimeters Luft unter dem Drucke der Atmosphäre bei der Temperatur 15° und aus § 104 die Geschwindigkeit  $\alpha$  der Luftmoleküle bei der Temperatur 15° einsetzen.

Das Gewicht eines Kubikcentimeters Luft bei 15° ist 0,001 226<sup>g</sup>. Für die Geschwindigkeit  $\alpha$  der Luftmoleküle erhielten wir bei der gleichen Temperatur  $\alpha = 49\,800$ . Demnach wird  $l$

$$l = \frac{3 \cdot 0,000\,183}{0,001\,226 \cdot 49\,800} = 0,000\,008\,992 \text{ cm}$$

ist fast genau 9 Milliontheile eines Zentimeters.

Setzen wir die Dichtigkeit eines Gases bezogen auf Luft gleich eins  $d$ , so können wir, wenn  $m_1$ ,  $n_1$ ,  $\alpha_1$  die betreffenden Größen für dieses Gas bedeuten, schreiben,

$$n_1 m_1 = n m d \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{d}} \quad n_1 m_1 \alpha_1 = n m \alpha \cdot \sqrt{d}.$$

Ist  $\eta_1$  der Reibungskoeffizient dieses Gases, so können wir die Wegelänge  $l_1$  schreiben

$$l_1 = \frac{3\eta_1}{n_1 m_1 \alpha_1 \sqrt{d}} = \frac{3\eta_1}{0,001\,226 \cdot 49\,800 \cdot \sqrt{d}} = 0,049\,14 \frac{\eta_1}{\sqrt{d}}$$

Demnach wird für

	$\eta_1$	$d$	$l_1$	$l_1$ Maxwell
Wasserstoff . .	0,000 091	0,069 26	0,000 016 95	0,000 018 49
Sauerstoff . . .	0,000 203	1,105 63	0,000 009 49	
Stickstoff . . .	0,000 179	0,971 37	0,000 008 92	
Kohlensäure . .	0,000 152	1,529 01	0,000 006 04	0,000 006 56
Kohlenoxyd . .	0,000 169	0,967 30	0,000 008 67	
Wasserdampf . .	0,000 099	0,623 34	0,000 006 18	0,000 006 71 .

Die mittlere molekulare Geschwindigkeit nach Maxwell wird kleiner als nach Clausius Annahme der für alle Moleküle gleichen Geschwindigkeit, denn nach Maxwell wird die mittlere Geschwindigkeit  $v$

$$v = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cdot \alpha.$$

wird für Luft bei 15° gleich 45 885<sup>cm</sup>, und demnach wird die mittlere Wegelänge für Luft

$$l = 0,000\,000\,77.$$

Mit diesem Werte sind die oben nach Maxwell angegebenen Werte der Wegelängen von Wasserstoff, Kohlensäure und Wasserdampf berechnet.

Aus den Diffusionskoeffizienten können wir die Wegelängen berechnen, wenn die Diffusionskoeffizienten zwischen den möglichen Kombinationen dreier Gase vorliegen. Denn dann haben wir drei Gleichungen für die drei Unbekannten  $l_1, l_2, l_3$ . Wir können in dieser Weise die von v. Obermayer beobachteten Werte benutzen. Nehmen wir die von Obermayer für Luft, Wasserstoff, Kohlensäure erhaltenen Werte für 15°

		berechnet nach Stefan mit der Annahme von	
		Clausius	Maxwell
Luft — Kohlensäure . . . . .	0,1496	0,1621	0,1574
Luft — Wasserstoff . . . . .	0,7422	0,9871	0,9772
Wasserstoff — Kohlensäure . .	0,5997	0,6387	0,7611

so wird nach der Formel von Stefan aus der Annahme von Clausius

$$\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2 = \frac{d_1 + d_2}{(3d_2 + d_1)\sqrt{d_1}} \cdot \frac{4\pi(1 + \alpha t)}{k}$$

die Wegelänge

für Luft . . . . .	0,000 006 06	aus der Reibung	0,000 009 00
„ Wasserstoff . .	0,000 015 14	„ „ „	0,000 016 94
„ Kohlensäure . .	0,000 005 68	„ „ „	0,000 006 04.

Rechnen wir nach dem von Stefan mit Zugrundelegung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeit erhaltenen Formel, so wird die mittlere Wegelänge

für Luft . . . . .	0,000 007 70	aus der Reibung	0,000 009 77
„ Wasserstoff . .	0,000 011 34	„ „ „	0,000 018 49
„ Kohlensäure . .	0,000 006 32	„ „ „	0,000 006 71.

Nach der ersten Formel stimmen die Wegelängen für H und CO<sub>2</sub> recht gut, für Luft wird sie viel zu klein, nach der zweiten Formel weichen die für Luft und Wasserstoff gefundenen Werte erheblich ab.

Die mit den aus der Reibung sich ergebenden Wegelängen berechneten Diffusionskoeffizienten sind oben neben den beobachteten angegeben, die nach beiden Formeln berechneten Diffusionskoeffizienten weichen nahezu gleichviel von den beobachteten ab. Man würde, wenn man die aus der Reibung abgeleiteten Wegelängen als die wahrscheinlicheren annehmen wollte, zwischen den beiden Diffusionsformeln nicht entscheiden können. Gleiches ergibt sich, wenn man mit den aus den Reibungskoeffizienten sich ergebenden Wegelängen die Diffusionskoeffizienten für Wasserdampf in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure berechnet und mit der von Winkelmann beobachteten vergleicht. Winkelmann hat bei 16°, 19°, 22° beobachtet, wir reduzieren mit seinen Temperaturkoeffizienten auf 15°, da die Reibungskoeffizienten nahe bei 15° beobachtet sind und wir für diese bzw. die Wegelängen die Korrektur wegen der Temperatur so nicht anbringen müssen.

Die Diffusionskoeffizienten sind

		beobachtet	berechnet I	berechnet II
Wasserdampf — Luft . . . . .		0,2377	0,2235	0,2472
„ Wasserstoff . .		0,8230	0,6980	0,7625
„ Kohlensäure . .		0,1514	0,1639	0,1542.

Rechnung liefert den Koeffizienten für Wasserdampf — Wasserstoff mit der Annahme von Clausius I als jener von Maxwell II erkleiner, wobei indes bemerkt werden mag, daß die frühern Beobachtung Winkelmanns für Wasserdampf — Wasserstoff den Wert 0,802

an die Reibung und Diffusion auch nicht zu den gleichen Werten gelangen führen, so kommen sich doch die Werte so nahe, daß diesen Resultaten eine Bestätigung der kinetischen Gastheorie finden. Es ist auch zu beachten, daß Stefans Anschauung des Diffusionsvorgangs als einer durch den Widerstand gehinderten Strömung der Gase die einzig mögliche ist. Wir erwähnten schon vorher die Ableitung des Diffusionskoeffizienten von O. E. Meyer, welcher die Diffusion lediglich Folge der molekularen Bewegungen der Gase ansieht, aber in ihrer Form noch nicht genügen kann, weil sie zu einem von dem Verhältnisse der Gasmengen abhängigen Diffusionskoeffizienten führt. Vielleicht kann dieselbe noch modifizieren, so daß sie zu einer Gleichung führt, die Reibung und Diffusion noch mehr in Übereinstimmung bringt, als schon der Fall ist.

Bestimmung der absoluten Werte der mittleren Wegelängen, wie wir sie aus den Reibungskoeffizienten abgeleitetes dazu verwenden, so weiter in den Stand einen ungefähren Wert für die Radien der Molekülsphären zu erhalten, und zwar bieten sich dazu wiederum zwei Wege. Der erste benutzt dazu die nach den Entwicklungen von van der Waals § 103, mitgeteilte theoretische Bedeutung der Größe  $b$ , welche in der Gleichung vorkommt. Dieselbe ist das von der Wirkungsebene in dem Raume  $V$  unter dem Drucke  $p$  vorhandenen Moleküle te Volumen, somit wenn wir die Volumeinheit Gas unter dem Drucke  $p$  voraussetzen und wie immer die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle mit  $n$  bezeichnen,

$$b = n \frac{4}{3} \rho^3 \pi.$$

die Wegelängen  $l$ , ausgedrückt durch den Radius der Wirkungsebene, so erhalten wir § 103

$$\frac{l}{\rho} = \frac{V - N \frac{4}{3} \rho^3 \pi}{N \frac{4}{3} \rho^3 \pi} = \frac{1 - n \frac{4}{3} \rho^3 \pi}{n \frac{4}{3} \rho^3 \pi} = \frac{1 - b}{b}.$$

$$\rho = l \frac{b}{1 - b}.$$

§ 103 erhielten wir für Stickstoff als Wert von  $b = 0,002325$ , welcher, wie wir sahen, auch die Amagatschen Beobachtungen bis Quecksilber gut wieder gab. Als Druck  $p$  ist hier jener von 1<sup>mm</sup> angenommen; unsere Wegelängen beziehen sich dagegen auf 0,76<sup>mm</sup> Quecksilber. Da die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit Drucke proportional ist, so enthält dieselbe unter Atmosphärendruck 0,76 derjenigen, welche sie unter dem Drucke von 1<sup>mm</sup> enthält. Der ihnen ausgefüllte Raum ist daher

$$b = 0,76 \cdot 0,002325 = 0,001767.$$

Damit wird für Stickstoff

$$\varrho = l \cdot \frac{0,001\,767}{1 - 0,001\,767} = \frac{l}{564}.$$

Die mittlere Wegelänge würde somit bei Stickstoff, wenn derselbe unter dem Drucke einer Atmosphäre steht, gleich dem 564fachen des Radius der Wirkungssphäre sein. Für  $\varrho$  erhalten wir daraus in Millimetern

$$\varrho = \frac{0,000\,0892}{564} = 0,000\,000\,158,$$

also etwa anderthalb Zehnmillionstel eines Millimeters.

Mit diesem Werte erhalten wir die Zahl  $n$  der in einem Kubikmillimeter unter dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen Stickstoffmoleküle aus der Gleichung für  $b$

$$n = \frac{b}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi} = \frac{0,001\,767}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi},$$

da, wenn wir  $\varrho$  in Millimetern angeben,  $b$  der von dem Volumen der Wirkungssphäre der in einem Kubikmillimeter vorhandenen Moleküle eingenommene Raum ist. Mit dem oben erhaltenen Werte für  $\varrho$  wird

$$n = 1070 \cdot 10^{14},$$

oder im Kubikmillimeter Stickstoff, wenn derselbe unter dem Drucke einer Atmosphäre steht, befinden sich 107 000 Billionen Moleküle.

Einen zweiten, zuerst von Loschmidt benutzten Weg bietet uns die Vergleichung des Volumens der Gase, welche durch Druck flüssig gemacht werden können, mit dem Volumen der aus ihnen entstandenen Flüssigkeit. Wir können zu diesem Zwecke die Kohlensäure benutzen, deren spezifisches Gewicht in flüssiger Form wir § 112 zu 0,947 bei der Temperatur des schmelzenden Eises angaben.

Bei derselben Temperatur ist das Gewicht von 1 Kubikmillimeter gasförmiger Kohlensäure unter dem Druck einer Atmosphäre, da das spezifische Gewicht derselben, bezogen auf Luft, gleich 1,529 ist und 1 Kubikmillimeter Luft unter denselben Verhältnissen 0,001 293 Milligramm wiegt,

$$0,001\,293 \cdot 1,529 = 0,001\,977.$$

Das Volumen dieser Kohlensäuremenge in flüssiger Form ist in Kubikmillimetern

$$\frac{0,001\,977}{0,947} = 0,002\,08.$$

Im flüssigen Zustande sind die Moleküle einander so nahe, daß, wie die geringe Kompressibilität zeigt, dieselben überhaupt nur wenig mehr einander genähert werden können. Wir werden daher nur wenig von der Wahrheit abweichen, wenn wir annehmen, daß die Moleküle einander so weit genähert sind, wie sie es im Gaszustande im Augenblicke des Stoßes sind. Dann würde also der Abstand der Mittelpunkte der Moleküle gleich dem Radius der Wirkungssphären sein. Man würde sich etwa die Moleküle selbst als Kugeln denken können, deren Durchmesser gleich dem Radius der Wirkungssphäre wäre, und daß diese Kugeln sich zur Berührung mit einander nähern könnten, denn in dem Falle wäre der Abstand ihrer Mittelpunkte gleich

a Durchmesser der Moleküle. Die von uns bisher allein in Betracht gezogenen Wirkungssphären entsprächen dann dem Achtfachen des von dem Molekül selbst ausgefüllten Raumes.

Wir erhalten aus dem von der flüssigen Kohlensäure in Anspruch genommenen Raume den von den Wirkungssphären ausgefüllten in folgender Weise. Denken wir um jedes der im flüssigen Zustande sich berührenden Moleküle einen Würfel gelegt, dessen Seite gleich dem Durchmesser des Moleküls ist, so füllen diese Würfel den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum aus. Der von den Molekülen wirklich ausgefüllte Raum verhält sich somit zu den von der Flüssigkeit ausgefüllten, wie das Volumen einer Kugel zu dem des umschriebenen Würfels, er ist somit  $\frac{1}{8}\pi$  des ganzen Raumes. Da nun die Wirkungssphären den achtfachen Raum der Moleküle einnehmen, ist derselbe  $\frac{1}{8}\pi$  des von der Flüssigkeit ausgefüllten, somit

$$b = \frac{1}{8}\pi \cdot 0,00208 = 0,000869,$$

und dann

$$\rho = l \cdot \frac{b}{1-b} = \frac{l}{114} = \frac{0,0000604}{114} = 0,00000053,$$

wir als  $l$  den aus der Reibung sich ergebenden Wert der mittlern Wegelänge einsetzen.

Der Radius der Wirkungssphäre wäre also etwas mehr als dreimal größer als bei Stickstoff. Für die Molekülzahl  $n$  ergibt sich dann

$$n = 139,4 \cdot 10^{14}.$$

Die Annahme, daß die Moleküle, dieselben als Kugeln gedacht, sich mittelbar berühren, ist keinesfalls ganz richtig, und damit wird  $b$  und mit  $\rho$  etwas zu groß und  $n$  zu klein. Nach dem Avogadro'schen Satze müßte dieses  $n$  dem für Stickstoff gefundenen gleich sein, letzteres ist aber nur das siebenfache. Indes, wenn wir beachten, aus welchen verschiedenen Erfahrungen wir die beiden Zahlen abgeleitet haben, und daß weder für den Stickstoff aus den Regnault'schen Beobachtungen abgeleitete Werte  $b$  vollkommen genau, noch daß der für die Kohlensäure berechnete Wert ganz richtig ist, weiter, daß die Werte der mittleren Wegelängen dieselbe Unsicherheit enthalten, welche die experimentell bestimmten Reibungskoeffizienten haben, so müssen wir die Übereinstimmung der Werte von  $n$  für eine ganz außerordentlich nahe halten und darin einen neuen Beweis erblicken, wie vortrefflich die dynamische Gastheorie die verschiedensten bei den Gasen beobachteten Erscheinungen aus der einfachen Grundhypothese abzuleiten vermag. Würden wir annehmen, daß im flüssigen Zustande der Abstand der Schwerpunkte der Moleküle nur das 1,5fache

Radius der Wirkungssphäre wäre, so würde der für Kohlensäure berechnete Wert von  $n$  schon auf mehr als das Zehnfache steigen. Überhaupt läßt sich ja bei diesen Berechnungen nicht mehr erwarten, als daß in den schließlichen Resultaten nur ein ungefähres Bild der äußersten Dimensionen und der sehr großen Zahl der Moleküle erhalten, wir können die für Stickstoff und Kohlensäure berechneten Werte von  $n$  als obere und untere Grenze ansehen, zwischen denen die Zahl der Moleküle eingeschlossen ist.



## § 122.

**Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen.** Trennt man zwei Gase durch eine poröse Scheidewand, z. B. durch eine poröse Tonplatte oder durch ein Gipsdiaphragma, dessen Poren so enge sind, daß infolge selbst bedeutender Drucke die Gase nur mit geringer Geschwindigkeit hindurchfließen, so zeigt sich, daß auch durch solche Scheidewände hindurch die Gase sich mit großer Geschwindigkeit mischen. Sorgt man dafür, daß der Druck auf beiden Seiten der Scheidewand während der ganzen Dauer des Versuches genau gleich ist, so sieht man, daß die in entgegengesetzter Richtung durch die Scheidewand hindurchtretenden Gasvolumina keineswegs gleich sind, daß also die chemisch verschiedenen Gase die Scheidewand mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchdringen.

Die ersten genauern Versuche über die Diffusion der Gase durch trockene poröse Scheidewände rühren von Graham<sup>1)</sup> her. Derselbe ließ verschiedene Gase, die er in Röhren, welche mit einem trockenen Gipspfropf verschlossen waren, über Quecksilber absperrte, in atmosphärische Luft diffundieren, und fand, daß das gegen Luft unter konstantem Drucke ausgetauschte Gasvolumen nahezu der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Gase umgekehrt proportional war. So verhält sich z. B. die Dichtigkeit der Luft zu der des Wasserstoffs wie

$$1,000 : 0,069\,26,$$

oder wie

$$14,43 : 1;$$

für 1 Volumen Luft, welches in die Diffusionsröhre durch den Gipspfropf eingetreten war, traten nun 3,1 Volumina Wasserstoff aus; die Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten der Luft und des Wasserstoffes verhalten sich aber wie 3,8 : 1; man sieht, daß die ausgetauschten Gasmengen nahezu im umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten stehen.

Da die sich austauschenden Gasmengen diejenigen sind, welche in gleichen Zeiten durch die Scheidewand hindurchtreten, so messen sie zugleich die Geschwindigkeiten, mit denen die verschiedenen Gase durch die Scheidewand hindurchfließen.

Vorhin sahen wir, daß die Ausflußgeschwindigkeiten verschiedener Gase aus Öffnungen in dünner Wand unter gleichem Drucke den Quadratwurzeln aus ihren Dichtigkeiten umgekehrt proportional sind. Die Diffusionsgeschwindigkeiten verhalten sich also nahezu wie die Ausflußgeschwindigkeiten aus dünner Wand.

Graham nahm nun an, daß die Diffusionsgeschwindigkeiten mit den Ausflußgeschwindigkeiten genau übereinstimmen, und gründete darauf eine Erklärung der Diffusionserscheinungen. Nach dieser verbreitet sich ein Gas in ein anderes gerade so wie in den leeren Raum und die Bewegung erfolgt mit derselben Geschwindigkeit. Die Poren der Tonplatte sieht man dann an als Öffnungen in dünner Wand und dann folgt unmittelbar, daß die ausgetauschten Gasmengen sich verhalten müssen wie die reziproken Werte aus den Quadratwurzeln der Dichtigkeiten.

1) *Thomas Graham*, Poggend. Ann 17. p. 341. 1829; 28. p. 331. 1833.

Bunsen<sup>1)</sup> machte jedoch später darauf aufmerksam, daß die Erklärung nicht zulässig sei, da nur bei Anwendung von Öffnungen in dünner Wand Ausflußgeschwindigkeiten in dem erwähnten Verhältnisse stehen, nicht aber bei der Anwendung enger und besonders kapillarer Röhren. Wenn auch bei der Anwendung poröser Diaphragmen die Gesetze des Ausflusses nicht einfach diejenigen der Transpiration durch lange kapillare Röhren sein werden, so ist es doch wahrscheinlich, daß die Gase durch poröse Diaphragmen nicht wie aus Öffnungen in dünner Wand fließen.

Letzteres hat Bunsen dann zunächst nachgewiesen: eine mit einem Gipspfropf versehene und kalibrierte Glasröhre wurde oben mit einem Gipspfropf, der bei 60° getrocknet war, geschlossen, mit Quecksilber gefüllt, und dann mit dem Gipspfropf nach oben in ein tiefes Quecksilbergefäß eingetaucht. Dann wurde das obere durch den Gipspfropf geschlossene Ende der Röhre mit einem Raume in Verbindung gesetzt, der mit den verschiedenen Gasen unter dem während des ganzen Versuches konstant erhaltenen Druck einer Atmosphäre gefüllt werden konnte. Wurde das Rohr allmählich aus dem Quecksilber herausgezogen, so strömte durch das Diaphragma das Gas in die Röhre. War dann der Druck in der Röhre nur wenig mehr von dem Drucke einer Atmosphäre verschieden, so hielt man durch langsames Heben der Röhre den Druck des Gases eine Zeitlang im Innern der Röhre konstant, und beobachtete die Zeit, welche erforderlich war, daß eine bestimmte Menge Gas durch das Diaphragma in die Röhre einströmte.

Dabei ergab sich, daß die Einströmungsgeschwindigkeit, das ist die Menge Gas, die unter demselben Drucke von 1<sup>m</sup> in der Zeit 1<sup>''</sup> einströmende Gasmenge der Differenz der an beiden Seiten des porösen Diaphragmas vorhandenen Drucke bei den einzelnen Gasen proportional war, und daß die Einströmungsgeschwindigkeit verschiedener Gase keineswegs in dem reziproken Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichten steht. So erhielt Bunsen unter andern folgende Werte:

Sauerstoff			
Einströmungsgeschwindigkeit $V_1$ . . . . .	0,09187	0,1977	0,3058
Druckdifferenz $p$ in M. Quecksilber . . . . .	0,0167	0,0335	0,0520
$\frac{V_1}{p}$ . . . . .	5,893	5,901	5,881
Wasserstoff			
Einströmungsgeschwindigkeit $V_1$ . . . . .	0,2665	0,5369	0,8431
Druckdifferenz $p$ in M. Quecksilber . . . . .	0,0167	0,0338	0,0520
$\frac{V_1}{p}$ . . . . .	15,96	15,89	16,21

Während also die Druckdifferenzen von 16,7<sup>mm</sup> bis 52<sup>mm</sup> Quecksilber betragen, zeigen sich die Einströmungsgeschwindigkeiten den Drucken scharf proportional.

Das Verhältniß der Geschwindigkeiten für Wasserstoff und Sauerstoff ist im Mittel 1 : 2,71, während das Verhältniß der reziproken Quadratwurzeln der Dichten 1 : 3,995 ist.

1 Bunsen, Gasometrische Methoden Braunschweig 1857

Das Verhalten der durch Diaphragmen strömenden Gase kommt also mit dem durch kapillare Röhren strömenden Gase überein, und das Verhältnis der von Bunsen beobachteten Einströmungsgeschwindigkeiten weicht auch nicht sehr von dem Verhältnis der reziproken Werte der Reibungskoeffizienten ab, wie sie sich im § 118 aus Meyers Beobachtungen der Transpirationszeiten, 1:2, ergaben.

Wollte man nun im übrigen die Grahamsche Theorie beibehalten, also die Diffusion der Gase einfach als eine Strömung durch kapillare Röhren ansehen, weil ein Gas ein anderes nicht in einem bestimmten Raume absperren kann, so müßten sich die Diffusionsgeschwindigkeiten nahe wie die Ausströmungsgeschwindigkeiten durch kapillare Röhren verhalten, das ist aber nach den vorhin angegebenen Zahlen Grahams, welche Bunsen bestätigt fand, nicht der Fall. Bunsen fand das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeiten Luft zu Wasserstoff wie 1:3,34, Sauerstoff zu Wasserstoff wie 1:3,345, Zahlen, welche dem Verhältnis der reziproken Werte der Quadratwurzeln aus den Dichten näher kommen als dem Verhältnis der vorher bestimmten Einströmungsgeschwindigkeiten.

Außerdem nimmt Bunsen an, daß die Verhältnisse der Diffusionsgeschwindigkeiten von der Natur des Diaphragmas abhängig sind, wodurch eine weitere Abweichung von den einfachen Strömungserscheinungen der Gase bedingt wäre.

Eine ausführlichere Theorie dieser Diffusionserscheinungen ist später von Stefan<sup>1)</sup> gegeben worden, in welcher er einen wohl zuerst von Maxwell<sup>2)</sup> ausgesprochenen Gedanken ausführt, nach welchem man diese Diffusion als einen Spezialfall der in den Paragraphen 119 und 120 betrachteten Diffusion ansehen kann. Stefan untersucht zunächst die Diffusion der Gase, denen ein drittes Gas gleichförmig beigemischt ist, also etwa die Diffusion von Wasserstoff und Sauerstoff, denen beiden Kohlendioxid beigemischt ist. Man kann dann die Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen als eine solche ansehen, wobei indes die Moleküle des dritten Gases nicht beweglich, sondern fest sind. Ein weiteres Eingehen in die Theorie würde uns zu weit führen, wir verweisen auf die Abhandlung von Stefan.

Anders als solche poröse Diaphragmen verhalten sich Kolloide, wie Kautschuk oder flüssige Lamellen, wenn sie Räume voneinander trennen, welche mit einem an den beiden Seiten der Membran verschieden dichten oder auch verschiedenen Gasen angefüllt sind.<sup>3)</sup> Das Eindringen eines Gases in eine dasselbe begrenzende Flüssigkeit erfolgt zunächst durch Absorption des Gases in der Flüssigkeit. Die Menge des absorbierten Gases ist gemäß dem Henry-Daltonschen Gesetze dem Drucke bzw. der Partialität des Gases proportional. Aus der oberflächlichen Schicht verteilt sich allmählich mit Gas sättigt, diffundiert das Gas in die Flüssigkeit gerade so wie in einer Lösung das Salz aus der konzentrierteren in die weniger konzentrierte Lösung hineindiffundiert.

Man erkennt ohne weiteres, daß für die Diffusion des Gases die gleiche

1) Stefan, Wiener Berichte 68. 1871

2) Maxwell, Phil. mag. 20 (4) 1860.

3) Über die Diffusion durch Kolloide sehe man Graham, Poggend. Ann. 129 p. 549 1866; von Wroblewski, Poggend. Ann. 154 p. 539 1876, Wiener Ann. 8. p. 29. 1879.

Gesetze gelten müssen, wie wir sie § 85 für die Salze fanden. Es entwickelt sich ein Dichtigkeitsgefälle und die in gleichen Zeiten durch die Flächeneinheit wandernde Gasmenge ist dem Dichtigkeitsgefälle proportional. Befindet sich an der andern Seite der das Gas begrenzenden Flüssigkeitsschicht kein Gas oder Gas von geringerer Dichtigkeit, so wird die Grenzschicht an dieser Seite nach dem Henryschen Gesetz weniger mit Gas gesättigt sein, es entsteht deshalb auch dann ein Gefälle der Gasdichte in der Flüssigkeit. Wird das Gas auf beiden Seiten auf konstanter Dichtigkeit gehalten, so entwickelt sich ein stationärer Zustand, indem in den beiden Grenzflächen der Flüssigkeitsschicht eine konstante Gasdichte entsteht, welche dem auf der betreffenden Seite vorhandenen Gasdrucke, entsprechend dem Henry-Dalton'schen Gesetze, proportional ist. Nehmen wir an auf der einen Seite sei gar kein Gas vorhanden, auf der andern Seite das Gas unter dem Drucke der Atmosphäre, es sei  $a$  der Absorptionskoeffizient des Gases und  $l$  die Dicke der Schicht, so ist das Absorptionsgefälle gleich  $\frac{a}{l}$ , und wir erhalten für das in der Zeiteinheit durch die Fläche  $q$  strömende auf normalen Druck reduzierte Gasvolumen  $v$

$$v = k \frac{a}{l} q.$$

Die Proportionalitätskonstante  $k$  ist die Menge Gas, welche für das Gefälle  $\frac{a}{l} = 1$  in der Zeit eins durch die Fläche  $q = 1$  hindurchgeht, sie ist das Maß der Diffusionsgeschwindigkeit.

Wir sehen, daß sich für die Diffusionsgeschwindigkeit derselbe Ausdruck ergibt wie für Salze bei Anwendung der Beobachtungsmethode von Fick.

Ebenso wie in diesem Falle gelten auch bei anderer Anordnung des Versuches die in § 85 mitgeteilten Gleichungen für die Diffusion, wie Stefan<sup>1)</sup> nachgewiesen hat.

Um den Diffusionskoeffizienten der Kohlensäure in Wasser unter Anwendung des stationären Zustandes zu bestimmen, füllte Stefan eine etwa 1 m weite Glasröhre mit Kohlensäure und schloß dieselbe an beiden Enden. Es wurde dann das eine Ende unter Wasser gebracht, und die Röhre unter Wasser geöffnet. War der Druck der Kohlensäure etwas kleiner als der zeitige Atmosphärendruck, so trat eine Wassersäule in die Röhre. War eine solche von passender Länge hergestellt, so wurde die Röhre aus dem Wasser herausgezogen und sich selbst überlassen. Die Kohlensäure diffundierte durch das Wasser, da sie oben entsprechend dem Drucke des Gases absorbiert wurde, unten dagegen in der Grenzschicht wegen der schnellen Diffusion der Kohlensäure in der freien Luft die Dichtigkeit null ist. Den Austritt des Gases durch die Flüssigkeit erkannte man dadurch, daß der Flüssigkeitsfaden in der Röhre vorrückte, und man erkannte so, daß nach hinreichend langer Zeit in der Tat in gleichen Zeiten das gleiche Volumen Gas durch die Wasserschicht hindurch diffundierte. Indem wir des weiteren auf die Arbeit von Stefan verweisen, bemerken wir nur, daß er als

1) Stefan, Berichte der Wiener Akad 77 II p 371. 1878

Diffusionskoeffizienten der Kohlensäure in Wasser, in Zentimeter und Tag als Einheit der Länge und der Zeit, 1,38 fand.

In anderer Weise hat Exner<sup>1)</sup> die Diffusionskoeffizienten einer größeren Anzahl von Gasen durch Seifenlösung miteinander verglichen; er wandte Seifenlamellen an. Durch Eintauchen des einen Endes eines Glasrohres in Seifenlösung wurde dasselbe mit einer Seifenlamelle überzogen, die Lamelle durch Saugen an dem andern Ende des Rohres an eine passende Stelle gebracht und darauf dieses Ende geschlossen; der durch die Lamelle abgegrenzte Teil des Rohres war demnach mit Luft gefüllt. Auf die andere Seite der Lamelle wurde das Gas gebracht. Das Gas diffundierte dann durch die Seifenlamelle gegen Luft, ersteres in den durch die Lamelle abgeschlossenen Raum, letztere in die freie Luft. Ist die Diffusionsgeschwindigkeit des durch die Lamelle austretenden Gases größer als die des durch die Lamelle von außen eindringenden Gases, so wird das Volumen des von der Lamelle abgeschlossenen Gases abnehmen; ist die Geschwindigkeit des eindringenden Gases die größere, so wird dasselbe wachsen, und diese Änderung in der Lage der Membran wird so lange fort dauern, bis auf beiden Seiten der Membran dasselbe Gas ist; ist das erreicht, so tritt eine weitere Verschiebung der Membran nicht ein.

Das bei Beginn des Versuches durch die Membran abgesperrte Volumen des einen Gases ist dann nach außen diffundiert, das am Ende von der Membran abgegrenzte Volumen des von außen kommenden Gases ist unter genau gleichen Verhältnissen von außen nach innen diffundiert. Das Verhältnis des End- und Anfangsvolumen ist demnach das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeit der beiden Gase.

Exner gelangte bei seinen Versuchen zu dem Resultate, daß die Diffusionsgeschwindigkeiten zweier Gase sich direkt verhalten wie die der Temperatur der diffundierenden Gase entsprechenden Absorptionskoeffizienten und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus den Dichtigkeiten.

Hiernach würden wir den vorher eingeführten Diffusionskoeffizienten  $k = \frac{K}{\sqrt{d}}$  zu setzen haben und unsere Gleichung für die in der Zeiteinheit diffundierte Gasmenge wird

$$v = \frac{K}{\sqrt{d}} \frac{a}{l} q.$$

Nennen wir die in der gleichen Zeit durch dieselbe Membran diffundierte Luftmenge  $v_1$ , den Absorptionskoeffizienten der Luft  $a_1$ , und die Dichtigkeit derselben  $d_1$ , so wird

$$v_1 = \frac{K}{\sqrt{d_1}} \frac{a_1}{l} q$$

und das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeiten des Gases und der Luft

$$\frac{v}{v_1} = \frac{a}{\sqrt{d} \cdot a_1} = \frac{a}{\sqrt{\delta} \cdot a_1},$$

wenn  $\delta$  die Dichte des Gases bezogen auf die Dichte der Luft gleich ein

1) Franz Exner, Poggend. Ann. 155. p. 321. 1875.



bedeutet. Setzen wir mit Exner den Absorptionskoeffizienten nach Bunsen unter der Voraussetzung, daß der Absorptionskoeffizient der Seifenblase der gleiche ist wie für Wasser, für etwa 17° C. gleich 0,017, so wird

$$\frac{r}{r_1} = 58,8 \frac{a}{\sqrt{d}}$$

die Gleichung, welche die Exnerschen Beobachtungen sehr gut darstellt.

Beziehen wir die Diffusionsgeschwindigkeiten auf jene der Kohlensäure gleich 1, so wird

$$\frac{r}{r_c} = 1,230 \frac{a}{\sqrt{d}}$$

Kennen wir die Diffusionsgeschwindigkeit der Kohlensäure, so kennen wir, soweit die Exnersche Regel gültig ist, die Diffusionsgeschwindigkeit der übrigen Gase nach der Gleichung

$$r = r_c \cdot 1,230 \frac{a}{\sqrt{d}}$$

Nach Stefan ist  $r_c$  gleich 1,38 zu setzen; somit

$$r = 1,697 \frac{a}{\sqrt{d}}$$

Die zu Grunde liegenden Einheiten sind Zentimeter und Tag.

Hufner<sup>1)</sup> hat zur Prüfung der Exnerschen Regel die Diffusion durch eine Wasserschicht von gemessener Dicke untersucht. Auf das gerade abgeschnittene Ende einer Röhre wurde eine Platte von Hydrophan gekittet, einem Mineral, welches mit Wasser in Berührung sich mit Wasser vollsaugt aber eine Wasserschicht von ziemlicher Dicke tragen kann, ohne daß es Wasser durch sie hindurch filtriert. Auf die Hydrophanplatte wurde eine zweite Röhre gekittet, so daß ihre Achse die Verlängerung der Achse der untern Röhre bildete. Auf die Hydrophanplatte wurde eine Wasserschicht von gemessener Dicke gebracht und die untere Röhre mit Gas unter dem Drucke der Atmosphäre gefüllt. Die Abnahme des Gasvolumens in der untern Röhre gab die Menge des diffundierten Gases an.

Für Kohlensäure, Sauerstoff, Stickstoff, Stickoxydul und Chlor fand die Exnersche Regel bestätigt, für Wasserstoff waren die gefundenen Werte schwankend, für Ammoniak waren die beobachteten Werte viel zu groß.

A. Hagenbach<sup>2)</sup> gab, um Strömungen zu vermeiden, dem Wasser durch Zusatz von Gelatine eine feste Form, wie es Voigtländer bei Untersuchung der Diffusion der Salze getan hatte (§ 85). Wie Voigtländer, so fand auch Hagenbach, daß sich die Gelatinelösung selbst bei konzentrierter Lösung in ihrem Verhalten vom Wasser nur wenig unterscheidet: die Absorptionskoeffizienten waren die gleichen. Mit einer solchen Gelatinelösung wurde eine Messingplatte von 1<sup>cm</sup> Dicke, welche mit etwa 1000 gleich großen Löchern versehen war, beschickt. Zu beiden Seiten der Platte waren Gefäße aufgekittet, die mit einem und demselben Gas aber unter

1 Hufner, Wiedem. Ann. 60 p. 134 1897.

2 A. Hagenbach, Wiedem. Ann. 65. p. 673. 1898.

so daß wir dieselbe setzen können  $m = \mu ds$ . Setzen wir diesen bigen Ausdruck ein, so erhalten wir für die zur Überwindung standes erforderliche Kraft  $\mu \frac{ds^2}{dt^2}$  oder  $\mu v^2$ . Infolge des Luftes ist es gerade so, als wenn an dem Körper eine seiner augen-Bewegungsrichtung entgegengesetzte, dem Quadrat seiner Geschwin- proportionale Kraft angriffe. Daraus folgt aber, daß sein Verlust indigkeit in jedem Augenblicke dem Quadrate der Geschwindig- rtional ist.

s Newtonsche Widerstandsgesetz schließt sich jedoch der Er- cht genau an, dieselbe zeigt vielmehr, daß das Widerstandsgesetz iedene Geschwindigkeiten selbst verschieden ist. Ein Umstand · Ableitung jenes Gesetzes auch ganz außer acht gelassen, näm- eibung der Luft, wodurch, wie wir im § 117 sahen, selbst die solcher Körper verzögert wird, welche keine Luft aus der Stelle , wie etwa um eine vertikale Achse rotierende oder schwingende · Kreisscheiben. Dieser Widerstand ist der Geschwindigkeit der direkt proportional. Wir müssen deshalb den Widerstand der nur dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers, ch der ersten Potenz derselben proportional setzen. Ja letzteres ogar bei langsamen Bewegungen, wie Pendelschwingungen, das ide. Für sehr rasche Bewegungen nimmt der Widerstand in einem iern Verhältnisse zu, als das Quadrat der Geschwindigkeit. Der on ist der, daß bei jeder Bewegung vor dem bewegten Körper chtung der Luft entsteht. Bei langsamer Bewegung gleicht sich ichtung, da sie sich rasch auf die entfernteren Luftschichten bald aus, so daß der Körper bei seinem Vorschreiten die Luft ler in der gewöhnlichen Dichtigkeit vorfindet; bei rascheren Be- ist das nicht der Fall, da findet die Ausweichung der Luftteil- so rasch statt, so daß vor den bewegten Körpern eine Schicht r Luft sich befindet. Hinter denselben dagegen ist die Luft ver- in bei sehr rascher Bewegung kann die Luft nicht rasch genug her von dem Körper eingenommenen Raum eindringen, um dort, hdem der Körper sich fortbewegt hat, die normale Dichtigkeit zustellen. Es tritt also zu der vorhin betrachteten Ursache eines igkeitsverlustes bei sehr raschen Bewegungen noch die hinzu, daß r in der seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung einen stär- ck erfährt als in der Richtung derselben.

r von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers hängt der Wider- Luft auch wesentlich ab von der Gestalt desselben, besonders Flächeninhalt des auf der Bewegungsrichtung senkrechten Quer- les Körpers, denn mit diesem ändert sich in obigem Ausdruck zient  $\mu$ . Je größer dieser Querschnitt ist, eine um so größer- muß der Körper aus der Stelle drängen. Es ist unmittelbar er- laß diese zu verdrängende Luftmenge und damit der von dieser Widerstand der Luft der Größe dieses Querschnittes proportional dem übersieht man leicht, daß bei gleichem Querschnitt der Wider- 1 von der Gestalt abhängt, daß also ein vorn keilförmig zuge- Körper einen kleineren Widerstand findet als ein vorn flacher.



Bei gleicher Gestalt und gleicher Geschwindigkeit zweier bewegter Körper mit verschiedener Masse erfährt der Körper kleinerer Masse eine stärkere Verzögerung als der Körper mit größerer Masse, weil er bei kleinerer lebendiger Kraft denselben Widerstand zu überwinden hat. Daraus folgt unmittelbar, daß bei dem freien Fall in der Luft leichte Körper langsamer fallen müssen als schwere, so daß wir in dem Widerstande der Luft neben dem früher erwähnten Gewichtsverluste der Körper in der Luft den Grund der beobachteten Abweichung vom Fallgesetz erkennen.

### § 124.

**Kinetische Theorie der Flüssigkeiten; endosmotischer Druck; Diffusion.** Wenn wir auch erst in der Wärmelehre imstande sind den Übergang von dem gasförmigen Zustande einer Materie in die flüssige Form und den umgekehrten Vorgang näher zu verfolgen, so wollen wir doch am Schlusse dieses Abschnittes schon kurz die kinetische Theorie der Flüssigkeiten erwähnen, auf welche van der Waals<sup>1)</sup> in konsequenter Durchführung seiner § 103 mitgetheilten Anschauungen gelangt ist. Wir haben damals die Zustandsgleichung von van der Waals kennen gelernt

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R,$$

worin  $p$  der Druck auf die Wandfläche des das Gas enthaltenden Gefäßes,  $a$  die molekulare zwischen den Gasmolekülen vorhandene Anziehung,  $v$  das von dem Gase eingenommene Volumen,  $b$  den von der Wirkungssphäre der Moleküle eingenommenen Raum und  $R$  eine Konstante bedeutet, wenn das Gas eine konstante Temperatur hat. Aus der Form der Gleichung erkennt man, daß  $a$  die in denselben Druckeinheiten wie  $p$  gemessene Druckverminderung an den Gefäßwänden, und zwar für die Flächeneinheit bedeutet gegenüber dem Drucke im Innern des Gases, wenn das Volumen des Gases bei der Druckeinheit die Einheit des Volumens ausfüllt. Wenn wir demnach für Stickstoff die Gleichung fanden

$$\left(p + \frac{0,003\,03}{v^2}\right)(v - b) = 1,000\,697,$$

wo die Druckeinheit 1<sup>m</sup> Quecksilber war, so heißt das, die molekulare Anziehung vermindert den von dem Stickstoff auf die Wandfläche ausgeübten Druck um 0,003 03<sup>m</sup> Quecksilber, wenn wir ein Gefäß mit Stickstoff unter dem Drucke von 1<sup>m</sup> Quecksilber angefüllt haben, oder im Innern des mit Stickstoff angefüllten Raumes erfährt jedes Flächenstück nach allen Richtungen des Raumes den Druck 1,003 03<sup>m</sup> Quecksilber.

Wie wir weiter erwähnten, lassen sich eine Reihe von Gasen bei gewöhnlicher Temperatur lediglich durch Druck in die flüssige Form bringen, und van der Waals gelangt zu dem Schlusse, daß dieselbe Gleichung allerdings mit einem etwas kleinern Werte für  $b$ , wie wenn die Wirkungssphären kleiner geworden wären, wie er für größere Volumen gilt, auf

1) Van der Waals, Over de continuïteit van den Gas en Vloeistofftoestand Leiden 1873; übersetzt von Roth, Leipzig 1881.

die flüssige Form der Körper ihre Gültigkeit bewahre. Er liefert einen experimentellen Beweis für die Richtigkeit seines Schlusses, indem er seine Gleichung an Beobachtungen von Andrews prüfte. Andrews hat die zusammengehörigen Drucke und Volume der Kohlensäure bis zum flüssigen Zustande, und auch die Kompression der Kohlensäure im flüssigen Zustande verfolgt. Wir besprechen diese Versuche ausführlich in der Wärmelehre; hier bemerken wir nur folgendes. Aus den auch von uns angegebenen Versuchen Regnaults erhält van der Waals für Kohlensäure, wenn der Druck in Atmosphären gemessen wird, das Volumen des dem Versuche unterworfenen Quantums Kohlensäure, somit unter dem Druck der Atmosphäre gleich eins gesetzt wird, die Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{0,00874}{v^2}\right)(v - 0,0023) = 1,0547$$

wenn die Temperatur der Kohlensäure gleich  $13^\circ$  ist.

Die Versuche von Andrews ergaben, so lange das Volumen der Kohlensäure bei einer Temperatur von  $13^\circ$  größer als 0,01 war, für  $b$  den Wert 0,0024. Bei einem Drucke von 49 Atmosphären wurde die Kohlensäure flüssig und das Volumen der flüssigen Kohlensäure war 0,0022647. Setzte man in obige Gleichung für  $b$  den Wert 0,001663, so stellte dieselbe auch für die flüssige Kohlensäure die zusammengehörigen Drucke und Volumes dar. Bei einer Drucksteigerung auf 54,5 Atmosphären war das Volumen auf 0,0020527 zurückgegangen. Wird in obiger Gleichung  $b = 0,001565$  gesetzt, so wird dieselbe durch diese Werte von  $p$  und  $v$  erfüllt.

Daß diese Verkleinerung nicht dem Übergange in den flüssigen Zustand zuzuschreiben ist, sondern nur der Verkleinerung des Volumens der Kohlensäure, zeigte van der Waals an den Versuchen von Andrews bei  $5,65^\circ$ . Bei dieser Temperatur wird die Kohlensäure nicht flüssig. Während ihr Volume größer als 0,00496 die zusammengehörigen Drucke und Volumes durch obige Gleichung mit  $b = 0,0025$  dargestellt wurden, sank mit Abnahme des Volumens auf 0,002629 der Wert von  $b$  auf 0,001798, ein Wert, der nur wenig größer ist als der für die eben flüssig gewordene Kohlensäure erhaltene, deren Volumen um nahezu  $\frac{1}{2}$  kleiner ist als das Volumen 0,002629.

Wenn sich so durch eine und dieselbe Gleichung, welche wir aus der kinetischen Gastheorie abgeleitet haben, das Verhalten eines Körpers im gasförmigen und flüssigen Zustande darstellen läßt, so liegt der Schluß nahe, daß auch im flüssigen Zustande die Moleküle Bewegungen vollführen wie im Gaszustande, wobei wegen der großen Dichte des flüssigen Zustandes die mittlern Wegelängen nur erheblich kleiner sind als im Gaszustande, die Bewegung wird eine in kleinen Amplituden schwingende. Es besteht hiernach durchaus kein qualitativer Unterschied zwischen dem gasförmigen und dem flüssigen Zustande, und damit auch kein Grund, daß die Bewegung der Moleküle im Innern der Flüssigkeiten eine andere sei als in den Gasen.

Der Übergang aus dem gasförmigen Zustande in den flüssigen ist ein stetiger: ein Gas nimmt die flüssige Form an, wenn sein Volumen so klein geworden ist, daß die mit abnehmendem Volumen wachsende Anziehung

der Moleküle so groß wird, daß die an der Grenze aus dem Innern ankommenden Moleküle im allgemeinen die Grenze nicht oder nur mit geringer Geschwindigkeit passieren können. Die Kohlensäure wird bei einer Temperatur von  $13^{\circ},1$  flüssig, wenn der Druck 49 Atmosphären beträgt, das heißt in dieser Auffassung des flüssigen Zustandes, daß wenn wir der Kohlensäure das unter diesem Druck ihr zukommende kleinste Volumen gegeben haben, an der Grenze durch die molekulare Anziehung die molekulare Geschwindigkeit so weit vermindert wird, bezw. daß die Moleküle die Grenzfläche der flüssigen Kohlensäure nur in so geringer Zahl passieren können, daß in einem etwa über der flüssigen Kohlensäure vorhandenen Raum die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle nur einen äußern Druck von 49 Atmosphären ausüben kann. Unter der Grenzsicht ist die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle erheblich größer, und eben deshalb ist im Innern der flüssigen Masse der Druck ein erheblich höherer. Die Zahl der im Innern auf die Flächeneinheit kommenden Stöße ist erheblich größer, als die Zahl der die Grenzfläche umspannenden Moleküle, die Grenzfläche umspannt die eingeschlossenen Moleküle wie eine elastische Haut, welche nur einen geringen Teil der ankommenden Moleküle durchläßt. Wir können hier etwa an das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung zwischen den Molekülen denken, nur die Moleküle, deren Geschwindigkeit beim Eintritt in die Grenzschicht einen gewissen Wert übersteigt, werden durch die molekularen Anziehungen in der Grenze nicht auf die Geschwindigkeit Null gebracht, sie durchdringen dieselbe, während alle mit kleinerer Geschwindigkeit zurückkehren und erst durch die Stöße im Innern wieder eine größere Geschwindigkeit erhalten. Den größeren Druck im Innern können wir nicht wahrnehmen, da er nach allen Richtungen des Raumes gleich ist. Wir gaben vorhin an, daß die flüssige Kohlensäure unter dem Drucke von 49 Atmosphären in Form der Flüssigkeit 0,002 2647 des Volumens einnimmt, welchen dieselbe Kohlensäure unter dem Druck einer Atmosphäre einnimmt, der innere Druck ist deshalb

$$49 + \frac{0,008\ 74}{0,002\ 2647} = 1751 \text{ Atm.},$$

die in der Grenzfläche wirkenden molekularen Anziehungen vermindern den nach dem äußern Druck um 1702 Atmosphären.

Für Flüssigkeiten, welche ohne besondern äußern Druck, oder so wie wir in der Wärmelehre zeigen werden, unter dem geringen Drucke des Dampfes bei gewöhnlicher Temperatur ihre flüssige Form behalten, ist die molekulare Anziehung in der Grenzschicht so groß, daß fast alle Moleküle bei ihrer Bewegung gegen die Grenze die Geschwindigkeit Null bekommen, daß nur ganz wenige die Grenze passieren können. Wir werden auf die hierher gehörigen Fragen in der Wärmelehre näher eingehen.

Diese in der Grenze wirkende gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Anziehung liefert uns, wie van der Waals zuerst gezeigt hat<sup>1)</sup>, den in der ebenen Oberfläche einer Flüssigkeit wirksamen Normaldruck, also die Konstante  $K$  in unsern Gleichungen für die Erhaltung

1) Van der Waals, Over de continuïteit etc. Vorrede und Kap. IX. Leyden 1873.

der Kapillarität, welche, wie wir schon hervorhoben, sich in keiner Weise experimentell bestimmen läßt. da diese Größe in allen Gleichungen sich forthebt. Bei Kohlensäure, wenn dieselbe unter dem Drucke von 49 Atmosphären flüssig geworden ist, würde der Normaldruck in ebener Oberfläche demnach 1702 Atmosphären betragen. Man sieht, dieser Normaldruck hat eine Größe, gegen welche die Oberflächenspannung sehr klein ist, wie es schon La Place annahm.

Die Konstante  $K$  läßt sich nur durch die Kenntnis der Größe  $a$  der Gleichung von van der Waals oder einer ähnlichen für die Gase geltenden Zustandsgleichung ableiten: wie wir dieselbe erhalten, wenn wir die Flüssigkeit nicht in Gasform untersuchen können, werden wir in der Wärmelehre sehen.

Van't Hoff<sup>1)</sup> hat die kinetische Auffassung der Flüssigkeiten in sehr interessanter Weise für die Theorie der Lösungen verwertet, und ist dadurch zu einer eigentümlichen Deutung des endosmotischen Drucks gelangt, welche zu einer Reihe interessanter Folgerungen führt, von der wir hier nur die kinetische Theorie der Diffusion der Flüssigkeiten erwähnen, die von Nernst und Riecke spezieller durchgeführt ist.

Wird ein Körper in einem Lösungsmittel gelöst, so geht derselbe in die flüssige Form über, und seine Moleküle bewegen sich zwischen den Molekülen des Lösungsmittels gerade so wie in einem Gasgemische die Moleküle des einen Gases zwischen denen des andern, nur mit ganz erheblich kleinern Wegelängen. Zu dem innern Drucke, der von der Bewegung der Moleküle des Lösungsmittels herrührt, tritt dann der Druck der bewegten Salz-moleküle. Sind in der Volumeinheit  $N$  Moleküle des Lösungsmittels jedes von der Masse  $m_1$ ,  $n$  der gelösten Substanz mit der Masse  $m_2$ , und ist  $u_1$  die molekulare Geschwindigkeit der erstern,  $u_2$  jene der Moleküle der gelösten Substanz, so ist im Innern der gegen die Flächeneinheit, allerdings von beiden Seiten immer, wie wir auch die Flächeneinheit orientiert denken, gleiche Druck gegeben durch

$$\frac{1}{3} N m_1 u_1^2 + \frac{1}{3} n m_2 u_2^2.$$

Der äußere Druck wird aber durch den Normaldruck derartig vermindert, daß er nur einen kleinen Wert hat, derselbe rührt jetzt her von der Anziehung der Moleküle des Lösungsmittels aufeinander, der Anziehung der Moleküle der gelösten Substanz und der wechselseitigen Anziehung der verschiedenen Moleküle aufeinander.


Gerade wie bei einem Gasgemische der Partialdruck des einzelnen Gases nur von der Anzahl der demselben angehörigen Moleküle abhängt, nicht von der Natur des Gases, so muß auch in der Lösung der Partialdruck der gelösten Substanz der Anzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle proportional und von der Natur der Moleküle unabhängig sein. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die Molekülzahl der gelösten Substanz in der Lösung nicht der Zahl derselben außer der Lösung gleich sein braucht, es kann in der Lösung eine Dissoziation eintreten, das heißt das Molekül der gelösten Substanz kann zerfallen in seine Bestandteile, und jeder Bestandteil bewegt sich mit der ihm zukommenden Ge-

1. Van't Hoff, Zeitschr. für phys. Chemie. 1. p. 481 1887.

schwindigkeit. Da die Zahl der frei sich bewegenden Moleküle dadurch größer wird, muß eine solche Dissoziation eine Vermehrung des Druckes zur Folge haben. Das Verhalten ist bei den Gasen genau das gleiche; nehmen wir ein Volumen Wasserdampf etwa bei  $100^{\circ}$  unter dem Drucke einer Atmosphäre und zerlegen dasselbe, so wächst bei konstant erhaltenem Volumen der Druck auf 1,5 Atmosphäre, der Partialdruck des Wasserstoffs ist für sich eine Atmosphäre, der Partialdruck des Sauerstoffs eine halbe Atmosphäre. Eine solche mehr oder weniger weit gehende Dissoziation tritt bei den meisten Lösungen von Salzen in Wasser ein.

Wir kommen auf diese Dissoziation bei Besprechung der Zersetzungen durch den elektrischen Strom zurück, hier besprechen wir nur solche Lösungen, in denen keine Dissoziation vorhanden ist.

Diesen Druck der gelösten Substanzen erkannte van't Hoff in dem von Pfeffer untersuchten endosmotischen Druck. In der Tat verhalten sich zwei Gase, die durch eine einseitig durchgängige Membran voneinander getrennt sind, gerade wie zwei Flüssigkeiten bei der Endosmose, wie man direkt erkennen kann, wenn man in einer der Pfefferschen ganz entsprechenden Anordnung Luft und Kohlensäure durch eine Kautschukmembran voneinander trennt. Kautschuk läßt in gleichen Zeiten und gleichen Druckverhältnissen etwa 12 mal soviel Kohlensäure durch sich hindurchgehen als Luft. Ich habe eine solche Anordnung in folgender Weise zusammengestellt.

In die zentrale Durchbohrung einer gut ebengeschliffenen Spiegelglasplatte war ein  förmiges Glasrohr eingekittet, welches unten aus der Glasplatte einige Zentimeter hervortrat, während der obere Teil gerade wie bei Pfeffer (Fig. 158) als Manometer diente. Eine Erweiterung in dem kurzen Schenkel des Manometers bewirkte auch hier, daß selbst eine starke Vermehrung des Druckes in dem Raum, in welchem der Druck gemessen werden sollte, eine merkliche Vergrößerung des Volumens nicht eintrat. An das untere Ende des Glasrohrs war eine zentral durchbohrte kreisförmige Messingplatte von etwa 1<sup>cm</sup> Dicke eingekittet, so daß sie der Glasplatte parallel war. Auf dem Umfange der Platte waren Rillen eingeschnitten, und mit Hilfe derselben wurde das obere Ende eines oben offenen, unten geschlossenen Gummibeutels luftdicht angebunden. Der Kautschukbeutel war, um eine Ausdehnung durch Vermehrung des inneren Druckes zu verhindern, mit einer Zelle von Messingdrahtnetz umgeben, welche durch einen Bajonettverschluß an der den Gummibeutel tragenden Messingplatte befestigt war. Der Kautschukbeutel und der mit ihm in Verbindung stehende Raum bis zum Quecksilber des Manometers war mit Luft gefüllt.

Der Kautschukbeutel wurde in einen Glaszylinder gesenkt, welcher durch die am Rande etwas eingefettete Glasplatte luftdicht geschlossen wurde. Die Glasplatte hatte außer der zentralen zwei Durchbohrungen in welche Glasröhren eingekittet waren, deren eine bis auf den Boden des Glaszylinders reichte, während die andere kurz unter der Glasplatte geschnitten war. Die längere Röhre war mit einem Kohlensäureentwicklungsapparat verbunden, so daß durch den Glaszylinder ein stetiger Strom von Kohlensäure hindurchging; die Kautschukmembran trennte also ein mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre gefüllten Raum von ein



unter gleichem Drucke mit Kohlensäure gefüllten Raum. Wie es die Diffusion der Gase verlangt, trat sofort im Innern des Beutels eine Druckzunahme ein; der Druck hätte, wenn gar keine Luft durch Kautschuk hindurchginge, wachsen müssen, bis der Partialdruck der Kohlensäure im Innern gleich dem äußern Drucke geworden wäre, also auf zwei Atmosphären. Da indes auch Luft aus dem Beutel nach außen tritt, nahm der Druck nur auf etwa 1,66 Atmosphären zu.

Die im § 86 besprochenen Versuche Pfeffers, ebenso wie die von de Vries und Tamman zeigen uns das gleiche Verhalten bei der Endosmose. Bei Zuckerlösungen kann der in der Tonzelle enthaltene Zucker die Membran nicht passieren, das Wasser kann hindurch. Die Membran bildet demnach für die Flüssigkeit keine Trennungsschicht, sie geht kontinuierlich durch die Poren hindurch, es ist keine Grenzschicht zwischen dem Wasser und der Lösung vorhanden, welche durch molekulare Anziehung die molekularen Bewegungen modifiziert. Innerhalb des Gefäßes sind in der Volumeinheit Zuckermoleküle und, wenn wir von einer etwaigen Kontraktion der Lösung absehen, in dem Maße weniger Wassermoleküle, als Zuckermoleküle vorhanden sind. Der Partialdruck des Wassers ist somit innen und außen verschieden, es muß demnach so lange Wasser in die Zuckerlösung diffundieren, bis der Partialdruck des Wassers im Innern gleich demjenigen außen geworden ist, bis also der Überdruck dem in der Lösung ursprünglich vorhandenen Drucke des Zuckers gleich geworden ist. Der durch die Endosmose entstandene Überdruck gibt also den Partialdruck des gelösten Zuckers im Innern der Lösung, wobei selbstverständlich vorausgesetzt wird, daß die poröse Tonwand so dicht ist, daß der im Innern vorhandene Überdruck nicht das Wasser oder Lösung hydrodynamisch durch die Poren hinauspreßt. Diese Bemerkung erklärt die Abhängigkeit des osmotischen Druckes von der Beschaffenheit der Membran; wird, ~~da~~ der volle osmotische Druck erreicht ist, durch den Druck Wasser durch ~~die~~ Membran gepreßt oder ist ein ~~Diosmieren~~ <sup>Osmieren</sup> des Gelösten vorhanden, so ~~man~~ der volle osmotische Druck nicht erreicht werden.

Entsprechend der Theorie fand, wie wir sahen, Pfeffer, daß der osmotische Druck der Konzentration der Lösung, also der Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen gelösten Moleküle proportional ist. Die Versuche von Tamman zeigten das gleiche für eine Anzahl weiterer Substanzen und gleichzeitig, daß der osmotische Druck für eine ganze Anzahl von Körpern bei gleicher Molekülzahl in der Lösung der gleiche ist, so ~~der~~ Zucker, Harnstoff, Propylalkohol,  $\text{CaSO}_4$ ,  $\text{ZnSO}_4$ ,  $\text{MgSO}_4$  und mehrere ~~andere~~, während bei Kupferchlorid die halbe Molekülzahl denselben osmotischen Druck gibt. Letzteres würde auf eine starke Dissoziation des Salzes ~~hindeuten~~.

Eine interessante Bestätigung dieser Auffassung des osmotischen Druckes ~~gibt~~ <sup>gibt</sup> van't Hoff, indem er den osmotischen Druck des Zuckers mit dem ~~Drucke~~ <sup>Druck</sup> des Wasserstoffs vergleicht, bei welchem eine merkliche molekulare ~~Anziehung~~ <sup>Anziehung</sup> nicht vorhanden ist, somit der äußere Druck dem innern gleich ~~ist~~. Das Molekulargewicht des Zuckers ist 342, das des Wasserstoffs ist 2; ~~es~~ <sup>er</sup> enthält demnach 1<sup>g</sup> Zucker ebensoviel Moleküle wie  $\frac{2}{342}$  g Wasserstoff. ~~Da~~ <sup>Da</sup> 1<sup>g</sup> Zucker in 100<sup>g</sup> Wasser gelöst war, somit, da 1<sup>g</sup> Zucker 0,6<sup>ccm</sup>

Raum ausfüllt, in  $100,6^{\text{ccm}}$  verteilt war, wurde bei einer Temperatur von  $13^{\circ},7$  der osmotische Druck im Mittel gleich  $584^{\text{mm}}$  Quecksilber oder gleich  $0,69$  Atmosphären gefunden. Bei  $13^{\circ},7$  wiegt  $1^{\text{ccm}}$  Wasserstoff  $0,000\,0853^{\text{g}}$  unter dem Drucke der Atmosphäre. Demnach füllen  $\frac{2}{342}^{\text{g}}$  Wasserstoff bei dieser Temperatur und dem Druck der Atmosphäre

$$\frac{2}{342 \cdot 0,000\,0853} = 69^{\text{ccm}}$$

aus. Werden dieselben auf  $100,6^{\text{ccm}}$  ausgedehnt, so wird der Druck  $\frac{69}{100,6}$  oder  $0,686$  Atmosphären.

Die für den innern Druck der gelösten Zuckermoleküle und den Druck des Wasserstoffs bei gleicher Molekühlzahl im gleichen Raum sich ergebenden Werte sind in der Tat so nahe gleich, daß man in dieser Gleichheit eine Bestätigung der van't Hoff'schen Auffassung des osmotischen Druckes erkennen muß.<sup>1)</sup>

Mit der kinetischen Auffassung der Flüssigkeiten muß auch die Anschauung über die freie Diffusion der Flüssigkeiten eine andere werden, wir können die Wanderung einer Flüssigkeit in eine andere oder die Wanderung gelöster Substanzen von Orten größerer zu Orten kleinerer Konzentration nicht mehr der Anziehung der einen Flüssigkeit auf die andere oder des Lösungsmittels auf die gelöste Substanz zuschreiben.

Daß diese ältere Auffassung überhaupt nicht mit dem wenigstens annähernd gültigen Fick'schen Diffusionsgesetz vereinbar ist, nach welchem die Menge der in gleichen Zeiten diffundierten Substanz dem Konzentrationsgefälle proportional ist nach der Gleichung

$$S = -k \frac{dc}{dx},$$

hat Arrhenius<sup>2)</sup> durch Betrachtungen gezeigt, die ganz analog denen von van der Waals sind, aus denen sich ergibt, daß die Anziehungen in der Grenzschicht eines Gases oder einer Flüssigkeit dem Quadrate der Dichte des Gases proportional sein muß.

Wir schichten Wasser auf eine Lösung und denken uns der Einfachheit wegen durch die Grenze eine horizontale Ebene gelegt, so daß oberhalb dieser Ebene reines Wasser, unterhalb Lösung ist. In der Volumeneinheit der Lösung seien  $n$  Salz-moleküle. Die in der Grenzschicht befindlichen Salz-moleküle erhalten dann gegen das Wasser hin einen stärkern Zug als nach unten hin, weil nach der ältern Auffassung die Wassermoleküle diejenigen des Salzes stärker anziehen als letztere einander anziehen. Denken wir uns parallel der Grenzebene unterhalb und oberhalb in einem Abstände  $dx$ , der gleich dem für beide Molekülarten als gleich angenommenen Radius der Wirkungssphäre sein soll, zwei Ebenen gelegt, so sind unterhalb der Flächeneinheit in dem Raume zwischen den beiden Ebenen unterhalb der Grenzebene  $ndx$  Salz-moleküle, oberhalb der Grenzebene

1) Durch diese Ableitung der Auffassung des osmotischen Druckes aus van der Waalsschen Theorie der Kontinuität des gasförmigen und flüssigen standes sind auch wohl die Schwierigkeiten gehoben, welche L. Meyer (Ber der Berliner Akademie 1891. p. 993) in der van't Hoff'schen Auffassung fand.

2) Arrhenius, Zeitschr. für physikal. Chemie. 10. p. 62. 1892.



$n dx$  Moleküle durch Wassermoleküle ersetzt. Der Überschuß der Anziehung dieser  $n dx$  Wassermoleküle in der oberen Schicht auf die in der Grenzebene vorhandenen Salzmoleküle über die Anziehung der  $n dx$  Moleküle in der untern Schicht auf dieselben in der Grenzebene vorhandenen Salzmoleküle ist die Kraft, welche die Salzmoleküle in das Wasser zieht. Infolgedessen geht ein gewisser Bruchteil der in der Grenzebene vorhandenen Moleküle durch die Grenze in das Wasser hinüber, denn die Moleküle bekommen durch diese Anziehung eine gewisse nach oben gerichtete Bewegung, welche eine gleichförmige sein wird, da die Moleküle erhebliche Reibung an dem Lösungsmittel erfahren.

Nun werde plötzlich unter der Grenzebene die Konzentration verdoppelt, und auch in der Grenzebene bzw. in ihrer unmittelbaren Nähe doppelt viele Moleküle wie vorher. Da jetzt die Zahl der wirksamen Wassermoleküle oberhalb der Grenze gleich  $2n dx$  ist, so erfährt jedes an der Grenze befindliche Salzmolekül die doppelte Anziehung, somit erhält es auch doppelte Geschwindigkeit nach oben. Diese doppelte Anziehung wirkt auf die doppelte Anzahl der in der Nähe der Grenze befindlichen Moleküle. Da die doppelte Zahl demnach mit der doppelten Geschwindigkeit nach oben wandert, müßte in gleichen Zeiten die vierfache Anzahl der Grenze passieren, oder allgemein die in gleichen Zeiten diffundierende Menge müßte dem Quadrate des Konzentrationsgefälles proportional sein, die Grundgleichung der Diffusion müßte lauten

$$S = -k \left( \frac{dc}{dx} \right)^2.$$

Die sehr nahe gültige einfache Diffusionsgleichung gestattet demnach nicht die Anziehung des Lösungsmittels auf das diffundierende als das eigentlich maßgebende der Diffusion anzusehen; der Mechanismus der Diffusion muß ein anderer sein.

Nernst hat zuerst<sup>1)</sup> eine Ableitung der Diffusion aufgrund der van't Hoff'schen Theorie des osmotischen Druckes gegeben, die einfach davon ausgeht, daß durch den höhern osmotischen Druck an der Stelle der höheren Konzentration die gelösten Moleküle an die Stellen niedrigeren osmotischen Druckes hingetrieben werden, geradeso wie nach Stefans Theorie ein Gas von dem Orte höhern Druckes in einem Gasgemische nach dem Orte hingetrieben wird, wo der Partialdruck des Gases ein geringerer ist. Die Strömung der gelösten Moleküle steht aber durch Reibung derselben dem Lösungsmittel ein solcher Widerstand entgegen, daß die Strömung gleichförmiger Bewegung stattfindet. Es tritt demnach eine Strömung so lange ein, als eine Differenz der osmotischen Drucke vorhanden ist, die Geschwindigkeit ist dieser Druckdifferenz proportional.

Wir betrachten einen Diffusionszylinder von konstantem Querschnitt und nehmen an, daß in einem und demselben Querschnitte die Konzentration dieselbe sei, daß aber parallel der Achse, der Richtung der  $x$  die Konzentration von Querschnitt zu Querschnitt, etwa von unten nach oben hin abnehme. In einem Querschnitt an der Stelle  $x$  sei der osmotische Druck  $p$  vorhanden; in der Richtung  $x$  auf der Strecke  $dx$  nehme derselbe um  $dp$  ab, dann wirkt auf die Substanz, welche in einer Schicht von der Dicke

<sup>1)</sup> W. Nernst, Zeitschr. f. physikal. Chemie. 2. p. 615. 1888

$dx$ , deren Querschnitt die Flächeneinheit ist, gelöst ist, die Kraft  $-dp$ . Ist  $c$  die Konzentration der Lösung an der betreffenden Stelle, das ist also die Menge der in der Volumeinheit gelösten Substanz, wenn in jedem Teile der Volumeinheit dieselbe Menge gelöst wäre wie an der betreffenden Stelle, so ist in der Schicht von der Dicke  $dx$  und der Einheit des Querschnitts die Menge  $c dx$  gelöst. Die auf die Einheit der gelösten Masse an der betreffenden Stelle wirkende Kraft ist demnach

$$-\frac{dp}{c dx}.$$

Dieser Kraft ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Gelöste bewegt, proportional. Ist  $K$  die Kraft, welche auf die Einheit der gelösten Menge wirken muß, damit dieselbe die Geschwindigkeit  $1^{\text{cm}}$  in der Sekunde bekommt, so ist die Geschwindigkeit  $v$ , welche durch die vorhandene Kraft bewirkt wird, gegeben durch

$$v : 1 = -\frac{dp}{c dx} : K; \quad v = -\frac{1}{K} \frac{dp}{c dx}.$$

Die Menge der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit wandernden gelösten Substanz ist  $c \cdot v = S$ , somit

$$S = -\frac{1}{K} \frac{dp}{dx}.$$

Ist die gelöste Substanz nicht dissoziiert, ist dieselbe also nicht, wie wir später sehen werden, ein Elektrolyt, so ist der osmotische Druck der Konzentration proportional. Nennen wir den Druck, welcher der Konzentration Eins entspricht,  $p_0$ , so ist der osmotische Druck

$$p = p_0 \cdot c \quad \text{und} \quad -dp = -p_0 dc,$$

somit

$$S = -\frac{p_0}{K} \frac{dc}{dx}.$$

Die Kraft  $K$ , welche die Reibung für die Konzentration Eins der gelösten Substanz zu überwinden hat, die wir auch als Koeffizient bezeichnen können, mit welcher wir den auf die Quantitätseinheit der Substanz in der Lösung wirksamen Druck dividieren müssen, um die Strömungsgeschwindigkeit zu erhalten, ist, solange wie die Lösungen derartig verdünnt sind, daß eine Reibung der Moleküle des gelösten lediglich an den Molekülen des Lösungsmittels in Betracht zu ziehen ist, als konstant anzunehmen, da ebenso der der Konzentration Eins entsprechende osmotische Druck eine konstante Größe ist, so gibt diese Theorie unmittelbar das Ficksche Gesetz.

Bei konzentrierteren Lösungen findet eine Reibung der strömenden Moleküle nicht nur an den Molekülen des Lösungsmittels, sondern auch an den Molekülen der gelösten Substanz statt; damit kann die Reibung eine andere werden und somit  $K$  von der Konzentration abhängig sein. Ebenso wird man bei großen Konzentrationen nicht mehr den osmotischen Druck der Konzentration proportional setzen dürfen, man wird denselben vielmehr nach der van der Waalsschen oder einer ähnlichen Gleichung berechnen müssen.

Aus diesen Gründen kann die Unabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten

$$k = \frac{p_0}{K}$$

für nicht zu hohe Konzentrationen gelten, bei stärkern Konzentrationen wird derselbe sich ändern.

Zu den hier angedeuteten Ursachen der Änderung kann bei wachsender Konzentration eine Zunahme der Diffusionskoeffizienten weiter bewirkt werden durch die Anziehung der Moleküle des Lösungsmittels auf die gelösten Moleküle; es würde dadurch in die einfache Gleichung von Fick ein Glied hinzukommen, welches dem Quadrate des Konzentrationsgefälles proportional ist, wie sich aus den Betrachtungen von Arrhenius ergibt. Die Gleichung würde etwa die Form annehmen, welche Wiedeburg ihr gegeben hat (§ 85).

Man kann, wie Riecke<sup>1)</sup> gezeigt hat, aus der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten noch in anderer Weise die Erscheinung der Diffusion ableiten und für den Diffusionskoeffizienten einen bestimmten Ausdruck erhalten. Wir betrachten die Diffusion lediglich als Folge der molekularen Bewegung und machen die Annahme, daß die mittlern Wegelängen der Moleküle der gelösten Substanz lediglich durch die Stöße an den Molekülen des Lösungsmittels bedingt sind, daß dieselben also von der Konzentration unabhängig sind. Diese Annahme kann selbstverständlich nur für verdünnte Lösungen gelten, wie man sie auch für ein Gasgemische machen kann, das von dem einen Gase nur einen sehr kleinen Bruchteil enthält, so daß die Zahl der Stöße an den Molekülen der gleichen Art außerst kleine ist gegenüber der Zahl der Stöße an den Molekülen des andern Gases.

Wir nehmen wieder einen Diffusionszylinder an, in welchem die Konzentration an allen Stellen eines Querschnittes die gleiche ist, die Konzentration aber von Schicht zu Schicht nach oben hin abnimmt; wir legen die Achse der  $x$  parallel der Achse des Zylinders nach oben hin positiv.

Wir legen in dem Zylinder irgendwo einen Schnitt senkrecht zur Achse  $x$ , durch diesen Schnitt gehen Moleküle der gelösten Substanz von unten nach oben und von oben nach unten, in der erstern Richtung aber mehr, weil die Lösung unten konzentrierter ist.

Im § 117 haben wir die Zahl der Moleküle berechnet, die aus einer Schicht, welche von dem betrachteten Schnitte in einer Richtung, welche mit der zu dem Schnitte senkrechten den Winkel  $\vartheta$  bildet, um die Strecke  $\xi$  entfernt ist und in dieser Richtung die Dicke  $d\xi$  hat, in der Richtung  $\vartheta$  gegen die Flächeneinheit des Schnittes in der Zeiteinheit hinfliegen. Ist  $n$  die Zahl der in der Volumeinheit an der Stelle der Schicht vorhandenen Moleküle, das heißt also die Zahl, mit der wir das Volumelement der Schicht multiplizieren müssen, um die im Volumelement vorhandene Anzahl der Moleküle zu erhalten,  $u$  die Geschwindigkeit,  $l$  die mittlere Weglänge, so war die gefundene Zahl

$$\frac{nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\xi}{2 l}$$

<sup>1)</sup> Riecke, Zeitschr. für physikal. Chemie. 6. p. 564. 1890

Wir erhielten die Zahl allerdings unter der Voraussetzung, daß in dem betrachteten Raume überall dieselbe Gasdichte sei und daß alle Moleküle dieselbe mittlere Wegestrecke durchlaufen. Indes behält dieser Ausdruck auch seine Gültigkeit, wenn wir beide Annahmen fallen lassen. Man erkennt das leicht, wenn man erwägt, daß, gemäß der Definition der mittlern Geschwindigkeit und der mittlern Wegelänge,  $\frac{u}{l}$  die Anzahl der Stöße des einzelnen Moleküles, also die Zahl ist, wie oft in der Sekunde das Molekül einen neuen Weg beginnt. Da  $n d\xi$  die Zahl der Moleküle in der betrachteten von der Flächeneinheit begrenzten Schicht ist, so ist  $n d\xi \frac{u}{l}$  die Zahl der Stöße der in diesem Teil der Schicht vorhandenen Moleküle und damit auch die Zahl der nach irgend einer Richtung aus der Schicht herausfahrenden Moleküle, und

$$\frac{n u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\xi}{2 l}$$

die Zahl der aus der Flächeneinheit der Schicht in der Richtung der  $\vartheta$  herausfahrenden Moleküle. Lassen wir aber die Annahme fallen, daß alle Moleküle in Wirklichkeit nur aus Schichten kommen, deren Abstand  $\xi$  von dem durch die Flüssigkeiten gelegten Schnitt kleiner als  $l$  ist, sondern soll  $\xi$  alle möglichen Werte haben, so gibt uns obiger Ausdruck wohl die gegen die Flächeneinheit des Schnittes aus jeder Schicht in der Richtung  $\vartheta$  hinfahrenden Moleküle, aber nicht die Zahl der den Schnitt wirklich erreichenden. Um diese zu erhalten, müssen wir nach § 102 die Zahl der aus dem Querschnitt gegen die Flächeneinheit des Schnittes sich hinbewegenden mit dem Faktor  $e^{-\frac{\xi}{l}}$  multiplizieren, der uns die Anzahl derjenigen Moleküle liefert, welche einen Weg größer als  $\xi$  zurücklegen, also wirklich die von uns gedachte Schnittfläche durchsetzen. Dieselbe wird demnach

$$\frac{n u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\xi}{2 l} \cdot e^{-\frac{\xi}{l}}.$$

Um die Gesamtzahl der von unten nach oben oder von oben nach unten durch die Flächeneinheit des Schnittes hindurchgehenden Moleküle zu erhalten, haben wir für jede Schicht  $d\xi$  die in ihr vorhandene Molekülzahl  $n$ , die Konzentration, einzuführen und dann die Summe für alle Schichten von  $\xi = 0$  bis  $\xi = \infty$  und für  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  zu bilden, das heißt die Integrale zwischen diesen Grenzen zu nehmen.

Ist  $n_0$  die in der Volumeinheit vorhandene Zahl der Moleküle an der Stelle des Schnittes und ist  $dn$  die Änderung dieser Zahl, wenn wir uns von dem Schnitte um  $dx$  entfernen, so ist die Konzentration in einem senkrechten Abstände  $x$  unter dem Schnitte, da für  $x$  doch nur sehr kleine Werte in Betracht zu ziehen sind, ohne Fehler zu setzen

$$n = n_0 + \frac{dn}{dx} \cdot x$$

und oberhalb des Schnittes

$$n = n_0 - \frac{dn}{dx} \cdot x.$$

Da wir in dem Ausdruck für die Zahl der Moleküle, welche die Schnittfläche in der Richtung  $\vartheta$  treffen, den Abstand  $\xi$  in der Richtung  $\vartheta$  gerechnet haben, so ist

$$r = \xi \cos \vartheta.$$

Für die aus der Schicht an der Stelle  $\xi$  und von der Dicke  $d\xi$  die Flächeneinheit unseres Schnittes in der Zeiteinheit der Richtung  $\vartheta$  treffende, von unten her kommende Molekülzahl erhalten wir somit

$$\left(n_0 + \frac{dn}{dx} \xi \cos \vartheta\right) u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \frac{d\xi}{l} e^{-\frac{\xi}{l}}$$

und die Gesamtzahl der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit von unten nach oben gehenden Moleküle ist

$$\int_0^\pi \int_0^\pi u n_0 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \frac{d\xi}{l} e^{-\frac{\xi}{l}} + \int_0^\pi \int_0^\pi u \frac{dn}{dx} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \frac{d\xi}{2l} \xi e^{-\frac{\xi}{l}}.$$

Für die von oben nach unten gehenden Moleküle erhalten wir denselben Ausdruck, mit dem Unterschied nur, daß das zweite Glied negativ ist. Ziehen wir von den nach oben gehenden die nach unten gehenden ab, so fallen die ersten Glieder fort und die Differenz, also die durch den betrachteten Schnitt diffundierende Molekülzahl, wird:

$$2 \int_0^\pi \int_0^\pi u \frac{dn}{dx} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \frac{d\xi}{2l} \xi e^{-\frac{\xi}{l}}.$$

Zur Ausführung der Integration beachten wir, daß  $\vartheta$  von  $\xi$  unabhängig ist, so daß wir den  $\vartheta$  enthaltenden Faktor bei der Integration nach  $\xi$  als konstant ansehen, somit daß wir schreiben können

$$\int_0^\pi u \frac{dn}{dx} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\infty \frac{d\xi}{l} \xi e^{-\frac{\xi}{l}}.$$

Das Integral nach  $\xi$  erhält man durch die Integration durch Teilung, indem man beachtet, daß

$$d(uv) = u dv + v du; \quad uv = \int u dv + \int v du; \quad \int v du = uv - \int u dv;$$

setzen wir  $\xi = v$ ,  $\frac{1}{l} e^{-\frac{\xi}{l}} d\xi = du$ , so ist, da  $\frac{d\xi}{l} e^{-\frac{\xi}{l}}$  das Differential von  $-e^{-\frac{\xi}{l}}$  ist,

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{l} \xi e^{-\frac{\xi}{l}} = - \left[ \xi e^{-\frac{\xi}{l}} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{\xi}{l}} d\xi.$$

Da  $e^{-\frac{\xi}{l}} d\xi$  das Differential von  $-le^{-\frac{\xi}{l}}$  ist, so wird schließlich unser Integral

$$-\left[\xi e^{-\frac{\xi}{l}}\right]_0^{\infty} - \left[l e^{-\frac{\xi}{l}}\right]_0^{\infty} = -[0 - l].$$

Das erste Glied ist für  $\xi = 0$  Null, und ebenso für  $\xi = \infty$ , da der Exponent dann negativ unendlich wird, das zweite wird für  $\xi = 0$  gleich  $l$ , da der Exponent Null wird, für  $\xi = \infty$  gleich Null; da der Wert des Integrals an der untern Grenze negativ zu nehmen ist, wird das Integral gleich  $l$ . Die Zahl der diffundierten Moleküle wird demnach

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} lu \frac{dn}{dx} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{3} lu \frac{dn}{dx},$$

und der Diffusionskoeffizient wird

$$k = \frac{1}{3} lu$$

oder wenn der Tag als Zeiteinheit genommen wird

$$k = \frac{86\,400}{3} \cdot lu,$$

derselbe ist somit dem Produkte der mittlern Wegelänge und der molekularen Geschwindigkeit proportional.

Die Geschwindigkeit  $u$  können wir in der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten aus dem Molekulargewichte berechnen, denn wir werden später sehen, daß, wenn wir das Gewicht der Volumeinheit Wasserstoff gleich 1 setzen, das Molekulargewicht uns das spezifische Gewicht in Gasform der betreffenden Substanzen bezogen auf Wasserstoff gleich 2 gibt. Ist  $u_w$  die molekulare Geschwindigkeit des Wasserstoffs und  $\mu$  das Molekulargewicht der gelösten Substanz, so ist nach § 104

$$u = u_w \sqrt{\frac{2}{\mu}}.$$

Aus dem Diffusionskoeffizienten läßt sich demnach die mittlere Wegelänge der gelösten Moleküle berechnen.

Wir bemerken hier zum Schlusse nochmals, daß diese sowie die Nernstsche Ableitung sich nur auf verdünnte Lösungen solcher Substanzen bezieht, welche in der Lösung nicht dissoziiert oder, wie wir später sehen werden, durch den elektrischen Strom nicht zersetzt werden. Wir werden deshalb in der Elektrizitätslehre auf diese Fragen zurückkommen und dort die Theorie ergänzen. Überhaupt werden wir dort und in der Wärmelehre die in unsern bisherigen Untersuchungen noch mangelhaften experimentellen Belege der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten vervollständigen.

## Dritter Abschnitt.

### Von der Wellenbewegung.


#### Erstes Kapitel.

#### Theoretische Prinzipien der Wellenbewegung.

##### § 125.

**Schwingende Bewegung eines Punktes.** Wenn ein materieller Punkt  $A$  (Fig. 225), welcher durch irgend welche Kräfte in einer bestimmten Lage so festgehalten wird, daß er, sobald er aus derselben fortgeschoben ist, wieder in seine frühere Lage zurückgezogen wird, durch eine äußere Kraft aus seiner Gleichgewichtslage nach  $B$  entfernt und dann der Wirkung der ihn in die Ruhelage zurückziehenden

Fig. 225.

Kräfte überlassen wird, so wird er zunächst wieder in seine frühere Lage zurückkehren. {  Da aber die Kräfte, welche den Punkt zurückziehen, so lange auf ihn wirken, bis er die Lage in  $A$  wieder erreicht hat, so ist die ihm erteilte Bewegung eine beschleunigte und der Punkt ist in  $A$  mit einer gewissen gegen  $C$  gerichteten Geschwindigkeit begabt. Infolge dieser Geschwindigkeit muß der Punkt, gerade wie das bewegte Pendel über die vertikale Lage, sich über die Ruhelage hinaus gegen  $C$  hin bewegen. Von der Zeit an aber, wo er die Ruhelage nach der andern Seite verlassen hat, wirken die ihn nach  $A$  ziehenden Kräfte wieder auf den Punkt ein. Diesmal aber sind sie der Bewegung entgegengerichtet, bewirken also, daß die Bewegung des Punktes eine verzögerte wird, bis er in dem Abstände  $AC$  von  $A$  einen Augenblick in Ruhe kommt, wenn durch die Wirkung der nach  $A$  gerichteten Kräfte die dem Punkte auf dem Wege  $BA$  erteilte Geschwindigkeit vernichtet ist.

Der Abstand  $AC$  ist gleich dem Abstände  $AB$ , da der bewegte Punkt die Geschwindigkeit in  $A$  nur infolge der gegen  $A$  gerichteten Kräfte erhalten hatte, und dieselben Kräfte es sind, welche die Bewegung desselben umkehren. Von  $C$  aus wird dann der betrachtete Punkt gerade so nach  $A$  zurückkehren, wie vorher von  $B$ , wird ebenso infolge der auf diesem Wege erlangten Geschwindigkeit sich über  $A$  hinausbewegen nach  $B$  hin, weiter von  $B$  wieder über  $A$  nach  $C$  und so fort. Kurz, der Punkt wird eine hin und her gehende Bewegung um den Punkt  $A$  vollführen, indem er infolge der ihn gegen  $A$  hinziehenden Kräfte sich abwechselnd der Gleichgewichtslage nähert und von ihr entfernt.



Eine solche hin und her gehende Bewegung eines Punktes um eine bestimmte Lage nennt man eine schwingende Bewegung, sie wird überall dort eintreten, wo ein Punkt aus seiner Gleichgewichtslage entfernt ist, ohne in eine neue Gleichgewichtslage übergeführt zu sein; ein spezielles Beispiel einer solchen haben wir bereits früher beim Pendel kennen gelernt, welches infolge der Schwerkraft Schwingungen um die Vertikale vollführt. Andere Arten von schwingenden Bewegungen der einzelnen Teile fester, flüssiger und gasförmiger Körper werden wir demnächst zu betrachten haben.

Den Abstand der äußersten Punkte der Bahn des Beweglichen von der Ruhelage, die Länge  $AB$ , nennen wir die Schwingungsweite oder Amplitude der Schwingung, und die Zeit, welche der Punkt zum Zurücklegen einer ganzen Schwingung gebraucht, das heißt, um den Weg von  $B$  nach  $C$  und wieder zurück zu durchlaufen, die Schwingungsdauer. Den Bewegungszustand des Punktes zu irgend einer Zeit, oder an einer Stelle  $a$  der Bahn desselben nennt man die Oszillationsphase, so daß also die Phase durch den Abstand  $Aa$  von der Ruhelage, die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung des Punktes in dem betrachteten Augenblicke bestimmt wird. Während einer ganzen Oszillation ist der bewegte Punkt in allen möglichen Phasen, d. h. er nimmt alle überhaupt bei den Schwingungen möglichen Bewegungszustände an. Zugleich sieht man, daß die Zeit, welche verfließt, bis der Punkt wieder in derselben Phase ist, ebenfalls der ganzen Oszillationsdauer gleich ist. Die um eine halbe Schwingungsdauer voneinander entfernten Phasen nennt man entgegengesetzte. Der bewegte Punkt befindet sich dann in gleichen, aber der Richtung nach entgegengesetzten Bewegungszuständen; die Abstände von der Ruhelage sind gleich, aber an verschiedenen Seiten, und die Geschwindigkeiten sind gleich, aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Wir nahmen vorhin an, daß die schwingende Bewegung des Punktes dadurch eingeleitet wurde, daß äußere Kräfte denselben nach  $B$  entfernten und dann ihn der Wirkung der nach  $A$  gerichteten Kräfte überließen; es kann indes ebenso die schwingende Bewegung dadurch eingeleitet werden, daß dem Punkt  $A$  durch einen Stoß eine gewisse nach  $B$  gerichtete Geschwindigkeit erteilt wird. Er wird sich dann in der Richtung nach  $B$  bewegen, bis durch die Wirkung der ihn nach  $A$  zurückziehenden Kräfte die dem Punkte erteilte Geschwindigkeit aufgehoben wird, dann sich mit beschleunigter Bewegung nach  $A$  zurückbewegen, darüber hinaus gegen  $C$  hin und von da an ganz in der vorhin betrachteten Weise über  $A$  nach  $B$ , um die soeben betrachteten Schwingungen zu vollführen.

### § 126.

**Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes** Um die schwingende Bewegung eines Punktes zu bestimmen, ist es notwendig, in jedem Augenblicke den Ort sowohl als die Geschwindigkeit des Punktes in Größe und Richtung nach zu kennen. Wir werden daher eine Gleichung aufzusuchen haben, worin der Abstand des beweglichen Punktes von der Ruhelage, ferner die Geschwindigkeit desselben als abhängig von der  $t$  dargestellt wird.

Diese Abhängigkeit wird lediglich davon bedingt, nach welchen Gesetzen die Kräfte, welche den aus der Gleichgewichtslage gebrachten Pu

gen dieselbe hintreiben, sich mit dem Abstände des Punktes von derselben ändern. Da wir es nun in unsern weiteren Untersuchungen fast nur mit Schwingungen zu tun haben, welche durch Elastizität bedingt sind, und deren Amplituden so klein sind, daß die Elastizitätsgrenzen nicht überschritten werden, so wollen wir hier nur die schwingenden Bewegungen betrachten, bei denen die wirkenden Kräfte in jedem Momente dem augenblicklichen Abstände des Punktes von der Gleichgewichtslage proportional sind. Bezeichnen wir dann die Kraft, welche den Punkt gegen die Gleichgewichtslage hintreibt, wenn er sich im Abstände  $y$  von derselben befindet, mit  $\psi$  und mit  $p$  eine Konstante, so ist

$$\psi = - p y.$$

Wir müssen der rechten Seite das negative Vorzeichen geben, da die Richtung der wirksamen Kraft immer die entgegengesetzte ist von derjenigen, nach welcher der Punkt aus der Gleichgewichtslage entfernt ist; findet sich der Punkt rechts von  $A$  Fig. 225, so wirkt die Kraft nach links und umgekehrt. Die Konstante  $p$  in dieser Gleichung ist die Kraft, mit welcher der Punkt gegen die Gleichgewichtslage hin gezogen wird, wenn der Abstand  $y = 1$  ist.

Nennen wir die Masse des beweglichen Punktes  $m$ , so wird die Beschleunigung  $\varphi$ , welche derselbe im Abstände  $y$  gegen die Gleichgewichtslage hin erfährt,

$$\varphi = - \frac{p}{m} y = - k^2 y.$$

Diese Beschleunigung  $\varphi$  ist gleich dem Quotienten aus der Änderung der Geschwindigkeit  $dv$ , welche die Bewegung in der unendlich kleinen Zeit  $dt$  erfährt, in welcher der Punkt, gerade den Abstand  $y$  passiert, und einer unendlich kleinen Zeit  $dt$ , oder

$$\varphi = \frac{dv}{dt}$$

und damit

$$\frac{dv}{dt} = - k^2 y \quad \dots \dots \dots \quad \text{I}$$

In dieser Form der Gleichung I erkennt man unmittelbar, daß sie identisch dieselbe ist, welche wir § 27 für die Schwingungen des Pendels erhielten. Eine Übereinstimmung, die notwendig ist, da wir bei Betrachtung der Pendelbewegung so kleine Amplituden voraussetzten, daß wir die bewegende Kraft in jedem Momente dem Abstände des Pendels von seiner Gleichgewichtslage proportional setzen konnten. Es ist also dasselbe Gesetz für die Abhängigkeit des Beweglichen von der bewegenden Kraft, welche wir hier wie an jener Stelle zugrunde legen.

In derselben Weise wie § 27 erhalten wir aus der Gleichung I für die Geschwindigkeit  $v$ , welche das Bewegliche im Abstände  $y$  von der Gleichgewichtslage besitzt, wenn wir den Abstand des Punktes dort, wo die Geschwindigkeit gleich Null ist, also die Amplitude der Bewegung mit  $a$  bezeichnen,

$$v^2 = k^2 (a^2 - y^2) \quad \dots \dots \dots \quad \text{II.}$$

Um die Abhängigkeit des Abstandes  $y$  des Punktes von seiner Gleichgewichtslage zu erhalten, wollen wir annehmen, der Punkt beginne seine Bewegung in dem Momente, in welchem er seine Gleichgewichtslage verläßt, daß also die Bewegung durch einen kurzen Stoß eingeleitet werde. In dem Ausdrücke für  $v$

$$v = \pm k \sqrt{\alpha^2 - y^2}$$

haben wir dann auf der rechten Seite das positive Vorzeichen zu wählen, wenn wir die Richtung, nach welcher das Bewegliche aus der Gleichgewichtslage sich zuerst bewegt, als die positive Richtung der  $y$  betrachten. Nach der Bedeutung von  $v$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

wird dann

$$\frac{dy}{dt} = k \sqrt{\alpha^2 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = k dt$$

und

$$\int_0^y \frac{dy}{\alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\alpha^2}}} = \int k dt = kt.$$

Die Summe auf der linken Seite müssen wir von  $y = 0$  bis  $y = y$  nehmen, weil wir den Beginn der Bewegung von dem Momente an rechnen, in welchem das Bewegliche die Gleichgewichtslage passiert, also  $y = 0$  ist, wenn  $t = 0$  ist. Diese Summe ist nach E 8 und E VIII

$$kt = \arcsin \left( \sin = \frac{y}{\alpha} \right) - \arcsin \left( \sin = \frac{0}{\alpha} \right) = \arcsin \left( \sin = \frac{y}{\alpha} \right).$$

Lösen wir die Gleichung nach  $y$  auf, so wird

$$y = \alpha \sin kt \dots \dots \dots \text{III}$$

In dieser Gleichung wächst  $y$  mit  $t$  von  $t = 0$  bis  $kt = \frac{\pi}{2}$ ; ist letzterer Wert von  $t$  erreicht, so wird  $y = \alpha$  gleich der Amplitude der Bewegung. Wächst  $t$  weiter, so nimmt  $y$  ab und wird 0, wenn  $kt = \pi$  geworden ist; bei weiterer Zunahme von  $t$  wird, so lange  $kt > \pi < 3\frac{\pi}{2}$ ,  $y$  negativ und wächst negativ bis  $-\alpha$ , welcher Wert für  $kt = 3\frac{\pi}{2}$  erreicht wird. Wenn dann  $kt$  von  $3\frac{\pi}{2}$  bis  $2\pi$  zunimmt, wird der negative Wert von  $y$  kleiner und für  $kt = 2\pi$  wird  $y$  wieder gleich Null, der Punkt hat seine Gleichgewichtslage wieder erreicht. Das Bewegliche hat also, wenn die Zeit  $t$  einen solchen Wert angenommen hat, daß  $kT = 2\pi$ , eine ganze Schwingung zurückgelegt. Da wir nun als Schwingungsdauer jene  $T$  bezeichnet haben, in welcher das Bewegliche eine ganze Schwingung führt, so ist  $T$  die Schwingungsdauer der Bewegung. Zwischen derselben

die der Quadratwurzel aus der Beschleunigung  $k$  im Abstände 1 von der Gleichgewichtslage besteht somit die Beziehung

$$k = \frac{2\pi}{T} ; \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p}{m}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{p}}.$$

Ersetzen wir schließlich  $k$  in der Gleichung für  $y$  durch diesen Wert, wird

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Daß diese Gleichung die schwingende Bewegung gerade so ergibt, wie wir sie im vorigen Paragraphen abgeleitet haben, erkennt man unmittelbar. Denn gerade so wie die Abstände  $y$  sich ändern, wenn  $t$  von 0 bis  $T$  läuft, gerade so ändern sie sich jedesmal, wenn  $t$  von  $nT$  bis  $(n+1)T$  läuft, wenn also die Zeit  $t$  um eine ganze Schwingungsdauer zunimmt. Hier erkennt man, daß in zwei Zeitpunkten, welche um eine halbe Schwingungsdauer voneinander entfernt sind, die Abstände  $y$  auf entgegengesetzter Seite der Gleichgewichtslage einander gleich sind, denn die Werte zweier Sinus, deren Argumente um  $\pi$  verschieden sind, sind der Größe nach gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt.

Die Geschwindigkeit  $v$  zur Zeit  $t$  ist

$$v = k \sqrt{\alpha^2 - y^2} = \alpha \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 - \sin^2 2\pi \frac{t}{T}} = \alpha \frac{2\pi}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die Gleichung zeigt, daß, wenn  $t = 0$ , die Geschwindigkeit ihren größten Wert hat; dieselbe wird mit wachsendem  $t$  kleiner und gleich 0, wenn  $t = \frac{1}{2}T$ , also zur Zeit, in welcher  $y = \alpha$  das Bewegliche seinen größten Abstand von der Gleichgewichtslage erreicht hat. Wächst  $t$ , so wird  $v$  negativ, das Bewegliche kehrt gegen die Gleichgewichtslage zurück, und zwar, da das negative  $v$  wächst, bis  $t = \frac{3}{4}T$ ,  $y = 0$  geworden ist, mit wachsender Geschwindigkeit, bis das Bewegliche in die Gleichgewichtslage zurückgekehrt ist. Bei weiterem Wachsen von  $t$  bleibt  $v$  negativ, bis  $t = \frac{5}{4}T$ ,  $y = -\alpha$  geworden, das Bewegliche also den größten Abstand auf der andern Seite der Gleichgewichtslage erreicht hat. Dann ist  $v = 0$  und in weiterem Wachsen von  $t$  wird es wieder positiv; das Bewegliche kommt von der negativen Seite her mit wachsender Geschwindigkeit in die Gleichgewichtslage zurück und hat, wenn es die Gleichgewichtslage erreicht hat, dieselbe Geschwindigkeit wie bei dem Beginne der Bewegung. Auch das zeigt somit, daß, wie wir es im vorigen Paragraphen ableiteten, das Bewegliche, wenn keine Hindernisse vorhanden sind, unaufhörlich zwischen denselben Grenzen und mit derselben Geschwindigkeit hin und her geht.

Die entwickelte Gleichung setzt uns somit in den Stand, für jeden Moment, wenn wir die bewegenden Kräfte kennen, die Lage und Geschwindigkeit des Beweglichen vollkommen zu bestimmen, sie gibt uns somit unmittelbar das Gesetz der schwingenden Bewegung eines Punktes, wenn auf denselben Kräfte wirken, welche dem Abstände des Punktes aus der Gleichgewichtslage proportional sind.

Die Bewegung eines nach diesem Gesetze schwingenden Punktes können wir uns leicht graphisch darstellen. Sei  $C$  Fig. 226 die Gleichgewichtslage des Punktes, der auf der Linie  $Ca$  sich hin und her bewege.

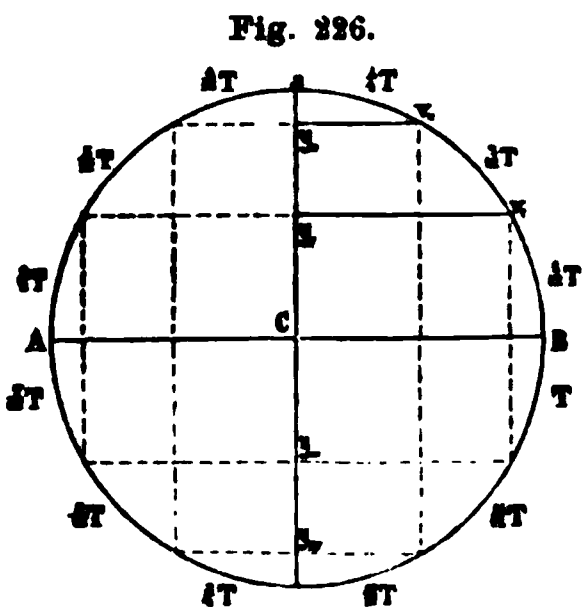


Fig. 226.

Beschreiben wir dann mit dem Radius  $Ca$  um  $C$  einen Kreis und denken uns, daß ein Punkt mit der Geschwindigkeit  $\alpha \frac{2\pi}{T}$  diesen Kreis durchlaufe, so sind die Projektionen der von dem Punkte in diesem Kreise durchlaufenen Bogen auf den Durchmesser  $Ca$  die Strecken, die der Punkt in der schwingenden Bewegung zurückgelegt hat. Geht der Punkt von  $B$  aus nach oben, so gibt uns die Projektion des Bogens  $\frac{1}{12} T$  gleich  $Cy_1$  den nach  $\frac{1}{12}$  Schwingungsdauer zurückgelegten Weg usf. Man sieht also, daß die in gleichen Zeiten bei der schwingenden

Bewegung zurückgelegten Wege sehr verschieden sind. Die den gleichen Bogen angehörigen Kosinus sind dann den Geschwindigkeiten proportional, welche den Abständen  $Cy_1 \dots$  des Punktes von der Gleichgewichtslage entsprechen.

Die hier abgeleitete Gleichung der schwingenden Bewegung macht die Voraussetzung, daß der betrachtete Massenpunkt ohne Abgabe von Bewegung, also ohne Widerstand schwingt, denn in Gleichung II setzen wir ausdrücklich die von der schwingenden Masse bei der Rückkehr in die Gleichgewichtslage gewonnene lebendige Kraft gleich der Arbeit, welche dazu verwandt ist, um die Masse aus der Gleichgewichtslage in die abgelenkte Lage  $\alpha$  zu bringen. Hat die schwingende Masse bei ihrer Bewegung einen Widerstand zu überwinden, so wird das Gesetz der Bewegung ein anderes. Wir haben schon § 62 bei Besprechung der inneren Reibung den Fall behandelt, daß der Widerstand, welchen die Bewegung erfährt, der augenblicklichen Geschwindigkeit proportional ist. Die Gleichung I wird, wie wir dort sahen, dann folgende

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 y - \frac{2\gamma}{m} v,$$

wenn  $\gamma$  der Widerstand ist, welcher der Geschwindigkeit Eins entspricht, eine Gleichung, die wir entsprechend wie § 62 schreiben können

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + k^2 y = 0.$$

Wir haben dort bereits die Lösung dieser Gleichung angegeben. Setzen wir  $A$  und  $B$  zwei durch die Umstände, unter welchen die Bewegung eingeleitet ist, zu bestimmende Konstanten, so wird

$$y = e^{-\varepsilon t} \{ A e^{t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + B e^{-t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \}.$$

Wir fanden dort ebenfalls schon, daß eine schwingende Bewegung nur eintritt, wenn  $k > \varepsilon$ , somit die Exponenten in der Klammer imaginär werden. Nehmen wir an, das Bewegliche sei zum Beginne der Bewegung um  $\alpha$  aus der Gleichgewichtslage gebracht, und es beginne die Bewegung zur Zeit  $t = 0$ , so wird nach § 62 die Gleichung der Schwingung

$$y = \alpha e^{-\epsilon t} \left\{ \cos t \sqrt{k^2 - \epsilon^2} + \frac{\epsilon}{\sqrt{k^2 - \epsilon^2}} \sin t \sqrt{k^2 - \epsilon^2} \right\}.$$

Da sowohl der Kosinus als der Sinus alle ihnen möglichen Werte annehmen, wenn  $t$  von 0 bis zu einem solchen Werte  $T$  zunimmt, daß

$$T \sqrt{k^2 - \epsilon^2} = 2\pi,$$

folgt, daß dieses  $T$  die Dauer einer ganzen Schwingung, eines Hin- und Herganges des Beweglichen ist, jedesmal, wenn die Zeit um diesen Wert von  $T$  wächst, hat eine ganze Schwingung des Beweglichen stattgefunden. Führen wir diese Schwingungsdauer in die Gleichung ein, wird

$$y = \alpha e^{-\epsilon t} \left\{ \cos 2\pi \frac{t}{T} + \epsilon \frac{T}{2\pi} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right\}.$$

Der wesentliche Unterschied dieser als gedämpfte bezeichneten Schwingungen gegenüber den einfachen Schwingungen ist der, daß die Amplituden kleiner werden, denn es ist zur Zeit

$$\begin{array}{ccccccc} t = 0 & \frac{T}{2} & T & 3 \frac{T}{2} & \dots \\ y = \alpha & - \alpha e^{-\epsilon \frac{T}{2}} & \alpha e^{-\epsilon T} & - \alpha e^{-\epsilon 3 \frac{T}{2}} & \dots \end{array}$$

Die Amplituden bilden eine geometrische Reihe, deren Quotient, wenn  $\alpha$  den ursprünglichen Ausschlag nach der einen Seite, sagen wir nach rechts mit dem ersten nach links, den ersten nach links mit dem zweiten nach rechts usw. vergleichen,  $e^{-\epsilon \frac{T}{2}}$  ist. Wir haben im § 62 bereits gesehen, wie der natürliche Logarithmus dieses Quotienten, das logarithmische Dekrement der Schwingungen, das Maß des Widerstandes ist, welches die schwingende Bewegung findet.

Auch wenn  $\epsilon > k$ , kann eine Bewegung stattfinden, wenn auch keine schwingende. Wenn das Bewegliche aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und dann sich selbst bzw. den es gegen die Gleichgewichtslage hinziehenden Kräften überlassen wird, so kehrt es in die Gleichgewichtslage zurück und vollführt Schwingungen um dieselbe zu vollführen. Man nennt die Bewegung aperiodisch gedämpfte. Unsere Gleichung

$$y = e^{-\epsilon t} \left\{ A e^{t \sqrt{\epsilon^2 - k^2}} + B e^{-t \sqrt{\epsilon^2 - k^2}} \right\}$$

stellt die Bewegung in der beschriebenen Weise dar, wie eine Bestimmung der Konstanten aus den angegebenen Bedingungen ergibt. Zur Zeit  $t = 0$  ist  $y = \alpha$ , somit

$$\alpha = A + B.$$

Zur Zeit  $t = 0$  ist auch die Geschwindigkeit gleich Null, also

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Differenzieren wir nach den Regeln der mathematischen Einleitung, wird

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon e^{-\varepsilon t} \{ A e^{t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + B e^{-t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \} \\ + e^{-\varepsilon t} \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \{ A e^{t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} - B e^{-t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \}.$$

Setzen wir  $t = 0$ , so wird

$$0 = -\varepsilon(A + B) + (A - B)\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Aus dieser und der Gleichung für  $A + B$  ergibt sich

$$A = \frac{1}{2}\alpha \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \right); \quad B = \frac{1}{2}\alpha \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \right)$$

und damit

$$y = \frac{1}{2}\alpha \left\{ \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \right) e^{-t(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2})} + \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \right) e^{-t(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2})} \right\}.$$

Mit wachsendem  $t$  wird demnach, da die Exponenten beider Glieder der Klammer negativ sind, der Wert von  $y$  stetig kleiner, um, streng genommen, erst wenn  $t$  unendlich wird, gleich Null zu werden. Einen negativen Wert kann  $y$  nie annehmen, es kann somit das Bewegliche nie auf die andere Seite der Gleichgewichtslage hinübertreten, es kann keine Schwingung eintreten.

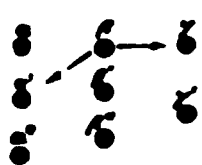
Die aperiodisch gedämpften Bewegungen spielen eine große Rolle in der Galvanometrie; wir werden deshalb in der Elektrizitätslehre auf dieselben zurückkommen. An dieser Stelle betrachten wir überhaupt nur ungedämpfte oder so schwach gedämpfte Schwingungen, daß wir die Dämpfung außer acht lassen dürfen.

## § 127.

**Schwingung von Punktreihen. Entstehung der Wellen.** Wenn wir in einer Reihe von Punkten, welche durch Kräfte, die zwischen den einzelnen Punkten tätig sind, in einer bestimmten Lage, der Gleichgewichtslage, festgehalten werden, einen Punkt in eine schwingende Bewegung versetzen, so wird dadurch nicht nur das Gleichgewicht dieses einen Punktes gestört, sondern das der ganzen Reihe. Da die Gleichgewichtslage durch die Wirkung der übrigen Punkte bedingt wird, so muß dadurch, daß ein Punkt seine Lage ändert, zunächst die der angrenzenden Punkte gestört werden und von diesen sich die Gleichgewichtsstörung auf immer weitere übertragen.

Wir nehmen an, daß die einzelnen Punkte sich anziehen, und daß die Anziehungskraft sich ändert mit der Entfernung der Punkte voneinander.

Fig. 227.



Überdies setzen wir voraus, daß der vollständigen Annäherung der Punkte abstoßende Kräfte entgegenwirken, die ebenfalls mit der Entfernung der Punkte ab-

nach einem andern Gesetze als die anziehenden Kräfte sich ändern. Nehmen wir an, daß mit einer Annäherung der Punkte die abstoßenden Kräfte rascher wachsen als die anziehenden, so ist durch ein System sich



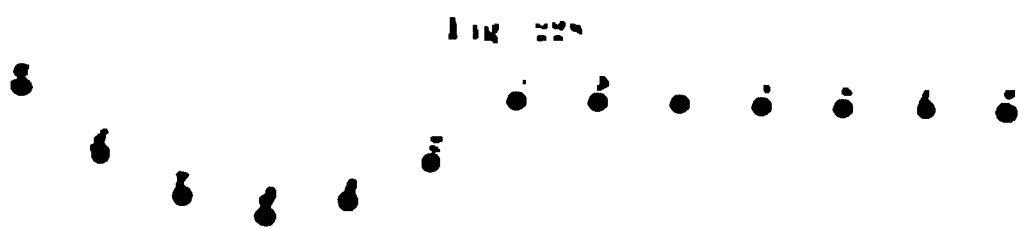
Kräfte die Gleichgewichtslage der Punkte vollständig bestimmt. In dieser sind die an jedem einzelnen Punkte nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte gleich. Wird nun der Punkt  $\alpha$  Fig. 227 aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und z. B. nach  $\alpha'$  versetzt, so wird dadurch der Abstand zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  größer. Durch die Änderung des Abstandes  $\alpha\beta$  in  $\alpha'\beta$  werden die auf  $\beta$  von  $\alpha$  wirkenden Kräfte geändert; sowohl die anziehenden als die abstoßenden werden kleiner. Da aber die Abstoßungen sehr viel rascher abnehmen als die Anziehungen, so ist der Erfolg dieser Änderungen, daß  $\beta$  jetzt stärker nach  $\alpha'$  gezogen wird. Da in der Gleichgewichtslage die Wirkung der an  $\beta$  angreifenden Kräfte sich aufhebt, so muß jetzt, da die Anziehung nach  $\alpha'$  zugenommen hat, der Punkt  $\beta$  sich  $\alpha$  zu nähern suchen, aber nicht in der Richtung  $\beta\alpha'$ , sondern in einer andern Richtung  $\beta\beta'$ . Denn mit der Bewegung von  $\beta$  nach unten hin ändert sich ebenfalls der Abstand  $\beta\gamma$ , und auch hier muß wegen der raschern Abnahme der abstoßenden Kräfte die Anziehung überwiegen. Auf den Punkt  $\beta$  wirkt daher eine nach  $\alpha'$  und eine nach  $\gamma$  gerichtete Anziehung ein,  $\beta$  wird sich also in der Richtung der Resultierenden nach  $\beta'$  bewegen.

Bewegt sich der Punkt  $\alpha$  nach  $\alpha''$ , so muß  $\beta$  aus eben den Gründen folgen und sich nach  $\beta''$  bewegen, zugleich muß aber  $\gamma$  seine Ruhelage verlassen, da jetzt die Anziehung von  $\beta$  auf  $\gamma$  die Abstoßung überwiegt, und von  $\gamma$  sich nach  $\gamma'$  bewegen.

Wenn demnach  $\alpha$  das erste Viertel seiner Oszillation zurückgelegt hat, ist die Bewegung auf der Punktreihe bis zum Punkte  $\delta$  fortgeschritten,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  haben ihre Ruhelage verlassen; die Gestalt der Punktreihe ist die Fig. 227 dargestellte.

Wenn  $\alpha$  in seiner Bewegung umkehrt und in der folgenden Zeit gegen die Ruhelage sich bewegt, wird sich  $\beta$  zunächst wegen der Geschwindigkeit, welche es in  $\beta''$  besitzt, noch eine Strecke weiter bewegen, und dann ebenfalls durch die von  $\alpha$  und  $\gamma$  ausgeübten Anziehungen zur Ruhelage zurückkehren. Das Gleiche wird etwas später mit  $\gamma$  der Fall sein. Hat  $\alpha$  dann die Ruhelage erreicht, so wird  $\beta$ ,  $\gamma$  die in Fig. 228 angedeutete Lage haben. Die Bewegung von  $\gamma$  hat aber während dieser Zeit die Bewegung von  $\delta$  zur Folge gehabt, und diese wieder die Bewegung von  $\epsilon$  und  $\zeta$ , gerade wie sich vorhin  $\beta$  und  $\gamma$  infolge der Bewegung von  $\alpha$  bewegten. Der Punkt  $\delta$  hat in dieser Zeit seinen größten Abstand erreicht, da  $\gamma$  denselben schon überschritten, und in dem in Fig. 228 dargestellten Momente sowohl  $\gamma$  als  $\epsilon$  den Punkt  $\delta$  gegen seine Gleichgewichtslage hinziehen. Wenn also  $\alpha$  in seiner Ruhelage angekommen ist, hat ein in einer gewissen Entfernung von  $\alpha$  liegender Punkt seinen größten Abstand erreicht und ist im Begriffe, den Rückweg gegen die Ruhelage anzutreten, und die Bewegung überhaupt hat sich bis zur doppelten Entfernung, nämlich von  $\alpha$  bis  $\eta$  fortgepflanzt. Fig. 228 stellt die gegenseitige Lage der Punkte in diesem Augenblicke dar.

In der darauf folgenden Zeit bewegt sich der Punkt  $\alpha$  über die Ruhelage hinaus nach  $\alpha'''$  (Fig. 229); die Punkte  $\beta$  und  $\gamma$  folgen; der Punkt  $\delta$ , der im Augenblicke, als  $\alpha$  die Ruhelage passierte, seine rückgängige Be-



Die Strecke, über welche sich die oszillierende Bewegung während einer ganzen Oszillation des Punktes  $\alpha$  verbreitet, hat die Gestalt einer Welle, deshalb nennt man sie eine Welle oder Wellenlänge. Auf dieser Strecke sind alle Oszillationsphasen, welche der einzelne oszillierende Punkt nach und nach annimmt, nebeneinander vorhanden, weil jeder Punkt auf dieser Strecke seine Oszillation um ein wenig später beginnt, und dann gerade so zurücklegt wie der Punkt  $\alpha$ .

Die einzelne Welle besteht aus zwei kongruenten Teilen, einem vordern und einem hintern, dem Wellenberge und dem Wellental, in denen die homologen Punkte, das heißt diejenigen, welche gleich weit vom Anfange jeder Wellenhälfte entfernt sind, mit gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten begabt sind. Die gleich weit von dem Anfange jeder Wellenhälfte liegenden Punkte befinden sich daher in entgegengesetzten Phasen. Um diesen Gegensatz auszudrücken, ist auch der Name Wellenberg und Wellental gewählt worden, jeder der Hälften kann man den Namen Wellenberg und Wellental beilegen.

Bei der fortschreitenden Bewegung teilt sich die Reihe in eine Folge solcher Wellenlängen, und wenn die Verhältnisse in der ganzen Reihe dieselben sind, so ist auch die Länge der Wellen in der ganzen Punktreihe die gleiche. Hat sich demnach die Bewegung in einer Zeit  $t$  um die Länge  $x$  fortgepflanzt, und ist die Zeit  $t = n \cdot T$ , wo  $T$  wie vorhin die Oszillationsdauer eines der Punkte bedeutet, so hat sich die Länge  $x$  in  $n$  Teile von der Länge einer Welle zerlegt, in deren jeder alle Punkte sich gerade so bewegen, wie die zwischen  $\alpha$  und  $\nu$  gelegenen Punkte. Da nun unter dieser Voraussetzung auch die Oszillationsdauer immer dieselbe ist, so muß, da während der Zeit  $T$  die schwingende Bewegung sich um die Länge einer Welle fortpflanzt, die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Bewegung auf immer weitere Punkte überträgt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung konstant sein.

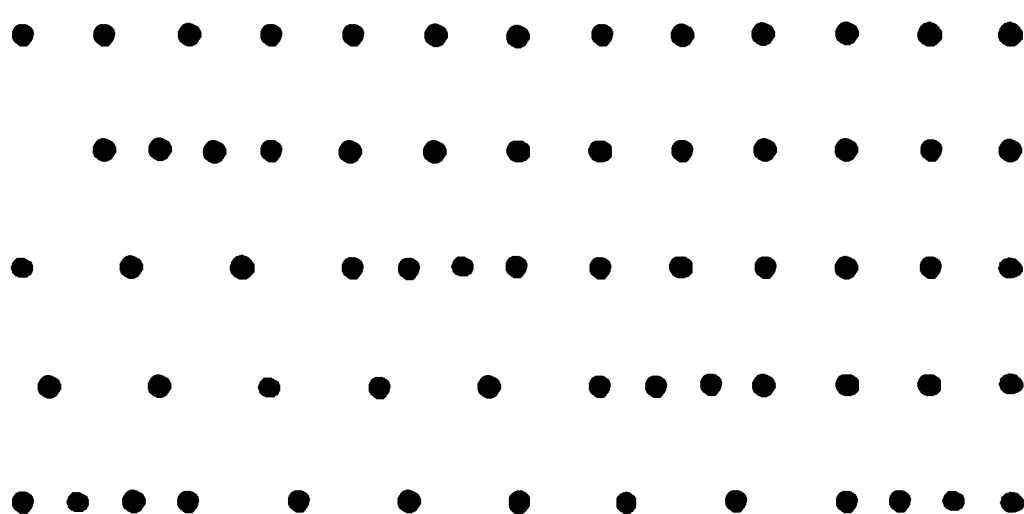
Wir haben bisher über die Richtung, in welcher die einzelnen Punkte sich bewegen, gar keine Voraussetzung gemacht, um die Betrachtung ganz allgemein zu halten.

Die Richtung wird bedingt durch diejenige, welche der Punkt  $\alpha$  anfänglich besitzt, und durch die Kräfte, welche auf die Punkte der Reihe einwirken.

Bewegt sich der Punkt  $\alpha$  anfänglich in der Richtung der Punktreihe, so sieht man sofort,

daß dann alle Punkte ebenfalls in derselben Richtung hin und hergehen müssen, da dann nur Kräfte auftreten, welche in dieser Richtung wirken. Die Richtung der Bewegung der Punkte fällt dann mit derjenigen, in welcher sich die Bewegung fortpflanzt, zusammen. Bei diesen, den sogenannten longitudinalen Schwingungen oder longitudinalen Wellen, tritt eine Gestaltsveränderung der Punktreihe nicht ein, sondern nur eine Verdich-

Fig. 231.



tung und abwechselnde Verdünnung, indem die Punkte sich abwechselnd einander nähern und voneinander entfernen (Fig. 231).

Ist die Bewegung der Punkte senkrecht gegen die Punktreihe, so nennt man die Schwingungen transversale; die Richtung, in welcher die Punkte sich bewegen, ist dann senkrecht gegen die Richtung, in welcher die Bewegung sich fortpflanzt. Eine solche transversale schwingende Bewegung tritt nicht immer dann ein, wenn die ursprüngliche Bewegung des zuerst bewegten Punktes eine transversale ist, sondern nur dann, wenn die Resultierende sämtlicher auf die einzelnen Punkte der Reihe, wenn sie die Gleichgewichtslage verlassen haben, wirkenden Kräfte gegen die Punktreihe senkrecht ist. Wir werden später Fälle der Art zu betrachten haben.

Möglich ist es ferner, daß die longitudinale und transversale Bewegung sich kombiniert und daß die einzelnen Punkte dadurch geneigte oder krummlinige Bahnen beschreiben. Wir werden letztere bei einer Art Wasserwellen finden.

### § 128.

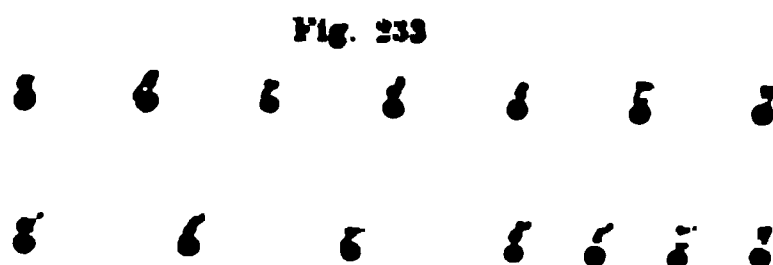
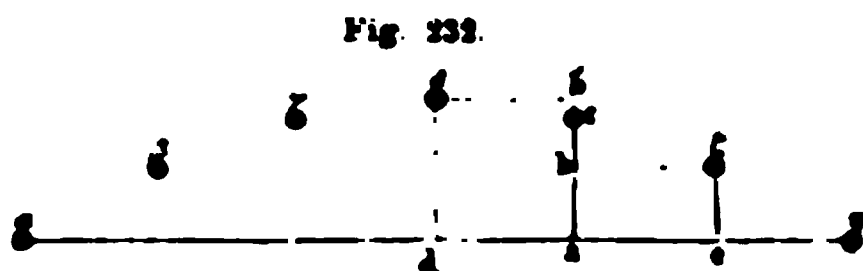
**Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe.** Um die Bewegung der einzelnen Punkte einer Reihe vollständig darzustellen, müssen wir für jeden Zeitpunkt den Ort jedes Punktes der Reihe, sowie seine Geschwindigkeit der Größe und Richtung nach bestimmen können. Wir müssen demnach auch hier, wie bei der oszillierenden Bewegung eines Punktes, eine Gleichung aufsuchen, welche uns die zu bestimmenden Größen als abhängig von der Zeit und von ihrer Lage in der Punktreihe wiedergibt, denn nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen hängt der Bewegungszustand eines Punktes der Reihe sowohl von der Zeit, als auch von der Lage des Punktes in der Reihe ab. Für einen gegebenen Zeitmoment ist die Bewegung der Punkte der Reihe je nach ihrer Lage verschieden, und für eine gegebene Lage ist sie eine andere zu verschiedenen Zeiten.

Um zu der Gleichung zu gelangen, betrachten wir einen beliebigen Punkt der Reihe, dessen Entfernung von dem Anfangspunkt der Bewegung, das heißt von dem Punkte, den wir in eine schwingende Bewegung versetzten, gleich  $x$  sei, und suchen dessen Bewegung zur Zeit  $t$  zu bestimmen. Wir gelangen dazu, indem wir die Kräfte aufsuchen, welche die Bewegung des Punktes bewirken.

Wie die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zeigen, werden die Punkte der Reihe nach und nach von der Bewegung ergriffen, und die Folge davon ist, daß die nebeneinander liegenden Punkte nie gleich weit, sondern der eine mehr, der andere weniger von der Gleichgewichtslage entfernt sind. Die Punkte sind deshalb auch relativ gegeneinander verschoben, das heißt ihre Stellung gegeneinander ist eine andere als die der Gleichgewichtslage entsprechende. Da wir nun voraussetzen, daß die Punkte sich durch die zwischen ihnen tätigen Kräfte im Gleichgewicht halten, so müssen bei einer solchen Verschiebung der Punkte gegeneinander Kräfte tätig sein, welche die Punkte in ihre relative Gleichgewichtslage zurückzubringen suchen. Wir setzen voraus, daß die Verschiebungen so klein sind, daß wir, wie bei den elastischen Kräften, immer die Größe dieser Kräfte der Größe der Verschiebung proportional setzen dürfen.

Es stelle nun  $\alpha\delta\eta$  (Fig. 232) die Lage der Punkte in einem Stücke r Punktreihe, welches in Bewegung ist, dar, sei es bei transversaler, sei bei longitudinaler Schwingung.

Die Bewegung transversal, so sind die Abstände der Punkte  $\beta, \gamma, \dots$  von  $\alpha\eta$  in der That die Abstände der Punkte von der Gleichgewichtslage. Schwingen die Punkte longitudinal, so stellen die Abstände der Punkte von  $\alpha\eta$  die Verschiebungen der Punkte aus der Gleichgewichtslage (Fig. 233) dar, indem die Verschiebungen in dem Orte der Gleichgewichtslage,



B.  $\alpha\beta' - \alpha\beta, \alpha\gamma' - \alpha\gamma, \dots$  senkrecht zu  $\alpha\eta$  aufgetragen sind.

Betrachten wir irgend drei nebeneinander liegende Punkte, z. B.  $\delta, \epsilon, \zeta$ .  $\delta\epsilon$  ist die Verschiebung des Punktes  $\epsilon$  gegen  $\delta$  der Differenz der senkrechten Abstände  $d\delta - a\epsilon$  und ebenso die Verschiebung von  $\epsilon$  gegen  $\zeta$  der Differenz  $a\epsilon - c\zeta$  proportional. Schwingen die Punkte longitudinal, so sind die Differenzen  $\epsilon b'$  und  $\epsilon b$  die Verschiebungen der Punkte gegeneinander selbst, wie sich aus der eben angeführten Konstruktion ergibt. Schwingen die Punkte transversal, so wird, wenn wir voraussetzen, daß die Amplituden der Schwingung sehr klein sind, eine merkliche Veränderung in den Abständen der Punkte nicht eintreten, es ist  $\delta\epsilon$  von  $ad$  nur um eine selbst gegen  $ad$  verschwindende Größe verschieden. Es bildet dann aber die Verbindungslinie beider Punkte mit der Verbindungslinie in der Gleichgewichtslage einen Winkel, in derselben Art, wie wir es bei der Torsion fanden. Die Tangente dieses Verschiebungswinkels, wie wir ihn damals nannten, oder auch da die Winkel so klein sind, daß wir für die Tangente den Bogen einsetzen dürfen, der Verschiebungswinkel selbst, ist gleich den Quotienten aus der Verschiebung der Moleküle und dem Abstände der Moleküle in der Gleichgewichtslage. Der Verschiebungswinkel zwischen  $\delta$  und  $\epsilon$  ist  $\epsilon\delta b' = \frac{\epsilon b'}{ad}$ . Der zwischen  $\epsilon$  und  $\zeta$  ist  $\frac{\epsilon b}{ac}$ .

Setzen wir für unsere Punktreihe bzw. für die Reihe von Molekülschichten, welche uns die Punktreihe darstellt, die früher erkannten Gesetze der Elastizität als gültig voraus, so folgt, daß zwischen zwei gegenwärtig verschobenen Molekülschichten Kräfte tätig sind, welche sie in die relative Gleichgewichtslage zurückzubringen suchen, und welche der Größe der Verschiebung proportional sind. Das Maß dieser Kräfte ist der Elastizitätskoeffizient, die Kraft, mit der die Moleküle gegen ihre Gleichgewichtslage hingetrieben werden, wenn die Verschiebung dem ursprünglichen der Gleichgewichtslage entsprechenden Abstände gleich geworden ist. Bezeichnen wir den Elastizitätskoeffizienten mit  $c$ , den der Gleichgewichtslage entsprechenden Abstand der Moleküle mit  $dx$ , so ist die einer Verschiebung  $\xi$  der Moleküle entsprechende Kraft

$$f = - \frac{\xi}{dx} c.$$

Wir sahen weiter bei Besprechung der Torsionserscheinungen, daß bei einer Verschiebung der Molekülschichten gegeneinander ohne Vergrößerung des Abstandes der Schichten, eine die Schichten gegen ihre relative Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft auftritt, welche der Größe des Verschiebungswinkels proportional ist. Diese Kraft war für die Einheit des Verschiebungswinkels ein gewisser Bruchteil des Elastizitätskoeffizienten. Ist demnach  $a$  eine Konstante, die kleiner als Eins ist, so können wir die einem Verschiebungswinkel  $\alpha$  entsprechende Kraft setzen

$$f_1 = a e \alpha.$$

Diese Sätze dürfen wir direkt auf unsere Reihe von Molekülschichten anwenden; wir setzen dann voraus, daß zwischen den Punkten des Systems, von dem die betrachteten Punkte eine Reihe bilden, ebensolche Kräfte wirken, wie wir sie früher als elastische Kräfte erkannt haben.

Da nun in unserer Punktreihe die Verschiebung des Punktes  $\varepsilon$  gegen  $\delta$  gemessen nach dem ursprünglichen Abstände der Punkte in der Gleichgewichtslage, bzw. bei transversaler Bewegung der Verschiebungswinkel gleich  $\frac{\varepsilon b'}{a d}$  ist, so ist die Kraft, mit welcher der Punkt in seine Gleichgewichtslage in bezug auf  $\delta$  gezogen wird, also nach  $b'$  hin

$$a \frac{\varepsilon b'}{a d} e,$$

wenn wir mit  $e$  die Elastizität der Punktreihe bezeichnen, und  $a$  die oben angeführte Konstante ist, welche für longitudinale Schwingungen gleich Eins ist.

Die Verschiebung des Punktes  $\varepsilon$  gegen  $\zeta$  bewirkt, daß  $\varepsilon$  gegen  $b$  hingetrieben wird, gegen die Stelle, in welcher er gegen  $\zeta$  in seiner Gleichgewichtslage ist; die Größe der Kraft, welche in diesem Sinne wirkt, ist

$$a \frac{\varepsilon b}{a c} e = a \frac{\varepsilon b}{a d} e.$$

Diese beiden Kräfte wirken auf den Punkt  $\varepsilon$  nach gerade entgegengesetzter Richtung, die ihn wirklich bewegende Kraft ist somit die Differenz beider, somit

$$a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{a d} e.$$

Da wir es hier mit molekularen Kräften zu tun haben, welche von Molekülschicht zu Molekülschicht wirken, so wird die Bewegung des Punktes  $\varepsilon$  durch weiter entfernte Punkte nicht beeinflusst; die soeben abgeleitete bewegende Kraft ist somit die ganze den Punkt  $\varepsilon$  bewegende Kraft.

Um die durch diese Kraft dem Punkte  $\varepsilon$  erteilte Beschleunigung zu erhalten, haben wir nur dieselbe durch die Masse  $m$  des bewegten Punktes  $\varepsilon$  zu dividieren, wir erhalten dann

$$a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{a d} \frac{e}{m}.$$

Anstatt der Masse  $m$  des einzelnen Punktes oder der einzelnen Molekülschicht, zu welcher der Punkt gehört, können wir bequemer die Masse pro Längeneinheit der Punktreihe einführen, die wir als die Dichtigkeit

Reihe bezeichnen wollen. Die Anzahl der Punkte in der Längeneinheit Reihe ist

$$n = \frac{1}{ad}.$$

Dichtigkeit der Punktreihe ist somit

$$nm = \frac{m}{ad} = \delta.$$

ren wir diesen Wert in obigen Ausdruck ein, so wird die Beschleunigung

$$a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad} \frac{e}{\left(\frac{m}{ad}\right) ad} = a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad^2} \frac{e}{\delta}.$$

Die Beschleunigung ist diejenige, welche der betrachtete Punkt der Reihe zum betrachteten Zeitmoment, also zur Zeit  $t$ , nachdem die Bewegung vom Ausgangspunkte derselben begonnen hat, erhält. Dieselbe ist somit  $\frac{dv}{dt}$ , gleich dem Quotienten aus der in der unendlich kleinen der  $t$  folgenden Zeit  $dt$  stattfindenden Änderung der Geschwindigkeit  $dv$  der Zeit  $dt$ , es ist also

$$\frac{dv}{dt} = a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad^2} \frac{e}{\delta}.$$

Differenz  $\varepsilon b' - \varepsilon b$  hängt, wie man schon unmittelbar an der Fig. 232 sieht, ab von der Lage des Punktes  $\varepsilon$  in der Reihe. Um das auszudrücken, lassen wir die Entfernung des betrachteten Punktes von dem Ausgangspunkte der Bewegung mit  $x$  bezeichnen und den Abstand  $ad$  der einzelnen Punkte mit  $dx$ , sei ferner der Abstand  $\varepsilon a$  des betrachteten Punktes  $\varepsilon$  von der Gleichgewichtslage gleich  $y$ . Da nun die in einem bestimmten Momente, also zur Zeit  $t$ , vorhandene Verschiebung der einzelnen Punkte aus der Gleichgewichtslage abhängig ist von der Lage des Punktes in der Reihe, und von dem Werte von  $x$ , so können wir ganz allgemein  $y$  als eine Funktion von  $x$  bezeichnen, also

$$y = f(x).$$

Abstand des vorhergehenden Punktes  $\delta$  von der Gleichgewichtslage  $y'$  dann, da dieser Punkt dem Anfangspunkt um  $dx$  näher liegt,

$$y' = f(x - dx) = y - dy'.$$

man nämlich die Änderung von  $y$ , wenn  $x$  um  $dx$  wächst, mit dem positiven Vorzeichen versieht, so müssen wir die Änderung von  $y$ , wenn in die Funktion einen um  $dx$  kleineren Wert einführen, mit dem negativen Vorzeichen versehen.

Der Abstand des auf  $\varepsilon$  folgenden Punktes  $\zeta$  vom Anfangspunkte der Bewegung ist  $x + dx$ , für den Abstand des Punktes von seiner Gleichgewichtslage  $\varepsilon \zeta = y''$  erhalten wir demnach

$$y'' = f(x + dx) = y + dy''.$$

Da nun  $\varepsilon b' = y' - y$ ,  $\varepsilon b = y - y''$ , so folgt

$$\varepsilon b' - \varepsilon b = (y - dy' - y) - (y - (y + dy'')) = dy'' - dy'.$$

Die Differenz  $\varepsilon b' - \varepsilon b$ , welcher die Beschleunigung des betrachteten Punktes proportional ist, ist somit gleich dem Unterschiede zwischen den Veränderungen, welche die  $f(x)$ , die uns die Abstände  $y$  zu einer bestimmten Zeit darstellt, erfährt, wenn der Wert  $x$  einmal um  $dx$ , das anderemal  $2dx$  größer wird. Denn es ist  $dy'$  die Änderung, welche  $y$  erfährt, wenn wir von  $\delta$  aus um  $dx$  weiter zu  $\varepsilon$  gehen und  $dy''$  diejenige, wenn wir von  $\varepsilon$  aus nochmals um  $dx$ , also von  $\delta$  aus um  $2dx$  zu  $\zeta$  gehen. Bezeichnen wir diesen Unterschied in den Veränderungen mit  $d^2y$ , so wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = a \frac{c}{\delta} \frac{d^2y}{dx^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

wenn wir den Faktor  $a \frac{c}{\delta} = c^2$  und die in dem betrachteten Augenblicke durch die wirksamen Kräfte erteilte Beschleunigung als zweiten Differentialquotienten des Weges  $y$  nach der Zeit schreiben. Unsere Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

bestimmt die Beschaffenheit der von uns gesuchten Funktion, welche uns für jeden Moment und für jede Lage des Punktes in der Reihe den Abstand desselben von der Gleichgewichtslage anzugeben in den Stand setzt. Sie sagt nämlich direkt aus, daß die Unterschiede der von einem und demselben Punkte in aufeinander folgenden Zeiten  $dt$  durchlaufenen Strecken, dividiert durch das Quadrat der Zeit, proportional sei dem Unterschiede zwischen den Differenzen der in demselben Zeitmomente vorhandenen Abstände der Punkte, welche von dem betrachteten Punkte um  $dx$  und um  $2dx$  entfernt sind, von der Gleichgewichtslage dividiert durch das Quadrat von  $dx$ . Das heißt aber nichts anders, als daß die Werte von  $y$ , welche ein bestimmter Punkt nach und nach annimmt, in demselben Momente auf einer gewissen Strecke der Punktreihe nebeneinander vorhanden sein müssen. Die Gleichung, welche uns die Lage der Punkte gibt, muß also so beschaffen sein, daß sie uns für einen gegebenen Punkt, also für ein gegebenes  $x$ , dieselben Werte von  $y$  nach und nach bei wachsender Zeit liefert, welche sie uns für eine gegebene Zeit für die nebeneinander liegenden Punkte, also für ein wachsendes  $x$ , ergibt.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich, daß die gefundene Gleichung allein uns noch keine bestimmte Funktion von  $x$  und  $t$  liefert, denn nach den Entwicklungen der mathematischen Einleitung erkennt man, daß jede Funktion von der Form  $y = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$  oder  $y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$  oder auch die Summe zweier solcher Funktionen der gefundenen Bedingungsgleichung entspricht. Denn bilden wir nach den dort gefundenen Regeln für irgend eine beliebige Funktion die in unserer Gleichung stehenden Differentialquotienten, so besteht immer die gefundene Gleichung, welche Funktion wir auch wählen. Es müssen deshalb noch weitere Bedingungen gegeben sein, welche die Natur der Funktion feststellen. In unserm Falle sind dieselben durch vorhanden, daß wir die Bewegung des Ausgangspunktes der Bewegung kennen, also die Funktion  $y = f(t)$  für  $x$  gleich Null. Daß die Bedingung vollkommen genügt, ergibt sich daraus, daß, wenn wir irgend einen Punkt der Reihe  $y$  als Funktion von  $t$  kennen, uns der



Zusammenhang zwischen  $t$  und  $x$  genügt, um sie für jeden Wert anzugeben.

Für den Ausgangspunkt der Bewegung, für welche  $x$  gleich Null ist, wird eine einfache schwingende Bewegung vorausgesetzt, welche nach gegeben ist durch

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$\alpha$  die Amplitude und  $T$  die Schwingungsdauer der Bewegung ist. Es folgt dann, daß die Bewegung unserer Punktreihe dargestellt wird

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) + \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right)$$

Man erkennt sofort, daß das eine Glied auf der rechten Seite die Richtung der Bewegung nach der positiven Seite der  $x$ , das andere nach der entgegengesetzten Seite darstellt. Für  $x = 0$  wird die Bewegung der beiden Glieder der rechten Seite

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Daß diese Gleichung der für die Beschleunigung abgeleiteten entspricht, folgt zunächst, wenn man die beiden in derselben vorkommenden Differentialquotienten bildet. Da bei der Berechnung der Differentialquotienten nach  $t$  die veränderliche  $x$  als konstant zu betrachten ist, so wird nach E IV

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) + \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right)$$

weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) &= - \frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{T^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) - \frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{T^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= - \frac{4\pi^2}{T^2} y. \end{aligned}$$

Für die Bildung der Differentialquotienten nach  $x$  ist  $t$  als konstant zu betrachten, deshalb wird

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{cT} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) - \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{cT} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= - \frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) + \frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= - \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} y \\ c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= - \frac{4\pi^2}{T^2} y = \frac{d^2 y}{dt^2}. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich aber auch, daß nach der Gleichung für  $y$  die Abstände der nebeneinander liegenden Punkte jene Werte zu einer gegebenen Zeit haben, welche der einzelne Punkt nacheinander durchläuft, daß also die dargestellte Bewegung jene ist, welche uns die Betrachtungen des vorherigen Paragraphen lieferten. Da wir zu diesem Nachweis nur die nach

der einen der beiden Richtungen sich fortpflanzende Bewegung zu tun nötig haben, wollen wir zunächst untersuchen, welches der Glieder uns die Fortpflanzung der Bewegung nach der positiven, jene nach der negativen Seite gibt.

Die Bewegung irgend eines Punktes der Reihe wird von dem ab, in welchem sich die Bewegung bis zu ihm ausgebreitet hat, wie diejenige des Ausgangspunktes der Bewegung. Denn legen wir Gleichung  $x$  einen bestimmten Wert, etwa  $x_1$  bei, so wird die Bewegung dieses Punktes dargestellt durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left( \frac{t \pm \frac{x_1}{c}}{T} \right),$$

wo für den betrachteten Punkt auf der rechten Seite der Gleichung ein Vorzeichen zu nehmen ist, wenn der Punkt auf der positiven, das auf der negativen Seite des Ausgangspunktes der Bewegung.

Ist  $t \pm \frac{x_1}{c} = 0$ , so beginnt der betrachtete Punkt seine Bewegung jedesmal, wenn von da ab  $t$  um  $T$  gewachsen ist, hat er eine Schwingung vollführt.

Nennen wir nun  $\tau$  die Zeit, welche nach dem Beginne der Bewegung in deren Ausgangspunkt verstrichen ist, bis die Bewegung zu dem betrachteten Punkte gelangt ist, so wird die Bewegung des letztern ebenfalls dargestellt durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left( \frac{t - \tau}{T} \right).$$

Es muß somit

$$t - \tau = t \pm \frac{x_1}{c}$$

sein, oder

$$t - \tau = t - \left( \pm \frac{x_1}{c} \right).$$

Daraus folgt, daß wir für ein positives  $x$  von den beiden Ausdrücken für  $y$  dasjenige wählen müssen, welches  $x$  mit dem positiven Vorzeichen enthält, daß somit, wenn wir der Einfachheit wegen  $\frac{\alpha}{2}$   $\alpha$  setzen, also annehmen würden, in dem Ausgangspunkte der Bewegung hätten wir dem Punkte die Amplitude  $2\alpha$  erteilt,

$$y = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right)$$

die nach der Seite der positiven  $x$  sich fortpflanzende Bewegung.

Zu irgend einer Zeit  $t = nT$  hat der Ausgangspunkt der Bewegung  $n$  Schwingungen vollführt, also  $n$  mal alle Werte zwischen  $+2\alpha$  und  $-2\alpha$  angenommen. In demselben Momente liefert aber auch in der Entfernung  $x = n \cdot cT$  unsere Gleichung  $n$  mal alle Werte zwischen  $+2\alpha$  und  $-2\alpha$  nebeneinander. Denn setzen wir  $t = nT$ , so wird

$$y = -\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{x}{cT},$$

mit für

$$\begin{array}{ccccc} x = () & x = \frac{1}{2} c T & x = \frac{1}{2} c T & x = \frac{3}{2} c T & x = c T \\ y = () & y = -\alpha & y = 0 & y = \alpha & y = () \end{array}$$

f. Die Reihe zeigt also das nebeneinander, was der Ausgangspunkt der Bewegung nacheinander zeigt, mit dem Unterschiede nur, daß die Amplitude der Schwingungen nur die Hälfte ist, weil die Bewegung des Ausgangspunktes sich nach beiden Seiten der Reihe mitteilt.

Die Strecke  $x = cT$  ist jene, welche wir im vorigen Paragraphen als eine Wellenlänge der sich fortpflanzenden Bewegung bezeichneten, über welche hin die Bewegung sich jedesmal fortpflanzt, wenn der Ausgangspunkt eine Schwingung vollführt. Die Gleichung zeigt, entsprechend den Entwicklungen des vorigen Paragraphen, daß die Wellenlänge in zwei konjugierte Hälften zerfällt, Wellenberg und Wellental, denn zwischen  $x = ()$  und  $x = \frac{1}{2} c T$  sind alle Werte von  $y$  negativ, die Punkte befinden sich auf der einen Seite der Gleichgewichtslage, zwischen  $x = \frac{1}{2} c T$  und  $x = c T$  sind alle Werte positiv. Dasselbe wiederholt sich in der ganzen Reihe, überall sind die Werte zwischen  $x = 2m \frac{c T}{2}$  und  $(2m + 1) \frac{c T}{2}$  negativ und zwischen  $(2m + 1) \frac{c T}{2}$  und  $(2m + 2) \frac{c T}{2}$  positiv. Der Bedeutung von  $T$  als einer Wellenlänge entsprechend, wollen wir

$$cT = \lambda$$

setzen.

Alle um irgend ein Vielfaches von  $\frac{\lambda}{2}$  vom Anfangspunkte der Bewegung entfernten Punkte befinden sich in der Gleichgewichtslage, sie befinden sich aber in entgegengesetzter Phase der Bewegung, denn ihre Geschwindigkeiten sind einander gleich, aber entgegengesetzt. Wir erhalten die Geschwindigkeiten in dem Quotienten

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Setzen wir  $t = nT$  und  $x = m\lambda$ , so wird

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi (n - m) = \alpha \frac{2\pi}{T};$$

setzen wir dagegen  $x = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$ , so wird

$$v = \alpha \frac{2\pi}{T} \cos \pi (2n - 2m + 1) = -\alpha \frac{2\pi}{T}.$$

Ebenso wie für diese Punkte können wir für alle übrigen der Reihe und ebenso für jeden Moment aus dieser Gleichung Größe und Richtung der Geschwindigkeit ableiten, so daß also unsere Gleichung für  $y$  die Bewegung der Punktreihe in allen ihren Einzelheiten bestimmt.

## § 129.

**Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung.** Unsere Entwicklung liefert uns weiter die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Bewegung in der Punktreihe ausbreitet. Wie wir schon vorhin bemerkt

$$\tau = \frac{x}{c}$$

die Zeit, während welcher sich die Bewegung durch die Strecke  $x$  pflanzt. Die in unserer Gleichung vorkommende Größe  $c$

$$c = \sqrt{a \frac{e}{\delta}}$$

ist somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung ist somit nicht von der Schwingungsdauer derselben, sondern nur von der Beschaffenheit der Punktreihe, deren Elastizität und Dichtigkeit, sowie der Richtung der Schwingungen, ob longitudinal oder transversal ab; für longitudinale Schwingungen ist  $a = 1$ , für transversale  $a < 1$ . Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist somit in einer Punktreihe überall die selbe, solange der Quotient aus Elastizität und Dichtigkeit nicht geändert wird.

Wir machen jedoch darauf aufmerksam, daß dieser Schluß nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung richtig ist, daß die Amplituden der Bewegung klein sind gegen die Wellenlänge, wenigstens dann, wenn die Schwingungen transversale sind. Sind die Amplituden nicht klein, so ist die bei transversalen Schwingungen geweckte Elastizität nicht mehr der Verschiebung der Punkte proportional, es tritt dann die Dichtigkeit der Punktreihe hinzu. In dem Falle hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge ab. Wir werden in der Lehre vom Licht diese Frage zurückkommen, wo wir auch Medien eigentümlicher Beschaffenheit kennen lernen werden, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenlänge abhängig ist, auch für Wellen, welche gegen die Amplituden groß sind.

Aus der Beziehung zwischen Wellenlänge und Schwingungsdauer

$$\lambda = c T$$

erhalten wir weiter auch für die Schwingungsdauer

$$T = \frac{\lambda}{c} = \lambda \sqrt{\frac{\delta}{a e}},$$

ein Ausdruck, der uns die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Wellenlänge und der Beschaffenheit der Punktreihe liefert. Gleichwohl erkennen wir, daß zur experimentellen Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit es nur der Messung der Wellenlängen und der Schwingungsdauer bedarf.

## § 130.

**Zusammensetzung mehrerer Bewegungen; Interferenz.** Wenn zugleich an verschiedenen Punkten einer Reihe schwingende Bewegungen erzeugt, so pflanzen sich dieselben von jeder Erregungsstelle aus in

he fort; es fragt sich nun, wie wird die Bewegung derjenigen beschaffen sein, welche von mehreren Bewegungen affiziert werden. Dieser Punkte, an welchem z. B. zwei Bewegungen zugleich ankommt, erhält dann zwei Impulse, es muß somit auch seine Bewegung durch diese Impulse bestimmt werden.

Das Resultat dieses Zusammenwirkens ergibt sich aus dem Grundsatz der Mechanik, daß wenn zwei Kräfte einen Punkt angreifen, dann wirkt, wie wenn sie allein vorhanden wäre. Wirken beide in derselben Richtung, so summieren sie sich einfach, die Bewegung des Punktes ist in jedem Momente gleich der Summe der Bewegungen, ebenso sind die Geschwindigkeiten und die durchlaufenen Strecken gleich der Summe der einzelnen Geschwindigkeiten und der mit diesen durchlaufenen Strecken. Wirken die Kräfte in verschiedenen Richtungen, so erhalten wir die resultierenden Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und durchlaufenen Strecken nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm.

Bei den schwingenden Bewegungen verfahren wir so, daß wir die resultierende Bewegung zu erhalten. Setzen wir zunächst voraus, daß die Bewegungen seien alle gleichgerichtet, so wird die Beschleunigung, die ein Punkt zur Zeit  $t$  erhält, gleich der Summe aller einzelnen Beschleunigungen, es ist deshalb auch die Geschwindigkeit des Punktes gleich der algebraischen Summe aller Geschwindigkeiten, welche ihm infolge der einzelnen ankommenden Bewegung erteilt wird. Entgegengesetzt gerichtete Bewegungen sind bei dieser Summe mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen.

Daraus folgt schließlich, daß wenn ein Punkt zur Zeit  $t$  infolge der ankommenden Bewegungen die Abstände  $y_1, y_2, y_3 \dots$  von der Gleichgewichtslage haben würde, sein Abstand  $Y$  gleich der Summe aller Abstände sein muß, oder es ist

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots$$

Wir sind nun sofort imstande für den Fall gleichgerichteter Bewegungen die resultierende Bewegung anzugeben. Wir betrachten zunächst zwei gleichgerichtete Bewegungen gleicher Schwingungsdauer, und nehmen an, daß in einer bestimmten Zeit zwei Bewegungen zu gleicher Zeit beginnen, deren Anfangspunkte um  $d$  voneinander entfernt seien, und die sich nach gleichen Richtungen der Reihe fortpflanzen.

Sei der Abstand irgend eines Punktes vom Ursprung der ersten Bewegung  $x$ , für diesen ist dann die Entfernung von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$

$$y = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Der Abstand des betrachteten Punktes von dem Ausgangspunkte der Bewegung ist dann, wenn wir annehmen, derselbe wäre um  $d$  weiter von dem betrachteten Punkte entfernt,  $x + d$ . Ist  $a'$  die Amplitude der Bewegung, so wird die Entfernung des betrachteten Punktes von der Gleichgewichtslage, wenn nur diese Bewegung zu ihm käme,

$$y_1 = a' \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x + d}{\lambda} \right).$$

Der resultierende Abstand ist die Summe beider, oder

$$Y = y + y_1 = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha' \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda} \right);$$

oder auch

$$Y = \left( \alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - \alpha' \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Bestimmen wir nun zwei Größen  $A$  und  $D$  so, daß

$$A \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} = \alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

$$A \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \alpha' \sin 2\pi \frac{d}{\lambda},$$

so wird der Ausdruck für  $Y$  gleich

$$Y = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda} \right),$$

und man erkennt, daß die resultierende Bewegung eine schwingende Bewegung von gleicher Schwingungsdauer und gleicher Wellenlänge  $\lambda$  ist, welche die einzelnen Bewegungen besaßen. Die Amplitude der schwingenden Bewegung ist gleich  $A$ ; die Phase derselben ist gegen die erste der beiden um  $D$ , gegen die zweite um  $d - D$  verschoben, das heißt, dieselbe findet so statt, als wenn ihr Ausgangspunkt von dem betrachteten Punkte um die Strecke  $D$  weiter entfernt wäre, als der Ausgangspunkt der ersten Bewegung.

Die Amplitude  $A$  ergibt sich aus den beiden Gleichungen, welche  $A$  und  $D$  bestimmen, indem wir beide Gleichungen quadrieren und addieren

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda},$$

und für  $D$  erhalten wir

$$\tan 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha' \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}}{\alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}},$$

oder auch

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}.$$

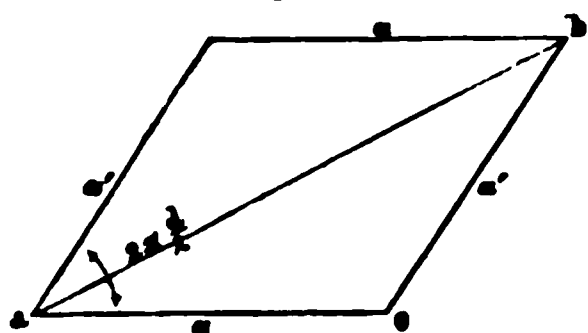
Die Gleichung für  $A$  zeigt, daß die resultierende Amplitude die Diagonale eines Parallelogrammes ist, welches wir aus den einzelnen Amplituden  $\alpha$  und  $\alpha'$  mit dem Winkel  $2\pi \frac{d}{\lambda}$  (Fig. 234) konstruieren, und zwar jene Diagonale, welche den von  $\alpha$  und  $\alpha'$  eingeschlossenen Winkel  $2\pi \frac{d}{\lambda}$  teilt. Denn es ist

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' \cos c$$

und da der Winkel  $c$  Nebenwinkel von  $a = 2\pi \frac{d}{\lambda}$  ist, so folgt

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = A^2.$$

Fig. 234.



immer ist in diesem Parallelogramm der Winkel, den  $ab$  und  $\alpha$  ein-  
 schließen, der die Phase bestimmende Winkel  $2\pi \frac{D}{\lambda}$ , denn es ist

$$ab : \alpha' = \sin c : \sin bac$$

$$\sin bac = \frac{\alpha'}{ab} \cdot \sin c = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}.$$

Die resultierende Amplitude sowohl als die Phase der resultierenden  
 Bewegung sind hiernach abhängig von den Amplituden und der Phasen-  
 ferenz der gegebenen Bewegungen. Ist die Phasendifferenz  $d$  eine be-  
 beliebige Zahl von ganzen Wellenlängen, so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos 2n\pi = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha'; \quad A = \alpha + \alpha'$$

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \sin 2n\pi = 0; \quad D = 0.$$

ist also die Phasendifferenz der gegebenen Bewegungen Null oder ein be-  
 beliebiges Vielfaches einer Wellenlänge, so ist die resultierende Amplitude  
 gleich der Summe der Teilamplituden, und die Phase der resultierenden  
 Bewegung ist dieselbe wie diejenige der Teilbewegungen. Man erkennt die  
 Notwendigkeit dieser Folgerung auch leicht aus der Natur der schwingen-  
 den Bewegung, denn in dem Falle wirken beide Bewegungen immer in  
 derselben Weise zusammen, da die Punkte, deren Entfernung voneinander  
 eine Wellenlänge ist, immer in der gleichen Phase der Bewegung sich  
 befinden.

Ist  $d = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$ , so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos (2n + 1)\pi = -1$$

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = 0,$$

omit

$$A = \alpha - \alpha', \quad D = 0$$

Die resultierende Amplitude ist die Differenz der Teilamplituden, die Phase  
 $\alpha$ , wenn  $\alpha > \alpha'$ , jene der ersten, wenn  $\alpha < \alpha'$ , jene der zweiten Bewegung.  
 Wenn die Gleichung der resultierenden Bewegung wird

$$Y = (\alpha - \alpha') \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Die Werte von  $Y$  bekommen also entgegengesetztes Vorzeichen, je nachdem  
 $\alpha > \alpha'$  oder  $\alpha < \alpha'$ . Zu gleichen Zeiten  $t$  vorhandene entgegengesetzte  
 Werte von  $Y$  bedeuten aber entgegengesetzte Phasen oder eine Phasen-  
 ferenz von einer halben Wellenlänge.

Sind  $\alpha$  und  $\alpha'$  einander gleich, so wird  $A = 0$ , die Bewegung hebt  
 sich also auf der ganzen Strecke, auf welcher beide Bewegungen zusammen-  
 wirken, auf. In der Tat erfahren dann alle Punkte zu gleichen Zeiten  $t$   
 stets entgegengesetzte an Größe gleiche Impulse.



Ist  $d = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$ , so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin (2n + 1) \frac{\pi}{2} = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2; \quad \text{tang } 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Das Quadrat der resultierenden Amplitude ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Amplituden und die Tangente des Winkels, welche die Phase der resultierenden Bewegung bestimmt, ist gleich dem Quotienten der beiden einzelnen Amplituden, wobei im Zähler jene steht, welche gegen die erste Bewegung, von deren Ausgangspunkt die Abstände  $x$  gerechnet sind, um eine ungerade Anzahl von ein viertel Wellenlängen verschoben ist.

An diesen Beispielen ist die Abhängigkeit der resultierenden Amplitude und Phase von den sie bestimmenden Umständen hinreichend deutlich zu erkennen.

Es möge nur noch bemerkt werden, daß der letzte Satz über die resultierende Amplitude und Phase, wenn die einzelnen Bewegungen die Phasendifferenz von  $\frac{1}{4}\lambda$  besitzen, uns unmittelbar in den Stand setzt, die resultierende Amplitude und Phase einer beliebigen Anzahl von schwingenden Bewegungen zu bestimmen, wenn wir die einzelnen Amplituden und Phasen kennen.

Haben wir nämlich eine Anzahl Bewegungen, deren erste ist

$$y_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

deren andere die Amplituden  $\alpha_2, \alpha_3 \dots$  haben und deren Anfangspunkte von dem der ersten um  $d_2, d_3 \dots$  entfernt sind, so sind deren Gleichungen

$$y_2 = \alpha_2 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x + d_2}{\lambda} \right)$$

$$y_3 = \alpha_3 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x + d_3}{\lambda} \right)$$

$$y_n = \alpha_n \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x + d_n}{\lambda} \right)$$

Die resultierende Bewegung ist dann

$$\begin{aligned} Y &= y_1 + y_2 + y_3 + \dots y_n = \\ &\left\{ \alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \cos 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \dots \alpha_n \cos 2\pi \frac{d_n}{\lambda} \right\} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - \\ &\left\{ \alpha_2 \sin 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \sin 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \dots \alpha_n \sin 2\pi \frac{d_n}{\lambda} \right\} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Nun ist

$$-\cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda} \right),$$

so daß die abgeleitete Gleichung für  $Y$  uns zeigt, daß wir die durch das Zusammenwirken beliebig vieler schwingender Bewegungen entstehende

stierende als die Resultierende zweier Wellen darstellen können, welche Phasendifferenz einer viertel Wellenlänge haben, und deren Amplituden  $a$  sind

$$A = a_1 + a_2 \cos 2\pi \frac{d_1}{\lambda} + a_3 \cos 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \cdots a_n \cos 2\pi \frac{d_n}{\lambda}$$

$$B = a_1 \sin 2\pi \frac{d_1}{\lambda} + a_2 \sin 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \cdots a_n \sin 2\pi \frac{d_n}{\lambda}.$$

die resultierende Amplitude und Phase erhalten wir dann

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \tan 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{B}{A}.$$

erhalten also stets eine schwingende Bewegung, welche mit jener der einzelnen gleiche Schwingungsdauer, somit auch gleiche Wellenlänge hat, die Amplitude  $R$  und Phase  $D$  wir berechnen können, wenn wir die Werte von  $a_1, a_2, \dots$  sowie von  $d_1, d_2, \dots$  kennen. Die resultierende Bewegung ist dann gegeben durch die Gleichung

$$Y = R \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x + D}{\lambda} \right).$$

### § 131.

**Interferenz von Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung pflanzen; Bildung stehender Wellen.** Wenn in einer unbegrenzten Reihe an einer Stelle eine schwingende Bewegung erregt wird, so pflanzt dieselbe sich nach beiden Seiten fort. Wenn deshalb an zwei Punkten der Ausgangspunkt einer solchen Bewegung vorhanden ist, so pflanzen sich zwischen diesen beiden Stellen die Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen fort. Die im vorigen Paragraphen entwickelten Interferenzgesetze geben uns auch für diesen Fall die resultierende Bewegung als Summe der in jenem Augenblicke vorhandenen Teilbewegungen. Es ergibt sich daraus in gewissen Fällen eine Bewegung dieser Strecke der Punkte von besonderer Art, deren Beschaffenheit wir hier ableiten wollen, für die sie später sehr oft zu betrachten haben. Wir nehmen deshalb hier den einfachsten Fall.

Es seien  $c$  und  $c'$  zwei um  $a$  voneinander entfernte Punkte, in denen gleichzeitig eine schwingende Bewegung derselben Schwingungsdauer  $T$ , somit auch derselben Wellenlänge  $\lambda$  und der gleichen Amplitude  $\alpha$  beginne. Zur Zeit  $t$

Fig. 23.



der Abstand eines von  $c$  um  $x$  entfernten Punktes  $p$  von der Gleichgewichtslage gegeben durch

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

die der von  $c'$  nach  $p$  kommenden Bewegung wird der Abstand des Punktes  $p$  von der Gleichgewichtslage,  $y_2$ , gegeben sein durch

$$y_2 = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda} \right).$$

wenn wir den Abstand  $pc' = x'$  setzen. Für alle Punkte zwischen  $c$  ist nun

$$x + x' = a, \quad x' = a - x,$$

somit

$$y_2 = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda} \right).$$

Der resultierende Abstand ist somit

$$y = y_1 + y_2 = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda} \right).$$

Nach der bekannten trigonometrischen Formel

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)$$

können wir schreiben

$$y = 2\alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda} \right) \cos \pi \frac{a-2x}{\lambda}$$

oder auch, da das Vorzeichen des Kosinus nicht mit demjenigen des  $B$  sich ändert,

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x-a}{\lambda} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda} \right).$$

In diesem Ausdrucke für  $y$  ist  $x$  nicht mehr in der frühern Weise verbunden; es hängt deshalb die Phase der Bewegung nicht mehr, wie früher, von der nach einer Richtung fortschreitenden Bewegung von der Lage der Punkte in der Reihe ab. Die für die verschiedenen Punkte zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Bewegungszustände hängen von dem die Zeit enthaltenden Faktor in der Gleichung für  $y$  ab, dieser ist aber für alle Werte von  $x$  gleich. Die nebeneinander liegenden Punkte der Reihe nehmen also nicht nach und nach dieselbe Phase an, sondern ihre Phase ist in derselben dieselbe, sie passieren alle zu derselben Zeit die Gleichgewichtslage und befinden sich ebenso alle gleichzeitig an dem Ende ihrer Bahn.

Der Koeffizient

$$2\alpha \cos \pi \frac{2x-a}{\lambda}$$

bestimmt die Amplitude der Bewegung; er zeigt, daß diese für die verschiedenen Punkte sehr verschieden sein kann. Für gewisse Werte von  $x$  ist dieser Koeffizient gleich Null, diese Punkte verlassen also ihre Gleichgewichtslage niemals. An der einen Seite der ruhenden Punkte ist der Wert dieses Faktors positiv, an der andern negativ; die ruhenden Punkte bilden also die Grenze zwischen solchen Strecken der Punktreihe, in denen einer die Punkte alle an der einen, in deren anderer die Punkte alle an der andern Seite der Gleichgewichtslage sich befinden. Die Punkte jeder zwischen zwei ruhenden Punkten liegenden Strecke sind also immer in derselben Phase, die Punkte zweier benachbarter Strecken in entgegengesetzter Phase. Die Punkte einer Strecke vollführen somit gleichzeitig und in gleicher Phase ihre Schwingungen mit um so kleinerer Amplitude, je näher sie den ruhenden Punkten liegen. Man nennt deshalb die schwingende Bewegung eine stehende und die zwischen zwei ruhenden Punkten enthaltene Strecke eine stehende Welle.

Um den Zustand der Reihe näher zu untersuchen, nehmen wir an, sei

$$n = n\lambda.$$

s wird dann

$$y = 2\alpha \cos \pi \left( \frac{2x}{\lambda} - n \right) \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{n}{2} \right)$$

der

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

für die Zeiten  $t = nT$  und ebenso für die Zeiten  $t = (2n + 1)\frac{T}{2}$  wird dieser Ausdruck für alle Punkte gleich Null, es passieren also die Punkte zu diesem Momente die Gleichgewichtslage. Die Geschwindigkeit der Bewegung ist

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

omit für den Moment  $t = nT$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda};$$

dieselbe ist für alle Punkte, die zwischen  $x = 0$  und  $x = \frac{\lambda}{4}$  liegen, positiv, zwischen  $x = \frac{\lambda}{4}$  und  $x = 3\frac{\lambda}{4}$  negativ, zwischen  $x = 3\frac{\lambda}{4}$  und  $x = 5\frac{\lambda}{4}$  positiv usw. Auf der ersten Strecke bewegen sich die Punkte nach der einen, auf der zweiten nach der andern Seite; für die Punkte  $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4} \dots$ , die um eine halbe Wellenlänge voneinander entfernt sind, ist die Geschwindigkeit gleich 0, sie verlassen die Gleichgewichtslage nicht. Es sind dies somit die stets ruhenden Punkte, deren Abstand voneinander nunmehr eine halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit  $t$ , so entfernen sich alle Punkte von der Gleichgewichtslage und sie haben zur Zeit  $t = (4n + 1)\frac{T}{4}$  den größten Abstand von der Gleichgewichtslage erreicht. Für diese Zeit ist

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda},$$

omit für

$$\begin{array}{cccccc} x = 0, & \frac{\lambda}{4}, & 2\frac{\lambda}{4}, & 3\frac{\lambda}{4}, & 4\frac{\lambda}{4}, & 5\frac{\lambda}{4} \dots \\ y = 2\alpha, & 0, & -2\alpha, & 0, & 2\alpha, & 0 \dots \end{array}$$

so auch hier sehen wir wieder, daß die Länge einer stehenden Welle eine halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit, so kehren alle Punkte zur Gleichgewichtslage zurück, erreichen sie zur Zeit  $(2n + 1)\frac{T}{2}$ , überschreiten sie nach der andern Seite und erreichen dort ihre äußerste Lage zur Zeit  $t = (4n + 3)\frac{T}{4}$ , wenn dann ist

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = \sin (4n + 3)\frac{\pi}{2} = -1.$$

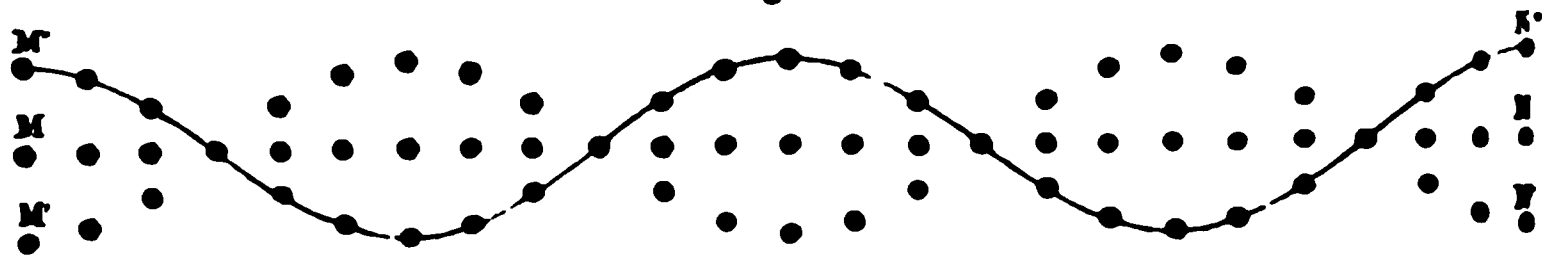
Die Abstände  $y$  werden somit für

$$x = 0, \quad \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad 3 \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad \lambda, \quad 5 \cdot \frac{\lambda}{4} \dots$$

$$y = -2\alpha, \quad 0, \quad 2\alpha, \quad 0, \quad -2\alpha, \quad 0 \dots$$

Die Punkte der Reihe, welche sich immerfort in der Gleichgewichtslage befinden, nennt man die Schwingungsknoten, und es ist ersichtlich, daß diese deshalb immer in Ruhe sind, weil stets gleichzeitig durch sie nach entgegengesetzten Richtungen ein Wellenberg und ein Wellental hindurchgeht. Die mitten zwischen den Schwingungsknoten liegenden Punkte sind Schwingungsmaxima, dort treffen immer gleichzeitig zwei Wellenberge oder Täler zusammen. Die Gestalt der Punktreihe ist demnach (Fig. 236) zur

Fig. 236.



Zeit  $t = 2n \frac{T}{2}$  eine gerade Linie  $MN$ , zur Zeit  $t = (4n + 1) \frac{T}{4}$ , wenn wir annehmen, daß die Bewegung eine transversale sei, die punktierte Wellenlinie  $M'N'$ , zur Zeit  $(2n + 1) \frac{T}{2}$  wieder die gerade Linie  $MN$ , und zur Zeit  $t = (4n + 3) \frac{T}{4}$  die ausgezogene Wellenlinie  $M''N''$ .

Durch die Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung fortschreitender Wellenbewegungen teilt sich somit die Punktreihe in lauter Strecken von der Länge einer halben Wellenlänge, in deren jeder alle Punkte in derselben Phase der Oszillation sind, von denen aber die Punkte der abwechselnden Strecken in entgegengesetzter Phase der Bewegung sich befinden. Die Schwingungsdauer einer solchen stehenden Schwingung ist gleich der Oszillationsdauer der beiden Wellenbewegungen, deren Resultierende die stehende Schwingung darstellt.

### § 132.

**Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen, deren Schwingungen nicht gleich gerichtet sind; elliptische Schwingungen.** Wir haben im Bisherigen den besondern Fall der Zusammensetzung der Wellenbewegungen betrachtet, in dem die Vibrationen alle gleich gerichtet sind. Es können nun ebenso gut in einer Punktreihe sich zwei Bewegungen fortpflanzen, deren Richtungen nicht zusammenfallen, eine Wellenbewegung longitudinaler Schwingungen und eine transversaler Schwingungen, oder zwei zur Fortpflanzungsrichtung der Bewegung senkrechte Schwingungen, welche jedoch irgend einen Winkel miteinander bilden.

Wie wir im § 130 sahen, erhalten wir in diesem Falle die aus dem Zusammenwirken der beiden Bewegungen resultierende Kraft durch den Satz vom Parallelogramm der Kräfte; in jedem Augenblicke wird uns die Diagonale des aus den beschleunigenden Kräften der Teilbewegungen

ruierten Parallelogramms der Größe und Richtung nach die resultierende Kraft geben und somit die Geschwindigkeit und die Bahn des bewegten Punktes.

Nehmen wir an, daß die beiden Wellenbewegungen gleiche Oszillationsdauer und somit gleiche Wellenlängen besitzen, so muß die resultierende Bewegung ebenfalls die gleiche Oszillationsdauer haben; die Bahn, welche die Punkte beschreiben, kann aber weder mit der einen noch mit der andern Bewegung zusammenfallen, sie muß jedoch notwendig in dieselbe Ebene fallen, welche durch die Richtung der Bewegungen in den einzelnen Wellen gelegt wird. Um die Gestalt der Bahn zu erhalten, wird am bequemsten sein, von dem mathematischen Ausdrucke für die Bewegung des Punktes infolge jeder einzelnen Bewegung auszugehen und das erhaltene Resultat dann näher zu betrachten.

Zugleich ist klar, daß wir die Bahn nur eines Punktes zu bestimmen haben, und daß diejenigen aller übrigen Punkte der Reihe damit übereinstimmen. Denn da der Voraussetzung nach jede der Teilbewegungen sich mit gleicher Geschwindigkeit in der Punktreihe fortpflanzt, so sind die Bahnen aller Punkte dieselben.

Nennen wir den Abstand eines Punktes der Reihe, welcher vom Anfangspunkte der Bewegung um  $x$  entfernt ist, von seiner Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$ ,  $y$ , so haben wir

$$y = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Infolge der zweiten Bewegung, wenn sie allein wirkte, würde der Punkt in einer andern Richtung sich von der Gleichgewichtslage entfernen, so daß der Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$  gleich  $z$ ; nehmen wir ferner an, der Anfangspunkt dieser Bewegung sei von dem der ersten um  $a$  entfernt, die Bewegung habe aber auch dort im Anfange der Zeit  $t$  begonnen, so haben wir für  $z$  den Ausdruck

$$z = \beta \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{a}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Entwickeln wir aus diesen beiden Ausdrücken für die Abstände  $y$  und  $z$  eine Gleichung zwischen  $y$  und  $z$ , so gibt uns diese die zueinander gehörigen Abstände in der einen und in der andern Richtung, oder den Ort des Punktes in jedem Augenblicke, wenn wir den Abstand des Punktes nach der einen Richtung aus einer der obigen Gleichungen bestimmen. Diese Gleichung gibt uns somit die Bahn des bewegten Punktes.

Aus den beiden obigen Gleichungen erhalten wir unmittelbar die beiden folgenden

$$\frac{y}{\alpha} = \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{z}{\beta} = \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \dots \dots (4)$$

in denen wir unter Benutzung von Gleichung (3) die letztere auch schreiben können

$$\frac{z}{\beta} - \frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \left[ 1 - \left( \frac{y}{\alpha} \right)^2 \right] \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \dots \dots \dots (5)$$

Quadrieren wir Gleichung (5) und ordnen passend, so wird schließlich

$$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 - 2 \frac{y}{\alpha} \frac{z}{\beta} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \dots \dots (6)$$

Die Gleichung (6) gibt uns den Abstand des Punktes von der Gleichgewichtslage parallel der Richtung der ersten Bewegung für jeden Wert, den der Abstand des Punktes parallel der zweiten Bewegung erhalten kann. Die analytische Geometrie zeigt, daß alle Punkte, deren zusammengehörige Abstände parallel zweien festen Richtungen, von einem festen Punkte durch die Gleichung (6) dargestellt werden, auf einer Ellipse liegen, deren Mittelpunkt eben jener feste Punkt ist, von welchem die Abstände  $y$  und  $z$  gerechnet sind. Wenn sich zwei Wellenbewegungen in einer Punktreihe fortpflanzen, in denen die Schwingungen verschieden gerichtet sind, so bewegen sich demnach die Punkte in Ellipsen um ihre Gleichgewichtslage.

In unseren Ausdruck (6) für die Bahn der Punkte geht auch die Phasendifferenz ein, und je nach dem verschiedenen Werte von  $a$  kann die Beziehung zwischen  $y$  und  $z$  immer eine andere werden; man erhält je nach dem Werte von  $a$  für ein bestimmtes  $z$  einen immer andern Wert von  $y$ .

Zwar erfüllen alle diese Werte die Bedingung, daß sie einer Gleichung von der Form (6) genügen, die Bahnen der Punkte sind daher immer Ellipsen, aber die Lage und Gestalt der Ellipsen ist je nach dem Werte von  $a$  eine andere. Untersuchen wir die Gestalt der Ellipsen für einige Werte von  $a$ .

Setzen wir voraus, daß die Schwingungsrichtungen einen Winkel  $\varphi$  miteinander bilden, und daß die Richtung der positiven Abstände  $z$  (Fig. 237) des Punktes  $P$ , der um  $z$  von dem Anfangspunkte der Bewegung entfernt ist, von der Ruhe-

lage nach rechts hin, und die Richtung der positiven  $y$  nach oben gerechnet werde, d. h. daß die Bewegung in gleicher Phase in beiden Teilbewegungen ist, wenn der Punkt sich zugleich nach rechts und oben, in entgegengesetzter, wenn er sich zugleich nach rechts und unten bewegt. Ist die Phasendifferenz der beiden komponierenden Bewegungen gleich 0, oder einer geraden Anzahl von halben Wellenlängen, so ist

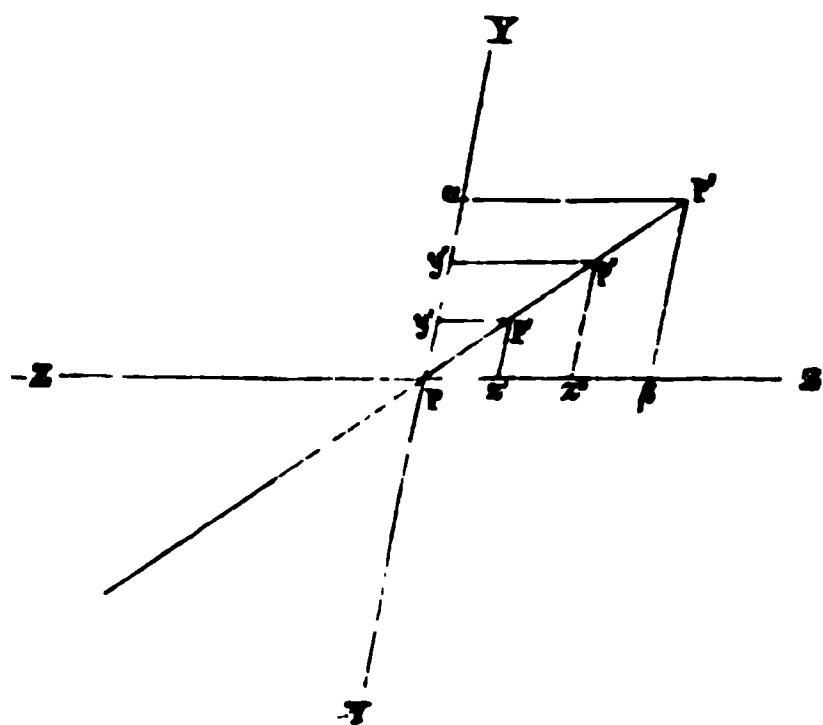
$$\cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = 1; \quad \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0,$$

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{2yz}{\alpha\beta} + \frac{z^2}{\beta^2} = 0,$$

$$\frac{y}{\alpha} - \frac{z}{\beta} = 0,$$

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Fig. 237.





In diesem Falle stehen also stets die zusammengehörigen Werte von  $x$  in dem konstanten Verhältnisse der Amplituden  $\alpha : \beta$ . Bestimmen wir demnach die den Zeiten  $t, t', T$  entsprechenden Abstände  $x', x''$ .  $\beta$  ziehen von  $x', x'', \beta$  mit  $Py$  parallel  $x'p', x''p'', \beta P'$  so, daß

$$x'p' : x'P = x''p'' : x''P = \beta P' : \beta P = \alpha : \beta,$$

sind die Längen  $x'p', x''p''$  usw. die zu diesen Werten von  $x$  gehörigen Werte von  $y$ , und die Punkte  $p', p'', P$  gehören der Bahn des Punktes  $P$ . Aus der Lehre von der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt aber, daß die Punkte  $P, p', p'', P'$  auf einer geraden Linie liegen; die Bahn des Punktes  $P$  demnach eine gerade Linie, welche durch die Gleichgewichtslage des Punktes  $P$  geht, deren Richtung zwischen die Richtungen der Teilbewegungen fällt.

Für die Amplitude  $PP'$  der resultierenden Bewegung erhalten wir nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte

$$PP' = \sqrt{P\beta^2 + P'\beta^2 - 2P\beta \cdot P'\beta \cdot \cos P'\beta P},$$

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cdot \cos \varphi};$$

den Winkel, welchen die Bahn des Punktes mit  $x$  bildet, wenn wir  $\psi$  mit  $\varphi$  bezeichnen, erhalten wir aus der Proportion

$$PP' : P'\beta = \sin P'\beta P : P'P\beta,$$

$$\sin \psi = \frac{\alpha}{A} \sin \varphi.$$

Größe und Richtung der resultierenden Amplitude hängt somit von der Größe der Teilamplituden ab und von dem Winkel, welchen die Teilbewegungen miteinander bilden. Die resultierende Amplitude erhält den größten Wert für  $\varphi = 0$

$$A = \alpha + \beta.$$

Bewegungsrichtung aller drei Bewegungen ist dieselbe, und die resultierende Amplitude ist die Summe der Teilamplituden.

Wir hätten in diesem Falle, um die Bahn des Punktes zu erkennen, nicht nötig gehabt, die Gleichung (6) zu entwickeln, da dieses Resultat unmittelbar aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt, denn ist  $a = 0$ , oder  $2\pi \cdot \frac{t}{T}$ , so wird

$$y = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

$$z = \beta \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

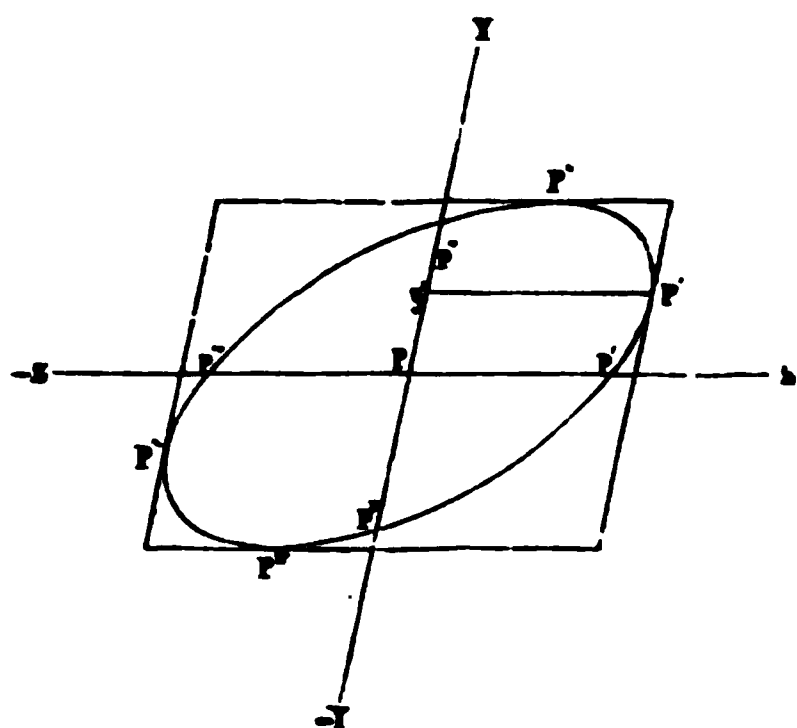
daraus

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ist die Phasendifferenz nicht gleich Null, oder ein gerades Vielfaches der halben Wellenlänge, so wird die Bahn des Punktes eine Ellipse. Bewegungen beginnen zu verschiedenen Zeiten und wachsen nicht

wie im vorigen Falle gleichmäßig; bald nimmt  $y$  rascher, bald  $z$  rascher zu, ja es kann  $y$  selbst abnehmen, wenn  $z$  wächst. Ist  $a$  kleiner als  $\lambda$ , so hat (Fig. 238) der Punkt  $P$  bereits einen Teil seines Weges in

Fig. 238.



Richtung der  $z$  zurückgelegt, wo die Bewegung nach  $y$  beginnt, er findet sich in  $p'$ , denn ist  $y = 0$ , gibt Gleichung (2) oder Gleichung

$$z = \beta \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

und ist  $a$  z. B.  $= \frac{3}{16}\lambda$ , so wird

$$z = \beta \sin 67,5 = 0,923 \beta.$$

Während jetzt der Punkt in der Richtung nach  $z$  den letzten Teil seines Weges zurücklegt, bewegt sich aber schon in der Richtung  $y$  er beschreibt daher den Weg  $p'P'$

Er ist in  $P'$  angekommen, hat also in der Richtung  $z$  seinen größten Abstand erreicht, wenn nach Gleichung (6)

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + 1 - 2 \frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda},$$

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - 2 \frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos^2 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0,$$

$$y = y' = \alpha \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda},$$

also bei dem von uns angenommenen Werte  $a = \frac{3}{16}\lambda$ ,  $y = \alpha \cdot \cos 67,5$  oder gleich  $0,382\alpha$  ist. Während dann der Punkt in der Richtung der  $z$  sich weiter von der Gleichgewichtslage entfernt, kehrt er in der Richtung  $y$  schon wieder zurück, er beschreibt den Weg  $P'P''$  und ist in  $P''$  angekommen, wo  $y = \alpha$  wird, wenn sich der Punkt in der Richtung der  $z$  schon wieder bis auf

$$z = \beta \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0,382 \beta$$

dem Anfangspunkte genähert hat.

Von da ab nehmen  $y$  und  $z$  gleichzeitig ab,  $z$  aber, da der Punkt in dieser Richtung der Ruhelage näher ist, rascher als  $y$ ; der Punkt bewegt sich, bis  $z = 0$  wird, nach  $p''$ , wo  $y = 0,923\alpha$  ist. Weiter bewegt sich der Punkt dann in der Richtung der  $z$  nach der negativen Seite bis  $p'''$ , während der Abstand  $y$  bis zur 0 abnimmt usf., so daß der Punkt sich über  $p'''$ ,  $P'''$ ,  $P^{IV}$ ,  $p^{IV}$  wieder nach  $p'$  bewegt, wenn  $y$  wieder gleich 0 geworden ist. Dauern die Impulse nach beiden Richtungen fort, so hat der Punkt in der folgenden Zeit dieselbe Bahn zurück, die, wie Gleichung (6) uns zeigt, eine Ellipse ist.

Ist  $a = \frac{1}{4}\lambda$ , so befindet sich der bewegte Punkt nach der Richtung der  $z$  in seinem äußersten Abstand von der Gleichgewichtslage und beginnt seine zurückgehende Bewegung, wenn er in der Richtung der  $y$  seine

gung beginnt. Während er dann in der Richtung der  $z$  zur Ruhelage zurückkehrt, erreicht er nach  $y$  seinen größten Abstand oder für  $z = 0$   $y = \alpha$ . Wird dann  $z = -\beta$ , so wird  $y = 0$ , und wird  $z$  wiederum 0, wird  $y = -\alpha$ , so daß also die zusammengehörigen Werte von  $y$  und  $z$  diese vier Stellungen sind

$$\begin{array}{cccccc} y = 0, & y = \alpha, & y = 0, & y = -\alpha, & y = 0, \\ z = \beta, & z = 0, & z = -\beta, & z = 0, & z = \beta. \end{array}$$

Die Ellipse geht demnach in diesem Falle durch die Endpunkte der Amplituden, ihre Lage und Gestalt ist anders als in dem vorigen Falle, da die Bewegung des Punktes erfolgt in demselben Sinne wie vorher. Es geht dies auch aus der Form hervor, welche die Gleichung der Bahn annimmt,

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1.$$

Die Schwingungsrichtungen bestimmen dann ein Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse.

Wenn im besondern in diesem Falle die beiden Amplituden gleich, und die Bewegungsrichtungen zueinander senkrecht sind, so wird die Bahn des Punktes ein Kreis. Denn in dem Falle wird unsere Gleichung der Bahn

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^2} &= 1, \\ y^2 + z^2 &= \alpha^2. \end{aligned}$$

Da nun die beiden Richtungen  $x$  und  $y$  zueinander senkrecht sind, bedeutet  $\alpha$  den Abstand des Punktes von dem festen Punkte, von dem aus die Richtungen  $y$  und  $z$  gerechnet sind.

Die Punkte der Bahn liegen also alle auf einer Linie, die dadurch bestimmt ist, daß der Abstand aller ihrer Punkte von einem festen Punkte eine konstante Größe und zwar gleich  $\alpha$  ist; das ist aber bekanntlich die Eigenschaft des Kreises.

Die Gleichungen (1) und (2) geben auch dieses unmittelbar, ohne daß die Gleichung (6) zu Hilfe genommen wird, denn wenn  $\alpha = \frac{1}{2}\lambda$ , so werden sie

$$\begin{aligned} y &= \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ z &= \alpha \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

daraus

$$y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Wenn die Phasendifferenz größer ist, ist die Bahn, bis  $\alpha = \frac{1}{2}\lambda$  wird, oder in allen Fällen eine Ellipse, deren Lage und Gestalt leicht nach den Bisherigen zu erhalten ist.

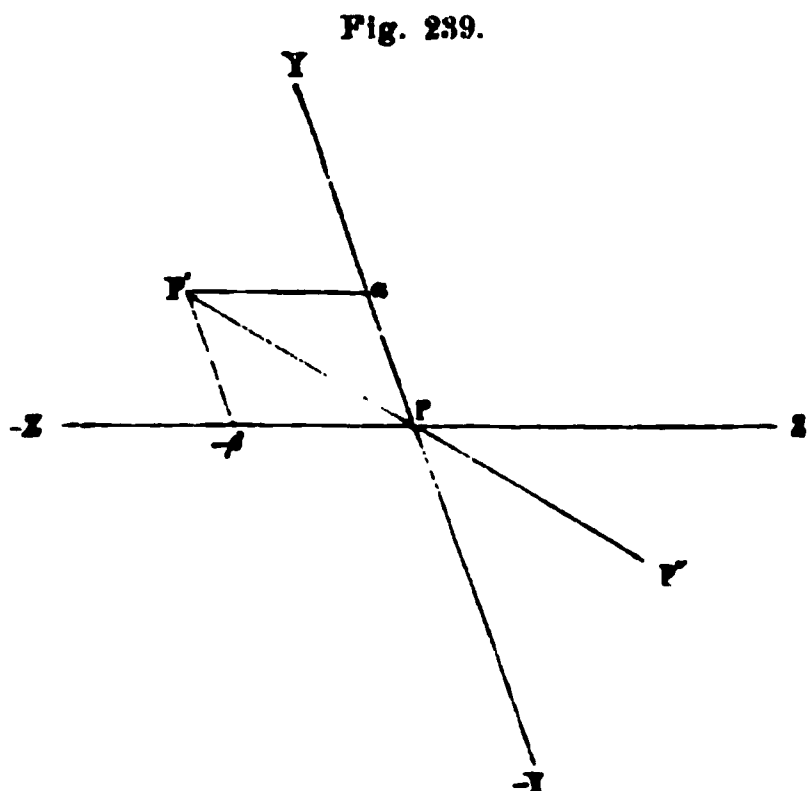
Ist  $\alpha = \frac{1}{2}\lambda$  geworden, so liefern die Gleichungen (1) und (2) oder als zusammengehörige Werte von  $y$  und  $z$ :

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} z.$$

Die Gestalt der Bahn ist also wieder eine gerade Linie, welche jedoch anders liegt, wie in dem Falle, wo  $a = 0$  war. Sie liegt jetzt (Fig. 239) in dem Winkel, den die Richtung der negativen  $z$  mit derjenigen der positiven  $y$  bildet. Dem

jetzt beginnt der Punkt  $P$  zugleich sich nach der Richtung der negativen  $z$  und der positiven  $y$  zu bewegen, und zwar so, daß immer

$$\frac{y}{\alpha} = -\frac{z}{\beta}$$



ist; er bewegt sich demnach von  $P$  nach  $P'$ , dann über  $P$  nach  $P''$  usw. in der Linie  $P'P''$  hin und her, so lange die beiden Impulse dauern.

Bei einem noch größeren Werte von  $a$  geht die Bahn wieder in eine Ellipse über, in welcher jedoch der Punkt jetzt sich in entgegengesetzter

Richtung bewegt als vorher. Betrachten wir den Fall, wo  $a = \frac{11}{16}\lambda$  ist. Wenn der Punkt  $P$  (Fig. 240) seine Bewegung nach der Richtung  $y$  beginnt, wenn also

$$y = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,$$

ist, so ist

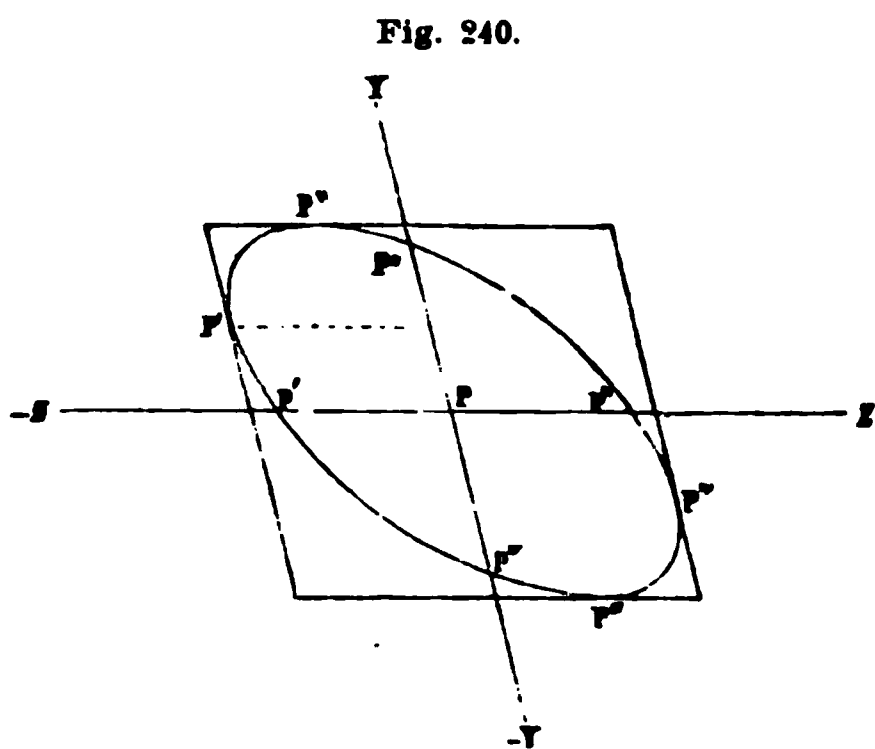
$$z = \beta \sin \frac{11}{8}\pi = -0,923\beta.$$

Der Punkt  $P$  befindet sich in  $p'$ .

Während nun  $z$  bis  $-\beta$  wächst, bewegt sich der Punkt zugleich in der Richtung der positiven  $y$ , bis

$$y = -\alpha \cdot \cos \frac{11}{8}\pi = 0,382\alpha$$

ist. Der Punkt bewegt sich von  $p'$  nach  $P'$ .



Während sich dann weiter der Abstand  $y$  vergrößert, nähert sich der Punkt in der Richtung  $z$  wieder der Ruhelage. Ist  $y = \alpha$ , so ist  $z = \beta \cdot \cos \frac{11}{8}\pi = -0,382\beta$ , der Punkt befindet sich in  $P''$ , hat also den Weg  $P'P''$  durchlaufen. Im weiteren Verlaufe nähert sich der Punkt anfangs sowohl in der Richtung der  $y$  als  $z$  der Gleichgewichtslage, bis er in  $p''$  ist, entfernt er sich in der Richtung der positiven  $z$ , während er in der Richtung  $y$  dem Ausgangspunkte der Bewegung noch

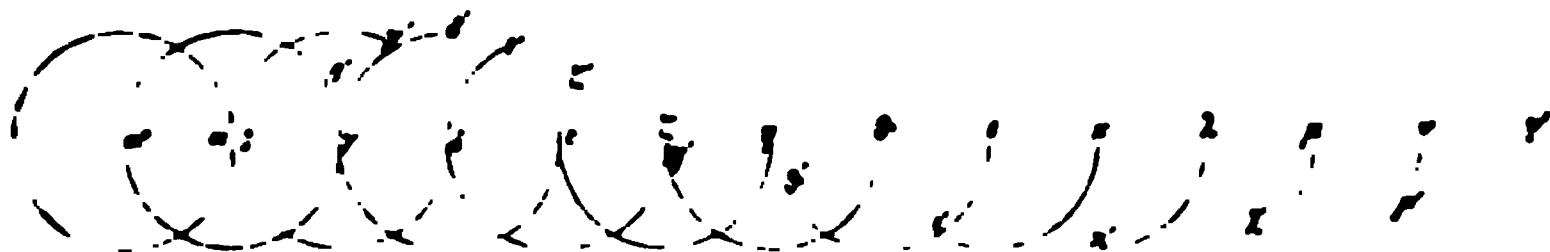
er bewegt sich nach  $p'''$ ,  $P'''$  usw., so daß der Punkt die Bahnellipse in Richtung  $P', P'', P''', P''''$  durchläuft, also in entgegengesetzter Richtung wie Fig. 238, wo die Phasendifferenz gleich  $\frac{3}{16}\lambda$  war.

Zwischen der Phasendifferenz  $\frac{1}{2}\lambda$  und  $\lambda$  durchläuft der Punkt die jeweilige Bahnellipse, die nach Lage und Gestalt für jeden Wert von  $a$  verschieden ist, immer in der zuletzt betrachteten Richtung. Die Gestalt der Ellipse nimmt dabei dieselben Änderungen an, wie in der vorhin betrachteten Periode der Phasendifferenzen, sie wird anfangs bis  $a = \frac{3}{4}\lambda$  gewölbt und von da ab bis  $a = \lambda$  wieder flacher, bis sie für den letzten Wert der Phasendifferenz wieder eine gerade Linie wird, welche ebenso liegt, wie dem Falle, wo  $a = 0$  war.

Im Falle also die komponierenden Bewegungen gleiche Perioden haben, sind die Bahnen der einzelnen Punkte der Reihe Ellipsen, und zwar für alle Punkte dieselben Ellipsen. Die Verschiedenheit in den gleichzeitigen Bewegungszuständen der einzelnen Punkte der Reihe besteht darin, daß sie an verschiedenen Punkten der Ellipse sich befinden und dort mit verschiedener Geschwindigkeit sich bewegen.

Die Gestalt, welche die Punktreihe infolge der Bewegung der Punkte annimmt, ist verschieden je nach der Richtung, in der die komponierenden Bewegungen erfolgen. Ist die eine Bewegung longitudinal, die andere

Fig. 241.



transversal, so beschreiben die Punkte Ellipsen, deren Ebenen die Richtung, in der die Bewegung sich fortpflanzt, in sich aufnehmen. Die Punktreihe wird also eine ähnliche Gestalt haben, wie bei einer transversalen Wellenbewegung. Sei z. B. eine Punktreihe zugleich in longitudinale und transversale Schwingungen versetzt; die longitudinale Bewegung sei der transversalen um ein viertel Wellenlänge voraus und die Amplituden haben gleiche Größe, so stellt Fig. 241 die gegenseitige Lage der Punkte in einer Wellenlänge dar,  $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$  ist die Lage der Punkte in der Ruhelage. Der Punkt  $\alpha$  ist im Begriffe, eine neue Bewegung in transversaler Richtung zu beginnen, in longitudinaler hat er das erste Viertel seiner Oszillation zurückgelegt: er befindet sich in  $\alpha'$ . Der Punkt  $\delta$  hat in longitudinaler Richtung gerade eine Oszillation vollendet, dagegen befindet er sich in transversaler erst am Ende des dritten Viertels einer Oszillation, in seinem größten Abstände nach negativer Richtung. Für den Punkt  $\gamma'$  ist, um unsere vorige Bezeichnung beizubehalten,  $y = 0$ ,  $z = -\beta$ , für  $\alpha$  ist  $y = \alpha$ ,  $z = 0$  und für  $\nu$  wieder  $y = 0$  und  $z = \beta$ . Die einzelnen Kreisbogen zeigen die Bahnen der Punkte an, welche von  $t = \frac{1}{4}T$  an, in welchem Momente die transversale Bewegung der Punkte ihren Anfang nahm, durchlaufen sind.

Sind beide Bewegungen transversal, so stehen die Ebenen der elliptischen Bahnen auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht, die Reihenfolge der Bahnebenen bildet einen elliptischen Zylinder, dessen Achse die Punktreihe in der Ruhelage ist. Eine auf dem Zylinder gezogene Schrauben-

linie, deren Höhe gleich ist der Länge der Welle, nimmt, wie man leicht übersieht, die Punkte in den verschiedenen Phasen auf.

### § 133.

**Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge.** Wir haben im Bisherigen die Zusammensetzung der Schwingungen in ihrem einfachsten Falle betrachtet, unter der Voraussetzung nämlich, daß die Schwingungen sämtlich dieselbe Periode, dieselbe Schwingungsdauer und somit auch dieselbe Wellenlänge haben. Es fragt sich nun, ob sich in einer Punktreihe gleichzeitig Schwingungen fortpflanzen und zu einer resultierenden Schwingung zusammensetzen können, welche eine verschiedene Schwingungsdauer besitzen, und welches die resultierende Bewegung dann sein wird.

Die Möglichkeit der gleichzeitigen Fortpflanzung von Bewegungen verschiedener Periode ergibt sich unmittelbar aus unserer Ableitung der schwingenden Bewegung in einer Punktreihe im § 128. Wir fanden dort, daß die Beschleunigung eines Punktes in dem Abstände  $x$  von dem Ausgangspunkte der Bewegung gegeben ist durch die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

worin  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung in der Reihe bedeutet.

Es können demnach alle die schwingenden Bewegungen in der Punktreihe gleichzeitig bestehen und sich ausbreiten, welche diesem Beschleunigungsgesetze entsprechen.

Wenn wir voraussetzen, daß in dem Ausgangspunkte der Bewegung, also für  $x = 0$ , dieselbe gegeben sei durch

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

so erkannten wir, daß obige Gleichung für die fortgepflanzte Bewegung, also für die eines Punktes, der um  $x$  vom Anfangspunkt entfernt ist, auf die Gleichung führt

$$y = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Setzen wir dagegen jetzt voraus, daß der Ausgangspunkt eine ganze Reihe von Impulsen erhalte von verschiedener Periode, so ist seine Bewegung gegeben durch die Summe

$$Y = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T_1} + 2b \sin 2\pi \frac{t + \tau_2}{T_2} + \dots + 2p \sin 2\pi \frac{t + \tau_n}{T_n}.$$

worin  $T_1, T_2, \dots, T_n$  die Schwingungsdauern der verschiedenen Bewegungen und  $\tau_2, \dots, \tau_n$  die Zeiten bedeuten, um welche die zweite, dritte, etc. Bewegung später oder früher beginnt als die erste. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, wie wir imstande sind, dem Ausgangspunkte der Bewegung eine solche zusammengesetzte Bewegung zu erteilen.

er Ausgangspunkt, für den  $x = 0$  ist, diese Bewegung, so ergänz in derselben Weise wie für die einfache Schwingung, daß ung eines um  $x$  von dem Ausgangspunkte entfernten Punktes ung haben muß

$$2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right) + b \sin 2\pi\left(\frac{t + \tau_2}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2}\right) + \dots + p \sin 2\pi\left(\frac{t + \tau_n}{T_n} - \frac{x}{\lambda_n}\right),$$

mit  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$  die Wellenlängen der einzelnen Bewegungen be-  
so setzen

$$\lambda_1 = c T_1, \quad \lambda_2 = c T_2 \dots \lambda_n = c T_n.$$

ichtigkeit dieser Gleichung für die resultierende Bewegung läßt sehr leicht noch nachträglich zeigen, indem man aus derselben on mehrfach durchgeführten Weise die Quotienten  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  und  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  man findet, daß aus derselben sich ergibt

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

die Form der Gleichung für die aus dem Zusammenwirken chwingungen verschiedener Periode resultierende Bewegung gibt n, daß dieselbe keine einfach periodische ist, bei der das Be- ich ebenso weit und ebenso lange an der einen Seite der Gleich- ge bewegt, als an der andern. Denn es läßt sich kein Wert l  $\lambda$  angeben, der für alle Werte von  $t$  und  $x$  den Abstand  $Y$  einfache Gleichung von der Form

$$Y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

von  $x$  und  $t$  unabhängigen Werte der Amplitude  $A$  wieder- . Die Bewegung ist vielmehr eine zusammengesetzt periodische, r Punkt während der durch das erste Glied der den Wert von  $Y$  summe dargestellten hin und her gehenden Bewegung noch nach erioden bewegt wird. Infolgedessen bewegt sich der Punkt bald ld langsamer nach der einen Seite als nach der andern, bald plitude nach der einen Seite größer bald kleiner als nach der nach der Größe der Perioden und der Amplituden der kom- 1 Schwingungen. Ein allgemeines Gesetz dieser kompliziert n Bewegungen läßt sich außer dem angegebenen nicht aufstellen; nur, um ein Bild derselben zu bekommen, einige Fälle der- achten, und zwar den einfachsten Fall, daß sich zwei Wellen ktreihe fortpflanzen, deren Schwingungsdauern und Wellenlängen : 2 verhalten. In dem Falle wird, wenn wir die größere der wingungsdauern mit  $T$  und die größere Wellenlänge mit  $\lambda$  be- nd gleichzeitig  $\tau = 0$  setzen, also annehmen, beide Bewegungen u gleicher Zeit, der Ausdruck für  $Y$

$$Y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x}{\frac{1}{2}\lambda}\right)$$

$$Y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \cdot \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$



oder auch

$$Y = \left( a + 2b \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right) \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

ein Ausdruck, der die doppelte Periodizität der Bewegung deutlich erläßt, da er zeigt, daß wir die sich ausbreitende Bewegung auffassen können als eine solche der längeren Periode, deren Amplitude aber in derselben Periode veränderlich ist.

Fixieren wir den Moment, in welchem  $t = nT$ , somit  $\sin 2n\pi \cos 2n\pi = 1$ , so erhalten wir

$$Y = - \left( a + 2b \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Hiernach wird für

$x = \frac{1}{8}\lambda$	$Y = - (a + 2b \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{1}{2}} = - a \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{2}{8}\lambda$	$= - (a + 0) = - a$
$\frac{3}{8}\lambda$	$= - (a - 2b \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{1}{2}} = - a \sqrt{\frac{1}{2}} + b$
$\frac{4}{8}\lambda$	$= - (a - 2b) \cdot 0 = 0$
$\frac{5}{8}\lambda$	$= + (a - 2b \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{1}{2}} = + a \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{6}{8}\lambda$	$= + (a + 0) = + a$
$\frac{7}{8}\lambda$	$= + (a + 2b \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{1}{2}} = + a \sqrt{\frac{1}{2}} + b$
$\frac{8}{8}\lambda$	$= + (a + 2b) 0 = 0.$

Fig. 242 zeigt die Wellenform, welche diesen Werten von  $Y$  spricht, und zwar für  $b = 2a$ ;  $b = a$ ;  $b = \frac{1}{2}a$ .

Die punktierten Linien deuten die einzelnen Wellen an, die abgezogen geben die resultierenden Wellen. Die Figuren zeigen, daß Bewegung eine doppelperiodische ist, und daß je nach dem Verhältnis Amplituden die Art der Bewegung eine sehr verschiedene sein kann. kann sie im allgemeinen dahin charakterisieren, daß die Bewegung mit größter Amplitude der resultierenden Bewegung ihre Periode als charakteristisch ausdrückt, und daß dann durch die übrigen Bewegungen innerhalb dieser Perioden wieder periodische Verschiedenheiten auftreten. So man die Welle (Fig. 242a) als eine solche von der Periode  $\frac{\lambda}{2}$  betrachtet in welcher durch die zweite Bewegung innerhalb  $2 \frac{\lambda}{2}$  jedesmal der Wellenberg und das letzte Wellental verstärkt erscheinen, während Welle (Fig. 242c) entschieden als schwingende Bewegung von der Periode  $\lambda$  erscheint, welche von der einfachen Schwingung sich dadurch unterscheidet, daß der schwingende Punkt mit großer Geschwindigkeit sich auf der positiven Seite von seiner Gleichgewichtslage entfernt, dann aber viel langsamer sich derselben wieder nähert und sich über dieselbe hinaus bis zu seinem größten Abstände an der negativen Seite bewegt.

In derselben Weise setzen sich die Bewegungen zusammen, wenn komponierenden Wellen in weniger einfachem Verhältnis stehen; in jedem Falle kann man in der angegebenen Weise die resultierende Bewegung konstruieren.

Mit einer Verschiebung der Phase der einen der komponierenden Wellen verschiebt sich die resultierende Welle ebenfalls, wenn auch im übrigen die komponierenden Bewegungen ganz ungeändert bleiben. Die oben für die resultierende Bewegung hingeschriebene Gleichung läßt das auch sofort erkennen; wird die zweite Bewegung um ein viertel Wellenlänge, also um  $\frac{1}{4}\lambda$  längern Welle  $\lambda$  verschoben, so wird der Ausdruck für  $Y$

$$Y = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + b \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{1}{4} \right) \\ = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - b \cos 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

Fig. 342 a.

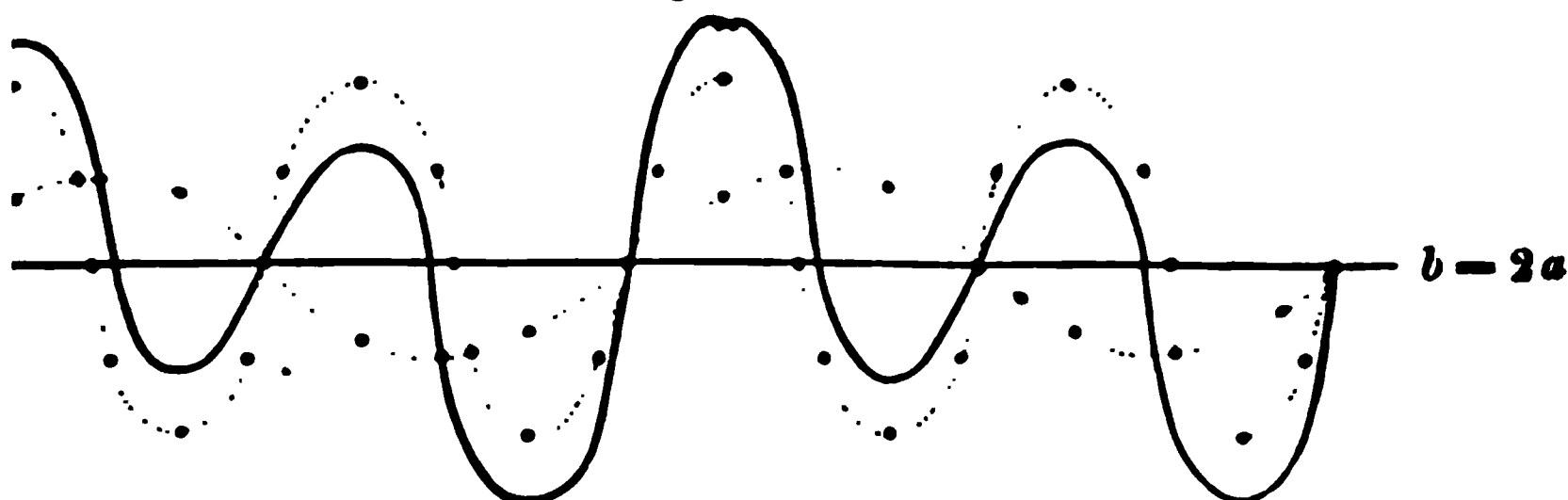


Fig. 342 b.

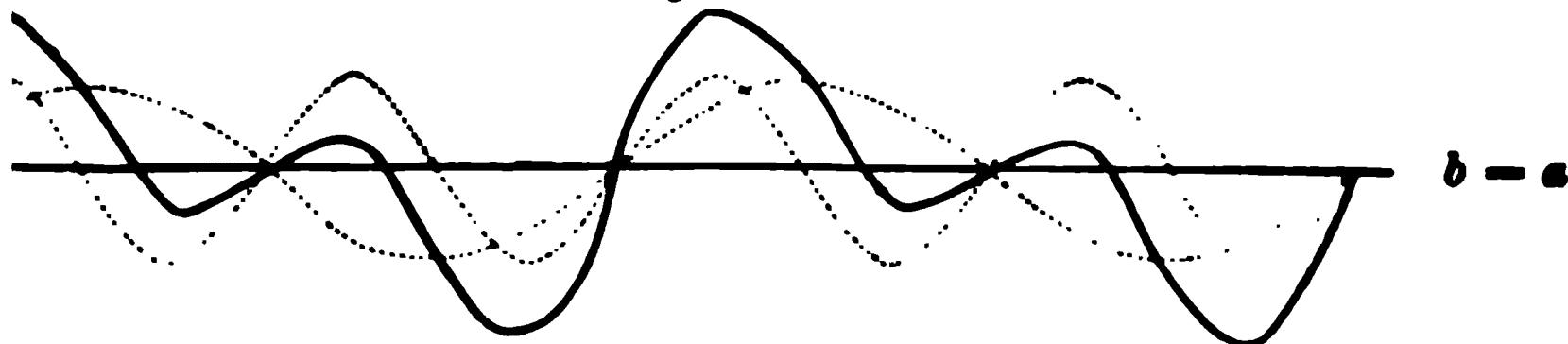
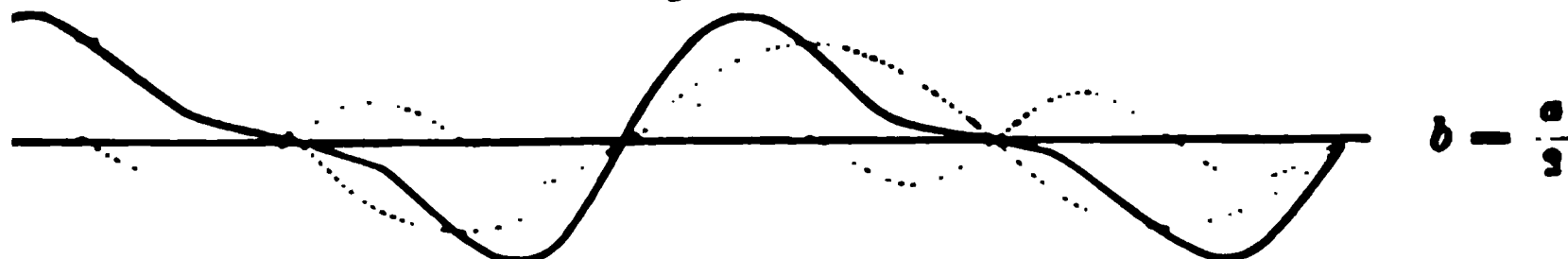


Fig. 342 c.



die zweite Bewegung um eine halbe Wellenlänge verschoben, so wird

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - b \cdot \sin 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Darnach sind die Werte von  $Y$  für diese beiden Fälle folgende, wenn wieder den Moment  $t = nT$  fixieren,

Phasendifferenz = $\frac{1}{4}\lambda$	= $\frac{1}{4}\lambda$
$x = \frac{1}{4}\lambda \dots Y = -a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + b$
$\frac{2}{4}\lambda \dots -a \quad + b$	$-a \quad \pm 0$
$\frac{3}{4}\lambda \dots -a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{4}{4}\lambda \dots 0 \quad -b$	$0 \quad \pm 0$

reinen die von den einzelnen Punkten nacheinander und die von den  
ander folgenden Punkten der Reihe gleichzeitig beschriebenen Kurven  
ieden sind. Daß letzteres der Fall ist, ergibt sich daraus, daß bei  
zeitiger Ausbreitung von Schwingungen verschiedener Periode die ein-  
Punkte von den komponierenden Wellen nicht immer in derselben  
getroffen werden. Denken wir uns z. B. in einer Punktreihe zwei zu-  
er senkrechte transversale Schwingungen fortgepflanzt, deren Phase  
ehr wenig verschieden ist, so daß durch den Unterschied der Phase  
harakter der Kurven nicht alteriert wird, daß dieselben Ellipsen  
n; nehmen wir z. B. an, die Schwingungsdauern der Punkte verhalten  
wie 100 : 101 und die beiden Bewegungen beginnen gleichzeitig. Ist  
mplitude beider Bewegungen gleich, so wird die erste Schwingung  
fangspunkte eine lineare sein, welche mit jeder der komponierenden  
Winkel von  $45^\circ$  bildet. Bei der zweiten Schwingung ist die eine der  
aber schon 0,01 Schwingung voraus, die Bahn des Punktes wird  
elliptisch, und nach 19 Schwingungen ist die Phasendifferenz der  
ngungen gleich  $\frac{1}{10}$  Oszillation, die Bahn des Punktes wird eine Ellipse  
ig. 238. Nach 25 Schwingungen ist die Phasendifferenz  $\frac{1}{4}$  Oszillation,  
ahn wird ein Kreis, nach 50 Oszillationen ist sie  $\frac{1}{2}$  Oszillation, die  
wird wieder eine Linie, welche zu der ersten Schwingung senkrecht  
kurz man sieht, daß nach 100 Schwingungen der Punkt nach und  
alle die Bahnen durchlaufen hat, welche wir im vorigen Paragraphen  
ehen haben. Alle diese Bahnen, welche der erste Punkt nacheinander  
läuft, sehen wir dann in den ersten 100 Wellenlängen gleichzeitig  
einander. Denn jeder Punkt durchläuft nacheinander dieselben Bahnen  
er erste Punkt. Macht nun der erste Punkt der 100. Welle die  
Schwingung, so findet in der 75. Welle die 25. Schwingung statt,  
schwingt also gradeso wie der Anfangspunkt bei der 25. Schwin-  
usw.

In einem Falle tritt diese Verschiedenheit der Schwingungen nicht ein.  
die Schwingungen in einem einfachen rationalen Verhältnis, also  
1 : 2 oder 1 : 3, 2 : 3 usw., so sind die Bahnen jedes Punktes der  
immer dieselben. Wir wollen auch hier nur den einfachsten Fall be-  
en, um zu zeigen, in welcher Weise die Frage nach der resultieren-  
bewegung zu behandeln ist, da wir an einer andern Stelle nochmals  
iesen Punkt zurückkommen werden. Wir denken uns in einer Punkt-  
zwei zueinander senkrechte Bewegungen sich fortpflanzen, deren  
nängen sich verhalten wie 1 : 2. Die Gleichung der einen Be-  
ig sei

$$y = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots \dots \dots 1)$$

der zweiten hierzu senkrechten

$$z = b \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda} \right),$$

was dasselbe ist

$$z = b \sin 4\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (2)$$

$d$  die Phasendifferenz der komponierenden Bewegungen bedeutet.

bis  $a\sqrt{\frac{1}{2}}$  ab, so wächst  $z$  negativ wieder bis  $a$  und wird mit  $y$ . Diese Hälfte der Kurve besteht also aus zwei kongruenten. Ganz ebenso ist die andere Hälfte der Kurve für die negativen  $y$  beschaffen.

die zweite Bewegung der ersten um den achten Teil ihrer Schwingung so haben wir, da wir mit  $\lambda$  die Wellenlänge der Schwingungen oder Periode bezeichnet haben, für  $d$  einzusetzen  $\frac{1}{8}\lambda$ . Damit wird die resultierende Kurve, indem wir für  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$  einsetzen,

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{2y}{a} \sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{\frac{1}{2}} a \left(1 - 2 \frac{y^2}{a^2}\right).$$

Fig. 244β zeigt die durch diese Gleichung dargestellte Kurve; wir entnehmen der Kurve entsprechend aus der Gleichung die Werte

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{für } y = 0$$

$$y = \pm a \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \pm 0,38268a$$

$$y = \pm \frac{1}{2} a \sqrt{2} \pm \sqrt{2} = \pm 0,92385a \text{ und } \pm 0,38268a$$

$$-a \sqrt{\frac{1}{2}} \quad y = \pm a$$

$$-a \quad y = \pm \frac{a}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 0,92385a.$$

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Kurve von der vorigen nur darin, daß der Schnittpunkt der einzelnen Kurvenäste nach der Seite der negativen  $z$  verschoben ist, und die Kurve in ihren beiden Hälften mehr gekrümmt ist. Je mehr die zweite Bewegung der ersten voraus ist, um so mehr rückt der Schnittpunkt nach oben, bis er für ein Vorausschlagen um  $\frac{1}{8}\lambda$  in den Wert  $z = a$  fällt, wo dann gleichzeitig die Kurve die Gestalt Fig. 244γ annimmt, der Punkt bewegt sich in der Linie  $qa$  nach oben. Die Gleichung der Kurve erhalten wir, wenn wir in Gleichung (1)  $d = \frac{1}{8}\lambda$  setzen

$$z = a \left(1 - 2 \frac{y^2}{a^2}\right).$$

nach ist

$$z = a \quad \text{für } y = 0$$

$$z = 0 \quad y = \pm a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$z = -a \quad y = \pm a,$$

Wie die obige Kurve zeigt.

Wenn die Phasendifferenz der Bewegungen weiter zu, so tritt zunächst wieder die Kurve Fig. 244β auf; sie behält diese Gestalt, jedoch rückt der Punkt  $q$  immer näher an 0 heranrückt, bis die zweite Bewegung der ersten um  $\frac{1}{2}$  Schwingung voraus,  $d$  also  $\frac{1}{2}\lambda$  wird. Der Unterschied vorhin ist nur der, daß der Punkt die Kurve in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Ist  $d = \frac{1}{2}\lambda$ , so tritt wieder die Kurve Fig. 244α auf, welche von dem Punkte aber in entgegengesetzter Richtung durchläuft wie vorher, als  $d = 0$  war.

Bei noch weiterer Zunahme der Phasendifferenz tritt wieder die Kurve Fig. 244 $\beta$  auf, aber in umgekehrter Lage, wir erhalten z. B. die Kurve für  $d = \frac{5}{8}\lambda$ , wenn wir uns Fig. 244 $\beta$  und für  $d = \frac{3}{8}\lambda$ , wenn wir uns Fig. 244 $\gamma$  einfach auf den Kopf gestellt denken.

Sind die Schwingungsverhältnisse der beiden Bewegungen nicht genau 1 : 2, sondern etwa 50 : 99, so durchläuft jeder Punkt nach und nach die soeben abgeleiteten Bahnen, und ebenso sehen wir dann in der Punktreihe innerhalb 50 $\lambda$  alle die Kurven nebeneinander.

Sind die Verhältnisse der Schwingungsdauern weniger einfach, so werden die Kurven verwickelter, ihre Bestimmung gelingt indes immer auf dem angedeuteten Wege.

### § 134.

**Schwingungen eines Systems von Punkten.** Wenn in einem im Raum verteilten System von Punkten das Gleichgewicht eines Punktes gestört wird, so muß auch das aller übrigen gestört werden, wenn wir voraussetzen, daß auch hier, wie in den in den vorigen Paragraphen betrachteten Punktreihen, das Punktsystem durch anziehende und abstoßende Kräfte, welche zwischen den einzelnen Punkten tätig sind, im Gleichgewicht gehalten wird. Man kann jedes System von Punkten, welche irgendwie im Raume verteilt sind, als aus Punktreihen zusammengesetzt betrachten, die man erhält, wenn man durch irgend einen Punkt des Raumes nach allen möglichen Richtungen gerade Linien legt. Diese Linien laufen von dem Punkte aus, wie die Radien einer Kugel von dem Mittelpunkte, und jeder dieser unendlich vielen Radien stellt eine Punktreihe dar. Wird der erste Punkt in eine oszillierende Bewegung versetzt, so muß sich diese in allen den Punktreihen nach den bisherigen Gesetzen fortpflanzen, da der Punkt allen Reihen gleichzeitig angehört.

Je nach der Art und Weise, wie die Punkte im Raum verteilt sind, kann die Fortpflanzung der Bewegung im Systeme verschieden sein. Wie wir sahen, hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung nur ab von dem Quotienten  $\sqrt{a \frac{e}{d}}$ , der Elastizität der Punktreihe und ihrer Dichtigkeit. Sind nun die Punkte in dem Systeme so verteilt, daß nach den einzelnen Richtungen hin auf der ganzen Länge der Radien dieser Quotient denselben Wert hat, wie wir es bei Betrachtung der Punktreihen voraussetzten, so nennt man das System ein *homogenes*. In einem solchen System pflanzt sich eine Wellenbewegung nach jeder Richtung hin mit konstanter Geschwindigkeit fort, auf der ganzen Länge jedes Radius ist die Wellenlänge dieselbe. Die schwingende Bewegung in einem solchen Systeme können wir unmittelbar mit Hilfe unserer Entwicklungen über die Schwingungen von Punktreihen erhalten.

Behalten auf den einzelnen Radien in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte Elastizität und Dichtigkeit der Punktreihen nicht denselben Wert, ändert sich die Elastizität allein oder die Dichtigkeit, oder ändern sich beide in einem verschiedenen Verhältnisse, so ist das Punktsystem ein *nicht homogenes* oder ein *heterogenes*.

In einem solchen System pflanzt sich die Bewegung in verschiedenen Abständen nicht mit gleicher Geschwindigkeit fort, die Wellenlängen sind nicht auf der ganzen Länge der Radien gleich, sondern ändern sich überall dort, wo auf denselben eine Änderung der Elastizität oder Dichtigkeit eintritt, denn überall dort findet eine Änderung des Quotienten  $\sqrt{a \frac{e}{d}}$  statt.

Die homogenen Punktsysteme können entweder isotrop oder anisotrop sein.

1. Isotrope Punktsysteme sind solche, bei denen für sämtliche Schwingungen der Quotient  $\sqrt{a \frac{e}{d}}$  derselbe ist, also nicht nur auf jedem Radius des Systems für sich betrachtet, sondern auch auf allen verschiedenen Radien, einerlei nach welcher Richtung auf denselben die Schwingungen erfolgen. Gleichartige Schwingungen, also auf allen Radien longitudinale, oder auf allen Radien transversale, pflanzen sich nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fort. Ein derartiges Punktsystem würden wir z. B. erhalten, wenn wir nach drei zueinander senkrechten Richtungen des Raumes die Punkte in ganz gleichen Abständen verteilt denken und annehmen, daß überall in gleichen Abständen die Punkte mit gleichen Kräften aufeinander wirken. Die Punkte würden also auf Ecken von Würfeln liegen, welche im ganzen System gleiche Seiten haben.

Ist der Quotient  $\sqrt{a \frac{e}{d}}$  nicht nach allen Richtungen hin derselbe, so nennt man das System ein anisotropes oder heterotropes; es ist das der Fall, wenn die Dichtigkeit der verschiedenen Punktreihen oder die Elastizität derselben verschieden ist, wenn also die Punkte in einer Richtung dichter liegen oder mit stärkerer Kraft in ihrer Gleichgewichtslage gehalten werden als in einer andern, oder auch, wenn in einer und derselben Reihe der Wert von  $e$  verschieden ist, je nach der Richtung, nach welcher der Punkt bei transversaler Schwingung aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist. In jeder Punktreihe pflanzt sich dann eine gegebene Schwingung mit konstanter Geschwindigkeit fort, welche aber von Punktreihe zu Punktreihe oder je nach der Richtung der transversalen Schwingung verschieden ist.

Betrachten wir die Fortpflanzung der Wellenbewegung in isotropen Punktsystemen etwas genauer und nehmen wir an, die Schwingungen haben überall in bezug auf die Punktreihen die gleiche Richtung.

Bezeichnen wir wie früher die Oszillationsdauer der schwingenden Bewegung mit  $T$  und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung mit  $c$ , so hat sich nach Verlauf der Zeit  $T$  die schwingende Bewegung auf Punkten einer Kugel mitgeteilt, welche mit dem Radius  $R = cT$  den Anfangspunkt  $\alpha$  der Bewegung beschrieben wird, da sich in diesem Punkte die schwingende Bewegung nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt. Die auf der Kugeloberfläche befindlichen Punkte pflanzen gerade ihre schwingende Bewegung, während der Punkt  $\alpha$  eine volle Schwingung vollbracht hat, und die Punkte, welche die einzelnen Radien der Kugel bilden, sich in den verschiedensten Oszillationsphasen befinden, diejenigen, welche um  $\frac{cT}{4}$  von  $\alpha$  entfernt sind, haben  $\frac{1}{4}$  ihrer

Schwingung vollbracht, die um  $\frac{cT}{2}$  entfernten die Hälfte usf. Man ersieht, wie alle Punkte, welche auf einer um  $\alpha$  beschriebenen Kugel liegen, in der gleichen Phase sich befinden.

Der Bewegungszustand, der innerhalb der Kugel, die mit dem Radius  $R = cT$  beschrieben war, am Ende der Zeit  $T$  stattfindet, pflanzt sich in der folgenden Zeit  $T$  in der Richtung der Radien weiter fort, so daß am Ende der Zeit  $2T$  alle Punkte einer Kugel vom Radius  $2cT$  an der Bewegung teilnehmen. Die Punkte, die auf der Fläche dieser Kugel liegen, sind im Begriffe, ihre schwingende Bewegung zu beginnen, und die Punkte auf der Kugel vom Radius  $cT$  haben ihre erste Oszillation zurückgelegt. Die Punkte, welche in der von diesen beiden Kugeln eingeschlossenen Schale sich befinden, haben alle einen größeren oder kleineren Teil einer Oszillation zurückgelegt; sie befinden sich in derselben Phase, wie die entsprechend liegenden Punkte innerhalb der Kugel vom Radius  $cT$  zur Zeit  $T$ . Die von  $\alpha$  um  $\frac{1}{4}cT$  entfernten Punkte haben  $\frac{3}{4}$ , die um  $\frac{1}{2}cT$  entfernten  $\frac{1}{2}$  Undulation zurückgelegt.

Die Punkte innerhalb der Kugel vom Radius  $cT$  befinden sich, wenn die Erregung im Mittelpunkt der Bewegung fort dauert, in denselben Oszillationsphasen wie zur Zeit  $T$ , jetzt aber bei Zurücklegung ihrer zweiten Oszillation.

In der folgenden Zeit  $T$  pflanzt sich der Bewegungszustand der Kugelschale, die zwischen den Kugeln vom Radius  $2cT$  und  $cT$  enthalten ist, in der Richtung der Radien auf die Punkte fort, welche weniger als  $3cT$  von dem Punkte  $\alpha$  entfernt sind; eine Kugel vom Radius  $3cT$  ist die Grenze der Bewegung. Dort beginnen die Punkte ihre erste Oszillation, während sie auf der Kugeloberfläche, welche zur Zeit  $2T$  die Grenze der Bewegung war, ihre zweite Oszillation beginnen; alle zwischen diesen Kugeln befindlichen Punkte haben größere oder kleinere Teile ihrer Oszillation vollführt, je nach ihren Abständen vom Anfangspunkte oder von der Kugel, die in der vorigen Zeit die Grenze der Bewegung bildete.

Man sieht, wie nach und nach der Raum rings um den Punkt  $\alpha$  sich in eine Reihe von Kugelschalen teilt, deren Dicke jedesmal gleich  $cT$  ist, und in denen die gleichweit von der Grenze der Schalen entfernten Punkte in den gleichen Phasen der Oszillation sich befinden. Jeder Radius, den wir von dem Punkte  $\alpha$  nach der äußersten Grenze der Bewegung ziehen, hat sich ebenso in eine Anzahl Wellenlängen geteilt, wie wir es früher für die einzelnen Punktreihen gesehen haben. Deshalb nennt man auch hier die Dicke der einzelnen Kugelschalen, welche durch Kugeln vom Radius  $ncT$  und  $(n-1)cT$  begrenzt werden, die Wellenlänge, und diese Kugelschalen selbst Wellen.

Es geht demnach aus dem Gesagten hervor, daß in einem isotropen Punktsystem die schwingende Bewegung sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzt.

Hört nach einiger Zeit die schwingende Bewegung des Punktes  $\alpha$  auf, so gelangen dadurch auch die auf  $\alpha$  folgenden Punkte auf allen einzelnen Radien zur Ruhe, da die schwingende Bewegung des Punktes  $\alpha$  es ist, welche die Bewegung der folgenden Punkte veranlaßt, indem er bei seiner Bewegung die folgenden Punkte nach sich zieht. Dadurch entsteht auch



der äußern Grenze der Wellenbewegung eine innere, an der die Bewegung der Punkte aufhört.

Diese innere Grenze muß ebenso eine Kugel sein, deren Mittelpunkt  $\alpha$  und deren Radius stetig mit der Zeit  $t$  gerade so wächst, wie der Radius der äußern Grenze. Daraus folgt, daß von der Zeit an, wo  $\alpha$  auftritt sich zu bewegen, eine Kugelschale die sämtlichen bewegten Punkte umfaßt, deren Dicke gleich ist  $ct$ , wenn wir mit  $t$  die Zeit bezeichnen, während welcher der Punkt  $\alpha$  sich bewegte. Zur Zeit  $t'$  werden die Grenzen dieser Kugelschalen die beiden Kugeln vom Radius  $ct'$  und  $c(t' - t)$  sein, erstere die äußere, letztere die innere. Mit wachsender Zeit erweitert sich diese Schale immer mehr, aber die Dicke derselben ist immer

$$ct' - c(t' - t) = ct,$$

also konstant.

In nicht isotropen Systemen kann eine Wellenbewegung sich auch nicht in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, dort hängt der Abstand, bis zu welchem sich in den verschiedenen Richtungen die Bewegung in gleichen Zeiten überträgt, ab von der Dichtigkeit der einzelnen Radian sowie von der Elastizität dieser Reihen. Um demnach die Grenzen der Bewegung in diesem Falle zu erhalten, müssen wir das Gesetz kennen, nach welchem sich die Eigenschaften der Punktreihen ändern. Wir werden später, in der Lehre vom Lichte, die Fortpflanzung von schwingenden Bewegungen in solchen Systemen zu betrachten haben.

Die nicht homogenen Punktsysteme können wir als eine Verbindung einander grenzender homogener Punktsysteme ansehen. Die Fortpflanzung der schwingenden Bewegungen in denselben können wir demnach auf die Fortpflanzung der Bewegung in homogenen Punktsystemen zurückführen, und ist es notwendig, die Änderungen zu untersuchen, welche die schwingende Bewegung erfährt beim Übergange aus einem homogenen System in ein anderes ebenfalls homogenes System.

### § 135.

**Huyghensches Prinzip.** Man kann sich von der Fortpflanzung der Wellenbewegung noch eine andere Vorstellung bilden, welche zuerst von Huyghens angewandt ist und die auf dem von uns in § 130 bereits zum Teil ausgesprochenen und angewandten Prinzip der Koexistenz zweier Bewegungen beruht. Dieses Prinzip läßt sich vollständig so ausdrücken: Ein Punkt eines Systemes, der durch mehrere Impulse erregt wird, vollführt eine Bewegung, die sich als Resultante nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte bestimmen läßt. Wenn durch die Bewegung dieses Punktes auch benachbarte Punkte des Systems bewegt werden, die Bewegung der letztern aber nur Folge ist einer der komponierenden Bewegungen des zuerst bewegten Punktes, so bewegen sich dieselben gerade so, als besäße der ursprünglich bewegte Punkt nur diese Teilbewegung.

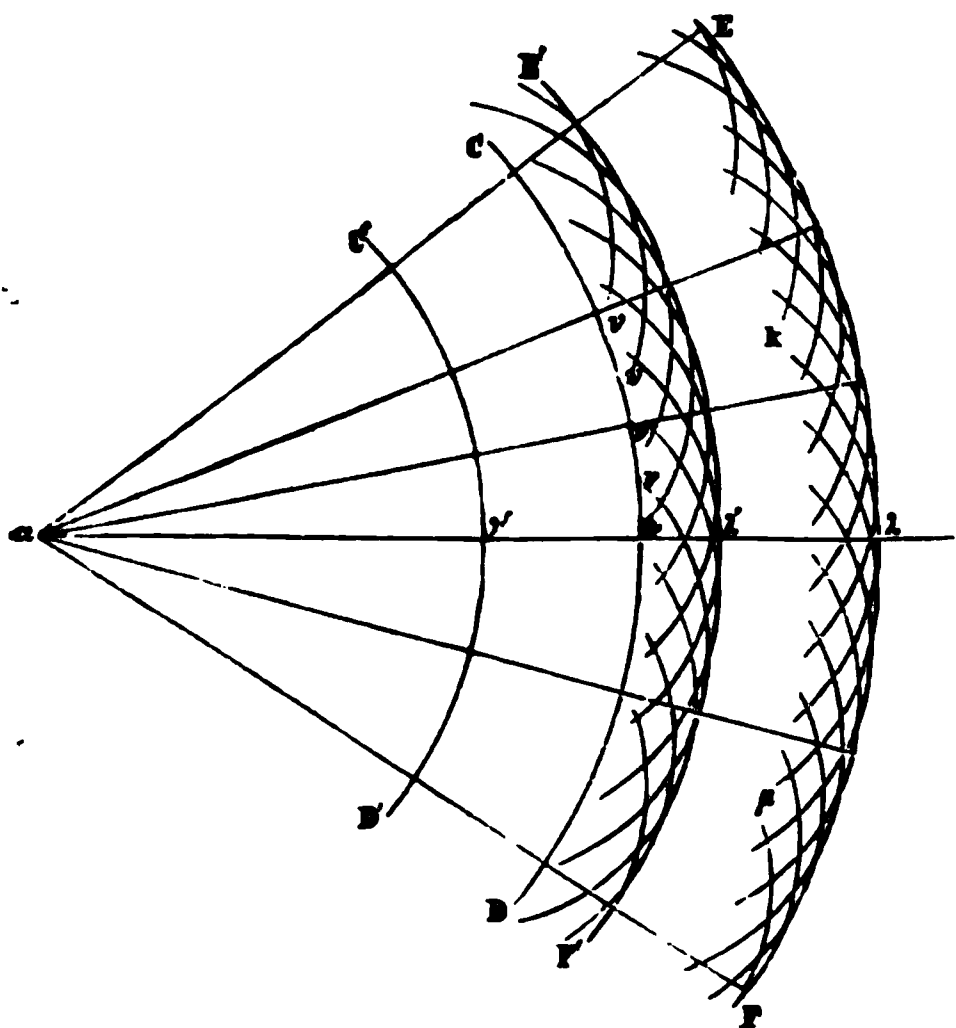
Wenn nun in einem Punktsystem eine Wellenbewegung vorhanden ist und die Bewegung bis zu einer gewissen Fläche fortgeschritten ist, so ist die Bewegung irgend eines nicht in dieser Fläche liegenden Punktes des

Systems die Resultante aller jener Teilbewegungen, welche die verschiedenen Punkte der Welle zu ihm hinsenden.

Sei  $CD$  (Fig. 245) die äußere,  $C'D'$  die innere Grenze einer Welle, welche von dem Punkte  $\alpha$  ausgegangen ist. Wir können alle Punkte, welche zwischen den Grenzen  $CD$  und  $C'D'$  liegen, als neue Wellenmittelpunkte betrachten, von denen aus sich eine schwingende Bewegung nach allen Richtungen hin fortpflanzt, gerade wie vom Punkte  $\alpha$  aus.

Diese von den einzelnen Punkten ausgehenden Wellen sind bei der Voraussetzung, daß das System ein isotropes ist, ebenso kugelförmig, wie die Flächen, deren Durchschnitte  $CD$  und  $C'D'$  sind.

Fig. 245.



Von dem Punkte  $v$  wird sich z. B. die Bewegung während einer Zeit  $t$  auf die mit dem Radius  $v\lambda = ct$  beschriebene Kugel fortgepflanzt haben, deren Mittelpunkt der Punkt  $v$  ist. Gleiches gilt für alle Punkte der Kugelfläche  $CD$ , von allen gehen nach allen Richtungen Bewegungen aus in der Form von kugelförmigen Wellen, deren Radien gleich  $ct$  sind.

Die äußere Grenze, bis zu der sich auf diese Weise die Wellenbewegung fortgepflanzt hat, wird die Fläche sein, welche alle diese einzelnen Kugeln berührt, welche also alle diese Kugeln einhüllt. Diese Fläche ist aber offenbar eine Kugel  $EF$ , welche den Punkt  $\alpha$  zum Mittel-

punkt hat, und deren Radius gleich ist  $\alpha v + ct = \alpha\lambda$ . Denn die von  $\alpha$  am weitesten entfernten Punkte der einzelnen Kugeln sind diejenigen, wo deren Radien  $v\lambda$  mit dem Radius  $\alpha v$  gerade Linien bilden; diese liegen aber auf einer Kugelfläche, deren Radius gleich  $\alpha\lambda$  ist.

Gleiches gilt auch von den Bewegungen aller übrigen zwischen  $CD$  und  $C'D'$  liegenden Punkte, auch von diesen gehen Bewegungen nach allen Richtungen aus, und der Schwingungszustand der auf irgend einer zwischen  $CD$  und  $C'D'$  liegenden Kugelfläche befindlichen Punkte hat sich so auf eine um  $ct$  von  $\alpha$  weiter entfernte Kugelfläche übertragen. Die innere Grenze der Welle ist demnach die Kugelfläche  $E'F'$ , welche mit dem Radius  $\alpha v' + v'\lambda'$  um  $\alpha$  beschrieben ist, da diese Kugelfläche alle jene einzelnen Kugeln berührt, welche von allen  $v'$  der Kugelfläche  $C'D'$  mit den Radien  $v'\lambda'$  beschrieben werden.

Wir erhalten somit durch Anwendung der Huyghensschen Konstruktion, indem wir jeden Punkt einer Welle als Bewegungsmittelpunkt ansehen, von dem aus sich die Bewegung weiter fortpflanzt, ganz dieselbe Wellenfläche, als wenn wir von dem bewegenden Mittelpunkte  $\alpha$  aus in der Richtung der Radien fortgeschritten wären.

aben jedoch nicht nur zu zeigen, daß die jedesmalige Begren-  
Velle nach dieser Konstruktion dieselbe ist, als wenn wir eine  
rbreitung nach den durch den Bewegungsmittelpunkt gelegten  
ehmen, sondern auch nachzuweisen, daß die Bewegung der ein-  
te in diesen abgeleiteten Wellen dieselbe ist, wie nach unserer  
stellung und somit die dort stillschweigend gemachte Voraus-  
geradlinigen Verbreitung von Wellen in einem Punktsystem zu  
n.

dem Ende die um den Mittelpunkt  $\alpha$  beschriebene Kugel  $A B C D$   
läche zu irgend einer Zeit  $t$ , und  $\mu$  ein Punkt des Systems, der  
e  $\delta$  von dem Punkte  $\nu$  auf dem Radius  $\alpha \nu$  entfernt liegt

unkt  $\mu$  hat, wenn die Bewegung sich fortpflanzt, nach einer  
eit  $\tau$  zunächst eine Bewegung durch die von  $\nu$  in der Rich-  
adius  $\nu \mu$  sich fortpflanzende Bewegung. Nehmen wir an, daß  
 $\nu$  am Ende der Zeit  $t$  oder im Beginne der Zeit  $\tau$  seine Be-  
ade beginnt, so  
ie der Oszillation  
es  $\mu$  bestimmt  
Gleichung

$$2\pi \left( \frac{\tau}{T} - \frac{\delta}{\lambda} \right),$$

mit  $a$  die Ampli-  
die Oszillations-  
mit  $\lambda$  die Wellen-  
schwingenden Be-  
zeichnen.

unserer Annahme

unkte der Wellenfläche Mittelpunkte der Bewegung, von denen  
igungen nach allen Richtungen hin fortpflanzen. Zur Zeit  $\tau$   
on allen Punkten der Wellenfläche  $A B C D$  eine Bewegung auf  
 $\mu$  übertragen. Da aber die Abstände der einzelnen Punkte  $\nu'$   
sich sowohl als von  $\nu \mu$  verschieden sind, so sind die gleichzeitig  
amenden Bewegungen zu verschiedenen Zeiten von der Welle  
gegangen, es folgt daraus, daß die Phasen aller gleichzeitig  
unkt  $\mu$  wirkenden Bewegungen unter sich sowohl als von der  
ehenden Bewegung verschieden sind. Nennen wir die Entfer-  
Punktes  $\nu'$  von  $\mu$  nun  $\delta'$ , so erhalten wir als Abstand des  
von der Gleichgewichtslage infolge dieser Bewegung

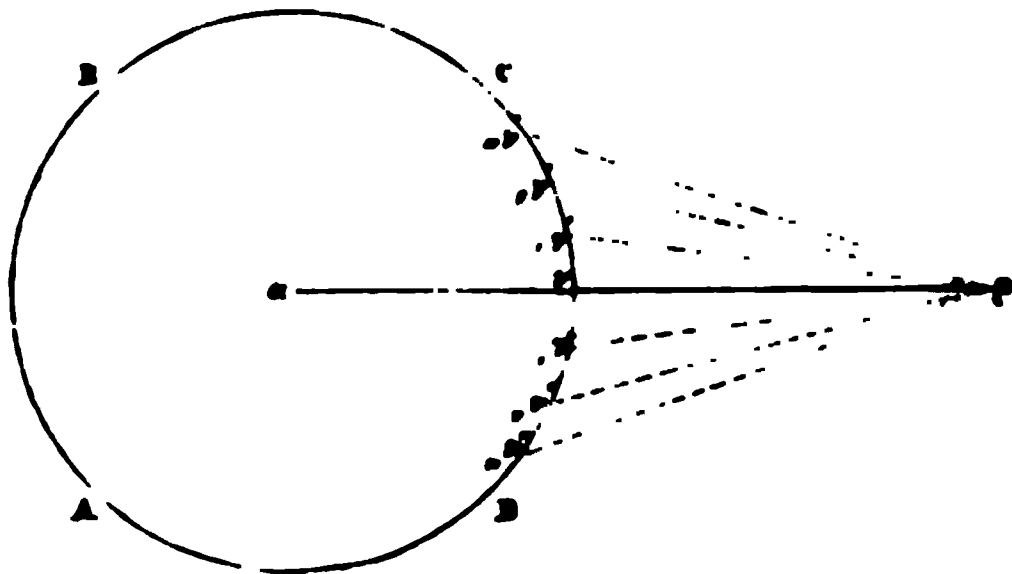
$$y' = a \sin 2\pi \left( \frac{\tau}{T} - \frac{\delta'}{\lambda} \right)$$

asendifferenz der beiden Bewegungen die Differenz

$$\frac{\delta' - \delta}{\lambda}.$$

h der Lage des Punktes  $\nu'$  hat diese Differenz immer andere  
wächst stetig, je weiter der Punkt  $\nu'$  von  $\nu$  entfernt liegt, so  
gleichzeitig Bewegungen in allen möglichen Phasen auf den

Fig. 246.



Punkt  $\mu$  einwirken. Um die Resultierende aus diesen sämtlichen Bewegungen zu erhalten, denken wir uns durch Kreise, deren Mittelpunkte auf  $\alpha\mu$  liegen, und die zu  $\alpha\mu$  senkrecht sind, die Wellenfläche  $CD$  in Reihe von Zonen  $\nu'$ ,  $\nu'$ ,  $\nu''$ ,  $\nu''$  zerlegt, so zwar, daß die Abstände aufeinander folgenden Punkte  $\nu$  von  $\mu$  sich immer um  $\frac{1}{2}\lambda$  unterscheiden, so daß also

$$\nu'\mu - \nu'\mu = \nu'\mu - \nu\mu = \nu''\mu - \nu''\mu = \nu''\mu - \nu\mu = \frac{1}{2}\lambda.$$

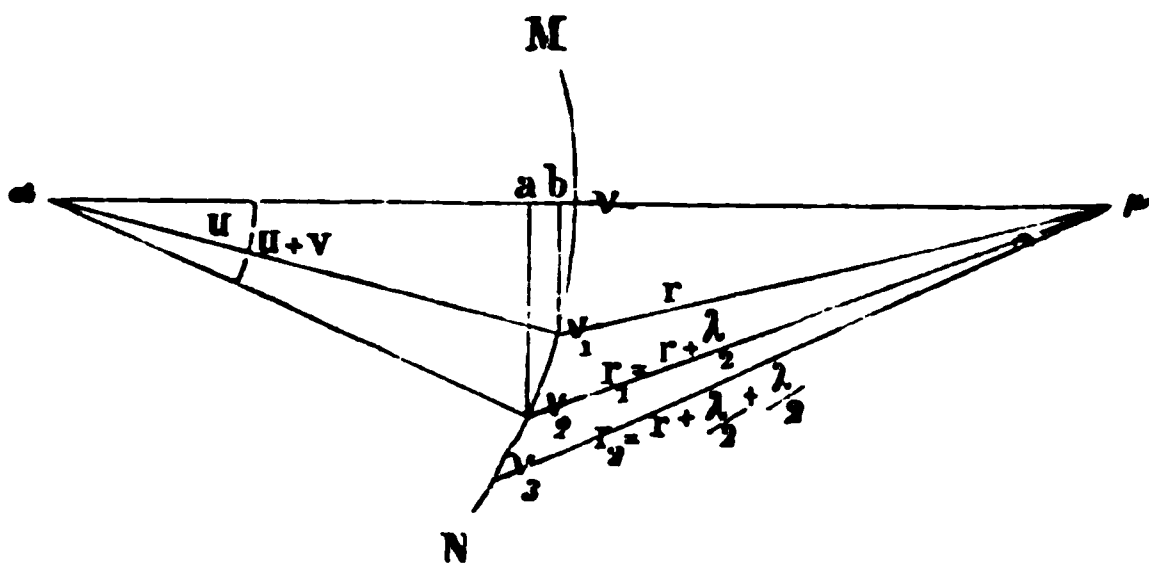
Die sämtlichen Bewegungen, welche von den auf der zunächst  $\mu$  liegenden Zone befindlichen Punkten ausgehen, treiben zur Zeit  $t$  Punkt  $\mu$  nach derselben Richtung, da die Phasendifferenz dieser Bewegungen kleiner als  $\frac{1}{2}\lambda$  ist. Die von den Punkten der zweiten Zone  $\nu'$ ,  $\nu'$ ,  $\nu''$  ausgehenden Bewegungen treiben den Punkt  $\mu$  dagegen nach entgegengesetzter Richtung, da alle Strahlen dieser Zone gegen die entsprechenden der vorigen, zunächst um  $\nu$  liegenden Zone um eine halbe Wellenlänge verschoben sind. Die von der dritten Zone ausgehenden Bewegungen sind gegen die der ersten um eine ganze Wellenlänge verschoben, sie sitzen also keine Phasendifferenz gegen jene und bewegen demnach Punkt  $\mu$  wieder in demselben Sinne. Ihnen entgegen wirken aber Strahlen der vierten Zone, welche eine Phasendifferenz von  $\frac{1}{2}\lambda$  mit den von den Punkten der dritten Zone herrührenden Bewegungen besitzen.

Ebenso ist es mit allen folgenden Zonen, so daß die abwechselnden Zonen stets Bewegungen in  $\mu$  erzeugen, welche eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge besitzen, welche sich also gegenseitig schwächen.

Die resultierende Bewegung in  $\mu$  wird also wesentlich von der Amplitude abhängig sein, welche jede der Zonen in  $\mu$  erzeugt. Diese aber hängt von zwei Umständen ab, einmal nämlich von der Anzahl der in jeder Zone schwingenden Punkte, und dann von der Neigung der in jeder Zone stattfindenden Schwingungen gegen die in  $\mu$  durch den Punkt  $\nu$  des Randes erregte Schwingung. Denn betrachten wir nur transversale Schwingungen

so kann z. B. von der sechsten Zone her die Komponente in Betracht kommen, welche zu  $\nu\mu$  senkrecht ist. Zur Berechnung der Resultierenden müssen wir also die Summe der von allen Zonen kommenden Schwingungen bilden, multipliziert mit dem Kosinus des Neigungswinkels, den sie mit der Schwingung bei  $\nu$  bildet. In dieser Form

Fig. 247.



winkels, den sie mit der Schwingung bei  $\nu$  bildet. In dieser Form wird die Lösung des Problems die größte Schwierigkeit bieten. Glücklicherweise kann man das Problem auch anders anfassen, indem man nur die Schwingungen der unmittelbar benachbarten Zonen vergleicht, also die der zweiten mit jenen der ersten und dritten, die der vierten mit jenen der ersten und fünften. Da die Neigungen der unmittelbar benachbarten Zonen

erst wenig verschieden sind, so können wir bei dieser Betrachtung die Verschiedenheit derselben vernachlässigen und die von jeder Zone erregte Bewegung der Größe der Zone, der Anzahl der in ihr schwingenden Punkte, proportional setzen. Wir haben deshalb nur die Größe der inneren Zonen zu berechnen; sei zu dem Ende  $MN$  der Durchschnitt durch ein Stück der primären Welle, welche nach  $\mu$  ihre Schwingungen sendet, seien  $\nu_1 \nu_2, \nu_3 \nu_4$  die Durchschnitte durch zwei benachbarte Zonen, laß die Abstände ihrer Grenzen von  $\mu$  sich um  $\frac{\lambda}{2}$  unterscheiden, so also

$$r_1 = r + \frac{\lambda}{2}, \quad r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2}$$

Denken wir uns den Durchschnitt um  $\alpha\mu$  als Achse rotiert, so bleibt der Bogen  $MN$  das betreffende Stück der primären Welle, und Bogen  $\nu_1 \nu_2$  die zwischen  $r$  und  $r + \frac{\lambda}{2}$  liegende Zone. Um die Größe derselben zu erhalten, denken wir uns bei  $\nu_1$  ein unendlich kleines Stück Schnittes, dessen Länge im Bogenmaß wir mit  $du$  bezeichnen, dessen Größe in Linienmaß also  $a du$  ist, wenn wir den Radius der primären Welle mit  $a$  bezeichnen. Der Abstand dieses Elementes von der Drehungsachse ist  $\nu_1 \alpha\mu$ , die Größe der von demselben beschriebenen Zone somit gleich  $\nu_1 b \cdot a du$ . Setzen wir jetzt den Winkel  $\nu_1 \alpha\mu$  gleich  $u$ , so ist  $a \sin u$  und damit die Größe der von dem Element  $du$  beschriebenen Zone  $2\pi a^2 \sin u du$ . Jedes Element  $du$  des Durchschnittes  $\nu_1 \nu_2$  besitzt eine solche Zone, und die Summe aller dieser Elementarzonen ist die gesuchte Zone. Die einzelnen Elementarzonen erhalten wir, wenn wir den eben abgeleiteten Ausdrucke nach und nach für  $u$  alle Werte einsetzt von  $u = \nu_1 \alpha\mu = u$  bis  $u = \nu_2 \alpha\mu = u + r$ , wenn wir den Winkel  $\nu_2 \alpha\mu = r$  setzen. Wir können diese Summe schreiben, wenn wir die Größe der Zone gleich  $Z_n$  setzen

$$Z_n = \int_u^{u+r} 2\pi a^2 \sin u du = 2\pi a^2 \int_u^{u+r} \sin u du$$

erhalten dann in oft gemachter Anwendung der Regeln der mathematischen Einleitung

$$Z_n = 2\pi a^2 \{ \cos u - \cos (u + r) \}.$$

Setzen wir den Abstand der primären Welle von  $\mu$  gleich  $b$ , also  $a + b$ , so ist nach einem bekannten Satze der Trigonometrie

$$r^2 = (a + b)^2 + a^2 - 2a(a + b) \cos u$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (a + b)^2 + a^2 - 2a(a + b) \cos (u + r)$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r^2 = r\lambda + \frac{\lambda^2}{4} = 2a(a + b) \{ \cos u - \cos (u + r) \}$$

$$\cos u - \cos (u + r) = \frac{1}{2a(a + b)} \left( r\lambda + \frac{\lambda^2}{4} \right),$$

so daß schließlich die gesuchte Größe der Zone wird

$$Z_n = \frac{\pi a}{a + b} \left( r\lambda + \frac{\lambda^2}{4} \right).$$

Die Größe der folgenden Zone erhalten wir aus diesem Ausdruck sofort, indem wir für  $r$  einsetzen  $r_1 = r + \frac{\lambda}{2}$ , dieselbe wird damit

$$Z_{n+1} = \frac{\pi a}{a + b} \left( r\lambda + 3 \frac{\lambda^2}{4} \right)$$

und die Größe der auf diese folgenden Zone, wenn wir zu  $r$  nochmals  $\frac{\lambda}{2}$  addieren, also

$$Z_{n+2} = \frac{\pi a}{a + b} \left( r\lambda + 5 \frac{\lambda^2}{4} \right).$$

Wir sehen also, daß die Größen der aufeinander folgenden Zonen nicht gleich sind, daß aber

$$Z_{n+1} = \frac{1}{2} (Z_n + Z_{n+2}),$$

oder die Größe jeder einzelnen Zone ist genau gleich der halben Summe der vorhergehenden und der nachfolgenden Zone. Mit diesem Satze ist unsere Aufgabe gelöst, denn es folgt nach der vorhin gemachten Bemerkung, daß die Wirkung der zweiten Zone durch die halbe erste und halbe dritte, die der vierten durch die halbe dritte und halbe fünfte Zone aufgehoben wird, und so fort über die ganze primäre Welle, soweit von derselben Bewegung nach  $\mu$  kommt. Es bleibt somit nur die von der halben unmittelbar um  $\nu$  liegenden Zone ausgehende Bewegung übrig; die Bewegung des Punktes  $\mu$  ist also ganz dieselbe, als wenn nur in der Richtung  $av$  die Bewegung sich fortgepflanzt hätte, also in der Richtung des durch  $a$  und  $\nu$  gelegten Radius.

Wir gelangen demnach durch die Huyghenssche Konstruktion ganz zu denselben Resultaten wie nach der im vorigen Paragraphen dargelegten Anschauung über die Fortpflanzung der Wellenbewegung; wir werden daher in spätern Fällen sowohl die eine als die andere Anschauungsweise anwenden können.

### § 136.

**Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen; Reflexion der Wellen.** Ein nicht homogenes Punktsystem können wir, wie bereits erwähnt, als aus homogenen Punktsystemen zusammengesetzt ansehen. In den einzelnen Teilen des Systems wird daher die Fortpflanzung der Wellenbewegung denselben Gesetzen folgen, wie in einem homogenen System. Die Bewegung wird sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, wenn die einzelnen Systeme isotrop sind, in anders geformten, wenn sie anisotrop sind. Um demnach die Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen vollständig zu bestimmen, haben wir nur die Erscheinung zu untersuchen, welche beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Punktsysteme in ein anderes sich darbieten.

Wenn eine Wellenbewegung sich in einem homogenen Mittel, d. h. in einem von gleichförmiger Dichte und Elastizität fortpflanzt,

niemals zurückkehren, vielmehr läßt sie beim Übergange auf neue in die vorhergehenden in absoluter Ruhe zurück. Ebenso wie eine Kugel, wenn sie auf eine zweite von gleicher Masse stößt, an diese ihre Geschwindigkeit abgibt und nach dem Stoße in Ruhe zurückbleibt, trägt auch jeder schwingende Punkt auf den ihm an Größe genau folgenden seine ganze Geschwindigkeit. In der Ruhelage ankommen, verläßt er dieselbe daher nicht mehr, wenn nicht ein neuer Impuls von dem bewegenden Mittelpunkt her ihn trifft. Die Wellenbewegung geht daher in einem homogenen Punktsystem einfach voran, ohne je zurückkehren.

Anders jedoch, wenn eine Wellenbewegung die Grenze zweier verschiedener Punktsysteme trifft. Wenn eine Kugel auf eine zweite stößt, die mehr oder weniger Masse als die erste besitzt, so bleibt sie in der ersten Fall nach dem Stoße noch in Bewegung. Hat die zweite Kugel eine größere Masse als die erste, so wird die erste Kugel zurückgeworfen, die zweite Kugel bewegt sich vorwärts, die stoßende ihrer frühern Bewegung zurück. Hat die zweite Kugel eine geringere Masse, so fährt die erste Kugel fort, sich in gleichem Sinne wie vorhin zu bewegen. So muß auch bei der Wellenbewegung sein, wo die Bewegung der einzelnen Punkte Folge der Einwirkung der benachbarten Punkte ist. Kommt eine Welle an der Grenze zweier Mittel an, so wird die Bewegung in das zweite Mittel übergehen und dort eine Wellenbewegung erzeugen, die sich nach den für dieses System gültigen Gesetzen fortpflanzt. Zugleich bleiben auch die in der letzten Schicht des ersten Mittels liegenden Punkte in Bewegung.

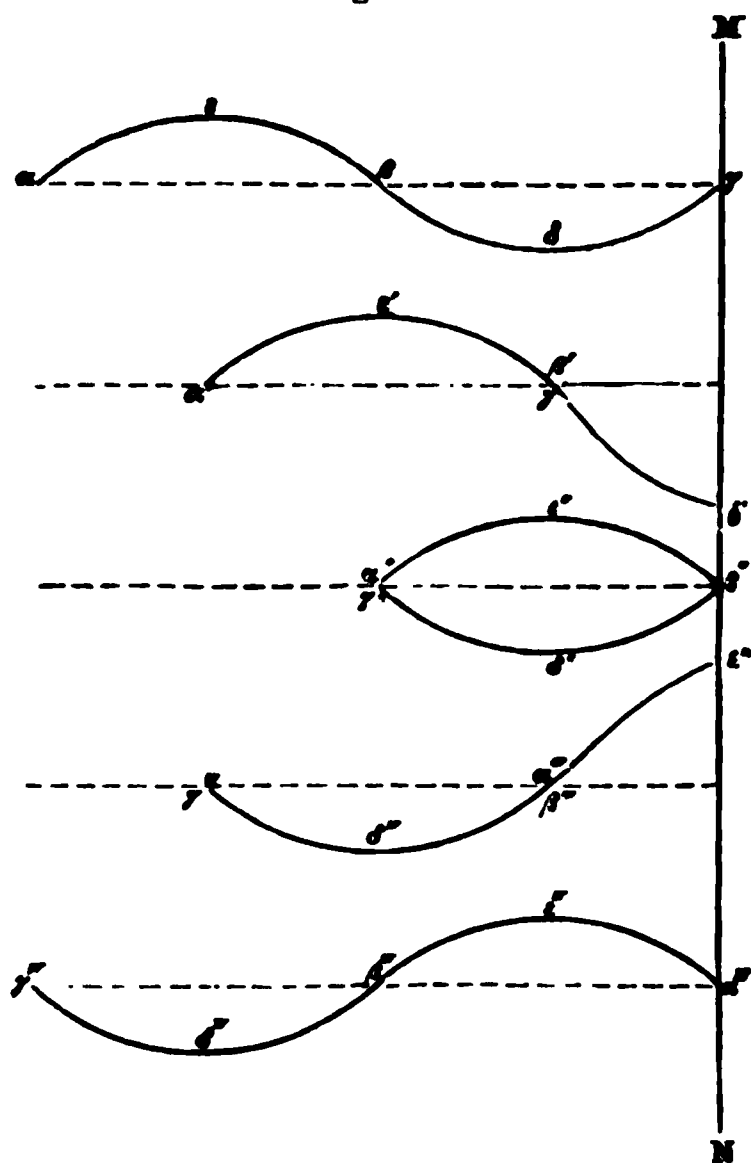
Wenn das zweite System weniger dicht, so werden die in der Grenzschicht liegenden Punkte einfach ihre Bewegung fortsetzen, nur wird die Amplitude der resultierenden Bewegung kleiner sein. Dadurch werden diese Punkte Mittelpunkte neuer Wellen, welche sich rückwärts im ersten Systeme ausbreiten, die Bewegungen der Mittelpunkte dieser neuen Wellen gerade so, als wären sie Folge neuer Impulse von ankommenden Wellen, seien auch die von der Grenze zurückkehrenden Wellen einfach die Rückwirkung der ankommenden Wellen sein, d. h. die Phasen der Schwingungen in den zurückkehrenden Wellen sind in irgend einem Abstände von der Phase ganz dieselben, als wenn sich die Bewegung in ihrer ursprünglichen Richtung um eine gleiche Strecke weiter fortgepflanzt hätte.

Man stelle  $\alpha\beta\gamma$  (Fig. 248) eine an der Grenze zweier Mittel, von denen das zweite Mittel weniger dicht ist als das erste, ankommende Welle vor. Der Punkt  $\gamma$  wird infolge der einfallenden Welle bewegt und nach  $\frac{1}{2}$  Undulationszeit befindet sich in  $\delta'$ . Da derselbe aber an die weiter liegenden Punkte des zweiten Mittels nur einen Teil seiner Geschwindigkeit abgibt, erhält er einen Teil der an ihn übertragenen Bewegung bei. Dieses ist dasselbe, als wenn er seine ganze Bewegung abgäbe, zugleich aber einen neuen Impuls in derselben Richtung, in der er sich bewegt, erhalten würde. Deshalb pflanzt sich in dem Augenblicke, wo sich der Punkt  $\gamma$  befindet, eine nach unten gerichtete Bewegung, das Wellental, auch nach rückwärts fort. Da sich nun die Bewegung in der Punktreihe nach rückwärts mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, mit der sie ankommt, ist die dritte Bewegung nach  $\frac{1}{2}$  Undulationszeit bis  $\gamma'$  vorgeschritten, so daß



die vordere Hälfte des reflektierten Tales und die hintere des ankommenden Tales in  $\beta'\delta'$  oder  $\gamma'\delta'$  zusammenfallen; die Tiefe des an der Grenze entstehenden Wellentales ist also die Summe der Tiefen des ankommenden und des reflektierten Tales. Weiter nach  $\frac{1}{4}$  Schwingungsdauer ist  $\gamma$  wieder in seiner Ruhelage angekommen, in  $\beta''$ , und der Wellenberg  $\alpha\epsilon\beta$  ist bis an die Grenze  $\alpha''\epsilon''\beta''$  vorgeschritten. Das reflektierte Tal hat sich aber ebenfalls um  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge nach rückwärts fortgepflanzt und befindet sich in  $\gamma''\delta''\beta''$ . An der Grenze wird daher für einen Augenblick die Bewegung gestört, indem durch Interferenz der ankommenden und reflektierten Welle die zwischen  $\alpha''$  und  $\beta''$  befindlichen Punkte nur durch die Differenz der entgegengesetzten Impulse bewegt wird.

Fig. 248.



Nach einer weiteren  $\frac{1}{4}$  Schwingungszeit ist das reflektierte Tal bis  $\gamma''\delta''\beta''$  fortgeschritten, der in der Grenze befindliche Punkt hat infolge des eingetroffenen Wellenberges sich nach der entgegengesetzten Seite, nach  $\epsilon''$  bewegt. Wieder aber hat sich die Bewegung dieses Punktes an die rückwärts liegenden übertragen, da er wegen der geringern Dichtigkeit des zweiten Mittels nicht einen so großen Teil seiner Geschwindigkeit an die folgenden Punkte abgegeben hat. Die Höhe des Wellenberges an der Grenze ist daher viel bedeutender als diejenige in den fortschreitenden Wellen, und von der Grenze aus pflanzt sich dem vorher reflektierten Tale folgend ein Wellenberg fort. Nach einer weiteren  $\frac{1}{4}$  Undulation befindet sich das reflektierte Tal in  $\gamma'''\delta'''\beta'''$  und ihm folgend der vollständig reflektierte Berg  $\beta'''\epsilon'''\alpha'''$ .

Gerade also wie in der ankommenden Wellenbewegung das Wellental dem Wellenberge vorausgeht, so auch im reflektierten, die Bewegung ist in der reflektierten Welle dieselbe, wie wenn sie ungestört, nur mit kleinerer Amplitude fortgeschritten wäre. Gerade wie das Wellental fortschreitend in der nächsten Strecke der Punktreihe ein Wellental und der Wellenberg einen Wellenberg erzeugt, so erzeugt auch bei der Reflexion das ankommende Wellental ein rückkehrendes Wellental und der ankommende Wellenberg einen zurückkehrenden Berg.

Anders verhält es sich, wenn das zweite Mittel eine größere Dichtigkeit besitzt. Die bei der longitudinalen Schwingung sich gegen das zweite Mittel bewegenden Punkte werden zurückgestoßen, und die sich von der Grenze entfernenden zurückgezogen, in jedem Falle also wird die ankommende Bewegung in die entgegengesetzte verwandelt; so auch bei der transversalen Bewegung; die sich in dem einen oder andern Sinne von der Gleichgewichtslage entfernenden Punkte werden von den folgenden

des zweiten Mittels stärker zurückgezogen, als wenn die folgenden gleiche Dichtigkeit hätten. Die Wirkung des dichtern Mittels also dieselbe, als wenn die in der Grenze befindlichen Punkte, Bewegung gehemmt wird, einen ihrer Bewegung entgegengesetzten erhalten hätten. Dadurch werden sie Mittelpunkte einer neuen, Augenblick, wo die erste ankommt, beginnenden Bewegung, welche Richtung nach der ankommenden entgegengesetzt ist. Diese der ankommenden entgegengesetzte Bewegung pflanzt sich in dem ersten Punkt rückwärts fort.

stellt demnach  $\alpha\beta\gamma$  (Fig. 249) eine an der Grenze zweier Mittel, welches rechts von  $MN$  dichter ist, ankommende Welle dar, so wird

ankommende Wellental als Wellenberg reflektiert; nach der Zeit von  $\frac{1}{2}$  Schwingung ist daher die Stellung der Welle in  $\beta'$  und der Grenze gelegenen Punkte

durch die Differenz der ankommenden und reflektierten Wellenlänge, das Wellental hat eine viel größere Tiefe, als es bei ungehinderter Fortpflanzung der Bewegung haben würde.

Nach einer folgenden  $\frac{1}{2}$  Schwingung ist der aus dem ankommenden Wellental reflektierte Berg in die Stellung  $\delta''\beta''$  fortgepflanzt, und ebenso

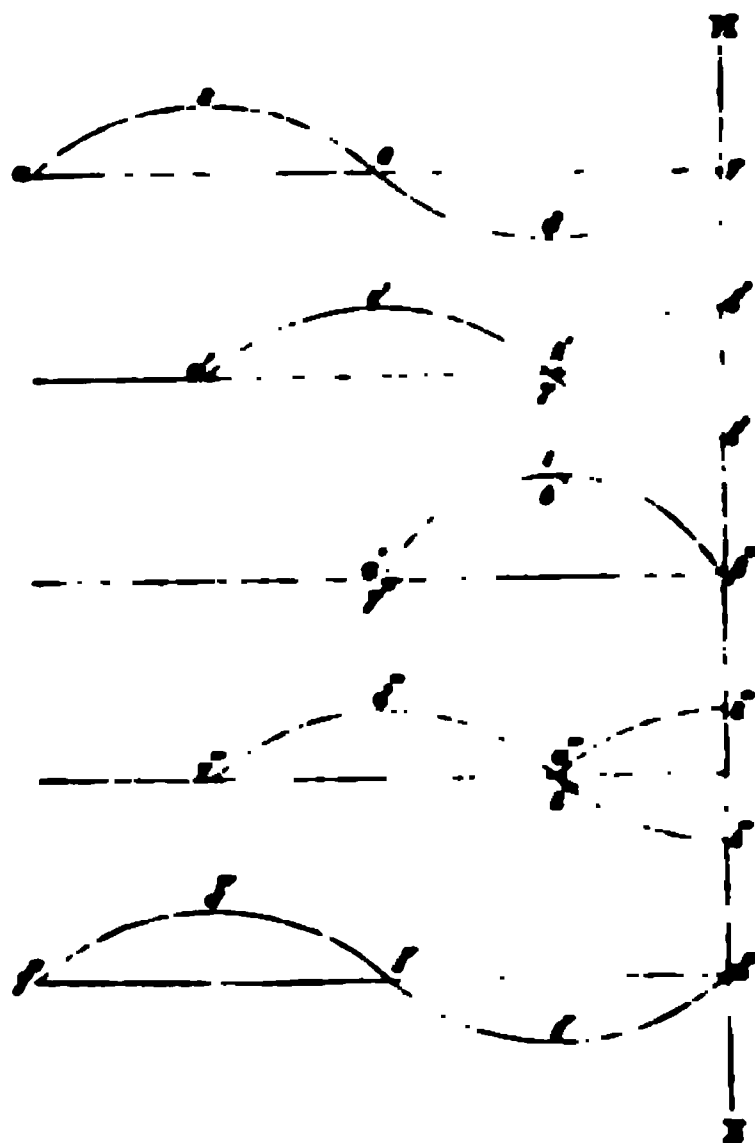
Wellenberg  $\alpha\epsilon\gamma$  bis  $\alpha''\epsilon''\beta''$  vorgerückt, an der Wand bildet sich ein neuer Wellenberg resultierender stärkerer Wellenberg. In der folgenden Schwingung ist der reflektierte Berg nach  $\gamma''$ , der ankommende ist zur Hälfte  $\delta''$ , zur Hälfte als Tal reflektiert an der Wand besteht ein Berg geringer Höhe. Nach weiterem Fortschreiten einer  $\frac{1}{2}$  Undulationszeit ist

der aus dem Wellental reflektierte Wellenberg nach  $\gamma'''\delta'''\beta'''$  vorgerückt und der zuletzt an der Grenze angekommene Wellenberg ist als Wellental reflektiert und hat die Lage  $\beta'''\epsilon'''\alpha'''$ .

Während also bei der ankommenden Bewegung das Wellental dem Wellenberg vorausging, geht in der reflektierten umgekehrt der Wellenberg dem Wellental voraus. Die reflektierte Bewegung hat also mit der ankommenden entgegengesetzte Phasen; bei ungestörter Fortpflanzung wäre der ankommende Tal in der nächsten Strecke wieder Anlaß zur Bildung eines Berges geworden, hier hat es einen Berg hervorgerufen. Durch die Reflexion ist also der reflektierte Strahl gegen den einfallenden um eine Wellenlänge verschoben.

In beiden Fällen reflektierten Bewegungen sind demnach ebenfalls um gleichen Abständen von der Grenze in entgegengesetzter Phase, wo in dem ersten das Wellental ist, ist in dem zweiten der Wellenberg und umgekehrt.

Fig. 249



Es folgt also, wenn eine Wellenbewegung an der Grenze zweier Systeme ankommt, in denen der Koeffizient  $\sqrt{a \frac{e}{d}}$  verschiedene Werte hat, so bewirkt sie immer, daß von der Grenzstelle aus sich zwei Wellensysteme weiter bewegen, eine in das erste Mittel zurück, eine reflektierte oder zurückgeworfene Welle, und eine zweite, welche in dem zweiten Mittel sich weiter bewegt.

Nehmen wir an, die beiden Punktsysteme seien isotrop, so erhält man mit Hilfe der Huyghensschen Konstruktion leicht die fortschreitende und zurückgeworfene Welle. Beginnen wir mit der letztern und setzen wir voraus, daß eine kugelförmige Welle an der ebenen Grenze zweier Mittel antreffe.

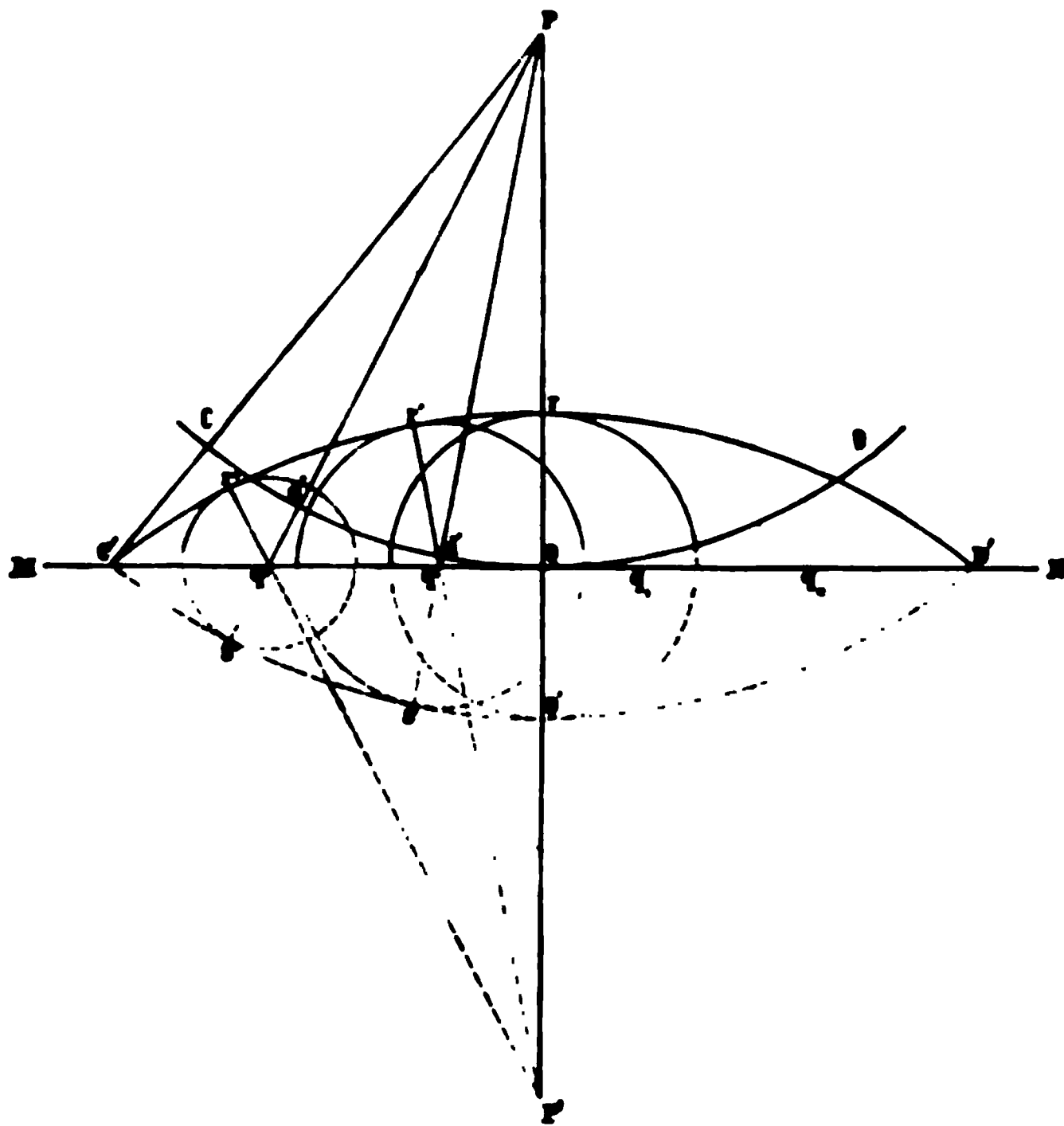
Es sei  $P$  (Fig. 250) der Mittelpunkt der Welle im ersten Mittel,  $CD$  sei ein Durchschnitt der Welle und  $MN$  ein Durchschnitt der das erste Mittel begrenzenden Ebene. Ferner sei  $PQ$  senkrecht zu  $MN$ , also  $Q$  der erste Punkt, welcher von der Wellenbewegung getroffen wird. Jeder Punkt der Grenze wird ein Mittelpunkt einer neuen in das erste Mittel zurückkehrenden Welle, sowie er von der ankommenden Bewegung getroffen wird. Es wird sich demnach zunächst von dem Punkte  $Q$  eine Bewegung in das erste Mittel ausbreiten. Da nun, wie wir sahen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle in einem elastischen Punktsystem nur abhängt von dem Quotienten  $\sqrt{a \frac{e}{d}}$ , so verbreitet sich die zurückgeworfene Welle mit eben derselben Geschwindigkeit, mit welcher sich die einfallende Welle verbreitet; in der Zeit also, in welcher von den Punkten  $D$  oder  $C$ , von denen wir der Symmetrie halber annehmen, daß sie gleichweit von  $Q$  entfernt sind, sich die schwingende Bewegung bis  $D'$  oder  $C'$  fortgepflanzt hat, wo also von diesen Punkten aus die Wellenbewegung reflektiert zu werden beginnt, pflanzt sich von  $Q$  aus die Bewegung bis zu einer Halbkugel fort, deren Radius  $Qr = CC'$  ist. Die neben  $Q$  liegenden Punkte der Grenzschicht  $q', q'', q_1, q_2$ , werden immer später von der Wellenbewegung getroffen, und zwar so viel später, als die Bewegung der ankommenden Welle braucht, um die Strecke  $d'q', d''q''$  zu durchlaufen. In derselben Zeit daher, in welcher sich die Bewegung von  $Q$  bis zu einer Halbkugel vom Radius  $Qr$  fortpflanzt, verbreitet sie sich von  $q'$  bis zu einer Halbkugel vom Radius  $q'r' = Qr - q'd'$ , von  $q''$  bis zu einer Halbkugel vom Radius  $q''r'' = Qr - q''d''$  und so von allen übrigen Punkten bis zu einer Halbkugel, deren Radius um die Länge kleiner ist als  $Qr$ , welche die Wellenbewegung noch hat durchlaufen müssen, um den betreffenden Punkt in Schwingungen zu versetzen.

Die Grenze, bis zu der sich demnach die Wellenbewegung in dem ersten Mittel rückwärts ausgebreitet hat, ist die Fläche, welche alle den einzelnen Kugeln berührend umhüllt. Es ist leicht ersichtlich, daß diese Fläche  $C'r''r'D'$  eine Kugelfläche sein muß, deren Mittelpunkt  $P'$  ebenso weit hinter  $MN$  liegt, als der Punkt  $P$ , von welchem die ankommende Welle ausging, vor  $MN$  liegt. Denn denken wir uns, daß die Welle ungehindert hätte fortschreiten können, so geben die andern Hälften der von uns um  $Q, q', q'' \dots$  beschriebenen Kugeln, nach der Huyghensschen Konstruktion, die Wellenfläche  $C'Q'D'$ , bis zu der sich die Bewegung in derselben Zeit fortgepflanzt hätte, in der sie in der Richtung  $PC$  sich in

erpflanzt. Die diese Kugeln nach der einen Seite einhüllende Fläche ist, wie wir sahen, eine Kugel vom Radius  $PC' = PQ' = PD'$ . Die, welche diese Kugeln von der andern Seite einhüllt, muß daher eine Kugel von demselben Radius sein, die ihre Konvexität jedoch nach der entgegengesetzten Seite richtet, deren Mittelpunkt also in  $P'$  liegt, so daß  $P'r$ , oder da  $Qr = QQ'$ ,  $P'Q = PQ$  ist.

Von einer ebenen Grenze zweier Punktsysteme wird demnach eine ankommende Welle gerade so reflektiert, als ginge sie von einem Mittelpunkt aus, welcher ebenso weit hinter dieser Grenze liegt, wie der Mittelpunkt der ankommenden Welle vor der Grenze.

Fig. 250.



Dieser Satz läßt sich in etwas anderer Form aussprechen, in welcher manchen Fällen leichter angewandt wird.

Aus der Gleichheit  $P'Q = PQ$  folgt, daß die Dreiecke  $P'C'Q$  und  $P'q''Q$  und  $Pq''Q$ ,  $P'q'Q$  und  $Pq'Q$  usw. sich decken und daraus, daß die Winkel

$$P'q''Q = Pq''Q,$$

$$P'q'Q = Pq'Q \text{ usw.},$$

daß die Winkel  $P'q''Q = r''q''C'$  und  $P'q'Q = r'q'C'$  sind als Scheitelwinkel, daß die Winkel

$$Pq''Q = r''q''C'$$

$$Pq'Q = r'q'C',$$

oder die Winkel, unter welchen die Radian der ankommenden und reflektierten Wellen die Grenzfläche schneiden, einander gleich sind. Nach unserer ersten Anschauung von der Art der Fortpflanzung der Wellenbewegung in einem Punktsystem waren die Radian der Wellenfläche die einzelnen Punktreihen, in welchen sich die Bewegung fortpflanzte. Nennen wir mit Rücksicht darauf die Radian die Wellenstrahlen, so können wir obigen Satz auch so aussprechen, daß bei der Reflexion einer Wellenbewegung die reflektierten Strahlen und die ankommenden mit der reflektierenden Fläche gleiche Winkel bilden.

Man bezeichnet gewöhnlich die Vertikale, welche in dem Punkte der Trennungsfläche beider Mittel errichtet wird, als das Einfallslot und den Winkel, welchen der ankommende Wellenstrahl mit demselben bildet, als Einfallswinkel, den hingegen, welchen der reflektierte Strahl mit ihm einschließt, als Reflexionswinkel.

Sind nun die Winkel, welche der ankommende und der reflektierte Strahl mit der reflektierenden Fläche einschließen, einander gleich, so sind es auch diejenigen, welche sie mit dem Einfallslot bilden, woraus dann folgt, daß eine Wellenbewegung so reflektiert wird, daß der einfallende und reflektierte Strahl mit dem Einfallslot in einer Ebene liegen, und daß der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist.

Diese Form unseres Satzes ist besonders bequem, um die Gesetze der Reflexion an krummen Flächen zu erhalten. Wir können diese als eine stetige Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, deren Normalen nicht wie bei einer Ebene einander parallel, sondern immer anders gerichtet sind. Für jede noch so kleine Ebene gilt unser Reflexionsgesetz; kennt man daher das Gesetz, nach welchem die Normalen der aufeinander folgenden kleinen Ebenen geneigt sind, so hat man darin zugleich an allen Punkten die Richtung, nach welcher ein einfallender Strahl und somit eine ankommende Wellenbewegung reflektiert wird.

Ist z. B. die Grenze zweier Mittel eine Kugelfläche, so fallen die in jedem Punkte der Fläche errichteten Senkrechten mit den Radian der Kugel zusammen. Eine an der Grenze ankommende Wellenbewegung wird daher so zurückgeworfen, daß die an jedem einzelnen Punkte reflektierten Strahlen und die ankommenden mit den Radian der Grenzfläche gleiche Winkel bilden. Kommt die Wellenbewegung aus dem Mittelpunkt der Kugel, also in der Richtung der Radian an, so wird jeder Strahl nach dem Mittelpunkt zurückgeworfen, die Bewegung kehrt in den Mittelpunkt der Kugel zurück.

### § 137.

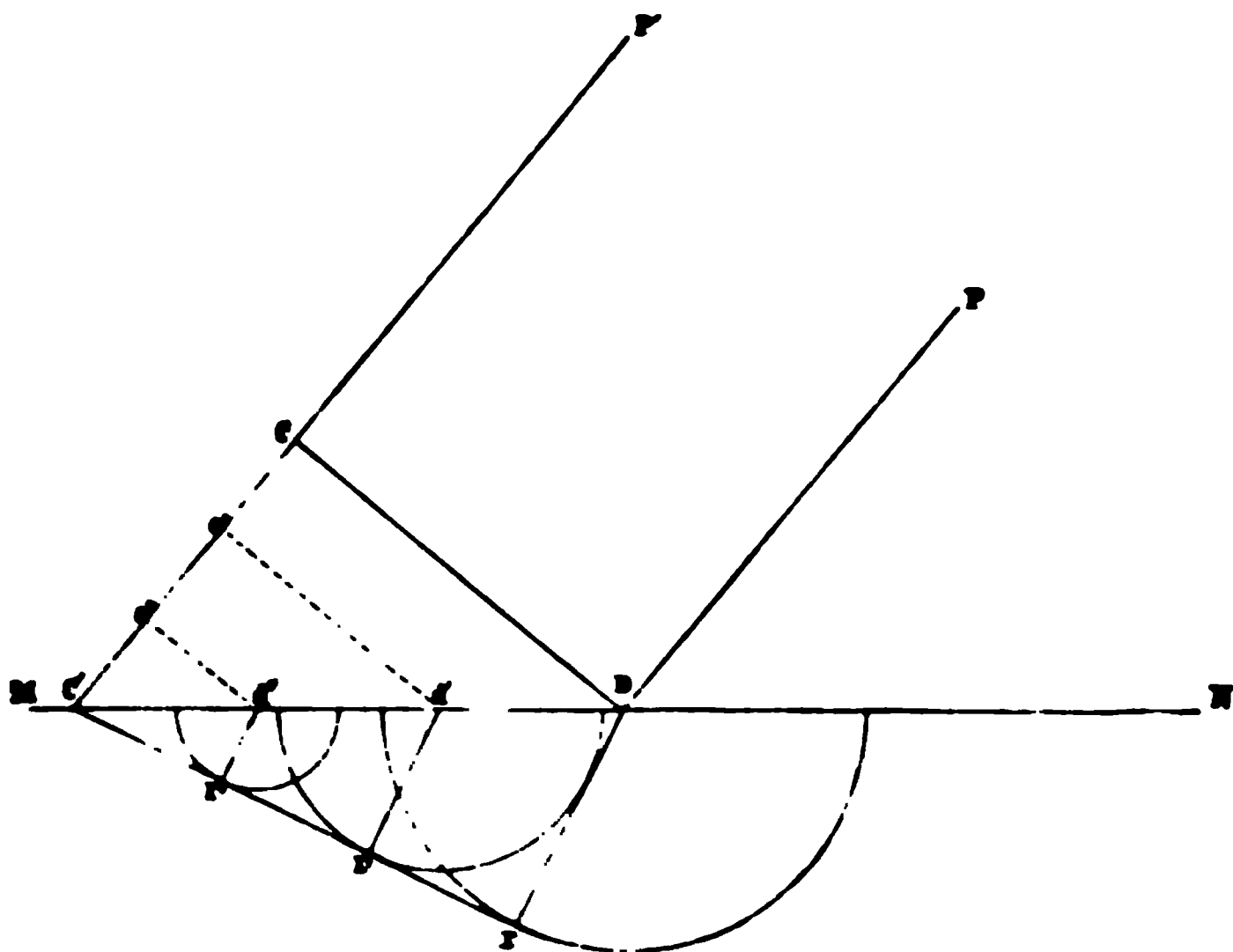
**Brechung der Wellen.** Von der Grenze zweier Punktsysteme pflanzt sich, wie wir sahen, außer in das erste System zurück, auch eine Wellenbewegung in das zweite System fort. Jeder Punkt der Grenzschicht wird sobald als die ankommende Bewegung ihn trifft, Mittelpunkt einer Welle, die sich in das zweite System fortpflanzt, mit einer andern Geschwindigkeit jedoch, als sich die Bewegung in dem ersten Systeme fortpflanzt.

Ist das zweite System dichter als das erste, d. h. ist der Quotient  $\frac{v_1}{v_2}$  kleiner für das zweite System als für das erste, so pflanzt sich die Welle

ung im zweiten Mittel langsamer, ist derselbe größer, so pflanzt sich selbe rascher fort.

Sei  $CD$  (Fig. 251) ein sehr kleines Stück einer Wellenfläche, welches dem ersten System sich in der Richtung  $PD$  gegen die Grenze  $MN$  des ersten Mittels bewegt. Nehmen wir ferner an, daß der Mittelpunkt der kommenden Welle, von der  $CD$  ein Stück ist, so weit entfernt sei, daß  $CD$  als eine zur Ebene  $NDP$  senkrechte Ebene und die Wellenstrahlen  $D$  und  $P'C$  als parallel ansehen können. In dem Augenblicke, in welchem das Wellenstück  $CD$  bei  $D$  die Grenze  $MN$  berührt, verbreitet sich von  $D$  eine Welle in dem zweiten Systeme.

Fig. 251.



Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem ersten System  $v$  und dem zweiten  $v'$ , so verhalten sich die Strecken, durch welche sich die Wellenbewegung in gleichen Zeiten fortpflanzt, wie  $v$  zu  $v'$ .

Der Radius  $Dr$  der Kugel, über welche sich die Wellenbewegung im zweiten Mittel ausbreitet, während dieselbe im ersten sich von  $C$  bis  $C'$  fortpflanzt, ist daher

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v}.$$

Von den zwischen  $D$  und  $C'$  gelegenen Punkten verbreiten sich ebenfalls Wellenbewegungen in das zweite Mittel, aber um so später, als sie selbst von der fortschreitenden Wellenbewegung getroffen werden. Von einem Punkte  $d$  beginnt sich die Bewegung erst zu verbreiten, wenn die Bewegung im ersten Mittel bis  $c'd$  fortgeschritten ist. Hat sich die Bewegung im ersten Mittel bis  $C'$  fortgepflanzt, so hat sich von  $d$  dieselbe in das zweite Mittel über eine Kugel ausgebreitet, deren Radius  $\rho$  gleich ist

$$\rho = c'C' \cdot \frac{v'}{v}.$$

Die Grenze, bis zu der sich die Bewegung im zweiten Mittel fortgepflanzt hat, wenn sie im ersten Punktsystem bis  $C'$  fortgeschritten ist, ist dann die Fläche, welche alle Kugeln, die um die verschiedenen Punkte  $d$  beschrieben sind, berührt.

Diese Fläche erhalten wir, wenn wir durch  $C'$  eine Tangente an den um  $D$  beschriebenen Halbkreis ziehen und durch diese eine zur Ebene  $C'Dr$  senkrechte Ebene legen. Denn diese Ebene berührt nicht nur die um  $D$  mit dem Radius  $Dr$  beschriebene Kugel, sondern auch sämtliche mit den betreffenden Radien um die Punkte  $d$  beschriebenen Kugeln. Denn ziehen wir von  $d'$  aus  $d'r'$  senkrecht zu  $C'r$ , so sind die Dreiecke  $C'rD$  und  $C'r'd'$  ähnlich, somit

$$d'r' : Dr = C'd' : C'D.$$

Ebenso sind aber auch die Dreiecke  $CDC'$  und  $c'd'C'$  ähnlich und somit

$$C'd' : C'D = c'C' : CC'.$$

Da nun ferner

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v},$$

so ist

$$d'r' : CC' \cdot \frac{v'}{v} = c'C' : CC',$$

oder

$$d'r' = C'c' \cdot \frac{v'}{v},$$

das heißt die von  $d'$  auf  $C'r$  herabgelassene Senkrechte ist der Radius der Kugel, die mit dem Radius  $\rho$  um  $d'$  beschrieben ist, oder  $C'r$  ist Tangente an dem Durchschnitt der Kugel mit der Ebene  $NDP$  und somit die durch  $Cr$  gelegte Ebene Tangentialebene an die um  $d'$  beschriebene Kugel. Ebenso gilt es für alle um die Punkte  $d$  beschriebenen Kugeln.

Bezeichnen wir nun die Winkel  $CDC'$  und  $DC'r$ , welche die ankommende und die in das zweite System übergegangene Welle mit der Grenzfläche bilden, mit  $\varphi$  und  $\varphi'$ , so haben wir

$$\sin \varphi = \frac{CC'}{C'D},$$

$$\sin \varphi' = \frac{Dr}{C'D} = \frac{\frac{v'}{v} \cdot CC'}{C'D},$$

und daraus

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{v}{v'}.$$

Der Winkel, welchen die in das zweite Mittel übergegangene Welle mit der Grenzfläche bildet, ist also ein anderer als derjenige, welchen die ankommende Welle mit der Grenzfläche bildet, oder was dasselbe ist, die in das zweite Mittel übergegangenen Wellenstrahlen bilden mit dem Einfallslote andere Winkel als die ankommenden Strahlen. Da aber das Verhältnis  $\frac{v}{v'}$  für zwei Mittel konstant ist, so folgt, daß die ankommende Welle unter einem Winkel ankommen kann, unter welchem sie will,  $\sin$



bewegt sich stets unter einem solchen Winkel gegen die Grenzebene weiter, daß das Verhältniß der Sinus des Winkels, unter welchem sie ankommt, und des Winkels, unter dem sie weiter geht, konstant ist. Zugleich sieht man, daß der einfallende und gebrochene Wellenstrahl und das Einfallslot in derselben Ebene liegen.

Jede an der Grenzebene ankommende kugelförmige Welle können wir als eine Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, die alle verschiedenen gegen die Grenzfläche geneigt sind, deren Neigung gegen die Grenzfläche aber bestimmt wird durch den Winkel, welche die zu ihnen gehörenden Wellenstrahlen, die einzelnen Radian, mit dem Einfallslot bilden. Mit Hilfe des obigen Satzes ist es leicht, die fortgepflanzte Welle im zweiten Punktsystem zu konstruieren.

Wir erhalten als unmittelbare Folge aus unserem Satze, daß beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Punktsystem in ein zweites, für welches der Quotient  $\sqrt{a_d}$  kleiner ist als für das erste, der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslot bildet, kleiner ist als der Winkel, welchen der ankommende Wellenstrahl mit demselben einschließt. Ist dagegen dieser Quotient größer für das zweite als für das erste Mittel, so ist der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslot bildet, größer. Beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Mittel in ein zweites werden daher die einzelnen Wellenstrahlen stets gebrochen; beim Übergange in ein Mittel von größerer Dichtigkeit werden sie zum Einfallslot hingebrochen, beim Übergange in ein Mittel von geringerer Dichtigkeit werden die Strahlen vom Einfallslot fortgebrochen.

Jede krumme Fläche können wir, wie schon bemerkt wurde, als eine Reihenfolge unendlich kleiner Ebenen betrachten, welche in steter Folge gegeneinander geneigt sind. Für krumme Begrenzungen zweier Mittel muß daher das Brechungsgesetz dasselbe sein; um den Weg der einzelnen Strahlen zu bestimmen, muß man aber das Gesetz kennen, nach welchem die einzelnen, unendlich kleinen Ebenen oder deren Einfallslotte gegeneinander geneigt sind.<sup>1)</sup>

1. Die in diesem Kapitel vorgetragenen Sätze finden sich vorzugsweise in den Abhandlungen von *Fresnel* und andern über die Undulationstheorie des Lichtes zuerst in ähnlicher Form entwickelt. Es gilt das besonders von der Ableitung der Gleichungen für die schwingende Bewegung § 125 bis § 129. Dieselben befinden sich in:

*Fresnel*, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. de France. 6. 1826. Poggend. Ann. 30. p. 100 1836 Oeuvres complètes. T. I.

Die Sätze über Interferenz der Wellen, § 130, in derselben Abhandlung von *Fresnel* und in dem Buche von *Schroeder*, die Beugungserscheinungen des Lichtes. Mannheim 1835.

Die stehenden Wellen durch Interferenz entgegengesetzter Wellenzüge leitet *Fresnel* ähnlich ab in seiner Abhandlung über die Doppelbrechung des Lichtes: Mémoires de l'Acad. de France. 7. p. 46. 1827. Poggend. Ann. 28. p. 372 u. p. 494 1831. Oeuvres complètes. T. II. p. 479 ff.

Auf die elliptischen Schwingungen machte zuerst aufmerksam *Fresnel* in seiner Abhandlung über Reflexion des polarisierten Lichtes: Annales de chim. et de phys. 46. 1830 Poggend. Ann. 22. p. 68 u. p. 90. 1831. *Airy*, Über die Doppelbrechung im Bergkristall im 4. Bande der Transactions of the Cambridge

## Zweites Kapitel.

## Von der Wellenbewegung fester Körper.

## § 138.

**Schwingende Bewegung einzelner Teile fester Körper infolge der Elastizität.** Die im vorigen Kapitel aus den früher erkannten Gesetzen über die Wirkung von Kräften theoretisch abgeleiteten Bewegungserscheinungen können wir in der mannigfachsten Weise in den Körpern hervorbringen. Alle Körper bestehen nach den Entwicklungen des § 47 aus kleinen Teilen, welche durch anziehende und abstoßende zwischen ihnen tätige Kräfte entweder allein wie bei den festen Körpern oder mit Hilfe äußerer Kräfte wie bei den flüssigen und gasförmigen Körpern im Gleichgewicht gehalten werden.

Durch eine Änderung der auf die Körper wirkenden Kräfte wird stets auch eine Änderung dieses Gleichgewichtszustandes herbeigeführt; es treten Gestaltsänderungen der festen Körper oder Bewegungen in den flüssigen oder gasförmigen Körpern hervor, welche wir in dem zweiten Abschnitte ausführlich betrachtet haben.

Beschränken wir uns zunächst auf die festen Körper, so sahen wir, wie Stäbe durch angehängte Gewichte verlängert, oder durch Druck verkürzt wurden, wie durch Drehung um eine im Innern derselben liegende Achse die einzelnen Schichten der Stäbe gegeneinander verschoben wurden, oder wie durch Biegung denselben eine andere Gestalt gegeben werden konnte.

Zugleich sahen wir aber stets bei der Änderung des Gleichgewichtszustandes eines Körpers eine Reaktion auftreten, die uns zeigte, daß infolge dieser Änderung eine gewisse Spannung zwischen den Molekülen des Körpers auftritt, durch welche sie sich bestreben, in die Gleichgewichtslage zurückzukehren. Diese Rückkehr trat ein, wenn die Änderung in den wirkenden Kräften aufhörte; überschritt die Verlängerung oder Verkürzung eines Stabes infolge der angebrachten Gewichte nicht die Elastizitätsgrenze, so kehrte der Stab nach Abnahme der Gewichte zu seiner ursprünglichen Länge zurück, war die Biegung nicht so stark, daß die Teilchen eine neue

---

Philosophical society. Poggend. Ann. 23. p. 204. 1831. Die von uns gegebene Ableitung ist im wesentlichen die von *Neumann* in der Abhandlung über die Reflexion an Metallen. Poggend. Ann. 26. p. 89. 1832. Man sehe darüber auch *Ber.* Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853. Die Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge ist besonders von *Lissajous* studiert und für akustische Zwecke nutzbar gemacht. Annales de chim. et de phys. 51. (2) p. 147. 1857.

Die Fortpflanzung der Wellen in Punktsystemen und das Huyghenssche Prinzip ist zuerst von *Huyghens* in seinem Werke *Traité de la lumière*, Leiden 1690, entwickelt, ebenso die Ableitung des Reflexions- und Refraktions-Gesetzes. Vollständiger von *Fresnel* in der erwähnten Abhandlung über die Beugung des Lichtes und in einem Zusatz derselben: Erklärung der Refraktion des Lichtes nach der Undulationstheorie. Auf den Unterschied der Reflexion an dichten und dünnern Systemen machte zuerst *Thomas Young* aufmerksam. On the theory of light and colours. Philosoph. Transact. of the Royal Society. 92. 1802.

nichgewichtslage angenommen hatten, so nahm der Stab seine ursprüngliche Gestalt wieder an.

Vorzüglich bei dieser Rückkehr in den Gleichgewichtszustand treten aber Bewegungen auf, welche wir damals, wo wir unser Augenmerk auf den endlichen Zustand der Körper richteten, außer acht ließen, von Natur zu erkennen uns aber nach dem vorigen leicht ist.

Wenn wir einen Stab von gegebener Länge und gegebenem Querschnitt durch ein Gewicht verlängerten, so ergab der Versuch, daß seine Verlängerung proportional war der wirksamen Kraft. Dieser Verlängerung war der endliche Zustand, in welchen der Körper durch die dauernde Wirkung der Kraft übergeführt wurde, er trat ein, wenn die durch die Entfernung der Teile voneinander auftretende Elastizitätskraft dem ziehenden Gewichte gleich wurde. Die Verlängerung ist eine Entfernung der einzelnen Schichten des Stabes voneinander, deshalb sind die Entfernungen den Verlängerungen proportional, das heißt, bei doppelter, dreifacher, überhaupt  $n$ -facher Verlängerung des Stabes haben sich auch die einzelnen Schichten des Stabes die doppelte, dreifache, überhaupt  $n$ -fache Größe voneinander, oder was dasselbe ist, von ihrer Gleichgewichtslage entfernt.

Da nun die Verlängerungen des Stabes den spannenden Gewichten proportional sind, und da bei dem endlichen Zustande die Kräfte, mit denen die einzelnen Schichten sich rückwärts anziehen, den spannenden Gewichten die Größe genau gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind, so folgt, daß die Kraft, mit der irgend eine Schicht des Stabes, wenn sie außerhalb der Gleichgewichtslage sich befindet, gegen diese hingezogen wird, dem Abstände derselben von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Bei der Rückkehr jeder Schicht in ihre Gleichgewichtslage ist daher die Bewegung derselben eine beschleunigte, in derselben angekommen, besitzt sie eine gewisse Geschwindigkeit, vermöge welcher sie sich über die Gleichgewichtslage hinaus bewegt. Wenn sie dieselbe überschritten hat, wirken aber die Kräfte in entgegengesetztem Sinne auf sie ein und vertheilen so allmählich die der Schicht vorher erteilte Geschwindigkeit. Dann tritt, da jetzt wieder dieselben Elastizitätskräfte auf die Schicht einwirken, eine rückgängige Bewegung ein, bei der sich dasselbe wiederholt: die Schicht erhält also eine schwingende Bewegung. Da das Gesetz, nach welchem die wirkenden Kräfte mit der Entfernung der Schicht von der Gleichgewichtslage sich ändern, dasselbe ist, welches wir der Ableitung der schwingenden Bewegung von Punkten zugrunde legten, so können wir die dort erhaltenen Resultate unmittelbar auf die so entstehenden Schwingungen der festen Körper übertragen.

Ganz das Gleiche gilt von den Bewegungen, welche ein Körper, der durch Biegung oder Torsion aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, bei der Rückkehr in dieselbe vollführt; auch in diesem Falle ist die Biegung oder Torsion der wirkenden Kraft, also die bei der Biegung oder Torsion auftretende elastische Kraft dem Abstände der einzelnen Teile von der Gleichgewichtslage proportional. Bei der Rückkehr in dieselbe muß daher der Körper schwingende Bewegungen vollführen, welche den vorhin entwickelten Gesetzen folgen.

## § 139.

**Longitudinale Schwingungen der Stäbe.** Wenn man einen Stab in seiner Mitte oder an einem oder beiden Enden festhält und ihn an einem Ende rasch mit einem Hammer schlägt, oder seiner Länge nach mit der Hand, nachdem sie mit etwas Kolophonium eingerieben ist, oder mit einem nassen Tuche stark reibt, so geraten die Teile des Stabes in longitudinale Schwingungen, das heißt sie bewegen sich in der Richtung der Längsachse des Stabes hin und her. Bei dieser Bewegung ändert der Stab seine äußere Gestalt nicht merklich, sondern es bilden sich in seinem Innern nur abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen, die sich in der § 128 dargestellten Weise durch den Stab verbreiten, in einem begrenzten Stabe an der Grenze reflektiert werden und dadurch zu stehenden Schwingungen des Stabes Anlaß geben.

Die longitudinalen Schwingungen eines Stabes sind nicht unmittelbar sichtbar; indes hat Savart<sup>1)</sup> sie auf folgende Weise sichtbar gemacht. Er befestigte Glas- oder Metallstäbe von verschiedenen Dimensionen auf einer 80<sup>kg</sup> schweren Bleimasse. Ein Sphärometer mit horizontaler Schraube wurde mit dem einen Ende des Stabes zur Berührung gebracht und die Stellung der Schraube abgelesen, dann wurde die Schraube zurückgedreht und der Stab in Schwingungen versetzt. Darauf wurde die Schraube dem Stabe wieder vorsichtig genähert und bei einer bestimmten Stellung zeigte sich, daß die Schraube von dem Stabe in bestimmten Zwischenräumen gestoßen wurde, ein Beweis, daß der Stab sich in seiner Längsrichtung abwechselnd ausdehnte und zusammenzog.

Es bedarf übrigens nicht einmal solcher Methoden, um die longitudinalen Schwingungen wahrnehmbar zu machen; sie sind am deutlichsten zu erkennen durch den Ton, welchen sie hervorbringen. Diesen können wir jedoch erst im nächsten Abschnitte betrachten, in welchem wir auch die meisten der sofort abzuleitenden Gesetze experimentell nachweisen werden.

Über die Fortpflanzung der Bewegung in einem unbegrenzten Stabe haben wir hier nichts hinzuzufügen, sie muß nach den Gesetzen erfolgen, welche wir § 128 ff. ganz allgemein über die Fortpflanzung schwingender Bewegungen in Punktreihen abgeleitet haben. Zwar haben wir es hier nicht mit einfachen Punktreihen zu tun, indes kann man die dort abgeleiteten Gesetze deshalb einfach übertragen, weil alle Punkte einer zur Längsachse parallelen Schicht dieselbe Bewegung haben, wir also die Stäbe als ein Bündel paralleler Punktreihen betrachten können.

Auch für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in einem solchen Stabe muß der § 129 entwickelte Ausdruck gelten

$$c = \sqrt{a \frac{e}{d}}.$$

Setzen wir für  $e$ , die Elastizität, den Elastizitätsmodulus  $E$  der betreffenden Substanz und für  $d$  die Masse der Längeneinheit des Stabes von der Einheit des Querschnittes ein, auf welche sich auch der Elastizitätskoeffizient bezieht, so ist nach unserer Ableitung des § 128 die konstante

1) Savart in Annales de chim. et de phys. 65. p. 337. 1837.

§ 48a  $\sqrt{a} = 1$  zu setzen, da die dort von uns mit  $c$  bezeichnete Größe, bei longitudinaler Bewegung der Punkte der Reihe geweckte Elastizität, den Elastizitätskoeffizienten des betreffenden Materials bedeutet. Für einen Stab vom Querschnitt  $q$  wird demnach<sup>1)</sup>

$$c = \sqrt{\frac{Eq}{d}} = \sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Da somit aus dem Ausdruck für die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Querschnitt verschwindet, so folgt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen von dem Querschnitte der Stäbe, in denen stattfinden, unabhängig ist.

Daß in der Tat die rechte Seite der Gleichung eine Geschwindigkeit stellt, ergibt sich auch aus der Bestimmung der Dimension des Ausdruckes. Wir haben für die Elastizitätskoeffizienten

$$E = z_1 [\mu \lambda^{-1} \tau^{-2}],$$

die Dichtigkeit

$$d = z_2 [\mu \lambda^{-3}],$$

mit

$$\frac{E}{d} = z [\lambda^2 \tau^{-2}],$$

so daß die Quadratwurzel des Ausdruckes ist eine Geschwindigkeit.

Man findet häufig den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen in etwas anderer Form. Setzen wir für  $E$  einen Wert nach § 49 in den Kräfteinheiten des absoluten Maßes, so ist

$$E = g \frac{P}{q \delta},$$

wo  $P$  das an den Stab vom Querschnitte  $q$  gehängte Gewicht bedeutet, welches demselben die in Bruchteilen der ursprünglichen Länge ausgedrückte Verlängerung  $\delta$  erteilt. Nehmen wir an, das Gewicht  $P$  sei das eines Stabes des gleichen Materials vom Querschnitt  $q$  und der Länge  $l$ , so ist

$$P = q l,$$

mit

$$E = g \frac{q l}{q \delta} = g \frac{l}{\delta},$$

so

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}} = \sqrt{\frac{g l}{d}}.$$

Setzen wir schließlich die Länge  $l$  gleich der Längeneinheit und bezeichnen mit  $\delta_1$  die Verlängerung des Stabes durch ein Gewicht  $P$ , welches gleich dem eines Stabes von dem gleichen Material, dem gleichen Querschnitt  $q$  und der Längeneinheit ist, so ist

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta_1}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in einem

<sup>1)</sup> Man sehe auch Poisson in Mémoires de l'Acad. Royale de France. 44 1829

Stabe ist demnach gleich dem Quotienten aus der Quadratwurzel aus der Beschleunigung bei dem freien Fall und der Quadratwurzel aus der in Bruchteilen der Stablänge gegebenen Verlängerung, welche er durch das Gewicht eines Stabes gleichen Materials, gleichen Querschnitts und der Einheit der Länge erfährt. Letztere Verlängerung können wir auch als jene bezeichnen, welche ein Stab von der Länge eins durch ein seinem eigenen gleiches Gewicht erfährt.

Wir werden im nächsten Abschnitte in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in langen Stäben den experimentellen Beweis für die Richtigkeit dieser Ausdrücke erhalten.

### § 140.

**Longitudinale Schwingungen begrenzter Stäbe.** Wird an irgend einer Stelle eines begrenzten Stabes eine longitudinale Schwingung hervorgerufen, so breitet sich dieselbe durch den Stab aus bis zu den Enden desselben; an den Enden wird die Bewegung reflektiert und durchläuft dann den Stab nach entgegengesetzter Richtung. Da die Reflexion an beiden Enden des Stabes erfolgt, so pflanzen sich kurze Zeit nach Beginn der Schwingungen in dem Stabe Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen fort; es müssen sich somit in dem Stabe stehende Wellen bilden. Die Stäbe geraten also in Schwingungen, deren Dauer von der Länge und dem Material, aus welchem die Stäbe gemacht sind, abhängig ist, und außerdem

von der Art, wie die Stäbe befestigt sind. Wir wollen zunächst einen Stab betrachten, der wie *ab* (Fig. 252) nur in seiner Mitte leicht

Fig. 252.



gehalten wird, im übrigen aber und besonders an seinen Enden frei ist. Wir nehmen an, das Ende *b* sei etwa durch Klopfen mit einem Hammer oder dadurch, daß der Stab mit einem feuchten Tuche von der Mitte gegen *b* hin gestrichen wird, in eine schwingende Bewegung versetzt, deren Amplitude  $\alpha$  und deren Schwingungsdauer  $T$  sei. Die Bewegung pflanzt sich dann durch den Stab bis zu dem Ende *a* fort, wird dort reflektiert und kehrt in dem Stabe gegen *b* zurück. Da die Dichtigkeit der Luft gegenüber derjenigen des festen Körpers eine sehr kleine ist, wird die Amplitude der Bewegung bei der Reflexion so wenig geschwächt, daß wir dieselbe auch für die gegen *b* zurückkehrende Bewegung gleich  $\alpha$  setzen können. Die Reflexion geschieht ferner, da das zweite Mittel ein dünneres ist, ohne Umkehr des Vorzeichens der Schwingungen. Die stetig von *b* ausgehenden und die von *a* reflektierten Schwingungen sind es dann, welche sich in dem Stabe zu stehenden Wellen zusammensetzen.

Rechnen wir die Zeit  $t$  von dem Momente an, in welchem das Ende *b* eine Schwingung beginnt, so wird zur Zeit  $t$  die Bewegung einer Moleküllschicht, welche von *b* um die Strecke  $x$  entfernt ist, durch folgende Gleichungen gegeben sein. Erstens ist der Abstand  $y_1$  der Moleküllschicht von der Gleichgewichtslage durch die bei *b* erregte Bewegung

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

is Bewegung, welche von  $b$  ausgeht, wird bei  $a$  reflektiert, nachdem sie die Länge  $l$  des Stabes durchlaufen hat; sie hat dann noch, um zu der betrachteten um  $x$  von  $b$  entfernten Molekülschicht zu gelangen, den Weg  $-x$  zurückzulegen. Da sie nun bei  $a$  ohne Änderung des Vorzeichens reflektiert wird, so ist der Abstand  $y_2$  der betrachteten Schicht von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$  infolge dieser Bewegung

$$y_2 = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda} \right),$$

die resultierende Bewegung ist deshalb

$$Y = y_1 + y_2 = 2a \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Die Gleichung zeigt, daß die Bewegung diejenige stehender Wellen von der Schwingungsdauer  $T$  ist. Die Anzahl der sich auf dem Stabe ausbildenden stehenden Wellen hängt ab von der Länge des Stabes und der Schwingungsdauer  $T$ . Welche stehende Wellen sich auf dem Stabe überhaupt ausbilden können, ergibt sich aus der Bedingung, daß jedenfalls an den Enden des Stabes ein Schwingungsmaximum sein muß, das heißt also, daß dort die Amplitude der Bewegung jedenfalls den größten Wert  $a$  haben muß. Da die Amplitude der Bewegung der verschiedenen durch den Abstand  $x$  vom Ende  $b$  gegebenen Molekülschichten durch den Faktor

$$2a \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda}$$

gegeben ist, so folgt, daß

$$\cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} = \pm 1 \text{ sein muß für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Es muß somit

$$\cos 2\pi \frac{l}{\lambda} = \pm 1: \quad 2\pi \frac{l}{\lambda} = n\pi; \quad l = n \frac{\lambda}{2}.$$

Es muß also die Länge des Stabes irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge sein. Oder es können nur solche Schwingungen in dem Stabe als stehenden Wellen Anlaß geben, deren Oszillationsdauern so sind, daß während einer oder zwei oder irgend einem Vielfachen einer halben Oszillationsdauer die Bewegung sich durch die ganze Länge des Stabes fortpflanzt.

Die langsamsten Schwingungen, welche der Stab annehmen kann, sind somit solche, für welche  $l = \frac{1}{2}\lambda$ . Da nun, wenn  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung im Stabe ist, somit

$$c = \frac{E}{d},$$

zwischen  $\lambda$  und  $T$  die Beziehung besteht

$$\lambda = cT = T \frac{E}{d},$$

so folgt für die Dauer der langsamsten Schwingungen

$$T = \frac{2l}{c} = 2l \frac{d}{E}.$$



Die Schwingungsdauer des Stabes ist also gleich der doppelten Länge des Stabes dividiert durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Stabe; sie ist deshalb unabhängig von der Größe und der Form des Querschnitts, sie wird nur bedingt von der Länge, dem Elastizitätskoeffizienten und dem spezifischen Gewichte des Materials, aus dem der Stab besteht.

Die in einer Sekunde von dem Stabe vollführte Anzahl von Schwingungen ist

$$N = \frac{1}{T} = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

sie ist also gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der doppelten Länge des Stabes.

Die Bewegung, welche die einzelnen Teile des Stabes vollführen, ergibt sich aus der Betrachtung der Werte  $y$ , wenn wir den Moment fixieren, in dem

$$\sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right) = 1.$$

Dann ist

$$y = 2\alpha \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda};$$

somit ist für

$x = 0$	$x = \frac{1}{4}l = \frac{1}{8}\lambda$	$x = \frac{1}{2}l = \frac{1}{4}\lambda$	$x = \frac{3}{4}l = \frac{3}{8}\lambda$	$x = l = \frac{1}{2}\lambda$
$y = -2\alpha$	$y = -\alpha\sqrt{2}$	$y = 0$	$y = \alpha\sqrt{2}$	$y = 2\alpha$

Die Mitte des Stabes ist somit ein Knotenpunkt, der stets in Ruhe bleibt, und die beiden Hälften des Stabes schwingen jede wie eine halbe stehende Welle, so daß die beiden Hälften stets in entgegengesetzter Phase schwingen.

Gibt man den erregten Schwingungen die halbe Dauer, so kann ebenfalls der Stab in stehende Schwingungen geraten. Es ist dann  $l = \lambda$

$$T_1 = \frac{\lambda}{c} = \frac{l}{c} = \frac{2l}{2c}.$$

Die Bewegung des Stabes erhalten wir wieder, indem wir die Werte von  $y$  betrachten, wenn der von der Zeit abhängige Koeffizient der Gleichung für  $y = 1$  ist.

Dann wird, da jetzt  $l = \lambda$  für

$x = 0$	$x = \frac{1}{4}l = \frac{1}{4}\lambda$	$x = \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}\lambda$	$x = \frac{3}{4}l = \frac{3}{4}\lambda$	$x = l = \lambda$
$y = 2\alpha$	$y = 0$	$y = -2\alpha$	$y = 0$	$y = 2\alpha$

In dem Stabe sind somit zwei Knotenpunkte in  $\frac{1}{4}l$  und  $\frac{3}{4}l$ ; das zwischen den beiden Knotenpunkten liegende Stück schwingt als eine stehende Welle, und die beiden Viertel zwischen den Knotenpunkten und den Enden als halbe stehende Wellen; diese beiden halben stehenden Wellen sind unter sich in gleicher Phase, das zwischen den Knotenpunkten liegende Stück ist in gerade entgegengesetzter Phase.

Die Schwingungsanzahl ist in diesem Falle die doppelte von vorher

$$N_1 = 2 \frac{c}{2l}.$$

Allgemein können in dem Stabe stehende Wellen existieren, deren Schwingungsdauern  $T_n$  und Schwingungszahlen  $N_n$  sind

$$T_n = \frac{2l}{nc} \quad N_n = n \frac{c}{2l},$$

wo  $n$  jede ganze Zahl sein kann. Es entstehen dann in dem Stabe  $n$  Knotenpunkte, von denen die den Enden nächsten von den Enden um  $\frac{l}{n}$  entfernt sind, und welche überhaupt im Stabe einen Abstand von  $\frac{l}{n}$  sitzen. Einer Ableitung im einzelnen wird es nach dem Vorigen nicht bedürfen.

Mit denselben Schwingungszahlen kann ein Stab schwingen, wenn an beiden Enden fest eingeklemmt sind, jedoch ist der Bewegungszustand an der Verteilung der Bewegung in dem Stabe dann eine ganz andere. Es folgt das schon daraus, daß in dem Falle die Enden des Stabes, da sie fest eingeklemmt sind, stets in Ruhe sein müssen. Um die Bewegung des Stabes zu erhalten, nehmen wir an, es sei an irgend einer Stelle des Stabes etwa durch Reiben eine schwingende Bewegung erzeugt, und es sei durch im Abstände  $a$  von dem Ende  $b$  ein Schwingungsmaximum entstanden. Wir rechnen die Zeit  $t$  von dem Beginne der Schwingungen an dieser Stelle, das heißt, von da ab, wo die betreffende Stabsschicht an dieser Stelle die Gleichgewichtslage verläßt. Von hier aus pflanzt sich die Bewegung im Stabe nach beiden Seiten fort, wird an den Grenzen  $a$  und  $b$  reflektiert und geht von beiden Enden im Stabe wieder zurück. Da die beiden Stabenden als fest vorausgesetzt werden, so geschieht die Reflexion, wie an einem Mittel von unendlich großer Dichtigkeit; somit tritt ein Wechsel des Vorzeichens der Bewegung oder Verlust einer halben Wellenlänge an beiden Enden ein, die reflektierte Amplitude hat aber merklich dieselbe Größe wie die ankommende.

Die Bewegung, welche eine um  $x$  von  $b$  entfernte Molekülschicht in Folge jeder der beiden zu ihr kommenden Bewegungen erhält, ist durch folgende beiden Gleichungen gegeben. Erstens für die an  $b$  reflektierte Bewegung

$$y_1 = -\alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

weitens für die an  $a$  reflektierte

$$y_2 = -\alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{l-a}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda} \right);$$

mit wird die resultierende Bewegung

$$y = y_1 + y_2 = -2\alpha \cos 2\pi \frac{l-a-x}{\lambda} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Die in dem Stabe möglichen Bewegungen ergeben sich wieder aus den für die Stabenden vorhandenen Bedingungen, daß für diese stets  $y = 0$  sein muß. Es muß deshalb für  $x = 0$  und für  $x = l$  der Wert von  $y$  immer Null sein. Wir zerlegen in unserer Gleichung für  $y$  den Kosinus und setzen

$$= -2\alpha \left\{ \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} + \sin 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \right\} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Da das erste Glied in der Klammer für  $x=l$  nur Null sein kann, wenn

$$\cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0, \quad a = (2n+1) \frac{\lambda}{4},$$

so folgt zunächst, daß ein Maximum der Schwingung nur in einem Abstände  $a$  von dem Ende  $b$  auftreten kann, welcher gleich einem ungeraden vielfachen von  $\frac{1}{4}\lambda$  ist. Mit Beachtung dieses Umstandes wird unsere Gleichung

$$y = -2\alpha \sin 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right)$$

und dieser Ausdruck wird für  $x=0$  nur Null, wenn

$$l = n \frac{\lambda}{2},$$

wenn also der Stab irgend ein vielfaches einer halben Wellenlänge ist. Daraus folgt gleichzeitig, daß das Schwingungsmaximum auch von dem andern Stabende eine ungerade Anzahl von  $\frac{1}{4}\lambda$  entfernt ist. Für die Schwingungszahl  $N_n$  und die Schwingungsdauer unseres Stabes folgt wie vorhin, wenn auf demselben  $n \frac{\lambda}{2}$  vorhanden sind

$$N_n = n \frac{c}{2l} \quad T_n = \frac{1}{n} \frac{2l}{c}.$$

Die Verteilung der Bewegung im Stabe ist leicht zu erhalten. Setzen wir in unsere Gleichung

$$\lambda = \frac{2l}{n},$$

so wird unter Beachtung, daß  $\sin n\pi = 0$   $\cos n\pi = \pm 1$

$$y = \pm 2\alpha \sin \pi n \frac{x}{l} \sin 2\pi \frac{t}{T_n}.$$

Die langsamste Bewegung erhalten wir für  $n=1$ . Nehmen wir an, das von der Zeit abhängige Glied sei  $\pm 1$ , alle Punkte seien also in der ihnen möglichen größten Entfernung von der Gleichgewichtslage, so wird für

$$\begin{array}{ccccc} x=0 & x=\frac{1}{4}l & x=\frac{1}{2}l & x=\frac{3}{4}l & x=l \\ y=0 & y=\pm \alpha \sqrt{2} & y=\pm 2\alpha & y=\pm \alpha \sqrt{2} & y=0. \end{array}$$

Der Stab schwingt als eine stehende Welle, deren Knotenpunkte die Endpunkte des Stabes sind.

Ist  $n=2$ , so wird für

$$\begin{array}{ccccc} x=0 & x=\frac{1}{4}l & x=\frac{1}{2}l & x=\frac{3}{4}l & x=l \\ y=0 & y=2\alpha & y=0 & y=-2\alpha & y=0. \end{array}$$

Der Stab erhält in der Mitte einen Knotenpunkt, jede Hälfte schwingt wie eine stehende Welle.

Ist  $n=3$ , so zerfällt der Stab in drei stehende Wellen, die Knotenpunkte liegen in  $\frac{1}{3}$  der Stablänge von den Enden und voneinander. Allgemein zerfällt der Stab in  $n$  stehende Wellen, und die Knotenpunkte liegen  $\frac{1}{n}$  Stablänge voneinander.

Wollen wir die Zeit nicht von dem Momente an rechnen, wann die  $d$  liegende Stabschicht die Gleichgewichtslage passiert, sondern wann am Ende ihrer Bahn ist, etwa am negativen Ende, so daß sie zur  $t = \frac{T}{4}$  die Gleichgewichtslage nach der positiven Seite passiert, so setzen wir in den Gleichungen für  $y_1$  und  $y_2$  an Stelle von  $t$  zu setzen  $-\frac{T}{4}$ ; es bedarf wohl keines besondern Nachweises, daß die Gleichung  $y$  dann wird

$$y = \pm 2\alpha \sin \pi n \frac{x}{l} \cos 2\pi \frac{t}{T_n}.$$

Die Schwingungszahlen werden andere, wenn wir den Stab an einem Ende, etwa bei  $a$  fest einklemmen, dagegen das Ende  $b$  freilassen. Betrachten wir das Ende  $b$  als den Ursprung der Bewegung, so werden die Gleichungen für eine Molekülschicht im Abstände  $x$  von  $b$ , da die von  $b$  ausgehenden Bewegungen bei  $a$  mit Wechsel des Vorzeichens reflektiert werden,

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{l} \right)$$

$$y_2 = -\alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda} \right).$$

mit wird die resultierende

$$y = y_1 + y_2 = 2\alpha \sin 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Die in dem Stabe möglichen Bewegungen erhalten wir auch hier wieder aus den Bedingungen für die Enden des Stabes. Am Ende  $b$ , also  $x = 0$  ist, müssen die Amplituden den größten Wert haben, da das Ende frei ist, am Ende  $a$ , wo  $x = l$  ist, muß  $y$  zu allen Zeiten gleich Null sein. Letzteres ist schon nach der Form der Gleichung erfüllt. Zur Bestimmung der Beziehung zwischen  $l$  und  $\lambda$  haben wir daher nur zu verlangen, daß

$$\sin 2\pi \frac{l}{\lambda} = 1$$

$$2\pi \frac{l}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}; \quad l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Es können demnach nur solche stehende Wellen in dem Stabe bestehen, für welche die Länge des Stabes eine viertel Wellenlänge oder ein gerades Vielfaches von einer viertel Wellenlänge ist. Da auch hier

Beziehung besteht  $\lambda = cT$ , so folgt für die Schwingungsdauer und Schwingungszahl

$$T_n = \frac{4l}{(2n + 1)c} \quad N_n = (2n + 1) \frac{c}{4l}.$$

Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche  $n = 0$ , also  $l = \frac{1}{4}\lambda$  die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{4l}{c}.$$

Die langsamsten Schwingungen eines an einem Ende festen, an dem andern Wellen, Physk. I. 6. Aufl.

Ende freien Stabes haben also die doppelte Dauer, als wenn der Stab an beiden Enden frei oder an beiden Enden fest ist.

In dem Falle nehmen die Werte von  $y$ , wenn der von der Zeit abhängige Faktor der Gleichung gleich 1 ist, ab von  $y = 2\alpha$ , wenn  $x = 0$  ist, bis  $y = 0$ , wenn  $x = l$  ist. Der Stab schwingt daher wie eine halbe stehende Welle.

Die nächst rascheren Schwingungen sind jene, für welche  $n = 1$  ist, deren Dauer ist

$$T = \frac{4l}{8c}.$$

Man findet leicht, daß dann in  $\frac{1}{3}$  des Stabes vom freien Ende ein Knotenpunkt vorhanden ist, so daß  $\frac{2}{3}$  des Stabes als eine stehende Welle und das letzte Drittel am freien Ende als eine halbe stehende Welle schwingt.

Dann können Schwingungen im Stabe bestehen, deren Anzahl die fünffache, siebenfache usw. ist, so daß die überhaupt möglichen Schwingungszahlen sich verhalten, wie die Reihe der ungeraden Zahlen. Bei der fünffachen Schwingungszahl entstehen in dem Stabe drei, bei der siebenfachen fünf, überhaupt bei der  $(2n + 1)$ fachen  $n + 1$  Knotenpunkte, es entstehen  $n$  ganze und eine halbe stehende Welle. Einer Ableitung im einzelnen wird es nicht bedürfen.

Die soeben als möglich erkannten Teilungen der Stäbe bei longitudinalen Schwingungen sind ziemlich schwierig herzustellen; man kann sie dadurch hervorrufen, daß man die vorher bestimmten Stellen festhält, indes gelingt es selten, willkürlich eine ganz bestimmte Teilung des Stabes mit vielen Knotenpunkten zu erhalten. Die Teilung tritt aber häufig auch ohne Festhalten der verschiedenen Stellen ein durch fortgesetztes Reiben des Stabes der Länge nach oder mehrfaches Schlagen an seinen Enden; wir werden im nächsten Abschnitt das an den verschiedenen Tönen erkennen, welche der Stab gibt.

Die in dem letzten Paragraphen für an beiden Enden feste Stäbe abgeleiteten Sätze gelten unmittelbar auch für zwischen zwei festen Punkten gespannte Saiten, da dieselben nichts anders sind, als Stäbe von sehr geringem Querschnitt.

Schließlich sei erwähnt, daß nach den Untersuchungen des § 133 alle diejenigen Schwingungen, welche in einem Stabe überhaupt möglich sind, auch gleichzeitig in demselben vorkommen können.

## § 141.

**Transversale Schwingungen der Saiten.** Spannt man eine dünne möglichst vollkommen biegsame Schnur von großer Länge aus und versetzt dieselbe durch rasches Auf- und Abbewegen des einen Endes in transversale Schwingungen, so sieht man, wie diese an der Stelle, an der man sie hervorbrachte, verschwinden, sofort aber an immer anderen Stellen derselben auftreten; sie pflanzen sich als Wellenberg und Wellental auf der Schnur fort, nach und nach erhalten immer andere Teile der Schnur die Gestalt einer Welle, wie wir sie in dem vorigen Kapitel bei den transversalen Schwingungen einer Punktreihe abgeleitet haben.

Die transversalen Schwingungen einer Schnur bestehen in auf- und abgehenden gegen die Längsrichtung senkrechten Bewegungen der einzelnen Punkte, sie haben demnach eine Gestaltsänderung derselben zur Folge, welche unmittelbar sichtbar ist und bei nicht zu raschen Bewegungen recht gut beobachtet werden kann.

Die Gesetze der Fortpflanzung transversaler Wellen in dünnen Schnüren oder Saiten, die an sich nicht elastisch aber durch Gewichte schwach gespannt sind, so daß jeder Punkt eine bestimmte Ruhelage hat, müssen mit den im vorigen Kapitel abgeleiteten Gesetzen über die Fortpflanzung transversaler Wellen in Punktreihen übereinstimmen, so lange die Schnüre oder Saiten eine so geringe Dicke haben, daß wir annehmen dürfen, alle Punkte eines Querschnittes bewegen sich ganz in gleicher Weise und die Ausbiegungen seien so klein, daß wir die bei einer Ausbiegung stattfindende Verlängerung vernachlässigen können. An Stelle der durch die Verschiebung der Punkte in einer elastischen Punktreihe geweckten elastischen Kraft tritt einfach die Spannung der Saite.

Um das zu zeigen, können wir direkt die Entwicklungen des § 128 hier anwenden, welche uns die Beschleunigung eines Punktes in einer schwingenden Punktreihe lieferten. Ist  $\alpha$ , (Fig. 253) ein Stück der schwingenden Saite, etwa eine halbe

Fig. 253.



Wellenlänge, und sind  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  benachbarte Querschnitte einer an dem einen Ende befestigten, durch ein an dem andern Ende angehängtes Gewicht  $p$  gespannten Saite, so wird auch hier infolge der Span-

nung jeder einzelne Querschnitt nach beiden Seiten gegen die benachbarten Querschnitte hingezogen, und zwar mit einer in den Einheiten des absoluten Systems ausgedrückten, der Spannung  $gp$  gleichen Kraft. Der Querschnitt  $\epsilon$  wird demnach einerseits gegen  $d$ , andererseits gegen  $\zeta$  mit der Kraft  $gp$  hingezogen; infolgedessen suchen sich die Punkte in ihre relative Gleichgewichtslage zu ziehen, in welcher sie alle in einer geraden Linie, der Ruhelage der Saite sich befinden. Die Gleichgewichtslage von  $\epsilon$  in bezug auf  $\zeta$  ist  $b$ , in bezug auf  $d$  ist  $b'$ . Die Kraft, mit welcher der Punkt nach  $b$  getrieben wird, ist gleich der zu  $\epsilon b$  parallelen Komponente der Spannung, also gleich  $gp \sin \epsilon \zeta b$ ; und ebenso ist die ihn nach  $b'$  treibende Kraft gleich  $gp \sin \epsilon d b'$ . Die den Punkt  $\epsilon$  nach der Gleichgewichtslage, also gegen  $a$  hintreibende Kraft ist somit

$$gp (\sin \epsilon \zeta b - \sin \epsilon d b').$$

Nun ist

$$\sin \epsilon \zeta b = \frac{\epsilon b}{\epsilon \zeta}; \quad \sin \epsilon d b' = \frac{\epsilon b'}{\epsilon d},$$

worin wir, da ausdrücklich vorausgesetzt wurde, daß wir die Verlängerung der Saite vernachlässigen dürfen,  $\epsilon \zeta = \epsilon d = ad$  setzen dürfen. Die den Querschnitt  $\epsilon$  gegen  $a$  treibende Kraft ist somit

$$gp \cdot \frac{\epsilon b - \epsilon b'}{ad}.$$

Die Beschleunigung wird deshalb, wenn  $m$  die Masse des Querschnittes ist

$$\frac{gp}{m} \cdot \frac{sb - sb'}{ad},$$

oder auch, wenn  $\delta$  die Masse der Längeneinheit der Saite ist,

$$\frac{gp}{\delta} \cdot \frac{sb - sb'}{ad^2}.$$

Wir erhalten somit ganz denselben Ausdruck wie § 128, mit dem Unterschiede nur, daß an Stelle der Elastizität  $ae$ , welche in der Punktreihe durch die Verschiebung der Punkte geweckt wird, die Spannung  $gp$  tritt. Bezeichnen wir mit  $a$  die Amplitude und mit  $T$  die Schwingungsdauer der erregten Bewegung, ferner mit  $\lambda$  die Wellenlänge, so ergibt sich deshalb auch aus einer der im § 128 gemachten identisch gleichen Entwicklung zur Zeit  $t$  nach Beginn der Schwingung für den Abstand  $y$  eines Punktes, welcher vom Ausgangspunkt der Bewegung um die Strecke  $x$  entfernt ist:

$$y = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Ist  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, so ist auch hier  $\lambda = cT$  und

$$c = \sqrt{\frac{gp}{\delta}}.$$

Ist  $q$  der Querschnitt und  $s$  das spezifische Gewicht der Saite, so ist

$$\delta = qs,$$

somit

$$c = \sqrt{\frac{gp}{qs}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung ist demnach der Quadratwurzel aus dem spannenden Gewichte direkt, derjenigen aus dem Querschnitt der Saite und ihrem spezifischen Gewichte umgekehrt proportional.<sup>1)</sup> Die Gebrüder W. und E. H. Weber haben durch Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen auf dünnen Schnüren die volle Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung nachgewiesen.

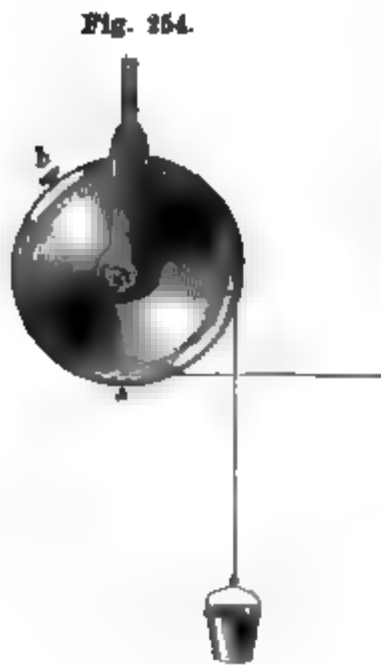


Fig. 254.

Sie wandten zu ihren Versuchen eine runde aus sehr feinem Baumwollfaden auf Maschinen geklöppelte Schnur an, welche sehr gleichförmig biegsam, wenig elastisch war und bei einer Länge von 16,058<sup>m</sup> 52,612<sup>gr</sup> wog. Dieselbe wurde dadurch horizontal aufgespannt, daß man sie an ihrem Ende mit einer Schraube und mit ihrem andern Ende an einem Rade befestigte (Fig. 254). Das Rad hatte einen Durchmesser von über 30<sup>cm</sup> und war in einer sehr genau gearbeiteten Achse aufgehängt, um es recht frei beweglich zu machen.

Die Schnur war bei  $a$  in einem Abstände von 14,4<sup>cm</sup> von der Achse der

1) Euler in den Actis Petropolitanis pro 1779 Tom I. Petrop. 1782.



Rolle befestigt, so daß sie nach der Tangente des Rades zog. Bei  $b$  war eine Schnur befestigt, an der sich ein Korbchen befand, bestimmt die spannenden Gewichte aufzunehmen.

Die Wellen wurden  $15^{\text{cm}}$  vom Ende der Schnur durch einen raschen Stoß erregt, und man sah sie dann zu dem einen Ende der Schnur hinlaufen und als reflektierte Wellen, die Berge als Täler und umgekehrt, da die Schnur bei  $a$  fest war, also an ein dichteres Mittel grenzte, wieder zurückkehren.

Die Zeit, welche die Welle brauchte, um die Schnur zu durchlaufen, wurde mittels einer Uhr gemessen, welche noch  $\frac{1}{10}$  einer Sekunde angab und stets die Zeit beobachtet, in welcher die vom Rade ausgehende Welle einmal oder zweimal oder viermal zum Rade zurückkehrte.

Die Versuche ergaben erstens, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen unabhängig ist von der Größe der Wellen, denn stets brauchte eine Welle dieselbe Zeit zum Durchlaufen der Schnur, mochte sie durch ein kurzes und schwaches Schnellen mit dem Finger oder durch ein länger dauerndes und stärkeres Schlagen erzeugt werden. Im erstern Falle muß aber die Welle kürzer sein, wie es auch die Beobachtung ergab.

Ferner fanden die Gebrüder Weber, daß die Wellen, wie es auch unsere Theorie verlangt, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen, denn um die Schnur 2, 3, 4 . . mal zu durchlaufen, brauchte die Welle auch die doppelte, drei- und vierfache Zeit.

Nach diesen Versuchen machten sie genaue Messungen und fanden recht gut die von Euler gegebene Formel bestätigt. Die Schnur wurde nacheinander durch drei verschiedene Gewichte gespannt, nämlich mit  $610,5 - 2027,5 - 4226,4^{\text{g}}$ .<sup>1)</sup>

Es ergab sich, daß im ersten Falle die Welle eine Strecke von  $33,244^{\text{m}}$  in 46 Sechzigstel, im zweiten dieselbe Strecke in 24,8 Sechzigstel und im dritten Falle in 16,25 Sechzigstel Sekunden durchlief. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten oder die in diesen drei Fällen in einer Sekunde durchlaufenen Räume sind demnach

$$\text{im ersten Falle } c_1 = \frac{60 \cdot 33,244}{46} = 43^{\text{m}},361,$$

$$\text{im zweiten Falle } c_2 = \frac{60 \cdot 33,244}{24,8} = 80^{\text{m}},429,$$

$$\text{im dritten Falle } c_3 = \frac{60 \cdot 33,244}{16,25} = 122^{\text{m}},713.$$

Um diese Zahlen mit unserer Formel zu vergleichen, haben wir in unserem Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{g p}{q s}}$$

für  $p$  die betreffenden spannenden Gewichte, für  $q s$  das Gewicht der Längeneinheit der Schnur und für  $g$  die Beschleunigung der Schwere,  $9,808$ , einzusetzen.

1) Wellenlehre, auf Experimente gegründet usw. von den Brüdern F. H. und W. Weber. Leipzig 1826. p. 464 ff.

Das Gewicht der ganzen Schnur von 16,622<sup>m</sup> Länge war 52,612<sup>g</sup>, daher das Gewicht der Längeneinheit

$$qs = \frac{52,612}{16,622}$$

und setzen wir die betreffenden Zahlenwerte in die Formel ein, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 610,5 \cdot 16,622}{52,612}} = 43^m,483,$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 2027,5 \cdot 16,622}{52,612}} = 79^m,254,$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 4226,4 \cdot 16,622}{52,612}} = 114^m,434.$$

Man sieht, die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Zahlen ist so groß, daß sie ein Beweis für die Richtigkeit der Theorie sowie für die Genauigkeit der Messungen ist.

Vergleichen wir den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen mit dem für die longitudinalen Wellen, so ergibt sich eine merkwürdig einfache Beziehung.<sup>1)</sup>

Für die longitudinalen Wellen hatten wir

$$c = \sqrt{\frac{E}{\delta}}$$

oder da für longitudinale Schwingungen einfach  $\delta = s$ , wenn wir mit  $s$  das spezifische Gewicht bezeichnen,

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

für die transversalen

$$c' = \sqrt{\frac{gp}{qs}},$$

daraus ergibt sich

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{gp}{qs}} : \sqrt{\frac{E}{s}} = \sqrt{\frac{gp}{qE}}.$$

Wir sahen früher, daß die Längenzunahme  $C$  eines Stabes von der Länge  $l$ , dem Querschnitt  $q$ , durch ein Gewicht  $p$ , wenn  $E$  der Elastizitätsmodulus ist, gleich ist

$$C = \frac{1}{E} \frac{gp l}{q},$$

demnach

$$\frac{C}{l} = \varphi = \frac{gp}{qE}.$$

Es folgt also

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\varphi}$$

oder das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen und derjenigen der longitudinalen Wellen in einem durch Spannung elasti-

1) *Poisson*, Mémoires de l'Académie de France. 8. p. 422 u. 442. 1829.

ein fadenförmigen Körper ist gleich der Quadratwurzel aus der Vergrößerung, welche die Längeneinheit des Körpers durch das spannende Gewicht erfährt, vorausgesetzt, daß durch dasselbe die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird.

### § 142.

**Stehende Schwingungen von fadenförmigen durch Spannung elastischen Körpern.** Wenn man eine gespannte Saite in irgend einer Weise, etwa durch Zupfen an einer Stelle, in Schwingungen versetzt, so breiten sich diese Schwingungen bis an die Enden fort, werden dort, da die Enden der Saiten stets fest sein müssen, mit Umkehr des Vorzeichens reflektiert und pflanzen sich dann in der Saite rückwärts fort. Die sich gegenkommenden Schwingungen müssen stehende Wellen liefern, deren Schwingungsdauer von der Größe der Spannung, der Länge und Dicke der Saite und dem spezifischen Gewichte des Materials abhängig ist.

Die in der Saite möglichen Schwingungen und deren Dauer ergeben sich ganz genau in derselben Weise, wie wir die Schwingungen longitudinal schwingender Stäbe erhielten, welche an beiden Enden fest sind. Wir übertragen durch eine der im § 140 für den Fall der festen Enden durchgeführten wörtlich gleiche Entwicklung zu dem Resultate, daß in einer gespannten Saite alle jene Schwingungen stehende Wellen veranlassen können, für welche die Länge der Saite irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge ist. Da, wenn  $T$  die Schwingungsdauer,  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und  $\lambda$  die Wellenlänge der Bewegung ist,

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

folgt, da  $\lambda$  immer gleich  $n \frac{\lambda}{2}$ , somit

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

, worin  $n$  jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe sein kann, daß die gleichen Schwingungsdauern gegeben sind durch

$$T = \frac{2l}{nc}.$$

Die Schwingungszahlen, welche gleich dem reziproken Werte der Schwingungsdauern sind, werden deshalb

$$N = n \frac{c}{2l}.$$

Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche  $n$  gleich 1 ist, diesen schwingt die ganze Saite als eine stehende Welle zwischen den beiden Endpunkten hin und her. Die Schwingungsdauer ist dann

$$T = \frac{2l}{c} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{g}}$$

Dieselbe ist somit der Länge der Saite und der Quadratwurzel aus dem Querschnitte und dem spezifischen Gewichte der Saite direkt, der Quadrat-

wurzel aus der Spannung derselben umgekehrt proportional. Nehmen wir, was meistens der Fall ist, an, daß die Saite einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius  $r$  hat, so ist  $q = r^2\pi$ , und wir können setzen

$$T = 2lr \sqrt{\frac{\pi s}{gp}},$$

oder die Schwingungsdauer der Saite ist ihrem Durchmesser direkt proportional.

Dieses aus der Theorie sich ergebende Resultat ist von den Gebrüdern Weber<sup>1)</sup> experimentell geprüft worden durch direkte Messung der Schwingungsdauer der Schnur, welche ihnen zu den im vorigen Paragraphen erwähnten Versuchen gedient hatte. Der Ausdruck für die langsamsten Schwingungen

$$T = \frac{2l}{c}$$

zeigt, daß die Schwingungsdauer gleich der Zeit ist, in welcher die fortschreitende Bewegung, aus welcher die stehende Schwingung entstanden ist, die doppelte Länge der Schnur durchlaufen würde.

Diese Zeit war in den Weberschen Versuchen resp. 46 — 24,8 — 16,25 Tertien (sechzigstel Sekunden). In dem ersten der drei Fälle, in welchem die Schnur mit 610,5<sup>g</sup> gespannt war, erhielten sie als Schwingungsdauer

$$T = 46,375 \text{ Tertien} = 0,773 \text{ Sekunden}$$

als Mittel aus vielen Versuchen; eine Zahl, welche sich nicht um ein Hundertstel des beobachteten Wertes von dem aus der Theorie folgenden unterscheidet.

Eine weitere experimentelle Bestätigung dieses Satzes werden uns besonders für kürzere und stärker gespannte Saiten im nächsten Abschnitt die durch die Schwingungen der Saiten entstehenden Töne liefern.

Ist  $n$  größer als 1, so teilt sich die Saite in mehrere für sich schwingende, durch ruhende Knotenpunkte voneinander getrennte Teile. Ist  $n = 2$ , so entsteht ein Knotenpunkt in der Mitte und jede Hälfte der Saite schwingt für sich; ist  $n = 3$ , so entstehen zwei Knotenpunkte, die je  $\frac{1}{3}$  der Saitenlänge voneinander entfernt sind.

Man kann die Teilung der Saite bei transversalen Schwingungen leicht hervorrufen und beobachten.

Man unterstützt die Saite  $ab$  (Fig. 255) in einem Punkte  $c$ , so daß die Länge  $bc$  gleich  $\frac{1}{n}$  der Länge der Saite ist, z. B.  $\frac{1}{4}$ , und hängt dann auf die Saite eine Anzahl sogenannter Reiterchen, kleiner leichter Häkchen von Papier. Streicht man dann die Saite in der Nähe von  $b$  oder ruft man sie irgendwo zwischen  $b$  und  $c$ , so werden die Reiterchen überall von der Saite abgeworfen, nur an den Stellen der Schwingungsknoten bei  $d$  und  $e$  bleiben sie hängen, ohne eine bedeutende Bewegung zu zeigen.

Es folgt daraus, daß die Saite sich in eine Anzahl für sich schwingender Stücke,  $ae$ ,  $ed$ ,  $dc$ ,  $cb$  geteilt hat, welche durch nicht bewegte Punkte

1) Wellenlehre, auf Experimente gegründet von E. H. und W. Weber. Leipzig 1825. p. 466.

die Schwingungsknoten getrennt sind. Wendet man möglichst biegsame Fäden bei diesen Versuchen an, so findet man die Lage der Knoten, also die Teilung der Saite genau der Theorie entsprechend, man findet immer  $n - 1$  Knotenpunkte, welche um

$\frac{1}{n}$  der Saitenlänge von den Enden der Saiten und voneinander entfernt sind.

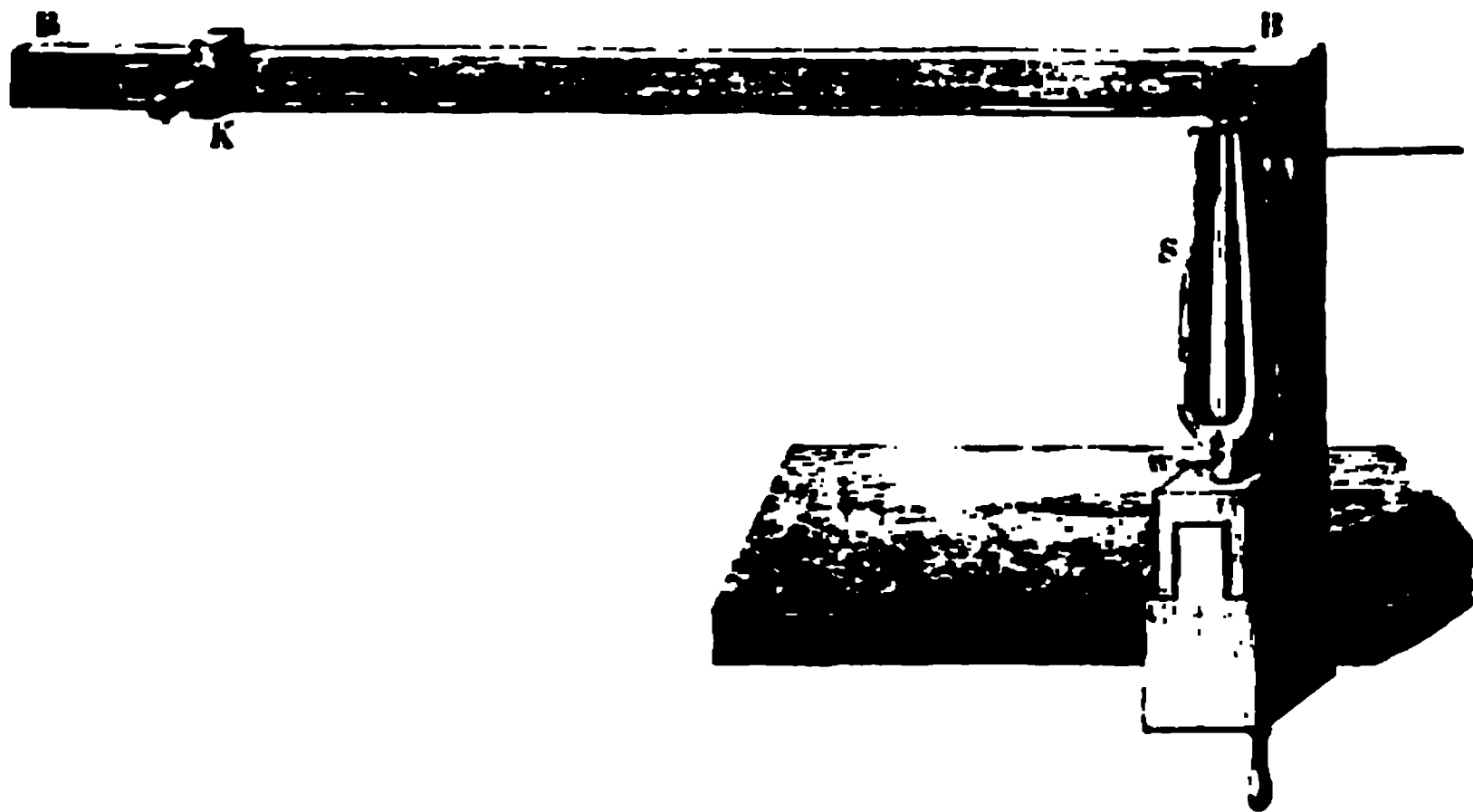
Fig. 255.



Der in Fig. 255 dargestellte Versuch ist auch deshalb interessant, weil er zeigt, daß bei einer gespannten Saite der Knotenpunkt die Quelle der Bewegung für dieselbe werden kann. Der Punkt  $c$  (Fig. 255) ist durch einen Steg unterstützt, und trotzdem pflanzt sich die Bewegung durch ihn hindurch auf den andern Teil der Saite fort. Man sieht leicht, daß diese Ausbreitung der Bewegung über  $c$  hinaus durch die periodischen longitudinalen Impulse veranlaßt wird, die der Punkt  $c$  infolge der Bewegung des Stückes  $bc$  erfährt.

Die Teilung der Saiten und die Entstehung der stehenden Wellen aus der Interferenz der fortgepflanzten und reflektierten Wellen läßt sich sehr hübsch durch eine von Melde<sup>1)</sup> zuerst benutzte Versuchsanordnung zeigen, welche Fig. 256 darstellt. Auf einem Fußbrett ist vertikal eine gebogene Stahllamelle, eine sogenannte Stimmgabel  $S$  (Fig. 256) aufgestellt. Die eine Zinke der Gabel trägt ein kleines Hütchen  $h$ , durch welches ein Seidenfaden gezogen ist, welcher an dem in der Biegung der Gabel befestigten

Fig. 256.

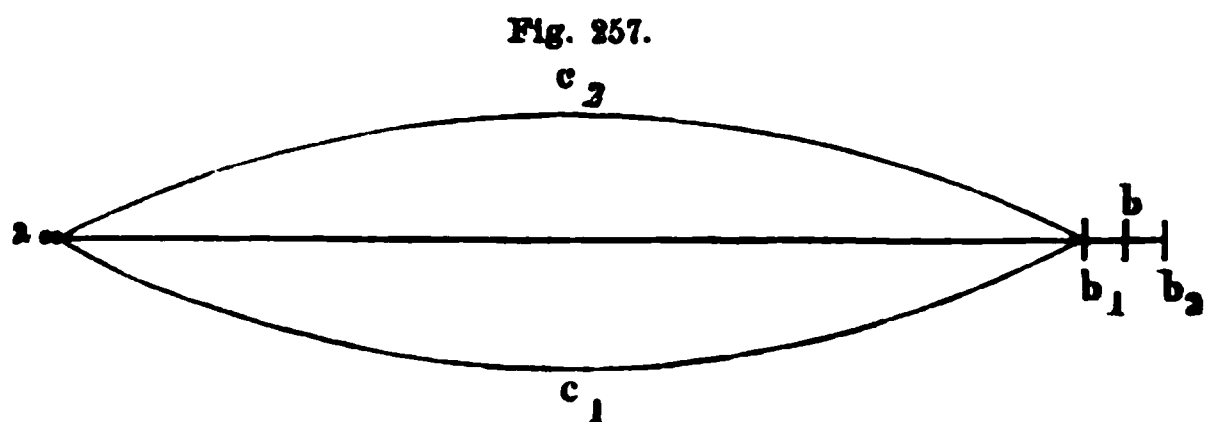


Wirbel  $w$  befestigt ist. Das Hütchen  $h$  befindet sich vertikal über dem Stiele der Gabel, so daß, wenn die Gabel um den Stiel gedreht wird, das in dem Hütchen befindliche Ende des Fadens sich in der Drehungsachse befindet. Das andere Ende des Fadens ist an dem auf dem Holzstabe  $BB$  befindlichen Schieber  $K$  befestigt. Der Holzstab  $BB$  wird von dem hinter der Stimmgabel befindlichen Brette getragen; derselbe ist dort auf eine Achse

1) Melde, Poggend. Ann. 109. 1860 und 111 1860.

gesetzt, so daß er in vertikaler Ebene drehbar, in jeder Neigung gegen den Horizont festgeklemmt werden kann.

Ist der Faden am Stabe horizontal ausgespannt, und ist die Stimmgabel, wie es die Figur zeigt, so aufgestellt, daß die beiden Zinken in der durch den Faden gelegten Vertikalebene sich befinden, so sieht man bei einer bestimmten Spannung des Fadens denselben in der Form einer stehenden Welle schwingen, wenn man die Zinken der Gabel in Schwingung versetzt. Die Schwingungen der Gabel kann man entweder dadurch hervorrufen, daß man in der Nähe ihres obern Endes die Gabel mit einem Violinbogen in einer dem gespannten Faden parallelen Richtung streicht, oder daß man, in der Weise, wie wir es später bei dem Vokalapparate von Helmholtz beschreiben werden, die Zinken zwischen die Arme eines Elektromagnetes stellt, der in rascher Folge periodisch magnetisiert wird. Die Bildung dieser stehenden Schwingung ergibt sich am einfachsten folgendermaßen. Ist Fig. 257  $ab$  der Faden, welcher bei  $b$  an der Stimmgabel



befestigt ist, so bewegt sich, wenn die Gabel schwingt, der Befestigungspunkt  $b$  zwischen  $b_2$  und  $b_1$  hin und her. Wenn sich der Punkt nach  $b_1$  bewegt hat, ist der Abstand  $ab_1$  kleiner als die Länge des Fadens, der Faden ist nicht mehr gespannt und die Teile des Fadens sinken durch ihr Gewicht hinab. Das Hinabsinken beginnt bei  $b$ , und bei einer gewissen Spannung des Fadens wird es sich bis  $a$  fortgepflanzt haben, wenn  $b$  bis  $b_1$  gekommen ist. Geht nun  $b$  zurück bis  $b_2$ , so verlängert sich der Abstand  $ab$  und der Faden nähert sich, indem die Teile desselben nach und nach emporgezogen werden, wieder der geraden Linie, die er bei der angenommenen Spannung des Fadens erreicht, wenn  $b$  in  $b_2$  angekommen ist. Geht nun der Befestigungspunkt das zweite Mal von  $b_2$  nach  $b$ , so muß der dann nicht mehr gespannte Faden sich krümmen, aber, da seine Teilchen mit einer gewissen Geschwindigkeit in die Gleichgewichtslage eintreten, jetzt nach oben hin, und der Faden nimmt bei der vorausgesetzten Spannung die Lage  $ac_2b_1$  an, wenn der Befestigungspunkt sich bis  $b_1$  bewegt hat. Geht  $b_1$  dann wieder bis  $b_2$  zurück, so kommt der Faden wieder in die Lage  $ab_2$ . Es ergibt sich somit, daß der Faden eine ganze Schwingung macht, wenn die Gabel zwei Schwingungen vollführt.

Die Entstehung der schwingenden Bewegung der Saite bei dieser Anordnung ist ganz analog der in Fig. 255 dargestellten, denn auch hier ist der Punkt  $b$  für diese Bewegung ein Knotenpunkt, gerade wie der durch den Steg gestützte Punkt der Saite Fig. 255, und wie dort sind es auch hier die longitudinalen Impulse, welche die schwingende Bewegung veranlassen.

Vermindert man die Spannung der Saite auf  $\frac{1}{2}$  derjenigen, welche sie bei dem ersten Versuche hatte, so pflanzt sich die Bewegung in ihr nur halb so rasch fort; da die nur von der Bewegung der Gabel abhängige Schwingungsdauer aber dieselbe bleibt, so zerlegt sich die Saite in zwei schwingende Abteilungen, welche durch einen Knotenpunkt in der Mitte voneinander getrennt sind. Die Amplituden der Schwingungen sind bei diesen Versuchen so groß, daß die Teilung der Saite in ihre Abteilungen sichtlich sichtbar ist.

Vermindert man die Spannung auf  $\frac{1}{3}$  der anfänglichen, so pflanzt sich die durch die erste Schwingung der Gabel erzeugte Halbwelle nur durch  $\frac{1}{3}$  der Saite fort, und der Faden zerlegt sich infolge der Interferenz der von  $b$  ausgehenden und von  $a$  reflektierten Schwingungen in drei stehende Wellen, deren jede  $\frac{1}{3}$  der Fadenzlänge hat.

Bei hinreichend langen Fäden kann man die Teilung derselben noch beträchtlich weiter treiben.

Da die Anzahl der stehenden Wellen in einem solchen Faden der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung umgekehrt proportional ist, so kann man durch Anwendung verschiedener Fäden von ungleichem Querschnitt und verschieden dichtem Material die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Schwingungen unmittelbar anschaulich machen.

Eine derartige Bildung der stehenden Wellen tritt nicht nur ein, wenn die Ebene der Gabelzinken der durch den Faden gelegten Vertikalebene parallel ist, sondern auch wenn die Gabel zu dieser Ebene senkrecht steht. Die Schwingungen der Gabel, die dann senkrecht zur Längsrichtung des Fadens geschehen, übertragen sich unmittelbar als Transversalschwingungen auf den Faden: bei der Kleinheit der Exkursionen der Gabel gegenüber der Länge des Fadens verhält sich aber auch dann das an der Gabel befestigte Ende im allgemeinen wie ein Knotenpunkt, es ist eine dem Knotenpunkt sehr nahe liegende Stelle der Welle. Bei gleicher Spannung des Fadens ist aber in diesem Falle die Anzahl der stehenden Wellen immer die doppelte von der bei der vorhin besprochenen Befestigungsweise. Der Grund hierfür liegt darin, daß jetzt die Schwingungen der Saite jener der Gabel isochron sind, indem jede Schwingung der Gabel eine Schwingung des Fadens veranlaßt, während, wie wir vorhin sahen, bei der andern Befestigungsweise zwei Schwingungen der Gabel erforderlich waren, um eine ganze Schwingung des Fadens zu geben. Ist demnach bei beiden Befestigungen die Spannung des Fadens und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe, so muß bei der zweiten Stellung der Gabel die Wellenlänge halb so groß, die Zahl der Wellen also doppelt so groß sein als bei der ersten. Damit bei der zweiten Stellung dieselbe Anzahl von Wellen entstehe, muß die Spannung des Fadens viermal so groß sein als bei der ersten Stellung.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen erwähnten wir die zuerst von Poisson angegebene Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und der transversalen Schwingungen der gespannten Saiten; dieselbe Beziehung muß, wie sich unmittelbar ergibt, zwischen den transversalen und longitudinalen Schwingungszahlen bestehen.

Die Schwingungszahl einer longitudinal schwingenden, an ihren beiden Enden befestigten Saite ist allgemein



$$N = \frac{n}{2} \frac{c}{l},$$

für die transversalen Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2} \frac{c'}{l}.$$

Es folgt daraus

$$\frac{N'}{N} = \frac{c'}{c} = \sqrt{\delta},$$

wo wie vorhin  $\delta$  das Verhältniß der Verlängerung der schwingend infolge des spannenden Gewichtes  $p$  zur Länge der Saite, oder dehnung eines Stückes der Saite von der Längeneinheit durch das  $n$  Gewicht bedeutet.

Dieses von der Theorie geforderte Resultat ist durch einen von Cagniard Latour, den Poisson in seinem *Mémoire sur les ments des corps élastiques* mittheilt, bestätigt worden.<sup>1)</sup>

Eine Saite von 14,8<sup>m</sup> Länge wurde einmal in longitudinale in transversale Schwingungen versetzt, und die Schwingungszahlen  $N$  und  $N'$  beobachtet. Es fand sich

$$\frac{N'}{N} = 0,0593.$$

Die Verlängerung  $\delta$  der Längeneinheit der Saite ist gleich dem Quotienten aus der Verlängerung der ganzen Saite  $\alpha$  und der Länge  $l$  derselben, wir erhalten demnach

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{l}},$$

$$\alpha = l \left( \frac{N'}{N} \right)^2 = 14^m,8 \cdot 0,003513 = 0^m,052.$$

Aus dem Verhältniß der longitudinalen und transversalen Schwingungszahlen berechnet sich somit die Verlängerung der Saite zu 0<sup>m</sup>,052 infolge des spannenden Gewichtes. Die Messung Cagniard Latours ergab

$$\alpha = 0^m,05,$$

eine Zahl, welche sich nur um  $\frac{1}{25}$  von der berechneten unterscheidet.

1) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. royale de France. 8. p. 436. 1829. In der Stelle der Abhandlung, wo dieser Versuch mitgeteilt ist, hat sich eine Verwirrung eingeschlichen, da anfänglich  $\frac{N'}{N} = \frac{7}{188}$  und  $\frac{\alpha}{l} = \sqrt{\frac{N'}{N}}$  angegeben ist. Die erste Zahl ist fehlerhaft, da sie auf ein ganz anderes Resultat für die Gleichung für  $\frac{\alpha}{l}$  ist, wie man sieht, falsch. Da die Gleichung nicht auf die Angabe für  $\frac{N'}{N}$  auf  $\alpha = 0,052$  führt, so habe ich letztere von *Poisson* berechnete  $\alpha$  angegebene Zahl als richtig genommen und daraus  $\frac{N'}{N}$  berechnet. Das so berechnete Verhältniß ist  $\frac{7}{118}$ .

## § 143.

**Einfluß der Steifigkeit der Saiten.** Wenn man die Versuche über die Lage der Schwingungsknoten und die Schwingungszahlen der Saiten mit großer Sorgfalt anstellt, so findet man besonders bei Metallsaiten merkbare Abweichungen des Resultates von der Theorie. Diese Abweichungen werden um so größer, je kürzer und dicker die Saiten werden. Der Grund dieser Abweichungen ist leicht einzusehen, er liegt besonders darin, daß die Saiten nicht, wie es bei den theoretischen Entwicklungen vorausgesetzt wurde, absolut biegsam sind und nur durch die spannenden Gewichte Elastizität erhalten haben, sondern daß sie selbst an sich schon steif sind. Es wird also durch die gegenseitige Anziehung der einzelnen Moleküle diesen eine gewisse Gleichgewichtslage gegeben.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß die eigene Steifheit der Saiten gerade so wirkt, als wäre die Saite absolut unelastisch, aber durch ein stärkeres Gewicht gespannt als das angehängte und in Rechnung gezogene. Die Schwingungszahlen werden daher größer sein als die aus der Theorie geleiteten.

Dieses Resultat haben auch die Versuche N. Savarts<sup>1)</sup> ergeben, der sich zur Aufgabe gestellt hatte, das Gesetz aufzusuchen, nach welchem die Schwingungszahlen durch die eigene Steifheit der Saiten sich ändern.

N. Savart befestigte die Saiten an einem festen eisernen Schraubstock, nachdem er sie in Klemmen eingeklemmt hatte, die mit Blei gefüllt waren. Durch ein angehängtes Gewicht  $P$ , welches nach und nach geändert wurde, wurde die Saite gespannt und nun von der Saite ein Stück von  $0^m,5$  Länge mittels zwei weitem Schraubstöcken an seinen beiden Enden ganz fest eingelegt.

Die Schwingungszahlen der Saite von unveränderlicher Länge bei verschiedenen spannenden Gewichten wurden mittels der beobachteten Töne, welche durch die Schwingungen entstanden, bestimmt, und zugleich nach der Formel

$$n = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{gP}{qs}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gP}{lp}}.$$

man wir mit  $p = qls$  das Gewicht der schwingenden Saite bezeichnen, theoretisch berechnet.

Bezeichnen wir die wirklich beobachteten Schwingungszahlen mit  $N$ , so fand N. Savart in der Tat, daß  $N$  stets größer war als  $n$ .

Er zog weiter aus seinen Versuchen den Schluß, daß die Differenz zwischen den Quadraten der Schwingungszahlen konstant sei, oder

$$N^2 - n^2 = C$$

Die Konstante  $C$  soll nach Savart das Quadrat der Schwingungszahl sein, welche der Saite zukommt, wenn sie nur infolge ihrer eigenen Steifheit schwingt. Bezeichnen wir die Schwingungszahl in dem Falle mit  $n_0$ , so soll also

$$N^2 = n^2 + n_0^2$$

in

1) N. Savart, Ann. de chim. et de phys. 6 3, 1842; auch Poggend. Ann. 1843.

Duhamel<sup>1)</sup> hat es versucht, diese von Savart aus seinen Versu abgeleitete Regel durch eine einfache Betrachtung theoretisch zu erklä

Bezeichnet man nämlich mit  $n$  und  $gP$  die Schwingungszahl und Spannung einer absolut biegsamen Saite, so ist nach dem Vorigen

$$n^2 = \frac{g}{4lp} P,$$

wenn  $g$  die Beschleunigung der Schwere,  $l$  die Länge und  $p$  das Gewi der Saite bedeutet.

Hat man nun eine wirkliche Saite von eben der Länge  $l$  und de selben Gewichte  $p$ , so hat dieselbe durch ihre Steifigkeit eine gewi Elastizität, vermöge welcher sie ohne spannendes Gewicht eine Schwingun zahl  $n_0$  hat. Der absolut biegsamen Saite können wir nun durch ein Gewicht  $P_0$  eine Spannung erteilen, so daß sie genau dieselbe Bewegu annimmt, welche bei der steifen Saite aus der Elastizität hervorgeht u bei der sie  $n_0$  Schwingungen zurücklegt. In dem Falle hat man für diesel

$$n_0^2 = \frac{g}{4lp} \cdot P_0.$$

Fügt man nun zur Spannung  $P_0$  der biegsamen Saite noch die Spa nung  $P_1$  hinzu, so befindet sie sich in demselben Zustande wie die stei Saite, wenn sie durch das Gewicht  $P_1$  gespannt ist. Die Spannung d absolut biegsamen Saite ist dann aber  $g(P_0 + P_1)$  und ihre Schwingung zahl  $N$  gegeben durch

$$N^2 = \frac{g}{4lp} (P_0 + P_1),$$

oder da für eine Saite von gegebener Länge und gegebenem Gewichte d Schwingungszahl bei der konstanten Spannung  $P_0$  konstant ist,

$$N^2 = n^2 + n_0^2.$$

Ist es gleichgültig, ob eine Saite durch eigene Elastizität oder durc ein angehängtes Gewicht eine gewisse Spannung erhält, so muß auch d die steife Saite, welche infolge ihrer eigenen Elastizität  $n_0$  Schwingung vollführt, die wirkliche Schwingungszahl  $N$  bei der Spannung  $P$  sein

$$N = \sqrt{n^2 + n_0^2}.$$

August Seebeck<sup>2)</sup> hat indes nachgewiesen, daß die letztere An nahme Duhamels nicht strenge und nur für einen bestimmten Fall rich tig ist, da dieser Satz auf eine bestimmte Gestalt der schwingenden Sait führt. Wenn man nämlich auch durch ein Gewicht  $P_0$  der unelastischen Saite dieselbe Schwingungszahl geben kann, so läßt sich derselben doch nicht im allgemeinen in allen Teilen dieselbe Bewegung erteilen, wie die Teile der steifen Saite sie annehmen. Zur Herleitung der Savartschen Regel darf er deshalb nicht angewandt werden, weil die Saiten in den Versuche von Savart nicht der Bedingung entsprechen, die aus dem Satz von Duhamel folgt.

1) Duhamel, Comptes Rendus. 14. 1842. Poggend. Ann. 57. 1842.

2) A. Seebeck, Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1846—47; auszügl. von Seebeck selbst Dove, Repertorium. 8. Akustik p. 24.

Die Savartsche Regel darf daher auch nur als eine angenäherte gelten.

Seebeck gibt für die Schwingungszahlen der steifen Saiten einen andern Ausdruck, den er theoretisch ableitet und durch Versuche bestätigt. Für gewöhnliche Saiten, deren Steifheit nur sehr gering ist, wird dieser Ausdruck ziemlich einfach, nämlich

$$n = n_1 \left( 1 + \frac{r^4}{l^4} \cdot \sqrt{\frac{E\pi}{gP}} \right),$$

worin  $n_1$  die Schwingungen der absolut biegsamen Saite bei der Spannung  $gP$ ,  $r$  den Radius,  $l$  die Länge und  $E$  den Elastizitätskoeffizienten der Saite, in den Einheiten des absoluten Maßsystems, bedeutet.

Man sieht, wie das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen sich immer mehr der Einheit nähert, je größer das spannende Gewicht wird, oder je kleiner der Quotient der beiden Kräfte  $\frac{E}{gP}$  ist. Es ist das zu erwarten, da der Einfluß der Steifheit, also der eigenen Elastizität der Saite, um so mehr zurücktreten muß.

#### § 144.

**Transversalschwingungen von Stäben.** Wenn man irgend einem elastischen prismatischen oder zylindrischen Stabe eine Biegung erteilt und ihn dann sich selbst überläßt, so gelangt derselbe in stehende Schwingungen. Auch in diesem Falle können wir die stehenden Wellen als ein Resultat der miteinander interferierenden nach entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzenden an den beiden Enden reflektierten Wellen betrachten.

Die Schwingungsdauer solcher Stäbe läßt sich demnach ebenso wie die Schwingungsdauer der stehenden Wellen bestimmen, oder wir haben wieder

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

wie im § 126. Wir haben hier indes die Größe  $k$  etwas anders zu bestimmen, da wir es hier nicht mit der Bewegung von Punktreihen, wie in den bisherigen Fällen, zu tun haben.

Sei  $ab$  (Fig. 258) ein Stab, der an seinem Ende  $b$  durch ein Gewicht gebogen wird, so sahen wir früher im zweiten Abschnitte, daß die Biegung, der Abstand  $bb'$ , abhängt von der Größe des Gewichtes, ferner der Länge, Breite und Dicke des Stabes. Setzen wir denselben als prismatisch voraus und setzen wir seine Länge gleich  $l$ , die Breite gleich  $\beta$  und die Dicke gleich  $h$ , so war, wenn wir das biegende Gewicht mit  $P$  bezeichnen<sup>1)</sup>,

$$bb' = \frac{4}{E} \frac{gPl^3}{\beta h^3},$$

oder die elastische Kraft  $gP$ , welche den gebogenen Stab in die Gleich-

Fig. 258.



<sup>1)</sup> Man sehe § 64.

gewichtslage zurücktreibt,

$$gP = \frac{E}{4} \frac{\beta h^3}{l^3} \cdot bb',$$

worin, wie immer,  $E$  den Elastizitätskoeffizienten des Stabes in den Einheiten des absoluten Maßsystems bedeutet.

Da die elastische Kraft der Biegung proportional ist, so folgt, daß ein einmal gebogener und dann sich selbst überlassener Stab um seine Gewichtslage isochrone Schwingungen vollführen wird.

Nennen wir die bewegende Kraft bei einer Biegung, bei welcher  $l$  ist,  $gp$ , so haben wir

$$gP = gp \cdot bb',$$

$$gp = \frac{E}{4} \frac{\beta h^3}{l^3}.$$

Dies ist somit die Kraft, welche den gebogenen Stab von der Lage  $l$  wieder in die Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, wenn das Ende  $b$  sich im Abstände  $l$  von der Gleichgewichtslage befindet. Diese Kraft  $gp$  am Ende  $b$  angebracht. Um die Schwingungsdauer des Stabes zu erhalten, haben wir

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

wo  $k$  die beschleunigende Kraft der Bewegung bedeutet, also

$$k^2 = \frac{gp}{m}$$

ist, wenn  $m$  die bewegte Masse bedeutet. Bezeichnen wir die Masse des Stabes mit  $m'$ , so werden wir haben

$$m = f' m',$$

worin  $f'$  für einen Stab von gegebener Form eine Konstante bedeutet, denn um die beschleunigende Kraft zu erhalten, müssen wir für  $m$  die Masse der Punkte  $b$  anzubringende Masse einsetzen, welche dort die Masse des Stabes ersetzt, da die Kraft  $p$  im Punkte  $b$  angreift. Diese Masse ist aber proportional derjenigen des Stabes.

Für die beschleunigende Kraft der Bewegung erhalten wir somit

$$k = \frac{gp}{m} = \frac{E\beta h^3}{4f' m' l^3}.$$

Bezeichnen wir das spezifische Gewicht des Stabes mit  $s$ , so haben wir

$$m' = \beta h l s$$

und somit

$$k = \frac{h^2}{4f' l^4} \frac{E}{s}$$

und daraus für die Schwingungsdauer eines solchen Stabes

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{h^2}{4f' l^4} \frac{E}{s}} = A \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{s}{E}},$$

wenn wir setzen

$$2\pi \sqrt{4f'} = A.$$

Für die Schwingungszahlen der Stäbe erhalten wir daraus

$$N = \frac{1}{T} = A' \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Derselbe Ausdruck gilt für zylindrische Stäbe, wenn wir anstatt der Dicke  $h$  den Radius  $r$  derselben einsetzen, jedoch wird dann die Konstante  $A'$  eine andere, wie sich aus dem Ausdrucke ergibt, den wir für  $gP$  erhalten, wenn wir anstatt parallelepipedischer Stäbe zylindrische Stäbe anwenden.

Wir haben diesen Ausdruck zunächst entwickelt unter der Voraussetzung, daß der Stab an seinem einen Ende fest sei, indes ergibt die Theorie der Elastizität, daß er auch, mit verschiedenen Werten von  $A'$ , gültig ist, im Falle beide Enden fest oder frei sind, da der Ausdruck für  $gP$  sich in den Fällen nur durch andere Konstanten unterscheidet.

Es ergibt sich daraus, daß allgemein die Schwingungszahl elastischer Stäbe dem Quadrate ihrer Länge umgekehrt proportional ist, während sie der Dicke derselben oder dem Radius derselben direkt proportional, von der Breite derselben jedoch unabhängig ist.

Gerade wie wir bei den longitudinalen Schwingungen eine Reihe von Fällen unterscheiden mußten, je nach der Befestigungsweise des Stabes, so auch hier wieder.

Wir können jedoch hier nicht wie in den früheren Fällen die Schwingungszahlen und Teilungen der Stäbe theoretisch ableiten, sondern müssen uns begnügen, die von Euler, Poisson, Cauchy, Seebeck u. a., teils theoretisch, teils experimentell erhaltenen Resultate mitzuteilen. Wir unterscheiden folgende Fälle.<sup>1)</sup>

1) Ein Ende des Stabes ist frei, das andere fest, der Stab schwingt seiner ganzen Länge nach hin und her, er bildet eine halbe stehende Welle. Es ist unter Annahme eines zylindrischen Stabes

$$N = 0.28 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

2) Beide Enden des Stabes sind fest, oder beide Enden des Stabes sind frei; die Zahl der langsamsten Schwingungen wird in beiden Fällen:

$$N = 1.78 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

3) Es kann ferner das eine Ende des Stabes auf eine Unterlage gelegt werden und das andere ganz fest in einen Schraubstock eingeklemmt werden oder ganz frei sein. In beiden Fällen erhält man für die langsamsten Schwingungen, welche der Stab vollführen kann.

$$N = 1.23 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

1. Poisson, Mémoires de l'Acad. de France N. p. 484. 1829 — Cauchy, Ann. de Math. 3. p. 270 ff. — Seebeck, Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1846—47. p. 159 — Dove, Rep. N. p. 46. 1849

4) Schließlich können beide Enden des Stabes nur aufgelegt sein dann ist für die langsamsten Schwingungen

$$N = 0,785 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Seebeck vereinigt die Ausdrücke für alle diese Fälle in folgenden<sup>1)</sup>

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin dann nur  $\varepsilon$  seinen Wert von einem Falle zum andern ändert, und zwar ist

$\varepsilon = 0,59686$ , wenn ein Ende des Stabes fest, das andere frei ist,  
 $\varepsilon = 1,50562$ , wenn beide Enden des Stabes fest oder frei sind,  
 $\varepsilon = 1,24987$ , wenn ein Ende aufgelegt, das andere fest oder frei ist,  
 $\varepsilon = 1$ , wenn beide Enden des Stabes aufgelegt sind.

In allen diesen Fällen können noch eine Reihe von Schwingungszahlen auftreten, die alle häufigern Schwingungen der Stäbe entsprechen; die Stäbe zerlegen sich dann in eine Reihe selbständig schwingender Teile, welche durch Knotenpunkte voneinander getrennt sind.

Seebeck gibt folgende Tabelle der Werte von  $\varepsilon$  in allen vier Fällen:

1. Fall. Das eine Ende des Stabes ist fest, das andere frei. Die Reihenfolge der Schwingungszahlen ergibt sich aus den Werten

$$\varepsilon = 0,59686; \quad 1,49418; \quad 2,50025; \quad 3,4999 \dots \dots \frac{2n-1}{2}.$$

Wie man sieht, werden die Schwingungszahlen eines gegebenen Stabes von der Länge  $l$  und dem Radius  $r$  von der dritten an dargestellt durch

$$N = \left( \frac{2n-1}{2} \right)^2.$$

Für  $n = 1$  und  $n = 2$  weichen die Schwingungszahlen hiervon ab, indem die hiernach berechneten Zahlen für  $n = 1$  zu klein, für  $n = 2$  zu groß werden.

2. Fall. Die beiden Enden des Stabes sind entweder fest oder frei. Die Schwingungszahlen ergeben sich aus den Werten

$$\varepsilon = 1,50562; \quad 2,49975; \quad 3,5001; \quad 4,5000 \dots \dots \frac{2n+1}{2}.$$

Setzen wir also für die langsamsten Schwingungen  $n = 1$ , so werden auch hier die Schwingungszahlen eines gegebenen Stabes dargestellt durch

$$N = \left( \frac{2n+1}{2} \right)^2,$$

jedoch ebenfalls erst von der dritten Schwingungszahl an, und zwar um so genauer, je weiter man in der Ordnung der Schwingungszahlen aufsteigt.

3. Fall. Ist das eine Ende des Stabes aufgelegt, das andere ganz fest oder ganz frei, so ergibt sich die Reihe der Schwingungszahlen, wenn für  $\varepsilon$  eingesetzt wird

1) Seebeck, a. a. O.



$$\varepsilon = \frac{4n + 1}{4},$$

wieder  $n$  die Reihe der natürlichen Zahlen bedeutet, und für die ersten Schwingungen  $n = 1$  zu setzen ist. Für diese gaben wir an 2498; man sieht, wie schon dieser Wert nur äußerst wenig von nach der Formel berechneten abweicht.

Fall. Sind beide Enden des Stabes einfach aufgelegt, so ergibt sich bei der Schwingungszahlen, wenn wir für die langsamsten  $\varepsilon = 1$  und folgenden die Reihe der natürlichen Zahlen einsetzen, also  $\varepsilon = n$ . Schwingungszahlen verhalten sich also wie 1, 4, 9 . . . .

In diesem Falle erhält also die Gleichung für die Schwingungszahlen einfachste Gestalt, sie wird

$$N = \frac{n^2 \pi r}{4l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

nach und nach für  $n$  die Werte 1, 2, 3 . . . einzusetzen sind. Die Schwingungszahlen eines und desselben Stabes können also sehr verschieden sein, je nach der Art seiner Befestigung; setzen wir die langsamsten Schwingungen bei der ersten Befestigungsart gleich 1, so erhalten wir Schwingungszahlen

1. Fall . . .	1;	6,26;	17,54;	34,38;	56,84;
2. „ . . .	6,36;	17,54;	34,38;	56,84;	84,91;
3. „ . . .	4,38;	11,21;	29,50;	50,70;	77,22;
4. „ . . .	2,807;	11,23;	25,26;	44,91;	70,17.

Um aus dieser kleinen Tabelle die wirklichen Schwingungszahlen zu erhalten, haben wir bei zylindrischen Stäben dieselben nur mit

$$\frac{0,36624 \pi r}{4l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

multiplizieren.

Auch die Schwingungszahlen parallelepipedischer Stäbe können wir auf dieselbe Weise erhalten, wir haben in die Formel anstatt des

$r$  des Zylinders nur  $\frac{h}{\sqrt{3}}$  einzusetzen, wenn wir wie vorhin mit  $h$  die Dicke der Stäbe bezeichnen.<sup>1)</sup>

Die größeren Schwingungszahlen haben auch hier ihren Grund in einer Zerlegung der Stäbe in eine Anzahl stehender Wellen, indes teilen sich hier die Stäbe nicht in eine Anzahl gleicher Teile, sondern die Endglieder sind verschieden von den Abständen der Knoten im Stabe selbst. Die Lage der Knoten läßt sich indes ebenso berechnen, wie die der Schwingungszahlen.

So findet Seebeck z. B. für die Entfernung der Knoten von den Enden eines an beiden Enden freien Stabes sehr nahe:

des ersten	des zweiten	des dritten	des $m$ -ten
1,322	4,9820	9,0007	$4m - 3$
$4n + 2$	$4n + 2$	$4n + 2$	$4n + 2$

Bei der langsamsten Schwingung bilden sich also zwei Knoten, die um

<sup>1) Cauchy a. a. O.</sup>

0,2242 von den Enden liegen und um 0,5516 der Stablänge voneinander entfernt sind. Bei der zweiten, schnellern Schwingung bilden sich drei Knoten, einer in der Mitte, wie sich aus dem Ausdruck für den zweiten Knoten ergibt, der für den Abstand von dem nächsten freien Ende 0,498 ergibt, die beiden andern sind um 0,132 von den Enden des Stabes entfernt. Bei der dritten Schwingungszahl bilden sich vier Knoten, welche um 0,0944 und 0,3558 von den Enden des Stabes entfernt sind. Der Abstand der beiden mittlern Knoten ist 0,2888 und der mittlern von den äußern 0,2614.

In dem folgenden Falle bilden sich fünf Knoten, deren Lage sich ebenso berechnen läßt und so fort.

Man kann diese theoretischen Resultate experimentell nachweisen. Daß die Schwingungszahlen mit den angegebenen übereinstimmen, werden wir im nächsten Abschnitte zeigen.

Die Lage der Knotenpunkte läßt sich am besten auf einem dünnen Streifen von ziemlicher Breite und Länge bestimmen. Strehlke<sup>1)</sup> wandte Stahlstäbe von 1<sup>m</sup>—1<sup>m</sup>,3 Länge, 12—15<sup>mm</sup> Breite und 4<sup>mm</sup> Dicke an und bestreute sie auf der obern Fläche nach dem Vorgange von Chladni<sup>2)</sup> mit trockenem, staubfreiem Sand. Der Sand wird von den schwingenden Stellen des Stabes fortgeworfen und an den ruhenden Stellen angesammelt, so daß man dadurch die Lage der Knoten sichtbar machen kann. Man spannt diese Stäbe zwischen zwei konischen Spitzen an der Stelle zweier Knoten ein und bringt die Stäbe durch Anstreichen mit dem Violinbogen in Schwingung. Der Sand wandert dann nach den Knotenlinien hin und bleibt dort in Ruhe.

Die Knotenlinien stellen sich als feine, zur Längsachse des Stabes senkrechte Linien dar, und ihre Lage ist nach den Messungen von Strehlke genau der Theorie entsprechend.

In gleicher Weise hat Lissajous<sup>3)</sup> die Lage der Knotenlinien für alle vorhin betrachteten Fälle gemessen und volle Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung gefunden.

In seiner Abhandlung über die Bewegung elastischer Körper macht Poisson auf die einfache Relation auch der transversalen und longitudinalen Schwingungen von Stäben aufmerksam, wenn sie ihre langsamsten Schwingungen vollführen.<sup>4)</sup> Ist der Stab an beiden Enden frei oder fest so haben wir für die Zahl der transversalen Schwingungen

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Für die longitudinalen Schwingungen der langsamsten Art hatten wir § 140

$$N' = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

1) *Strehlke*, Poggend. Ann. 27. p. 505. 1833. Dove, Repert. 3. p. 111. 1839.

2) *Chladni*, Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787.

3) *Lissajous*, Ann. de chim et de phys. 30. (3.) p. 385. 1850. Königs Journal. 1. p. 97. 1851.

4) *Poisson*. Mémoires de l'Acad. de France. 8. p. 486. 1829.

Man erhält demnach

$$\frac{N}{N'} = \frac{1}{8} \pi^2 \frac{r}{l} = 3,5608 \frac{r}{l}.$$

F. Savart hat durch Versuche diese von Poisson zuerst aufgestellte Relation nachgewiesen. Es wurden die longitudinalen Schwingungen eines bezu 1<sup>m</sup> langen zylindrischen homogenen Stabes beobachtet und darauf transversalen Schwingungen eines Stückes des Stabes, welches genau der Länge des Stabes betrug. Die Schwingungszahlen wurden nach einer nächsten Abschnitte auseinander zu setzenden Methode aus den Tönen r Stäbe bestimmt.

Um vergleichbare Zahlen zu haben, wurde die beobachtete Zahl der longitudinalen Schwingungen des ganzen Stabes mit 8 multipliziert, wodurch in die Schwingungszahl eines Achtels des Stabes erhielt. Aus diesen hlen wurde nach obiger Gleichung die Schwingungszahl der transversalen hwingungen berechnet und die so berechnete Zahl

$$N = 3,5608 \frac{r}{l} N'$$

it der beobachteten Schwingungszahl verglichen. Die Resultate der Ver- che sind folgende:<sup>1)</sup>

Stab von		N beobachtet	N berechnet	Differenz
Messing. . . . .	$l = \frac{1}{4} \cdot 0,825$	1422	1416	— 7
	$r = 2\text{mm},4$			
	$N' = 17066$			
Kupfer . . . . .	$l = \frac{1}{4} \cdot 0,825$	1067	1082	+ 15
	$r = 1\text{mm},7$			
	$N' = 17482$			
Eisen . . . . .	$l = \frac{1}{4} \cdot 0,825$	1843	1842	1
	$r = 2\text{mm},25$			
	$N' = 22767$			

Die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung sind so klein, uß sie vollkommen innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobach- tungsfehler liegen.

§ 145.

**Transversale Schwingungen von Platten. Ohladnis Klangfiguren.**  
Man man eine dünne Platte von Glas oder Metall oder eine an ihrem anfang durch Gewichte gespannte Membran anschlägt oder an ihrem ende streicht, so kann man dieselbe ebenso wie Streifen oder Stäbe in ebende Schwingungen versetzen. Eine theoretische Ableitung dieser hwingungen aus den Prinzipien der Wellenbewegung ist uns hier nicht öglich, ja dieselbe ist überhaupt erst nur für einige spezielle Fälle er- icht worden. Die Bewegungsgesetze von Membranen sind zuerst von

1, Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. 8. p. 487. 1829.

Poisson entwickelt worden<sup>1)</sup> und ebenso hat derselbe eine Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten entwickelt. Kirchhoff<sup>2)</sup> hat indes von der letztern nachgewiesen, daß sie nicht in allen Punkten richtig ist und an Stelle der Poissonschen eine neue Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten gegeben. Wir werden die Resultate der Kirchhoffschen Theorie nachher mit den Versuchen zusammenstellen.

Eine Membran, wie z. B. das Fell einer Pauke, kann entweder als Ganzes schwingen oder sich in schwingende Teile zerlegen, welche dann durch ruhende Linien, Knotenlinien, voneinander getrennt sind. Eine Platte kann niemals als Ganzes schwingen, sondern zerlegt sich immer in mehrere durch Knotenlinien getrennte schwingende Teile. Theorie und Versuche beweisen, daß die Teilung der Platten höchst mannigfaltig sein kann.

Um die Teilung der Platten zu erkennen, bedarf es nur der Kenntnis der Knotenlinien, da jeder von solchen umgebene Teil der Platte für sich schwingt, und um diese sichtbar zu machen, wandte Chladni das vorhin schon erwähnte Mittel an. Er bestreute die zu untersuchenden Platten

Fig. 259



mit trockenem staubfreiem Quarzsand, der dann von den schwingenden Teilen der Platte fortgeworfen wird und sich auf den ruhenden Stellen, den Knotenlinien, ansammelt. Es entstehen so auf der Platte regelmäßige Figuren, welche von Chladni Klangfiguren genannt sind.

Um die Platte in Schwingungen zu versetzen, befestigt man sie in ihrer Mitte oder an irgend einer andern Stelle mit der von Strehlke<sup>3)</sup> angegebenen Gabel (Fig. 259), indem man sie mittels der Schraube zwischen den beiden

mit Tuch überbundenen Köpfen *a* und *b* befestigt. Diese über diese Köpfe gebundenen Tuchstückchen müssen zuweilen erneuert werden, damit sie Sandkörnchen, welche sich an dem Tuche anlegen, die Platte nicht rutschen. Die Platte wird mit einem mit Kolophonum versehenen Violinbogen am Rande gestrichen und zugleich an irgend einer andern Stelle mit dem Finger festgehalten. Der Bogen muß senkrecht am Rande der Scheibe herabgeführt und das Streichen solange fortgesetzt werden, bis keine einzelnen Sandkörnchen mehr auf der Scheibe liegen, sondern alle sich in die einzelnen Linien der Klangfigur begeben haben.

Um die Figuren möglichst scharf zu erhalten, darf man nur wenig Sand auf die Platte streuen, da sonst die einzelnen Linien zu breit werden und die Figuren dadurch ungenau werden.

Die Knotenlinien bezeichnen die Grenzen der Teile, welche gleichmäßig

1) Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. 8 p. 499. 1829.

2) Kirchhoff, Crelles Journal f. Mathematik 40. 1850. Man sehe auch Clebsch, Elastizitätstheorie p. 264.

3) Strehlke, Poggend. Ann. 4. p. 206. 1826.

nach entgegengesetzten Richtungen schwingen: es geht daraus hervor, daß die Figur derselben die Platte im allgemeinen in eine gerade Anzahl von Teilen zerlegen muß, da die entgegengesetzten Schwingungen immer paarweise auftreten müssen.

Die Schwingungszahlen verschiedener Platten, wenn sie in bestimmten Abteilungen schwingen, lassen sich nur experimentell aus den durch die Schwingungen hervorgerufenen Tönen bestimmen. Aus den Versuchen hat sich folgendes Gesetz ergeben. Wenn zwei Platten verschiedener Größe und verschiedener Dicke dieselbe Klangfigur zeigen, also in gleicher Weise abgeteilt werden, so sind die Schwingungszahlen der beiden Platten den Dicken derselben direkt, dem Flächeninhalt derselben aber umgekehrt proportional, oder

$$\frac{N}{N'} = \frac{q' d}{q d'}$$

Sind die Platten kreisförmig, so ist

$$q = r^2 \pi, \quad q' = r'^2 \pi,$$

demnach auch

$$\frac{N}{N'} = \frac{r'^2 d}{r^2 d'}$$

Die Schwingungszahlen sind den Quadraten der Radien umgekehrt proportional. Dies Gesetz schließt das folgende ein. Die Schwingungszahlen von Platten, welche einander ähnlich sind, das heißt, bei denen die homologen Dimensionen alle in demselben Verhältnisse stehen, verhalten sich bei gleicher Teilung der Platten umgekehrt wie die homologen Dimensionen.

Ist nämlich bei kreisrunden Platten z. B. der Radius der einen Platte  $r$ , der der andern  $ar$ , und ebenso die Dicke der einen  $d$ , der andern  $ad$ , so ist nach dem Gesetze in der ersten Fassung

$$\frac{N}{N'} = \frac{a^2 r^2 d}{r^2 ad} = \frac{a}{1}$$

und wie man sieht, ist das der mathematische Ausdruck für die aus dem ersten Satze gezogene Folgerung.

Betrachten wir zunächst kreisrunde homogene Platten, man nimmt zu den Versuchen am besten solche von Glas oder Metall, so ergibt für diese die Theorie von Kirchhoff, daß in ihnen eine große Zahl verschiedener Teilungen möglich ist, die sich in drei Gruppen ordnen lassen. Entweder teilt sich die Platte in eine Reihe konzentrischer Zonen, oder in eine stets gerade Anzahl von gleich großen Sektoren, welche durch diametrale Knotenlinien voneinander getrennt sind, oder endlich beide Teilungsarten treten gleichzeitig auf.

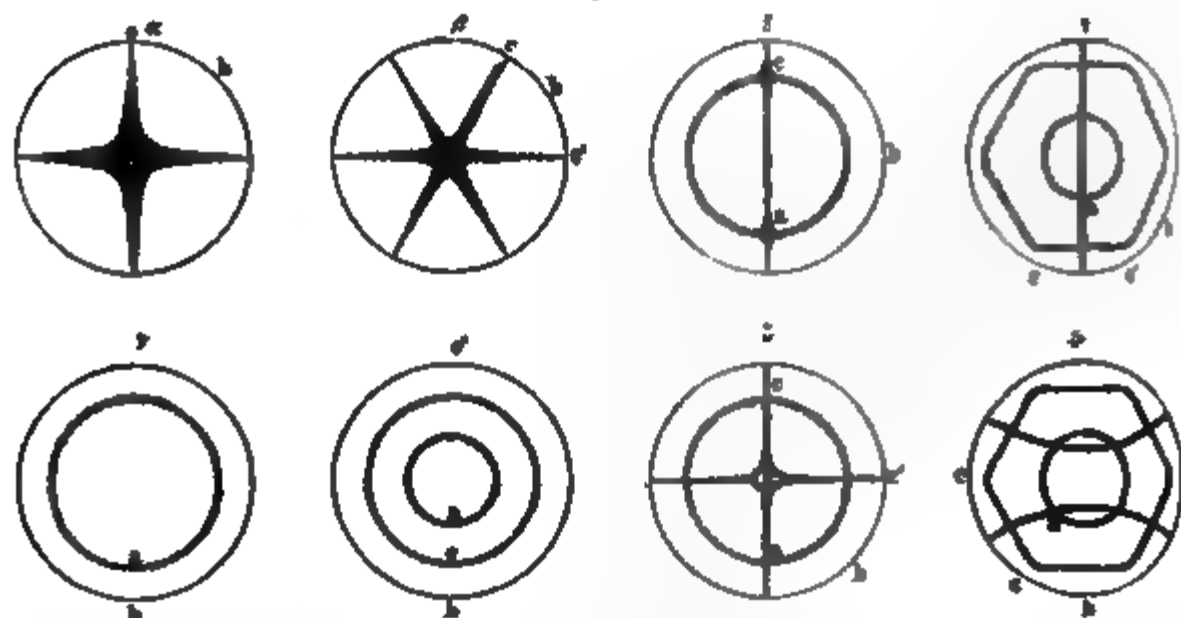
Alle diese Teilungsarten hat schon Chladni beobachtet; um sie hervorzu bringen, klemmt man eine kreisförmige Platte in der Mitte oder in einem andern Punkte ein und berührt sie außerdem an einem oder mehreren Punkten und streicht dann in einiger Entfernung von den Berührungspunkten. Fig. 260 zeigt eine Reihe solcher Figuren. Die Einklemmungspunkte sind in allen einzelnen Figuren mit  $a$  bezeichnet, der Punkt, an dem die Platte zu streichen ist, mit  $b$ , und die Berührungspunkte mit  $c$ . Klemmt man die Platte in der Mitte ein, so erhält man stets eine radiale

Figur (260 $\alpha$  und  $\beta$ ) je nach der Anzahl der berührten Punkte mit zwei oder drei Durchmessern; klemmt man die Platte exzentrisch ein und berührt keinen Punkt des Randes, so erhält man Kreise ohne Durchmesser (Fig. 260 $\gamma$  und  $\delta$ ).

Bei der theoretischen Behandlung der Frage gelangt man zur Bestimmung der Durchmesser der Knotenkreise zu einem Ausdruck, dessen numerischer Wert wesentlich von dem Werte des von uns mit  $\mu$  bezeichneten Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation abhängt.

Kirchhoff war zur Zeit, als er diese Untersuchung durchführte, noch nicht zu dem Resultate gelangt, daß der Koeffizient der Querkontraktion für jede Substanz besonders bestimmt werden müsse, er nahm noch an, daß der Koeffizient für alle festen Körper denselben Wert hätte, ließ es aber zweifelhaft, ob der Wert von  $\mu$  nach der Poissonschen Annahme gleich  $\frac{1}{4}$  oder nach derjenigen von Wertheim gleich  $\frac{1}{3}$  sei. Er berechnete

Fig. 260.



deshalb mit beiden Annahmen die Knotenkreise und die Schwingungszahlen kreisförmiger Platten und verglich dieselben mit den Messungen von Strehlke und Chladni.<sup>1)</sup> Für die Lage der Knotenkreise führen die Rechnungen mit den beiden Annahmen auf Zahlen, die sich nur innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler unterscheiden. So wird der Durchmesser des Knotenkreises Fig. 260 $\gamma$

für  $\mu = \frac{1}{4}$  gleich 0,68062, für  $\mu = \frac{1}{3}$  gleich 0,67941

des Scheibendurchmessers. Nach Messungen von Savart, an drei Scheiben ausgeführt, die Poisson in seiner oben erwähnten Abhandlung mitteilt, fand sich der Durchmesser

0,6819; 0,6798; 0,6812.

Strehlke beobachtete die Knotenkreise an vier Glasscheiben und zwei Messingscheiben; die Dicke der Glasscheiben war zwischen 1,5 und 2,5<sup>mm</sup>.

1) Die Zahlen finden sich in Kirchhoffs Abhandlung, Poggend. Ann. 61. p. 258. 1850, welche die experimentellen Resultate seiner Abhandlung in Grells Journal wiedergibt. Man sehe Strehlke, Poggend. Ann. 95. p. 577. 1855.

Durchmesser zwischen 16 und 19<sup>cm</sup>. Die Messingscheiben waren 1,5<sup>mm</sup> dick und hatten die eine den Durchmesser gleich 13,5, die andere 16,2<sup>cm</sup>.

Für die vier Glasscheiben fand Strehlke den Durchmesser

$$0,6792; 0,6782; 0,6780; 0,6770,$$

die Messingscheiben

$$0,6781; 0,6783.$$

Für die Knotenkreise Fig. 260δ findet Kirchhoff mit  $\mu = \frac{1}{2}$

$$0,39151; 0,84200.$$

Strehlke erhielt an zwei Glasscheiben

$$0,3915; 0,8414; \dots \dots 0,3911; 0,8411.$$

Die Figuren 260ε und 260ζ zeigen die beiden Teilungsarten gleichzeitig. Für den Durchmesser des Knotenkreises, Fig. 260ε, gibt die Theorie mit  $\mu = \frac{1}{2}$  den Wert 0,78136, Strehlke fand auf den beiden zuletzt erhaltenen Glasscheiben

$$0,7800; 0,7792.$$

Für Fig. 260ζ soll der Knotenkreis gleich 0,82194 sein, Strehlke fand 0,8210 und 0,8205.

Wie man sieht, stimmen die Messungen Strehlkes mit den Messungen Kirchhoffs ganz vortrefflich überein.

Die Figuren 260η und 260θ zeigen häufig vorkommende Verzerrungen, welche an nicht ganz homogenen Platten auftreten, wenn man sie bei *a* anklammert und bei *b* anstreicht. Außer der gezeichneten können noch viele Figuren hervorgebracht werden, ('hladni<sup>1)</sup>') gibt in seiner ersten Mitteilung 80 an, dieselben sind aber alle aus Kreisen und Durchmessern, aus denen letztere je zwei immer denselben Winkel einschließen, zusammengesetzt, oder Verzerrungen solcher Figuren.

Aus der Theorie sowohl wie aus den Beobachtungen ergibt sich, daß die Anzahl der Schwingungen mit der Anzahl der Teile, in welche sich die Platte teilt, in einem sehr komplizierten Verhältnisse zunimmt. Die langsamsten Schwingungen vollführt die Platte bei der Teilung durch zwei Durchmesser ohne Knotenkreis. Ist *r* der Radius der Platte, *d* die halbe Dicke, *E* der Elastizitätskoeffizient und *s* das spezifische Gewicht der Platte, wird nach Kirchhoff die Schwingungszahl mit der Annahme

$$\mu = \frac{1}{2} \quad N = 1,04604 \frac{d}{r^2} \sqrt{\frac{E}{s}}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \quad N = 1,02357 \frac{d}{r^2} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

1) *E* in absolutem Maße gegeben sein muß.

Man sieht, daß die Schwingungszahlen erheblich stärker durch den Wert von  $\mu$  beeinflußt werden als die Werte für die Durchmesser der Knotenkreise.

1) ('hladni', Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787. Man vgl. auch Savart, Ann. de chim. et de phys. 36. 1-27.



Die übrigen Teilungen geben größere Schwingungszahlen, auf die Teilung in zwei Durchmessern folgt die Teilung der Scheibe durch einen Knotenkreis, Fig. 260γ, dann folgen die Teilungen Fig. 260β, 260ε, 260ζ, 260δ. Folgende kleine Tabelle enthält die Schwingungszahlen, jene der langsamsten gleich 1 gesetzt, für die angegebenen und noch einige andere Teilungen nach der Theorie von Kirchhoff, mit  $\mu = \frac{1}{4}$  berechnet, und nach den Versuchen von Chladni zusammengestellt. Die erste mit *K* überschriebene Spalte enthält die Anzahl der Knotenkreise, zu welcher die in den übrigen Spalten angegebenen Schwingungszahlen gehören, wenn die Knotenkreise von der über jeder Spalte angegebenen Anzahl *n* von Durchmessern durchschnitten sind.

<i>K</i>	<i>n</i> = 0		<i>n</i> = 1		<i>n</i> = 2		<i>n</i> = 3		<i>n</i> = 4	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
0					1,0	1,000	2,2	2,312	4,0	4,048
1	1,6	1,613	3,9	3,703	6,0	6,408	9,5	9,644	12,7	13,393
2	6,4 +	6,956	10,1	10,838	14,4	15,305	19,0	20,325	—	—
3	15,1	15,908								

Die Schwingungszahlen wurden in später zu besprechender Weise aus den Tönen bestimmt; das Zeichen + gibt an, daß der betreffende Ton einer etwas größeren Schwingungszahl entsprach. Die Zahlen stimmen allerdings nicht besonders überein, noch mehr weichen die mit  $\mu = \frac{1}{4}$  berechneten Zahlen von den beobachteten ab, da die beobachteten Zahlen alle kleiner sind als die berechneten und die mit  $\mu = \frac{1}{3}$  berechneten Zahlen noch größer sind; es ist indes dabei zu beachten, daß eine scharfe Bestimmung der Schwingungszahlen aus den Tönen mit großen Schwierigkeiten verknüpft ist.

Sehr viel besser mit der Theorie unter Voraussetzung des Wertes  $\mu = 0,25$  stimmen die von Kirchhoff mitgeteilten<sup>1)</sup> Messungen Strehlkes an sechs Glasplatten überein. Wird auch jetzt die langsamste Schwingung *k* = 0, *n* = 2 gleich eins gesetzt, so erhielt Strehlke für *k* = 1, *n* = 0 Werte zwischen 1,607 und 1,613, im Mittel 1,6103; für *k* = 0, *n* = 3 Werte zwischen 2,308 und 2,313, im Mittel 2,3115; für *k* = 1, *n* = 1 Werte zwischen 3,694 und 3,700, im Mittel 3,698. Wie man sieht, weichen die gefundenen Werte von den theoretischen, 1,613 — 2,312 — 3,703 nur wenig ab, so daß für dieses Glas der Wert von  $\mu$  jedenfalls sehr nahe gleich 0,25. Daß auch die von Strehlke gefundenen Werte alle etwas kleiner sind wie die theoretischen, deutet, wie es auch Voigt gefunden hat, darauf hin, daß  $\mu$  für Glas noch etwas kleiner ist.

Die Schwingungen nicht kreisförmiger Platten lassen sich bis jetzt nur experimentell bestimmen; die Teilungen quadratischer Platten und damit die auf denselben entstehenden Knotenlinien sind ebenso mannigfaltig als diejenigen auf kreisförmigen Platten. Man kann auch dort zwei Systeme von Knotenlinien unterscheiden, in dem einen sind die Hauptlinien parallel

1) Kirchhoff, Berl. Monatsber. Jahrg. 1877. p. 259.

an Seiten des Quadrates, in dem andern parallel den Diagonalen und schließlich können beide Liniensysteme zugleich auftreten.

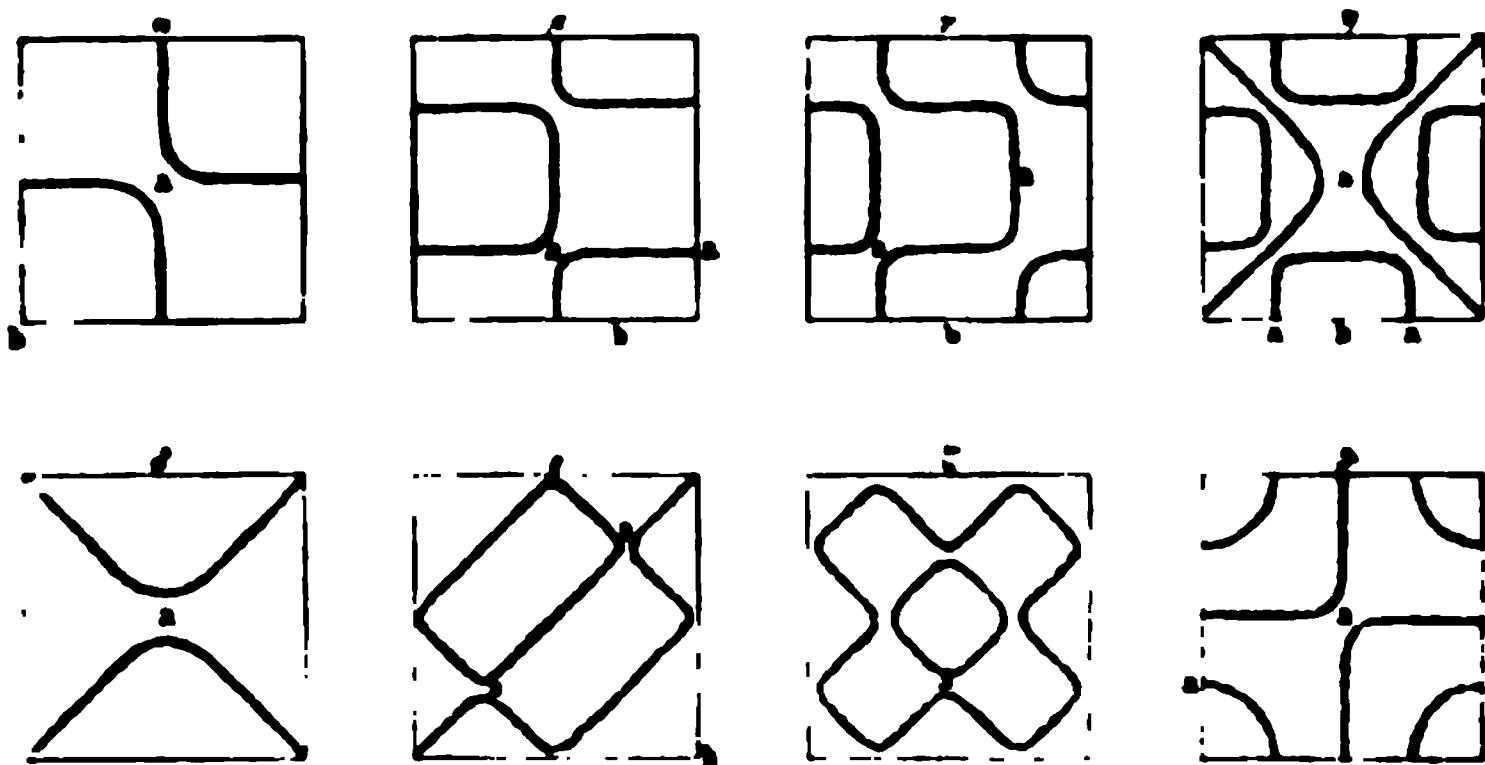
So erhält man Fig. 261 $\alpha$ , wenn man die Platte in der Mitte unterstützt und an einer Ecke z. B. bei  $b$  anstreicht, Fig. 261 $\beta$ , wenn man an  $a$  beiden Punkten  $a$  die Platte unterstützt und bei  $b$  anstreicht. Ebenso in allen übrigen Figuren sind die zu unterstützenden Punkte mit  $a$ , und die, an denen zu streichen ist, mit  $b$  bezeichnet.

Diese Figuren sind nach der Angabe von Strehlke<sup>1)</sup> gezeichnet, der hingewiesen hat:

1) Die Knotenlinien, welche bei quadratischen Platten die Klangfigur zusammensetzen, sind stets krumme Linien; so werden z. B. die Figuren  $\alpha$  und  $\delta$  durch zwei hyperbolische Äste gebildet.

2) Die Linien durchschneiden sich nie. Das scheinbare Durchschneiden den meisten Fällen rührt daher, daß man zu viel Sand auf die Scheibe gebracht hat und nun in der Nähe der ruhenden Linien die Schwingungen schwach werden, als daß der Sand fortgeworfen werden kann.

Fig. 261.



Die Schwingungszahlen dieser Platten werden wir später besprechen. In ähnlicher Weise, wie die ebenen Platten, schwingen auch Glocken, welche im Grunde nichts weiter sind als gekrümmte Platten. Bei den langsamsten Schwingungen teilen sich die Glocken in vier Teile, die ruhenden Linien liegen um einen Bogen von  $90^\circ$  voneinander entfernt und durchstoßen die Glocke ihrer ganzen Höhe nach. Man kann diese Teilung sehr leicht sichtbar machen dadurch, daß man die Glocke bis etwas über ihre alte Höhe mit Wasser füllt. An den Stellen der stärksten Schwingung wird das Wasser stark zurückgestoßen und in wellenförmige Bewegung versetzt, während es an den  $45^\circ$  davon entfernten Stellen der Knoten in Ruhe bleibt. Häufig werden selbst Tröpfchen von der Stelle der stärksten Schwingung auf die Oberfläche der Flüssigkeit geworfen, welche sich eine Zeit lang halten und in regelmäßigen Figuren angesammelt werden können.

<sup>1)</sup> Strehlke, Poggend. Ann. 4. 1825. Doves Repertorium. 3. 1839. Poggend. m. 27. p. 537. 1838; 95. p. 577. 1855.

Eine eigentümliche Art von Figuren hat Savart<sup>1)</sup> auf schwingenden Platten beobachtet, wenn man dieselben anstatt mit staubfreiem Sand mit staubigem Sande oder mit Sand und Lycopodium (Bärlappsamen) bestreut.

Beim Bestreuen mit Lycopodium zeigen sich nämlich, wenn man die Mitte der Seiten unterstützt und eine Ecke anstreicht, außer den eigentlich ruhenden Linien in der Nähe der vier Ecken wirbelnde Wolken von ovaler Form (Fig. 262), jedoch immer so, daß der zugespitzte Teil der Basis der Wolke nach der Ecke zu gerichtet ist. Wenn die schwingende Bewegung der Scheibe schwächer wird, so bleibt in jeder Ecke eine Gruppe halbkugelförmiger Erhöhungen zurück. Fig. 263 erscheint, wenn man die Ecken festhält und in der Mitte der Seite des Quadrates streicht, die Lycopodiumansammlung findet in der Mitte statt, jedoch ist zu bemerken, daß durch diese Wolken noch Kurven von geringer Breite bis zu den Ecken gehen. Diese Kurven sind nur in den Momenten der stärksten Erschütterung sichtbar.

Savart sah in diesen Figuren einen Beweis für eine zweite Teilungsart der Platte. Nach ihm ist die Scheibe der Sitz vieler übereinander

Fig. 262.

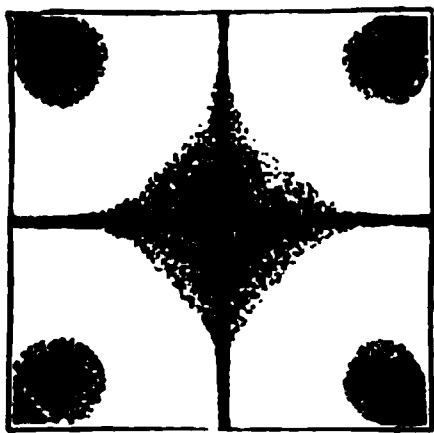
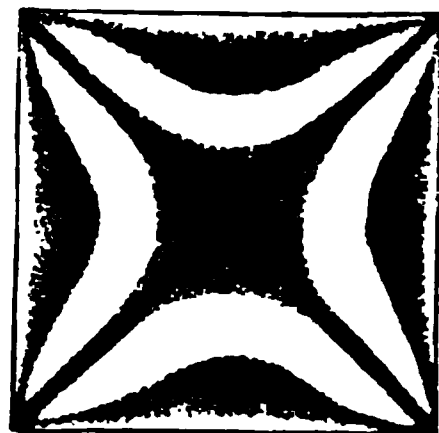


Fig. 263.



greifender Teilungsarten, von denen besonders zwei hervortreten; die erste ist die gewöhnliche, sich in den Figuren des staubfreien Sandes zeigende, die zweite tritt immer mit der ersten ein und bewirkt, daß in der Mitte der schwingenden Abteilungen gewisse Strecken horizontal bleiben, auf denen die Teilchen, die an den erschütterten Stellen nicht liegen bleiben können, beisammen bleiben und nur eine wirbelnde Bewegung zeigen.

Gegen diese Erklärung wandte Faraday<sup>2)</sup> ein, daß selbst bei einer Neigung der Platte gegen den Horizont von 6 bis 10°, die jedenfalls viel größer sei als die Neigung der schwingenden Teile, ein Aufsteigen des Lycopodium der Schwere entgegen zu den Vibrationsmittelpunkten stattfinden und der Staub solange sich dort halten kann, als die Platte kräftig erschüttert werde.

Faraday leitet diese Figuren von Luftströmen her, welche von den Knotenlinien her zu den Punkten der stärksten Erschütterung hinwehen. Damit stimmt es überein, daß nur bei Anwendung des leichten Staubes sich diese Figuren zeigen, indem der schwerere Sand von den Luftströmen nicht fortgerissen wird. Ebenso sah Faraday, wenn kleine Stückchen von Karten

1) Savart, Annales de chim. et de phys. 36. 1827.

2) Faraday, Philosophical Transact. 121. 1831. Poggend. Ann. 26. p 194. 1832.

Winkelform in der Nähe der Vibrationszentra so befestigt wurden, daß Schenkel dem Rande der quadratischen Scheibe (Fig. 263) parallel lag, dann der Staub in die Winkel hinein ging, wie wenn Ströme von den Enden der Karte aufgefangen wären. Feine Kieselerde auf ein Buch gelegt und der schwingenden Platte möglichst nahe gebracht, flog nach der Platte, als wenn ein Luftstrom von dem Pulver nach der Platte hinging.

Den entschiedensten Beweis für die Richtigkeit der Faradayschen Erklärung bildet aber das Verhalten der mit *Lycopodium* bestreuten Platte im luftverdünnten Raum.

Eine Glasscheibe wurde auf vier Korkfüßen über die Glocke der Luftpumpe gelegt und vermittelst eines an der Platte senkrecht zu ihrer Ebene befestigten Stabes, der durch eine Stopfbüchse in der Glocke herausgeleitet war und außerhalb der Glocke in longitudinale Erschütterungen versetzt wurde, zum Vibrieren gebracht. Da der Stab senkrecht zur Ebene der Platte ist, so wird die Platte durch longitudinale Schwingungen desselben in transversale Bewegung versetzt. Solange

Luft unter der Glocke die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft besaß, zeigte die Platte die Staubfiguren ganz in der gewöhnlichen Weise. War aber die Luft bis auf 5–3<sup>mm</sup> Quecksilberdruck verdünnt, so ging das Lycopodium quer über der Platte hin nach den ruhenden Knotenlinien, wie es Sand in freier Luft tut, und die Wolken an den Vibrationsmittelpunkten zeigten sich nicht.

Aus diesem Versuche geht auf das entschiedenste hervor, daß diese Staubfiguren nichts mit der Schwingung der Platte direkt zu tun haben, daß sie also nicht, wie Savart sie nannte, sekundäre Klangfiguren und Produkte einer zweiten Teilung der Scheibe sind, sondern daß zu ihrer Bildung das Vorhandensein der Luft wesentlich erfordert wird.

Die Luftströme, welche nach allem dem der Grund der Erscheinung sind, entstehen durch die mechanische Einwirkung der schwingenden Platte auf die umgebende Luft. So wie der schwingende Teil der Platte sich aufwärts bewegt, wird die darüber befindliche Luft aus der Stelle getrieben und zwar um so stärker, je näher dieselbe der Stelle der stärksten Schwingung ist, um so weniger, je näher sie den Knotenlinien ist. Wenn nun die Platte am Anfange der zweiten Hälfte der Oszillation in ihre Gleichgewichtslage zurückkehrt, so kann die über dem Orte der stärksten Schwingung befindliche Luft, welche eine von der Platte fort gerichtete Geschwindigkeit besitzt, nicht so schnell als die Platte zurückkehren. Es bildet sich daher ein leerer Raum, in den die Luft von den Knotenlinien her, wo sie in Ruhe ist, über die Platte hin eindringt. Dadurch muß notwendig ein Luftstrom entstehen, der von allen Seiten von den Knotenlinien gegen die Orte der stärksten Schwingung gerichtet ist und das *Lycopodium* mit sich an diese Orte hinführt. Natürlich muß diese Luft auf einem andern Wege zu den Knotenlinien zurückkehren. An den Orten der stärksten Oszillation stauen sich die Ströme und es entsteht daher dort ein schwacher aufsteigender Luftstrom, der sich daran erkennen läßt, daß sich das *Lycopodium* über diesen Stellen der stärksten Schwingung erhebt und etwas über der Platte her seitwärts geführt wird.<sup>1)</sup>

Gleiche Erscheinungen wie in der Luft sah Faraday, wenn er die

<sup>1)</sup> Man sehe auch Kundt, Poggend. Ann. 140. p. 400.

Platte mit einer Flüssigkeit bedeckte. Durch die entstehenden Ströme konnte selbst die Bildung der Klangfiguren ganz gehindert werden. Es zeigten sich dann nur die Anhäufungen des angewandten Pulvers, Messingfeilicht oder Sand, an den Stellen der stärksten Schwingung.

## § 146.

**Drehende Schwingungen von Stäben.** Außer den longitudinalen und transversalen Schwingungen haben wir früher schon noch eine dritte Art von Schwingungen kennen gelernt, die Torsionsschwingungen. Wir benutzten sie damals, um mit Hilfe der Pendelgesetze den Torsionskoeffizienten von Drähten zu bestimmen, indem wir die Drähte unten mit einer schweren Kugel versahen und diese in horizontale Schwingungen versetzten.

Wie wir damals sahen, gelten die Torsionsgesetze nach den Versuchen von Wertheim auch für dicke Stäbe, das heißt, bei einer denselben erteilten Torsion ist die elastische Kraft, welche den gedrehten Teil des Stabes in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, der Torsion einfach proportional. Denken wir uns deshalb einen Stab an seinem einen Ende durch Torsion in Schwingungen versetzt, so müssen sich diese Schwingungen in dem Stabe gerade so fortpflanzen, wie die longitudinalen und transversalen, und ist der Stab an einem Ende begrenzt, so muß an dieser Grenze eine Reflexion der Schwingungen eintreten, und durch die Interferenz der primären und der reflektierten Schwingungen müssen in dem Stabe stehende Wellen entstehen.



Um die Gesetze dieser Schwingungen zu entwickeln, denken wir uns wie § 53 den schwingenden Stab als aus lauter seiner Längsachse parallelen Fasern von unendlich kleinem Querschnitt zusammengesetzt. Wird der Stab tordiert, so gehen diese Fasern aus geraden Linien in Spiralen über, welche auf einem Zylinder liegen, dessen Radius gleich ist dem Abstand der Faser von der Achse des Stabes. Die in der Richtung der Stabachse übereinander liegenden Querschnitte der Faser haben dann gegeneinander eine Verschiebung erhalten, und die Kraft, welche diese Querschnitte in ihre relative Gleichgewichtslage zurückzubringen sucht, ist nach § 53 dem Verschiebungswinkel proportional. Stellt  $am o q$  (Fig. 264) eine Faser in tordiertem Zustande des Stabes vor, welche im Gleichgewichtszustande in Lage  $ab$  hat, so ist der Winkel  $o m s$  der Verschiebungswinkel des Querschnitts  $o$  der Faser gegen den Querschnitt  $m$ , der Winkel  $q$  derjenige des Querschnittes  $q$  gegen  $o$ . Die Kraft, mit welcher der Querschnitt  $o$  in seine Gleichgewichtslage in bezug auf  $m$ , also nach  $s$  hin getrieben wird, ist nach § 53

$$\frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot o m s \cdot d q,$$

wenn wir mit  $d q$  den Querschnitt der Faser bezeichnen. Ebenso ist

$$\frac{E}{1(1 + \mu)} \cdot q o v \cdot d q$$

Die Kraft, welche den Querschnitt  $o$  in bezug auf  $q$ , also von  $s$  fort in seine Gleichgewichtslage treibt. Die den Querschnitt  $dq$  nach  $s$ , also auch gegen seine Gleichgewichtslage nach  $p$  hin treibende Kraft ist dann

$$\frac{E}{2(1+\mu)} dq(oms - qov).$$

Nennen wir den Abstand der Faser von der Stabachse  $r$ , so erhält der Querschnitt des Stabes, zu welchem  $dq$  gehört, infolge dieser an  $dq$  greifenden Kraft das Drehungsmoment

$$\frac{E}{2(1+\mu)} r dq(oms - qov).$$

Das Drehungsmoment, welches der ganze Querschnitt des Stabes gegen seine Gleichgewichtslage erhält, ist dann gleich der Summe der für alle Flächenelemente  $dq$  dieses Querschnittes sich ergebenden Momente. Zur Bildung dieser Summe können wir zunächst das Flächenelement  $dq$  ersetzen durch einen Ring von der Breite  $dr$ , dessen Radius gleich  $r$ , gleich dem Abstände der betrachteten Faser von der Stabachse ist, denn für alle diesen Ring zusammensetzenden Elemente  $dq$  hat  $r$  und ebenso der Verdrehungswinkel genau denselben Wert. Die Fläche dieses Ringes ist  $2\pi r dr$ , und damit wird das Drehungsmoment von den an diesem Ringe greifenden Kräften

$$2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} r^3 dr(oms - qov).$$

Nun sei der Winkel, um welchen der um  $x$  von dem Ende des Stabes entfernte Querschnitt  $m$  gedreht ist, gleich  $\varphi$ , damit ist die Länge des Bogens  $r\varphi$ . Der Querschnitt  $o$ , der um  $dx$  weiter vom Stabende entfernt ist, sei dann um den Winkel  $\varphi'$  gedreht, so daß der Bogen  $op = r\varphi'$  ist. In dem rechtwinkligen Dreiecke  $osm$  ist dann  $os = r(\varphi' - \varphi)$ , somit

$$\tan oms = \frac{os}{sm} = \frac{r(\varphi' - \varphi)}{dx}.$$

Nennen wir den Winkel, um welchen der Querschnitt  $q$  gedreht ist,  $\varphi''$ , so wird ebenso

$$\tan qov = \frac{r(\varphi'' - \varphi)}{dx}.$$

Bei der Kleinheit der Winkel können wir die Bögen durch ihre Tangenten ersetzen und erhalten dann für das Drehungsmoment

$$2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} r^3 dr \left( \frac{\varphi' - \varphi}{dx} - \frac{\varphi'' - \varphi}{dx} \right).$$

Das den ganzen Querschnitt zurückdrehende Moment erhalten wir in der Summe der für alle einzelnen Ringe gebildeten Momente, somit, wenn der Radius des Stabes gleich  $\rho$  ist,

$$\int_0^\rho 2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\varphi' - \varphi}{dx} - \frac{\varphi'' - \varphi}{dx} \right) r^3 dr.$$



Poisson entwickelt worden<sup>1)</sup> und ebenso hat derselbe eine Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten entwickelt. Kirchhoff<sup>2)</sup> hat indes von der letztern nachgewiesen, daß sie nicht in allen Punkten richtig ist und an Stelle der Poissonschen eine neue Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten gegeben. Wir werden die Resultate der Kirchhoffschen Theorie nachher mit den Versuchen zusammenstellen.

Eine Membran, wie z. B. das Fell einer Pauke, kann entweder als Ganzes schwingen oder sich in schwingende Teile zerlegen, welche dann durch ruhende Linien, Knotenlinien, voneinander getrennt sind. Eine Platte kann niemals als Ganzes schwingen, sondern zerlegt sich immer in mehrere durch Knotenlinien getrennte schwingende Teile. Theorie und Versuche beweisen, daß die Teilung der Platten höchst mannigfaltig sein kann.

Um die Teilung der Platten zu erkennen, bedarf es nur der Kenntnis der Knotenlinien, da jeder von solchen umgebene Teil der Platte für sich schwingt, und um diese sichtbar zu machen, wandte Chladni das vorher schon erwähnte Mittel an. Er bestreute die zu untersuchenden Platten

mit trockenem staubfreiem Quarzsand, der dann von den schwingenden Teilen der Platte fortgeworfen wird und sich auf den ruhenden Stellen, den Knotenlinien, ansammelt. Es entstehen so auf der Platte regelmäßige Figuren, welche von Chladni Klangfiguren genannt sind.

Um die Platte in Schwingungen zu versetzen, befestigt man sie in ihrer Mitte oder an irgend einer andern Stelle mit der von Strehlke<sup>3)</sup> angegebenen Vorrichtung (Fig. 259), indem man sie mittels der Schraube zwischen den beiden



Fig. 259

mit Tuch überbundenen Köpfen *a* und *b* befestigt. Diese über diese Köpfe gebundenen Tuchstückchen müssen zuweilen erneuert werden, damit die Sandkörnchen, welche sich an dem Tuche anlegen, die Platte nicht rutschen. Die Platte wird mit einem mit Kolophonum versehenen Violinbogen am Rande gestrichen und zugleich an irgend einer andern Stelle mit dem Finger festgehalten. Der Bogen muß senkrecht am Rande der Scheibe herabgeführt und das Streichen solange fortgesetzt werden, bis keine einzelnen Sandkörnchen mehr auf der Scheibe liegen, sondern alle sich in die einzelnen Linien der Klangfigur begeben haben.

Um die Figuren möglichst scharf zu erhalten, darf man nur wenig Sand auf die Platte streuen, da sonst die einzelnen Linien zu breit und die Figuren dadurch ungenau werden.

Die Knotenlinien bezeichnen die Grenzen der Teile, welche gleichzeitig

1) Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. 8 p. 499. 1829.

2) Kirchhoff, Crelles Journal f. Mathematik 40. 1850. Man sehe auch Clebsch, Elastizitätslehre p. 264.

3) Strehlke, Poggend. Ann. 4 p. 205. 1825.



nach entgegengesetzten Richtungen schwingen; es geht daraus hervor, daß die Figur derselben die Platte im allgemeinen in eine gerade Anzahl von Teilen zerlegen muß, da die entgegengesetzten Schwingungen immer paarweise auftreten müssen.

Die Schwingungszahlen verschiedener Platten, wenn sie in bestimmten Abteilungen schwingen, lassen sich nur experimentell aus den durch die Schwingungen hervorgerufenen Tönen bestimmen. Aus den Versuchen hat sich folgendes Gesetz ergeben. Wenn zwei Platten verschiedener Größe und verschiedener Dicke dieselbe Klangfigur zeigen, also in gleicher Weise abgeteilt werden, so sind die Schwingungszahlen der beiden Platten den Dicken derselben direkt, dem Flächeninhalt derselben aber umgekehrt proportional, oder

$$\frac{N}{N'} = \frac{q' d}{q d'}.$$

Sind die Platten kreisförmig, so ist

$$q = r^2 \pi, \quad q' = r'^2 \pi,$$

demnach auch

$$\frac{N}{N'} = \frac{r'^2 d}{r^2 d'}.$$

Die Schwingungszahlen sind den Quadraten der Radien umgekehrt proportional. Dies Gesetz schließt das folgende ein. Die Schwingungszahlen von Platten, welche einander ähnlich sind, das heißt, bei denen die homologen Dimensionen alle in demselben Verhältnisse stehen, verhalten sich bei gleicher Teilung der Platten umgekehrt wie die homologen Dimensionen.

Ist nämlich bei kreisrunden Platten z. B. der Radius der einen Platte  $r$ , der der andern  $ar$ , und ebenso die Dicke der einen  $d$ , der andern  $ad$ , so ist nach dem Gesetze in der ersten Fassung

$$\frac{N}{N'} = \frac{a^2 r^2 d}{r^2 ad} = \frac{a}{1}$$

und wie man sieht, ist das der mathematische Ausdruck für die aus dem ersten Satze gezogene Folgerung.

Betrachten wir zunächst kreisrunde homogene Platten, man nimmt zu den Versuchen am besten solche von Glas oder Metall, so ergibt für diese die Theorie von Kirchhoff, daß in ihnen eine große Zahl verschiedener Teilungen möglich ist, die sich in drei Gruppen ordnen lassen. Entweder teilt sich die Platte in eine Reihe konzentrischer Zonen, oder in eine stets gerade Anzahl von gleich großen Sektoren, welche durch diametrale Knotenlinien voneinander getrennt sind, oder endlich beide Teilungsarten treten gleichzeitig auf.

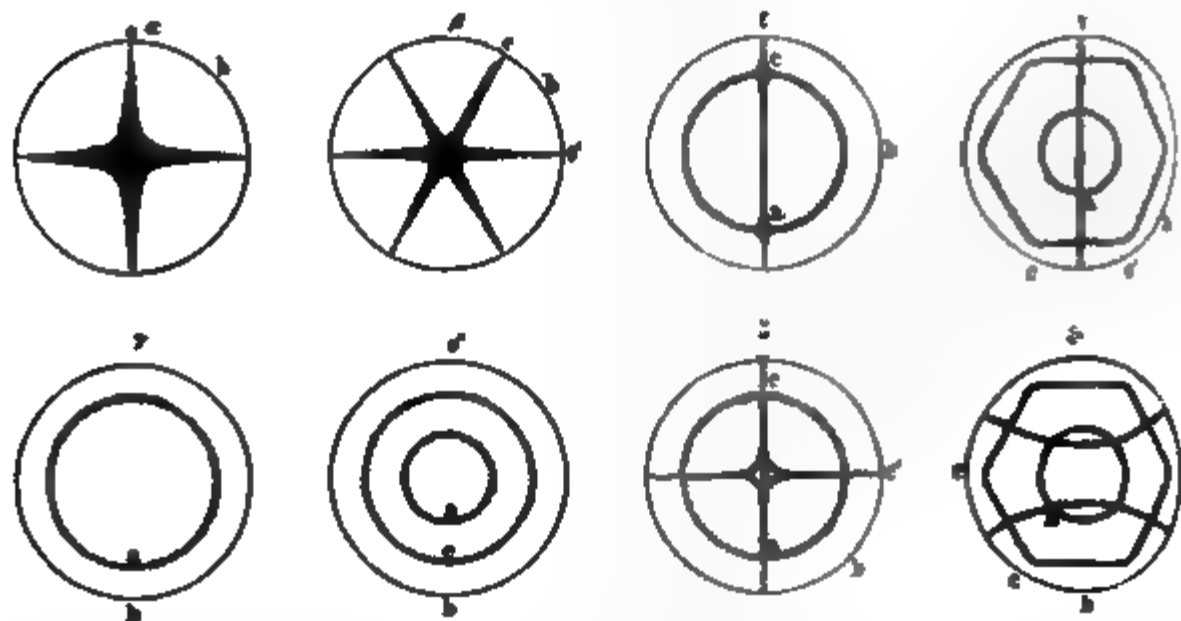
Alle diese Teilungsarten hat schon Chladni beobachtet; um sie herorzubringen, klemmt man eine kreisförmige Platte in der Mitte oder in einem andern Punkte ein und berührt sie außerdem an einem oder mehreren Punkten und streicht dann in einiger Entfernung von den Berührungspunkten. Fig. 260 zeigt eine Reihe solcher Figuren. Die Einklemmungspunkte sind in allen einzelnen Figuren mit  $a$  bezeichnet, der Punkt, an dem die Platte zu streichen ist, mit  $b$ , und die Berührungspunkte mit  $c$ . Klemmt man die Platte in der Mitte ein, so erhält man stets eine radiale

Figur (260 $\alpha$  und  $\beta$ ) je nach der Anzahl der berührten Punkte mit zwei oder drei Durchmessern; klemmt man die Platte exzentrisch ein und berührt keinen Punkt des Randes, so erhält man Kreise ohne Durchmesser (Fig. 260 $\gamma$  und  $\delta$ ).

Bei der theoretischen Behandlung der Frage gelangt man zur Bestimmung der Durchmesser der Knotenkreise zu einem Ausdruck, dessen numerischer Wert wesentlich von dem Werte des von uns mit  $\mu$  bezeichneten Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation abhängt.

Kirchhoff war zur Zeit, als er diese Untersuchung durchführte, noch nicht zu dem Resultate gelangt, daß der Koeffizient der Querkontraktion für jede Substanz besonders bestimmt werden müsse, er nahm noch an, daß der Koeffizient für alle festen Körper denselben Wert hätte, ließ es aber zweifelhaft, ob der Wert von  $\mu$  nach der Poissonschen Annahme gleich  $\frac{1}{2}$  oder nach derjenigen von Wertheim gleich  $\frac{1}{3}$  sei. Er berechnete

Fig. 260.



deshalb mit beiden Annahmen die Knotenkreise und die Schwingungszahlen kreisförmiger Platten und verglich dieselben mit den Messungen von Strehlke und Chladni.<sup>1)</sup> Für die Lage der Knotenkreise führen die Rechnungen mit den beiden Annahmen auf Zahlen, die sich nur innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler unterscheiden. So wird der Durchmesser des Knotenkreises Fig. 260 $\gamma$

für  $\mu = \frac{1}{2}$  gleich 0,68062, für  $\mu = \frac{1}{3}$  gleich 0,67941

des Scheibendurchmessers. Nach Messungen von Savart, an drei Scheiben ausgeführt, die Poisson in seiner oben erwähnten Abhandlung mitteilt, fand sich der Durchmesser

0,6819; 0,6798; 0,6812.

Strehlke beobachtete die Knotenkreise an vier Glasscheiben und zwei Messingscheiben; die Dicke der Glasscheiben war zwischen 1,5 und 2,5<sup>mm</sup>.

1) Die Zahlen finden sich in Kirchhoffs Abhandlung, Poggend. Ann. 81. p. 258. 1850, welche die experimentellen Resultate seiner Abhandlung in Crells Journal wiedergibt. Man sehe Strehlke, Poggend. Ann. 95. p. 577. 1855.

Durchmesser zwischen 16 und 19<sup>cm</sup>. Die Messingscheiben waren 1,5<sup>mm</sup> dick und hatten die eine den Durchmesser gleich 13,5, die andere 16,2<sup>cm</sup>.

Für die vier Glasscheiben fand Strehlke den Durchmesser

$$0,6792; 0,6782; 0,6780; 0,6770,$$

die Messingscheiben

$$0,6781; 0,6783.$$

Für die Knotenkreise Fig. 260δ findet Kirchhoff mit  $\mu = \frac{1}{2}$

$$0,39151; 0,84200.$$

Strehlke erhielt an zwei Glasscheiben

$$0,3915; 0,8414; \dots 0,3911; 0,8411.$$

Die Figuren 260ε und 260ζ zeigen die beiden Teilungsarten gleichzeitig. Für den Durchmesser des Knotenkreises, Fig. 260ε, gibt die Theorie mit  $\mu = \frac{1}{2}$  den Wert 0,78136, Strehlke fand auf den beiden zuletzt erhaltenen Glasscheiben

$$0,7800; 0,7792.$$

Für Fig. 260ζ soll der Knotenkreis gleich 0,82194 sein, Strehlke fand 0,8210 und 0,8205.

Wie man sieht, stimmen die Messungen Strehlkes mit den Messungen Kirchhoffs ganz vortrefflich überein.

Die Figuren 260η und 260θ zeigen häufig vorkommende Verzerrungen, welche an nicht ganz homogenen Platten auftreten, wenn man sie bei *a* anklammert und bei *b* anstreicht. Außer der gezeichneten können noch viele Figuren hervorgebracht werden, ('hladni<sup>1)</sup>') gibt in seiner ersten Mitteilung 80 an, dieselben sind aber alle aus Kreisen und Durchmessern, aus denen letztere je zwei immer denselben Winkel einschließen, zusammengesetzt, oder Verzerrungen solcher Figuren.

Aus der Theorie sowohl wie aus den Beobachtungen ergibt sich, daß die Anzahl der Schwingungen mit der Anzahl der Teile, in welche sich die Platte teilt, in einem sehr komplizierten Verhältnisse zunimmt. Die langsamsten Schwingungen vollführt die Platte bei der Teilung durch zwei Durchmesser ohne Knotenkreis. Ist *r* der Radius der Platte, *d* die halbe Dicke, *E* der Elastizitätskoeffizient und *s* das spezifische Gewicht der Platte, wird nach Kirchhoff die Schwingungszahl mit der Annahme

$$\mu = \frac{1}{2} \quad N = 1,04604 \frac{d}{r^2} \sqrt{\frac{E}{s}}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \quad N = 1,02357 \frac{d}{r^2} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

daß *E* in absolutem Maße gegeben sein muß.

Man sieht, daß die Schwingungszahlen erheblich stärker durch den Wert von  $\mu$  beeinflußt werden als die Werte für die Durchmesser der Knotenkreise.

1) ('hladni', Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787. Man sehe auch Secart, Ann. de chim. et de phys. 36. 1827.

Die übrigen Teilungen geben größere Schwingungszahlen, auf die Teilung in zwei Durchmessern folgt die Teilung der Scheibe durch einen Knotenkreis, Fig. 260γ, dann folgen die Teilungen Fig. 260β, 260ε, 260ζ, 260δ. Folgende kleine Tabelle enthält die Schwingungszahlen, jene der langsamsten gleich 1 gesetzt, für die angegebenen und noch einige andere Teilungen nach der Theorie von Kirchhoff, mit  $\mu = \frac{1}{4}$  berechnet, und nach den Versuchen von Chladni zusammengestellt. Die erste mit *K* überschriebene Spalte enthält die Anzahl der Knotenkreise, zu welcher die in den übrigen Spalten angegebenen Schwingungszahlen gehören, wenn die Knotenkreise von der über jeder Spalte angegebenen Anzahl *n* von Durchmessern durchschnitten sind.

<i>K</i>	<i>n</i> = 0		<i>n</i> = 1		<i>n</i> = 2		<i>n</i> = 3		<i>n</i> = 4	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
0					1,0	1,000	2,2	2,312	4,0	4,048
1	1,6	1,613	3,9	3,703	6,0	6,408	9,5	9,644	12,7	13,393
2	6,4 +	6,956	10,1	10,838	14,4	15,305	19,0	20,825	—	—
3	15,1	15,903								

Die Schwingungszahlen wurden in später zu besprechender Weise aus den Tönen bestimmt; das Zeichen + gibt an, daß der betreffende Ton einer etwas größern Schwingungszahl entsprach. Die Zahlen stimmen allerdings nicht besonders überein, noch mehr weichen die mit  $\mu = \frac{1}{4}$  berechneten Zahlen von den beobachteten ab, da die beobachteten Zahlen alle kleiner sind als die berechneten und die mit  $\mu = \frac{1}{4}$  berechneten Zahlen noch größer sind; es ist indes dabei zu beachten, daß eine scharfe Bestimmung der Schwingungszahlen aus den Tönen mit großen Schwierigkeiten verknüpft ist.

Sehr viel besser mit der Theorie unter Voraussetzung des Wertes  $\mu = 0,25$  stimmen die von Kirchhoff mitgeteilten<sup>1)</sup> Messungen Strehlkes an sechs Glasplatten überein. Wird auch jetzt die langsamste Schwingung  $k = 0$ ,  $n = 2$  gleich eins gesetzt, so erhielt Strehlke für  $k = 1$ ,  $n = 0$  Werte zwischen 1,607 und 1,613, im Mittel 1,6103; für  $k = 0$ ,  $n = 3$  Werte zwischen 2,308 und 2,313, im Mittel 2,3115; für  $k = 1$ ,  $n = 1$  Werte zwischen 3,694 und 3,700, im Mittel 3,698. Wie man sieht, weichen die gefundenen Werte von den theoretischen, 1,613 — 2,312 — 3,703 nur wenig ab, so daß für dieses Glas der Wert von  $\mu$  jedenfalls sehr nahe gleich 0,25. Daß auch die von Strehlke gefundenen Werte alle etwas kleiner sind wie die theoretischen, deutet, wie es auch Voigt gefunden hat, darauf hin, daß  $\mu$  für Glas noch etwas kleiner ist.

Die Schwingungen nicht kreisförmiger Platten lassen sich bis jetzt nur experimentell bestimmen; die Teilungen quadratischer Platten und damit die auf denselben entstehenden Knotenlinien sind ebenso mannigfaltig als diejenigen auf kreisförmigen Platten. Man kann auch dort zwei Systeme von Knotenlinien unterscheiden, in dem einen sind die Hauptlinien parallel

1) Kirchhoff, Berl. Monatsber. Jahrg. 1877. p. 259.

den Seiten des Quadrates, in dem andern parallel den Diagonalen und schließlich können beide Liniensysteme zugleich auftreten.

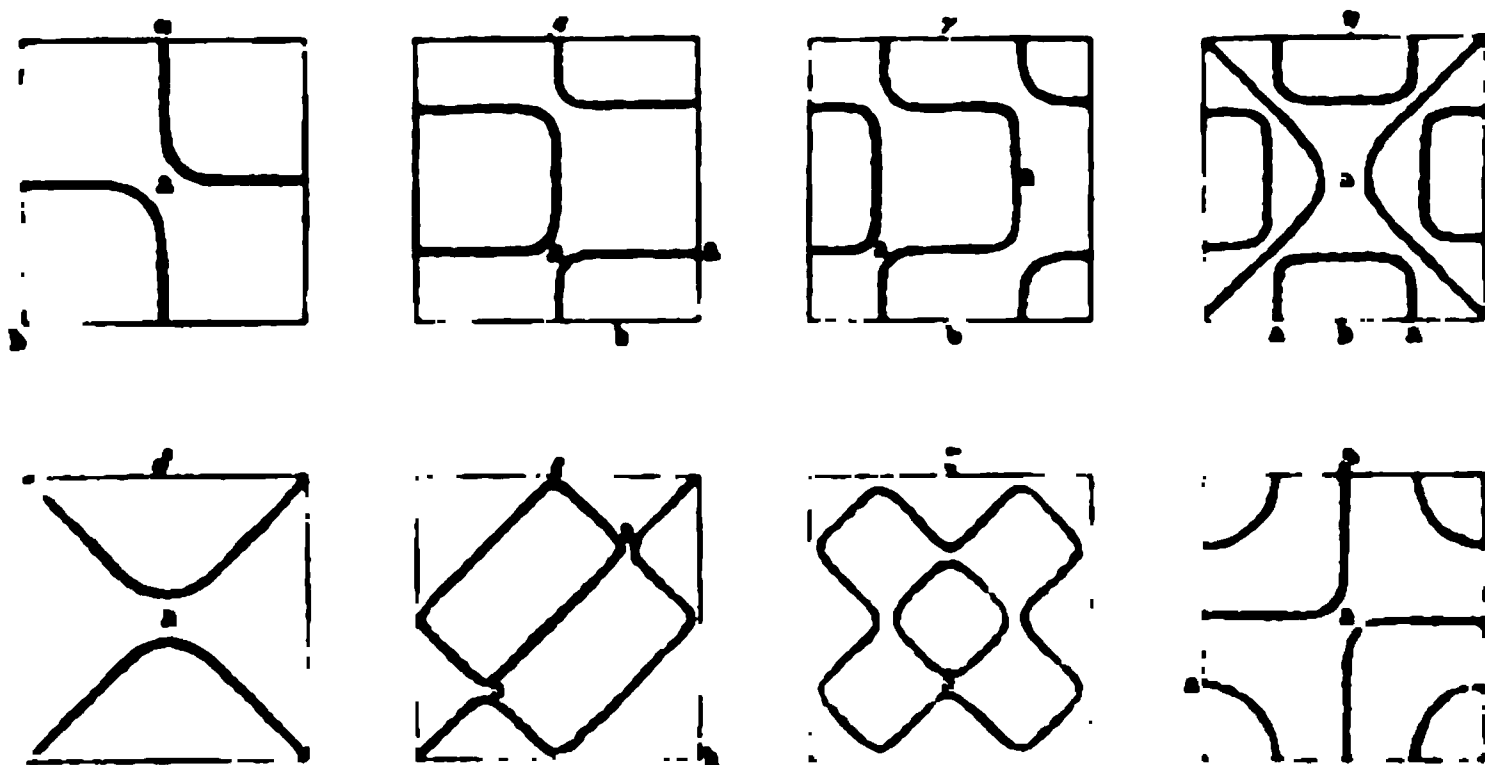
So erhält man Fig. 261 $\alpha$ , wenn man die Platte in der Mitte unterstützt und an einer Ecke z. B. bei  $b$  anstreicht, Fig. 261 $\beta$ , wenn man an den beiden Punkten  $a$  die Platte unterstützt und bei  $b$  anstreicht. Ebenso bei allen übrigen Figuren sind die zu unterstützenden Punkte mit  $a$ , und jene, an denen zu streichen ist, mit  $b$  bezeichnet.

Diese Figuren sind nach der Angabe von Strehlke<sup>1)</sup> gezeichnet, der nachgewiesen hat:

1) Die Knotenlinien, welche bei quadratischen Platten die Klangfigur zusammensetzen, sind stets krumme Linien; so werden z. B. die Figuren  $\alpha$  und  $\delta$  durch zwei hyperbolische Äste gebildet.

2) Die Linien durchschneiden sich nie. Das scheinbare Durchschneiden in den meisten Fällen rührt daher, daß man zu viel Sand auf die Scheibe gebracht hat und nun in der Nähe der ruhenden Linien die Schwingungen zu schwach werden, als daß der Sand fortgeworfen werden kann.

Fig. 261



Die Schwingungszahlen dieser Platten werden wir später besprechen.

In ähnlicher Weise, wie die ebenen Platten, schwingen auch Glocken, welche im Grunde nichts weiter sind als gekrümmte Platten. Bei den langsamsten Schwingungen teilen sich die Glocken in vier Teile, die ruhenden Linien liegen um einen Bogen von  $90^\circ$  voneinander entfernt und durchsetzen die Glocke ihrer ganzen Höhe nach. Man kann diese Teilung sehr leicht sichtbar machen dadurch, daß man die Glocke bis etwas über ihre halbe Höhe mit Wasser füllt. An den Stellen der stärksten Schwingung wird das Wasser stark zurückgestoßen und in wellenförmige Bewegung gesetzt, während es an den  $45^\circ$  davon entfernten Stellen der Knoten in Ruhe bleibt. Häufig werden selbst Tröpfchen von der Stelle der stärksten Schwingung auf die Oberfläche der Flüssigkeit geworfen, welche sich eine Zeit lang halten und in regelmäßigen Figuren angesammelt werden können.

1) Strehlke, Poggend. Ann. 4. 1825. Doves Repertorium 3. 1839. Poggend. Ann. 27. p. 537. 1838; 95. p. 577. 1865.

Eine eigentümliche Art von Figuren hat Savart<sup>1)</sup> auf schwingenden Platten beobachtet, wenn man dieselben anstatt mit staubfreiem Sand mit staubigem Sande oder mit Sand und Lycopodium (Bärlappsamen) bestreut.

Beim Bestreuen mit Lycopodium zeigen sich nämlich, wenn man die Mitte der Seiten unterstützt und eine Ecke anstreicht, außer den eigentlich ruhenden Linien in der Nähe der vier Ecken wirbelnde Wolken von ovaler Form (Fig. 262), jedoch immer so, daß der zugespitzte Teil der Basis der Wolke nach der Ecke zu gerichtet ist. Wenn die schwingende Bewegung der Scheibe schwächer wird, so bleibt in jeder Ecke eine Gruppe halbkugelförmiger Erhöhungen zurück. Fig. 263 erscheint, wenn man die Ecken festhält und in der Mitte der Seite des Quadrates streicht, die Lycopodiumansammlung findet in der Mitte statt, jedoch ist zu bemerken, daß durch diese Wolken noch Kurven von geringer Breite bis zu den Ecken gehen. Diese Kurven sind nur in den Momenten der stärksten Erschütterung sichtbar.

Savart sah in diesen Figuren einen Beweis für eine zweite Teilungsart der Platte. Nach ihm ist die Scheibe der Sitz vieler übereinander

Fig. 262.

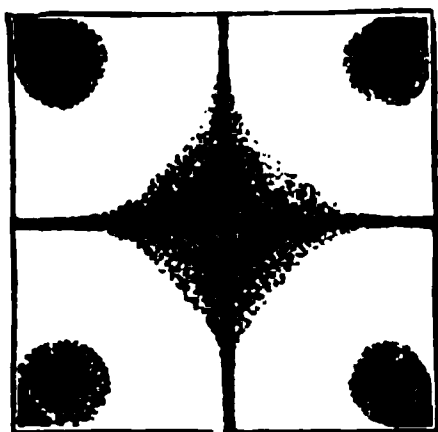
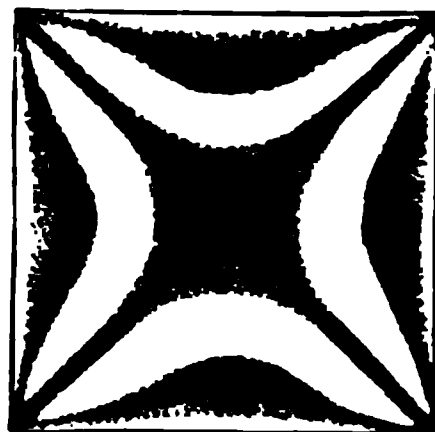


Fig. 263.



greifender Teilungsarten, von denen besonders zwei hervortreten; die erste ist die gewöhnliche, sich in den Figuren des staubfreien Sandes zeigende, die zweite tritt immer mit der ersten ein und bewirkt, daß in der Mitte der schwingenden Abteilungen gewisse Strecken horizontal bleiben, auf denen die Teilchen, die an den erschütterten Stellen nicht liegen bleiben können, beisammen bleiben und nur eine wirbelnde Bewegung zeigen.

Gegen diese Erklärung wandte Faraday<sup>2)</sup> ein, daß selbst bei einer Neigung der Platte gegen den Horizont von 6 bis 10°, die jedenfalls viel größer sei als die Neigung der schwingenden Teile, ein Aufsteigen des Lycopodium der Schwere entgegen zu den Vibrationsmittelpunkten stattfinde und der Staub solange sich dort halten kann, als die Platte kräftig erschüttert werde.

Faraday leitet diese Figuren von Luftströmen her, welche von den Knotenlinien her zu den Punkten der stärksten Erschütterung hinwehen. Damit stimmt es überein, daß nur bei Anwendung des leichten Staubes sich diese Figuren zeigen, indem der schwerere Sand von den Luftströmen nicht fortgerissen wird. Ebenso sah Faraday, wenn kleine Stückchen von Karten

1) Savart, Annales de chim. et de phys. 36. 1827.

2) Faraday, Philosophical Transact. 121. 1831. Poggend. Ann. 26. p 194. 1832.

in Winkelform in der Nähe der Vibrationszentra so befestigt wurden, daß ein Schenkel dem Rande der quadratischen Scheibe (Fig. 263) parallel lag, ließ dann der Staub in die Winkel hinein ging, wie wenn Ströme von den Wänden der Kiste aufgefangen wären. Feine Kieselerde auf ein Buch gestreut und der schwingenden Platte möglichst nahe gebracht, flog nach der Platte, als wenn ein Luftstrom von dem Pulver nach der Platte hinging.

Den entschiedensten Beweis für die Richtigkeit der Faradayschen Erklärung bildet aber das Verhalten der mit *Lycopodium* bestreuten Platte im luftverdünnten Raum. Eine Glasscheibe wurde auf vier Korkfüßen unter die Glocke der Luftpumpe gelegt und mittelst eines an der Platte senkrecht zu ihrer Ebene befestigten Stabes, der durch eine Stopfbüchse aus der Glocke herausgeleitet war und außerhalb der Glocke in longitudinale Erschütterungen versetzt wurde, zum Vibrieren gebracht. Da der Stab senkrecht zur Ebene der Platte ist, so wird die Platte durch longitudinale Schwingungen desselben in transversale Bewegung versetzt. Solange die Luft unter der Glocke die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft besaß, zeigte die Platte die Staubfiguren ganz in der gewöhnlichen Weise. War aber die Luft bis auf 5–3<sup>cm</sup> Quecksilberdruck verdünnt, so ging das Pulver quer über der Platte hin nach den ruhenden Knotenlinien, wie es der Sand in freier Luft tut, und die Wolken an den Vibrationsmittelpunkten zeigten sich nicht.

Aus diesem Versuche geht auf das entschiedenste hervor, daß diese Staubfiguren nichts mit der Schwingung der Platte direkt zu tun haben, daß sie also nicht, wie Savart sie nannte, sekundäre Klangfiguren und Folge einer zweiten Teilung der Scheibe sind, sondern daß zu ihrer Bildung das Vorhandensein der Luft wesentlich erfordert wird.

Die Luftströme, welche nach allem dem der Grund der Erscheinung sind, entstehen durch die mechanische Einwirkung der schwingenden Platte auf die umgebende Luft. So wie der schwingende Teil der Platte sich aufwärts bewegt, wird die darüber befindliche Luft aus der Stelle getrieben und zwar um so stärker, je näher dieselbe der Stelle der stärksten Schwingung ist, um so weniger, je näher sie den Knotenlinien ist. Wenn nun die Platte beim Anfange der zweiten Hälfte der Oszillation in ihre Gleichgewichtslage zurückkehrt, so kann die über dem Orte der stärksten Schwingung befindliche Luft, welche eine von der Platte fort gerichtete Geschwindigkeit besitzt, nicht so schnell als die Platte zurückkehren. Es bildet sich daher ein leerer Raum, in den die Luft von den Knotenlinien her, wo sie in Ruhe ist, über die Platte hin eindringt. Dadurch muß notwendig ein Luftstrom entstehen, der von allen Seiten von den Knotenlinien gegen die Orte der stärksten Schwingung gerichtet ist und das *Lycopodium* mit sich an diese Stelle hinführt. Natürlich muß diese Luft auf einem andern Wege zu den Knotenlinien zurückkehren. An den Orten der stärksten Oszillation stauen sich die Ströme und es entsteht daher dort ein schwacher aufsteigender Luftstrom, der sich daran erkennen läßt, daß sich das *Lycopodium* über den Stellen der stärksten Schwingung erhebt und etwas über der Platte wieder seitwärts geführt wird.<sup>1)</sup>

Gleiche Erscheinungen wie in der Luft sah Faraday, wenn er die

1 Man sehe auch Kundt, Poggend. Ann. 140. p. 297. 1870



Platte mit einer Flüssigkeit bedeckta Durch die entstehenden Ströme konnte selbst die Bildung der Klangfiguren ganz gehindert werden. Es zeigten sich dann nur die Anhäufungen des angewandten Pulvers, Messingfeilicht oder Sand, an den Stellen der stärksten Schwingung.

## § 146.

**Drehende Schwingungen von Stäben.** Außer den longitudinalen und transversalen Schwingungen haben wir früher schon noch eine dritte Art von Schwingungen kennen gelernt, die Torsionsschwingungen. Wir benutzten sie damals, um mit Hilfe der Pendelgesetze den Torsionskoeffizienten von Drähten zu bestimmen, indem wir die Drähte unten mit einer schweren Kugel versehen und diese in horizontale Schwingungen versetzten.

Wie wir damals sahen, gelten die Torsionsgesetze nach den Versuchen von Wertheim auch für dicke Stäbe, das heißt, bei einer denselben erteilten Torsion ist die elastische Kraft, welche den gedrehten Teil des Stabes in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, der Torsion einfach proportional. Denken wir uns deshalb einen Stab an seinem einen Ende durch Torsion in Schwingungen versetzt, so müssen sich diese Schwingungen in dem Stabe gerade so fortpflanzen, wie die longitudinalen und transversalen, und ist der Stab an einem Ende begrenzt, so muß an dieser Grenze eine Reflexion der Schwingungen eintreten, und durch die Interferenz der primären und der reflektierten Schwingungen müssen in dem Stabe stehende Wellen entstehen.

Fig. 264



Um die Gesetze dieser Schwingungen zu entwickeln, denken wir uns wie § 53 den schwingenden Stab als aus lauter seiner Längsachse parallelen Fasern von unendlich kleinem Querschnitt zusammengesetzt. Wird der Stab tordiert, so gehen diese Fasern aus geraden Linien in Spiralen über, welche auf einem Zylinder liegen, dessen Radius gleich ist dem Abstand der Faser von der Achse des Stabes. Die in der Richtung der Stabachse übereinander liegenden Querschnitte der Faser haben dann gegeneinander eine Verschiebung erhalten, und die Kraft, welche diese Querschnitte in ihre relative Gleichgewichtslage zurückzubringen sucht, ist nach § 53 dem Verschiebungswinkel proportional. Stellt  $am\alpha q$  (Fig. 264) eine Faser in tordiertem Zustande des Stabes vor, welche im Gleichgewichtszustande die Lage  $ab$  hat, so ist der Winkel  $oms$  der Verschiebungswinkel des Querschnitts  $o$  der Faser gegen den Querschnitt  $m$ , der Winkel  $q$  derjenige des Querschnittes  $q$  gegen  $o$ . Die Kraft, mit welcher der Querschnitt  $o$  in seine Gleichgewichtslage in bezug auf  $m$ , also nach  $s$  hin getrieben wird, ist nach § 53

$$\frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot oms \cdot dq,$$

wenn wir mit  $dq$  den Querschnitt der Faser bezeichnen. Ebenso ist

$$\frac{E}{1(1 + \mu)} \cdot qov \cdot dq$$

die Kraft, welche den Querschnitt  $o$  in bezug auf  $q$ , also von  $s$  fort in eine Gleichgewichtslage treibt. Die den Querschnitt  $dq$  nach  $s$ , also auch gegen seine Gleichgewichtslage nach  $p$  hin treibende Kraft ist dann

$$\frac{E}{2(1+\mu)} dq(oms - qov).$$

Nennen wir den Abstand der Faser von der Stabachse  $r$ , so erhält der Querschnitt des Stabes, zu welchem  $dq$  gehört, infolge dieser an  $dq$  angreifenden Kraft das Drehungsmoment

$$\frac{E}{2(1+\mu)} r dq(oms - qov).$$

Das Drehungsmoment, welches der ganze Querschnitt des Stabes gegen eine Gleichgewichtslage erhält, ist dann gleich der Summe der für alle Flächenelemente  $dq$  dieses Querschnittes sich ergebenden Momente. Zur Bildung dieser Summe können wir zunächst das Flächenelement  $dq$  ersetzen durch einen Ring von der Breite  $dr$ , dessen Radius gleich  $r$ , gleich dem Abstände der betrachteten Faser von der Stabachse ist, denn für alle diesen Ring zusammensetzenden Elemente  $dq$  hat  $r$  und ebenso der Verschiebungswinkel genau denselben Wert. Die Fläche dieses Ringes ist  $2\pi r dr$ , und damit wird das Drehungsmoment von den an diesem Ringe angreifenden Kräften

$$2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} r^3 dr(oms - qov).$$

Nun sei der Winkel, um welchen der um  $x$  von dem Ende des Stabes entfernte Querschnitt  $m$  gedreht ist, gleich  $\varphi$ , damit ist die Länge des Bogens  $r\varphi$ . Der Querschnitt  $o$ , der um  $dx$  weiter vom Stabende entfernt ist, sei dann um den Winkel  $\varphi'$  gedreht, so daß der Bogen  $op = r\varphi'$  ist. In dem rechtwinkligen Dreiecke  $osm$  ist dann  $os = r(\varphi' - \varphi)$ , somit

$$\text{tang } oms = \frac{os}{sm} = \frac{r(\varphi' - \varphi)}{dx}.$$

Nennen wir den Winkel, um welchen der Querschnitt  $q$  gedreht ist,  $\varphi''$ , so wird ebenso

$$\text{tang } qov = \frac{r(\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Bei der Kleinheit der Winkel können wir die Bögen durch ihre Tangenten ersetzen und erhalten dann für das Drehungsmoment

$$2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} r^3 dr \frac{(\varphi' - \varphi)}{dx} - \frac{(\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Das den ganzen Querschnitt zurückdrehende Moment erhalten wir in der Summe der für alle einzelnen Ringe gebildeten Momente, somit, wenn der Radius des Stabes gleich  $\rho$  ist,

$$\int_0^\rho 2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{(\varphi' - \varphi)}{dx} - \frac{(\varphi'' - \varphi')}{dx} \cdot r^3 dr.$$

Da in dieser Summe nur  $r$  veränderlich ist, so wird dieselbe

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \frac{\rho^4 \pi}{2} \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Um die dem Querschnitt gegen die Gleichgewichtslage hin erte Beschleunigung zu erhalten, müssen wir das Drehungsmoment durch das Trägheitsmoment desselben dividieren. Nennen wir die Dichtigkeit des Stabes also die Masse der Volumeinheit  $d$ , und die Dicke des betrachteten Querschnittes, die wir gleich dem Abstände zweier Querschnitte setzen  $dx$ , so wird nach § 19 das Trägheitsmoment

$$d \frac{\rho^4 \pi}{2} dx,$$

und damit die Beschleunigung

$$\frac{E}{2(1+\mu)d} \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx^2}.$$

Der Zähler des zweiten Bruches in diesem Ausdruck ist nichts anderes als das zweite Differential  $d^2\varphi$ ; die Gleichung, welche der Bewegung des Stabes zugrunde liegt, wird demnach

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{E}{2(1+\mu)d} \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

dieselbe, hier auf die Winkelbeschleunigung sich beziehende Gleichung, der wir § 128 gelangten. Wird also an irgend einer Stelle ein begrenzter Stab durch Torsion eine schwingende Bewegung erzeugt, deren Amplitude  $2\alpha$ , so pflanzt sich dieselbe durch den Stab nach dem bekannten Gesetze fort, so daß im Abstände  $x$  von der Erregungsstelle zur Zeit  $t$  die Bewegung gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = \alpha \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right),$$

worin  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung

$$c = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)d}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

somit die Wellenlänge

$$\lambda = cT = T \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

und die Schwingungsdauer

$$T = \lambda \sqrt{2(1+\mu)} \sqrt{\frac{d}{E}}$$

ist.

Alle diese Ausdrücke unterscheiden sich von den für die longitudinalen Schwingungen nur durch den Faktor  $\sqrt{2(1+\mu)}$ , also nur so weit, als an Stelle des Elastizitätskoeffizienten der Torsionskoeffizient tritt.

Daraus folgt, daß die Gesetze der drehenden Schwingungen von Stäben vollständig mit denen der longitudinalen Schwingungen (§ 140) zusammenfallen, so daß es überflüssig ist, dieselben im einzelnen zu entwickeln; es genügt eine kurze Andeutung.

Ein an seinem einen Ende fester Stab kann nur solche stehende Wellen halten, für welche die Länge des Stabes eine ungerade Anzahl von einviertel Wellenlängen beträgt; es folgt somit für die Schwingungsdauer und Schwingungsanzahl

$$T_n = \frac{4}{(2n+1)c} \quad N_n = (2n+1) \frac{c}{4l},$$

• langsamsten sind jene, für welche  $n = 0$ , somit die Schwingungsdauer

$$T = \frac{4l}{c}$$

• Dieselbe ist somit gleich der vierfachen Stablänge, dividiert durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung.

Ist der Stab an beiden Enden fest oder frei, so kann derselbe alle diejenigen Schwingungen vollführen, für welche seine Länge irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge ist; die langsamsten Schwingungen sind

$$T = \frac{2l}{c};$$

• Schwingungsdauer ist somit die Hälfte, die Schwingungsanzahl die doppelte von derjenigen eines an seinem einen Ende festen Stabes. Die übrigen Schwingungszahlen sind gegeben durch den Ausdruck

$$N_n = n \frac{c}{2l},$$

• worin  $n$  jede ganze Zahl sein kann.

Zwischen den gleichen Teilungen zylindrischer Stäbe entsprechenden Schwingungszahlen der longitudinalen und drehenden Schwingungen ergibt sich eine äußerst einfache Beziehung.<sup>1)</sup> Dividieren wir die einer gleichen Teilung entsprechende Anzahl longitudinaler Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}}$$

durch jene der drehenden Schwingungen, so wird

$$\frac{N'}{N} = 1 + 2(1 + \mu).$$

Eine Vergleichung der Schwingungszahlen kann also ebenfalls über den Wert von  $\mu$ , des Verhältnisses von Querkontraktion zur Längendilatation Aufschluß geben. Nach den Versuchen von Chladni<sup>2)</sup> soll das Verhältniß der Schwingungszahlen wie 3 zu 2 sein, danach wäre  $\mu = 0,125$ ; nach Versuchen von Savart<sup>3)</sup> wäre  $\frac{N'}{N} = \frac{10}{6}$ , somit  $\mu = 0,39$ . Ausführlichere Versuche zur Bestimmung dieses Verhältnisses hat Wertheim angestellt.<sup>4)</sup> Folgende kleine Tabelle enthält die Resultate der Versuche:

1) Poisson, Memoires de l'Acad. de France. 8. p. 456 1829

2) Chladni, Akustik p. 110

3) Savart in dem zitierten Memoire von Poisson. p. 456.

4) Wertheim, Annales de chim. et de phys. 50. 3. p. 262 1857

Stab von	Länge	Radius	Schwingungszahl		$\frac{N'}{N}$	$\mu$
			longit. $N'$	drehend $N$		
Eisen . . . . .	2 <sup>m</sup> ,061	8 <sup>mm</sup> ,220	1255,6	766,5	1,637	0,339
Eisen . . . . .	2,005	5,501	1267,8	771,1	1,643	0,349
Gußstahl . . .	2,000	5,055	1286,4	787,7	1,633	0,333
Messing . . . .	2,000	5,031	864,5	531,1	1,628	0,325

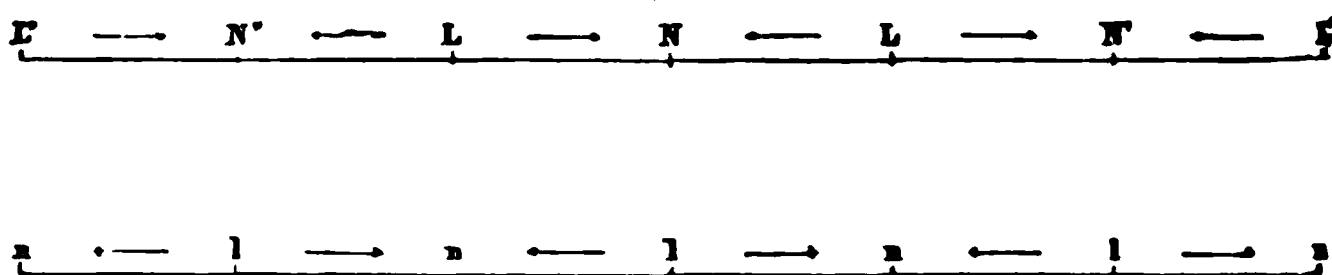
Schneebeli<sup>1)</sup> fand an Stahlstäben von nahe 1<sup>m</sup> Länge und 15 bis 20<sup>mm</sup> Dicke, nachdem er sie durch sorgfältiges Erwärmen möglichst homogen gemacht hatte, im federharten Zustande  $\frac{N'}{N} = 1,6102$ , woraus das schon § 53 mitgeteilte Resultat dieser Versuche  $\mu = 0,296$  folgt. Im weichen Zustande gaben die Stäbe  $\frac{N'}{N} = 1,613$  und  $\mu = 0,302$ .

Interessant ist der von Schneebeli bei diesen Versuchen geführte experimentelle Nachweis, daß auch für die zweiten Schwingungen, bei welchen der Stab mit zwei Knoten schwingt, das Verhältnis der Schwingungszahlen genau das gleiche ist, wie es die Theorie verlangt.

### § 147.

**Zusammengesetzte Schwingungen.** Wenn man einen Stab seiner Länge nach reibt, so sahen wir, daß er in longitudinale Schwingungen versetzt wird. Diese longitudinalen Schwingungen treten indes, wie zuerst F. Savart<sup>2)</sup> gezeigt hat, fast niemals allein auf, sondern stets in Verbindung mit transversalen Schwingungen. Bestreut man nämlich einen longitudinal schwingenden parallelepipedischen oder zylindrischen Stab mit Sand, so ordnet sich nach den Beobachtungen Savarts der Sand auf den Stäben in gewissen Linien, indem er nicht hüpfend wie bei der transversalen Schwingung der Stäbe, sondern der Oberfläche parallel sehr rasch verschoben wird. So bilden sich solche Knotenlinien schon auf Stäben, welche an beiden Enden frei ihre langsamsten longitudinalen Schwingungen vollführen, in großer Zahl, während doch der Stab in bezug auf die longitudinalen

Fig. 265.



Schwingungen nur eine Knotenlinie in der Mitte besitzt. Der Sand verschiebt sich auf der Oberfläche,  $L'L''$  Fig. 265, wie die Pfeilstriche es angeben, von den Punkten  $L$  zu den Punkten  $N$ .

1) Schneebeli, Poggend. Ann. 140. p. 598. 1870.

2) F. Savart, Annales de chim. et de phys. 14. 1820; 25. 1824. Doves Repertorium. 6. 1842.

Ferner fand Savart, wenn man auf der obern Seite des Stabes die Linien der Sandanhäufungen markiert, dann den Stab umkehrt und ihn mit Sand bestreut, nachdem man ihn in Schwingung versetzt hat, daß die Linien der Sandanhäufung auf dieser Seite zwischen denen der obern Seite liegen, daß sie (Fig. 265) von den Punkten  $l$ , welche gerade den Punkten  $N$  der obern Seite gegenüber liegen, sich nach den Punkten  $n$  bewegen.

Auf Stäben mit quadratischem oder kreisförmigem Querschnitt liegen sie auf einer schraubenförmigen Linie, die sich entweder rechts oder links gewunden, oder von der Mitte aus nach der einen Seite rechts, nach der andern links gewunden um den Stab herumlegt.

Durch viele Versuche an Stäben, welche an beiden Enden frei waren, gelangte Savart zu folgenden die Zwischenräume zwischen den Sandanhäufungen bedingenden Gesetzen.<sup>1)</sup>

Die Zwischenräume der Sandanhäufungen sind

1) in Stäben von rechteckigem Querschnitt konstant bei verschiedener Breite, wenn nur die Länge und Dicke der Stäbe ungeändert bleibt;

2) proportional der Quadratwurzel aus der Dicke bei gleicher Länge;

3) proportional der Quadratwurzel aus der Länge bei gleicher Dicke.

Schon aus diesen Gesetzen folgt, daß diese Sandanhäufungen von Transversalschwingungen des Stabes herrühren, welche die longitudinalen begleiten und ihnen isochron sind.

Denn nach dem ersten Gesetze sind sie von den Breiten der Stäbe unabhängig, wir wissen, daß das sowohl für die longitudinalen als die transversalen Schwingungen der Fall ist.

Nach dem zweiten Gesetze sind sie proportional den Quadratwurzeln aus den Dicken. Die longitudinalen Schwingungen sind von der Dicke der Stäbe unabhängig, die transversalen derselben umgekehrt proportional. Sollen daher die Schwingungen isochron sein, so müssen sich die transversalen stehenden Wellen bei dickern Stäben soviel verlängern, daß sie wieder in demselben Verhältnisse langsamer werden, als sie wegen der gedickerten Dicke bei gleicher Länge rascher geworden wären. Die Schwingungsdauer der transversalen Schwingungen ist nun dem Quadrate der Längen proportional. Verhalten sich demnach die Längen der stehenden Wellen bei verschiedener Dicke der Stäbe wie die Quadratwurzeln aus den Dicken, so sind die Schwingungen isochron.

Ebenso stimmt das dritte Gesetz, denn da die Dauer einer longitudinalen Schwingung der Länge des Stabes, die einer transversalen Schwingung aber dem Quadrate derselben proportional ist, so müssen bei verschiedener Länge des Stabes die Längen der Transversalwellen proportional der Quadratwurzel dieser Länge geändert werden, um den longitudinalen Schwingungen isochron zu sein.

So findet auch Savart bei gespannten Streifen oder Saiten die Zwischenräume jener Knoten proportional der Länge und der Quadratwurzel aus der Spannung in Übereinstimmung mit der Annahme, daß die Linien von einer isochronen Transversalbewegung herrühren.

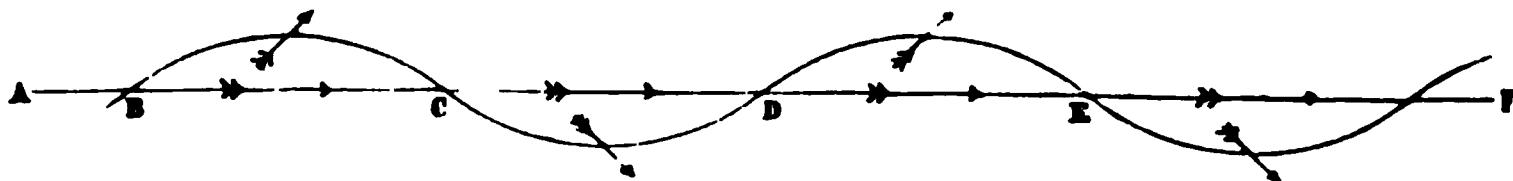
1) F. Savart, Annales de chim. et de phys. 65 1837. Doves Repertorium p. 60 1842. Dargestellt von Sebeck.

Ferner auch, wenn man auf einem Stabe die Sandstellen bezeichnet und ihn sodann mit dem Bogen in gewöhnliche transversale Schwingungen versetzt, so daß die Länge der stehenden Welle gleich ist dem Abstände von einer Sandstelle der obern Seite bis zur nächsten Sandstelle der untern Fläche, so sind die Schwingungszahlen in der Tat dieselben, als die der longitudinalen Schwingungen; dasselbe ist der Fall bei gespannten Saiten oder Streifen. Die Erklärung, welche Savart von diesen Linien gibt, anzuführen, wollen wir hier unterlassen, da Seebeck die Unrichtigkeit derselben nachgewiesen hat und statt dessen die Seebecksche Erklärung folgen lassen.<sup>1)</sup>

Infolge der koexistierenden transversalen und longitudinalen Schwingungen der Teilchen der Stäbe beschreiben die Teilchen derselben die Resultante aus beiden Bewegungen, im allgemeinen elliptische Bahnen, § 132. Ist nun die Resultante gegen die Sandkörner gerichtet, so stößt sie dieselben in ihrer Richtung, das heißt unter einem spitzen Winkel gegen die wagerechte Fläche des Stabes fort; ist sie aber während der nächsten Halbschwingung von den Sandkörnern weggerichtet, so läßt sie dieselben liegen. Daraus ergibt sich ganz einfach, daß der Sand auf die abwechselnden Knoten der transversalen Wellen getrieben werden müsse.

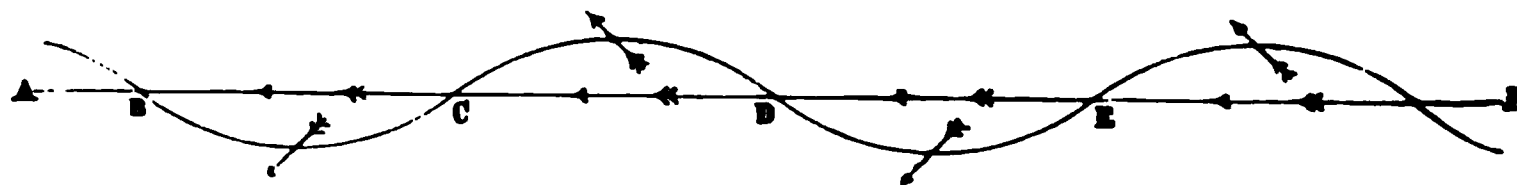
Es sei z. B.  $AF$  ein Stück des Stabes (Fig. 266), welches in longitudinaler Schwingung nach rechts gedacht werde, während die Ordinaten

Fig. 266.



der gezeichneten Wellenlinien die transversalen Geschwindigkeiten darstellen mögen, so daß also die zwischen  $B$  und  $C$  liegenden Punkte sich zugleich nach rechts und oben, die zwischen  $C$  und  $D$  liegenden nach rechts und unten bewegen usf. Alsdann haben die aus beiden Bewegungen resultierenden Geschwindigkeiten zwischen  $B$  und  $C$  sowohl als in den andern Strecken die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile und man sieht leicht, daß der über  $BC$  liegende Sand nach  $C$ , der über  $DE$  liegende nach  $E$  getrieben wird, während der über  $CD$  und  $EF$  liegende Sand jetzt liegen bleibt. In der folgenden Zeit gehen beide Bewegungen in die entgegengesetzten über (Fig. 267). Die longitudinale Bewegung ist auf der

Fig. 267.



ganzen Strecke  $AF$  von der Rechten zur Linken gerichtet, die transversale zwischen  $BC$  und  $DE$  nach unten, zwischen  $CD$  und  $EF$  nach oben. Die resultierende Bewegung hat die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile, und man sieht, wie jetzt der Sand von  $CD$  nach  $C$ , von  $EF$  nach

1) Seebeck in Dove, Repertorium. 8. p. 53. 1849.



*E* geschoben wird, während er jetzt zwischen *BC'* und *DE* liegen bleibt. Daher wird sich der Sand in *C* und *E* ansammeln, dagegen die Stellen *B*, *D*, *F* leer werden, oder die alternierenden Schwingungsknoten der transversalen Schwingungen müssen mit Sand bedeckt werden.

Kehrt man den Stab um, so daß die vorhin untere Seite zur obern wird, so ergibt sich aus obiger Entwicklung unmittelbar, daß jetzt die vorher unbedeckten Knotenlinien bedeckt werden, und die vorhin bedeckten leer werden müssen, d. h. auf der untern Seite sammelt sich der Sand in *B*, *D*, *F*, und *C* und *E* werden leer.

Diese Erklärung hat Seebeck durch einen Versuch bestätigt. An einem circa 1<sup>m</sup> langen Spiegelglasstreifen entsprach die Dauer der langsamsten Longitudinalschwingungen den Transversalschwingungen, bei denen der Streifen 14–15 Knoten erhielt, etwas näher den letztern als den erstern. Nachdem nun Seebeck die Sandanhäufungen auf dem longitudinal schwingenden Stabe bezeichnet hatte, versetzte er durch Streichen mit dem Bogen denselben in die Transversalschwingungen mit 15 Knoten, und fand so, daß die Sandanhäufungen bei den longitudinalen Schwingungen auf der einen Seite dem 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, auf der andern Seite dem 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15 Knoten der transversalen Schwingungen entsprachen.

Die weniger hüpfende als gleitende Bewegung des Sandes zeigt an, daß die transversale Bewegung schwächer ist als die longitudinale, womit auch die geringere Energie der Bewegung und die Störung der Regelmäßigkeit der Sandanhäufungen in der Mitte, in der Nähe des Schwingungsknotens der longitudinalen Bewegung übereinstimmt.

Auf die mit den longitudinalen stets gleichzeitig auftretenden transversalen Schwingungen hat Kundt auch die zuerst von W. Weber<sup>1)</sup> beobachteten eigentümlichen Bewegungen zurückgeführt, welche elastische Körper, wie Korkpfropfen, in longitudinal schwingenden Röhren annehmen. W. Weber nahm eine 1 bis 1,5<sup>m</sup> lange zylindrische Glasröhre von 6 bis 10<sup>mm</sup> lichte Durchmesser und 1<sup>mm</sup> Glasdicke, verschloß das eine Ende mit einem Korkpfropfen, der genau an der Röhre abgeschnitten wurde, hielt die Röhre in vertikaler Stellung, das verschlossene Ende abwärts gekehrt, locker in der Mitte und rieb die obere Hälfte mit einem nassen Tuche stark von oben nach unten; er sah dann den Stöpsel in die Höhe rücken, bis er in der Mitte der Röhre, in der sich der Schwingungsknoten befindet, stehen blieb.

Kundt<sup>2)</sup> zeigte zunächst, daß eine derartige Bewegung des Korks nur eintrat, wenn derselbe eine konische Gestalt hat, und daß dann der Pfropf stets in der Richtung von der breitem Basis zur spitzern Endfläche sich bewegt. Ein und derselbe Kork wandert in der Röhre vom Ende gegen die Mitte, wenn die breitere Basis nach außen, von der Mitte gegen das Ende, wenn dieselbe gegen das Innere der Röhre hin liegt. Ebenso wie ein in der Röhre befindlicher Kork wandert ein auf die Röhre gesetzter Ring, der konisch durchbohrt ist, und zwar stets von der Spitze seiner konischen Öffnung gegen die breitere Grundfläche hin. Genau zylindrische Pfropfen in der Röhre oder genau und glatt zylindrisch durchbohrte Ringe

1) W. Weber, Schweiggers Journal für Chemie und Physik. 58. 308.

2) A. Kundt, Poggend. Ann. 126. p. 513. 1865.

nehmen keine Bewegung an. Sehr viel energischer wird die Bewegung, wenn man dem Kork in der Röhre eine sägenförmige Gestalt gibt wie Fig. 268; und wenn man ein viereckiges Korkstück auf seiner untern Fläche sägenförmig zuschneidet wie Fig. 269, so kann man die Bewegung ebenfalls auf einem schwingenden Glasstreifen beobachten. Die Bewegung geschieht dann stets in der Richtung der Pfeile, also von den Berührungstehen der Sägezacken nach den hohlen Stellen der Säge. Bei dem Kork Fig. 269 konnte Kundt die Bewegung noch mit ungeminderter Energie beobachten, als er denselben mit Gewichten im Betrage von 200<sup>g</sup> belastete.

Fig. 268.



Fig. 269.



Daß diese Bewegung Folge ist der die longitudinale begleitenden Transversalschwingung, zeigte Kundt bei der Anordnung (Fig. 269), indem die Bewegung sich ganz ebenso zeigte, als der Glasstreifen in transversale Schwingungen versetzt wurde. Der Glasstreifen wurde an zwei Punkten unterstützt, horizontal hingelegt und durch einen vertikalen Schlag mit einem Hammer oder vertikales Streichen mit einem Bogen in transversale Schwingungen versetzt. Der Kork wanderte dann von einem Ende des Streifens bis zum andern, über alle Knotenpunkte der transversalen Schwingungen fort. Da in diesem Falle die longitudinalen Schwingungen der Bewegung hervorgebracht haben, und da die Bewegung ganz dieselbe ist, wie bei den longitudinalen Schwingungen des Streifens, so darf man schließen, daß auch dort die transversalen Schwingungen es sind, welche die Bewegung erzeugen.

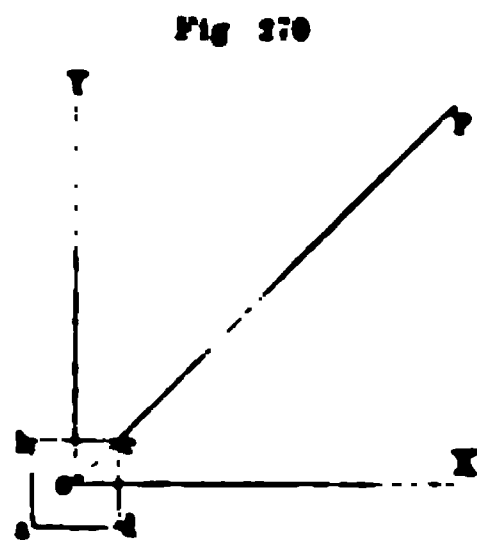
Da die Form des Körpers für die Bewegung überhaupt und besonders für die Richtung derselben allein maßgebend ist, so muß dieselbe in einem andrer Weise zustande kommen als die Bewegung des Sandes in den Versuchen von Savart. Kundt denkt sich den Vorgang folgendermaßen. Durch die nach außen gerichtete transversale Bewegung wird der auf dem Streifen liegende elastische Körper etwas zusammengedrückt. Sobald der Stoß aufhört, suchen die zusammengedrückten Teilchen ihre Gleichgewichtslage wieder anzunehmen und stoßen bei ihrer Ausdehnung auf die feste Unterlage. Da diese nicht nachgibt, so wird der Körper ein wenig in die Höhe geschleudert, und zwar nach einer Richtung, welche jener nach welcher der Rückstoß erfolgt, entgegengesetzt ist. Diese Richtung muß aber wesentlich ab von der Gestalt des gestoßenen Körpers. Hat der Körper eine zur vertikalen symmetrische Form, so werden die Zusammendrückungen der Teilchen um die vertikale herum ganz gleichmäßig sein und infolgedessen der aus der Ausdehnung resultierende Rückstoß vertikal sein; ein solcher Körper hüpfte also einfach in die Höhe und erhält keinen seitlichen Antrieb. Deshalb wird ein glattes Korkstück von parabolischem Querschnitt auf einem Streifen oder ein glatter Zylinder in einer Röhre nicht verschoben. Ein konischer Kork dagegen oder ein wie Fig. 268 gearbeitetes Stück wird vermöge seiner Form schief zusammengedrückt

er erfährt deshalb einen schiefen Rückstoß; die vielfach immer in derselben Richtung wiederholten Stöße müssen ein solches Stück in horizontaler Richtung verschieben. Würde der Kork die schwingende Fläche nur einer Linie berühren, so ginge die Bewegung nur bis zu der nächsten Knotenlinie der Transversalschwingungen. Da er aber den Stab immer in gleicher Ausdehnung berührt, so treffen ihn, auch wenn er sich über einer Knotenlinie befindet, die Stöße der benachbarten Wellen und er bewegt sich über die Knotenlinien fort bis zur longitudinalen Knotenlinie, wo die Teile des Stabes in größerer Ausdehnung in Ruhe sind.

Nach dieser Erklärung der besprochenen Bewegung ist die Natur der Bewegung des Korkkörpers für die entstehende Bewegung von größtem Einfluß; feste Körper dürfen nach derselben keine Bewegung annehmen; in der That sagte Kundt, daß Stücke von Holz oder Metall sich nicht bewegten, daß nur solche Körper verschoben werden, welche wie Kork und Kautschuk leicht zusammendrückbar sind.

Wenn so bei Stäben durch einfaches Streichen fast stets zu den longitudinalen auch transversale Schwingungen kommen, so können wir es leicht erreichen willkürlich bei Stäben transversale Schwingungen verschiedener Richtung hervorzurufen und so die in § 132 und 133 besprochenen Schwingungsfiguren darzustellen. Nimmt man einen homogenen Stab von quadratischem Querschnitt, und versieht denselben an seinem oberen freien Ende mit einem glänzenden Knöpfchen, so daß man durch etwa vom hellen Himmel oder einer leuchtenden Flamme herkommenden und an dem Knöpfchen reflektierten Lichte in dem Knöpfchen einen hellen Punkt sieht, so erhält man leicht die Schwingungsfiguren des § 132.

Sei  $ac$  (Fig. 270) der quadratische Querschnitt des Stabes; stoßen wir ihn in der Richtung  $OX$  an, so wird er in dieser Richtung schwingen, und der glänzende Punkt als eine Linie parallel  $OX$  erscheinen. Stoßen wir ihn parallel  $OY$ , so erscheint er als glänzende Linie parallel  $OY$ . Da wir den Stab als homogen voraussetzen und seine Dicke  $ab = bc$  ist, so sind die Schwingungen nach beiden Richtungen von gleicher Amplitude. Stoßen wir das Stäbchen nach einer dritten Richtung, so können wir die eintretenden Bewegungen als zusammengesetzt ansehen aus einer solchen parallel  $OX$  und einer parallel  $OY$ ; wir erhalten, da die beiden Bewegungen ohne Phasendifferenz sind, eine gerade Linie, welche parallel der Richtung des Stoßes ist.



Erteilen wir dagegen dem Stäbchen eine Bewegung parallel der einen Richtung, etwa  $OX$ , und geben dann dem schwingenden Stabe einen Stoß parallel  $OY$ , so treten Ellipsen auf, deren Gestalt von der Phasendifferenz abhängt, welche die beiden Bewegungen dann haben. Wir erhalten z. B. die Ellipse Fig. 238 und, von oben angesehen, eine Bewegung des Knöpfchens gegengesetzt der des Zeigers einer Uhr, wenn wir das Stäbchen in der Richtung nach  $Y$  stoßen, wenn es nach  $X$  hin  $\frac{3}{4}$  seines Weges zurückgelegt hat, einen Kreis, wenn wir es in dem Augenblicke, wo es den größten Abstand nach  $X$  erreicht hat, ebenso stark nach  $Y$  stoßen, wie vorher

nach  $X$  hin. Stoßen wir das Stäbchen nach  $Y$  hin, wenn es  $\frac{1}{4}$  seines Weges nach der entgegengesetzten Seite, nach  $-X$  hin zurückgelegt hat, so erhalten wir die Ellipse (Fig. 240) und die Bewegung ist von der Linken zur Rechten im Sinne des Zeigers einer Uhr.

Wenn das Stäbchen nach der einen Richtung  $ab$  dicker ist als nach der andern, so geschehen die Schwingungen nach  $Y$  rascher als nach  $X$ . Ist der Unterschied nur sehr unbedeutend, so daß die Schwingung nach  $Y$  nur sehr wenig rascher ist, so hat das, wenn wir den Stab in einer gegen  $OX$  und  $OY$  geneigten Richtung stoßen, denselben Erfolg, als wenn wir bei gleicher Oszillationsdauer nach und nach die verschiedenen Phasendifferenzen hervorbrächten; wir sehen deshalb nach und nach alle die Figuren entstehen, die wir § 132 ableiteten. Bei der ersten Schwingung, wenn wir den Stab nach  $P$  hinstoßen, sehen wir eine Linie parallel  $OP$ . Die Schwingung nach der positiven Seite der  $Y$  beginnt zum zweiten Mal etwas früher als die nach  $X$ , die gerade Linie geht daher in eine sehr flache Ellipse über, der Punkt dreht sich wie der Zeiger einer Uhr, die große Achse der Ellipse liegt im Quadranten  $YOX$ .

Bei den folgenden Schwingungen wird die Phasendifferenz immer größer, da die Schwingung nach  $Y$  immer mehr voreilt, die Ellipse wird daher anfangs immer weniger flach, geht einen Augenblick in einen Kreis über und flacht sich wieder ab, aber so, daß jetzt die große Achse in dem Quadranten  $YO - Y$  sich befindet. Bei weiterer Phasendifferenz wird die Ellipse wieder eine gerade Linie, die senkrecht zu  $OP$  ist u. s. f., es treten alle die Figuren nacheinander auf, welche, wie wir sahen, bei Stößen mit quadratischem Querschnitt durch verschiedenes Stoßen erzeugt werden können.

Ist der Unterschied der Dicke bedeutend, so erhält man die in § 133 besprochenen Figuren; macht der Stab nach  $Y$  z. B. zwei Schwingungen nach  $X$  eine, so erhält man je nach der Phasendifferenz die Kurven Fig. 244, und ist das Verhältnis nicht genau  $1:2$ , so bekommt man nach und nach die dort besprochenen Kurven.

Das Kaleidophon oder phonische Kaleidoskop von Wheatstone zeigt diese Kurven und außer diesen manche aus andern Schwingungsverhältnissen zusammengesetzte; der Apparat besteht aus mehreren Stäbchen mit glänzenden Spitzen, die nach den beiden Richtungen ihres Querschnitts von verschiedenen Dimensionen sind. Eine recht hübsche Verbesserung von Wheatstoneschen ist das Universalkaleidophon, welches fast gleichfalls von Melde und von Lippich<sup>2)</sup> angegeben ist. Dasselbe besteht aus zwei federnden Metallstreifen, der eine größere wird an einen Tisch angehängt und der kleinere wird mit einer Klemme an das obere Ende des größeren so befestigt, daß seine Ebene senkrecht ist zur Ebene des größeren. Das obere Ende des kleinern ist ein hell polirtes Metallknöpfchen angebracht. Der kleinere Streifen ist in seiner Klemme verschiebbar, so daß man die Länge des frei schwingenden obern Endes und damit die Schwingungs-

1) Wheatstone, Quarterly Journal of science etc. New series No 11. 1840 in Schweigger-Seidels Jahrbuch. 50

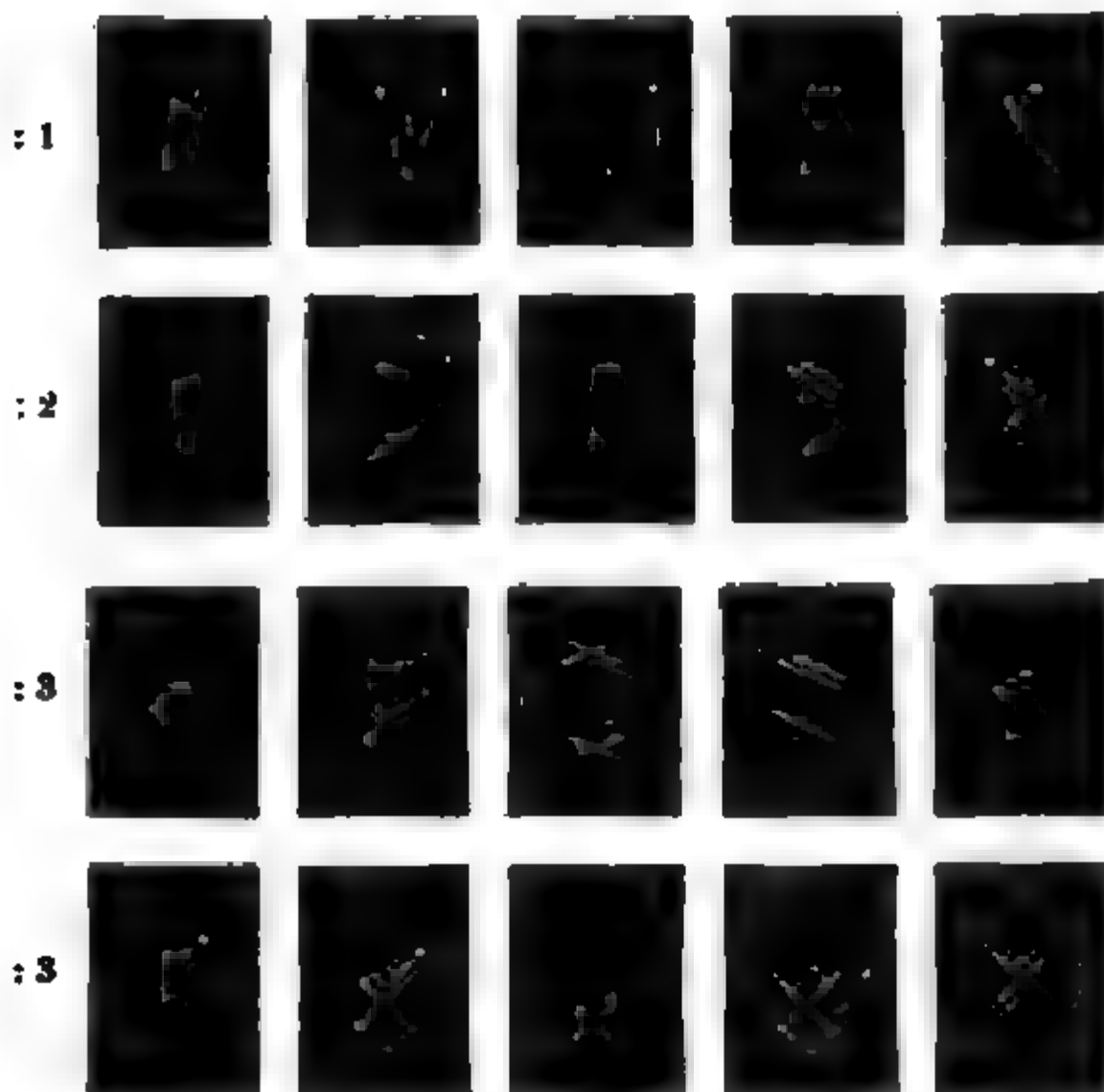
2) Melde, Poggend Ann. 115. 1862. Lippich, Sitzungsberichte der Wiener Akademie 45. 1862; Poggend Ann. 117. 1862



er beliebig variieren kann. Läßt man die untere Feder allein schwingen, bewegt sich das Knöpfchen mit derselben nach der einen, bewegt sich obere allein, so schwingt das Knöpfchen nach der zur ersten senkrechten Richtung. Läßt man die untere Feder schwingen und stößt damit die obere, so erhält man die aus beiden Bewegungen resultierende Kurve, deren Form von dem Schwingungsverhältnis und der Phasendifferenz der Einzelbewegungen abhängt.

Zuerst Lissajous<sup>1)</sup> und später Melde<sup>2)</sup> haben die aus zueinander rechten Schwingungen der verschiedensten Periode sich zusammensetzen-

Fig. 271



Schwingungskurven zum Gegenstande eines besondern Studiums gest. Fig. 271 zeigt eine Anzahl dieser Kurven nach Lissajous; das Verhältnis der Schwingungszahlen ist neben jeder Reihe angegeben; die verschiedenen Figuren derselben Horizontalreihe zeigen die Kurven für die verschiedenen Phasendifferenzen. Die erste gibt die Kurve, wenn beide Schwingungen gleichzeitig die Gleichgewichtslage nach der positiven Seite überqueren, die zweite, wenn die raschere horizontale Bewegung  $\frac{1}{2}$ , die dritte, wenn sie  $\frac{1}{4}$ , die vierte, wenn sie  $\frac{3}{4}$ , die fünfte, wenn sie  $\frac{1}{2}$  ihrer Schwin-

1) Lissajous, Ann. de chim. et de phys. 51 3. p. 147 1857

2) Melde, Die Schwingungskurven. Leipzig 1864.

gung voraus ist. Entsprechen die Schwingungsverhältnisse nicht genau den einfachen Zahlen, so werden die Kurven nacheinander sichtbar, wie wir schon vorhin erwähnten.

Lissajous wandte zur Darstellung der Figuren ein optisches Verfahren an, welches wir ohne zu weit ausholen zu müssen hier nicht im einzelnen darlegen können; man befestigt vor einem in horizontaler Ebene schwingenden Stabe, am besten der einen Zinke einer Stimmgabel einen Spiegel, so daß seine spiegelnde Ebene senkrecht ist zur Längsrichtung des Stabes, und sendet auf den Spiegel einen von einer punktförmigen Lichtquelle herkommenden Lichtstrahl, so daß derselbe auf einen zweiten Spiegel fällt, der vor der einen Zinke einer in vertikaler Richtung schwingenden Stimmgabel befestigt ist. Den von diesem zweiten Spiegel reflektierten Strahl fängt man auf einem passend aufgestellten vertikalen Schirm auf. Schließlich bringt man zwischen die Lichtquelle und den ersten Spiegel eine Linse und stellt dieselbe so, daß auf dem Schirm ein scharfes Bild der punktförmigen Lichtquelle erscheint. Streicht man die erste Stimmgabel, so daß der Spiegel in horizontaler Richtung hin und her geht, so erscheint infolge der Schwingung auf dem Schirm eine horizontale Lichtlinie; streicht man nur die zweite Gabel, so erscheint eine vertikale Lichtlinie. Streicht man beide, so erscheint auf dem Schirme die Schwingungskurve, welche dem Schwingungsverhältnisse und der Phasendifferenz der beiden Schwingungen entspricht. Will man die Figuren nicht objektiv darstellen, so genügt es mit Fortlassung der Linse in den zweiten Spiegel mit freiem Auge oder einem Fernrohr hineinzusehen, so daß man bei ruhendem Spiegel den Lichtpunkt scharf sieht. Schwingen die Spiegel, so sieht man an Stelle des Lichtpunktes die betreffende Schwingungsfigur.<sup>1)</sup>

### § 148.

**Zusammengesetzte Schwingungen gespannter Saiten.** Wir haben schon in § 142 bei der Besprechung der Schwingungen von Saiten gesehen, daß eine solche Saite alle Schwingungen vollführen kann, deren Schwingungszahlen der Gleichung

$$N = n \frac{c}{2l}$$

entsprechen, wenn  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung auf der Saite,  $l$  die Länge der Saite ist und worin  $n$  jede ganze Zahl sein kann. Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche  $n$  gleich eins ist; nennen wir  $T$  die Schwingungsdauer dieser Schwingungen und  $a_1$  ihre Amplitude, so ist die Gleichung derselben nach § 142 und 140

$$y = a_1 \sin \pi \frac{x}{l} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Nennen wir die Amplitude der  $n$ ten Schwingung  $a_n$ , deren Schwingungsdauer  $\frac{1}{n} T$  ist, so ist deren Gleichung

$$y_n = a_n \sin n\pi \frac{x}{l} \sin 2n\pi \frac{t}{T}.$$

1) Lissajous, Ann. de chim. et de phys. 51. (8.) p. 147. 1857.

Das die Zeit enthaltende Glied wird statt des Sinus der Kosinus, wenn zur Zeit  $t = 0$  die Punkte der Saite an dem äußersten Ende ihrer Bahn sind.

Nach § 142 können in einer Saite alle diese Schwingungen gleichzeitig vorhanden sein, und in der Tat treten bei Erregung von Saitenschwingungen fast immer mehrere dieser Schwingungen gleichzeitig auf. Werden Saiten gestrichen oder gezupft oder mit dem Hammer angeschlagen, so treten stets aus verschiedenen Perioden zusammengesetzte Schwingungen auf: welche Schwingungen gleichzeitig auftreten, das hängt von der Art und Weise ab, in welcher die Schwingungen der Saiten erregt werden.

Nach § 133 erhält eine schwingende Punktreihe, wenn wir sie zu der Zeit ins Auge fassen, in welcher der von der Zeit abhängige Faktor seinen größten Wert hat, eine je nach der Zahl und der Periode und Phasendifferenz der in ihr vorhandenen Schwingungen bestimmte Form. Sind in unserer schwingenden Saite gleichzeitig  $n$  Schwingungen mit den Amplituden  $a_1, a_2, a_3 \dots$  und den Schwingungsdauern  $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T$  usw., so wird, wenn der von der Zeit abhängige Faktor für alle Schwingungen gleichzeitig gleich  $+1$  ist, die Form der Saite dargestellt durch die Gleichung

$$y = a_1 \sin \pi \frac{x}{l} + a_2 \sin 2\pi \frac{x}{l} + a_3 \sin 3\pi \frac{x}{l} + \dots \quad (a)$$

Geben wir nun der Saite die durch diesen Ausdruck dargestellte Form und lassen sie los, so vollführt die Saite alle diese Schwingungen, die Saite nimmt nach jeder Zahl ganzer Schwingungen die ihr ursprünglich gegebene Form wieder an. Denn gerade so, wie wir die Bewegung für alle Punkte einer Reihe angeben konnten (§ 128), wenn wir dieselbe für den Punkt  $x = 0$  kennen, ebenso können wir die Bewegung derselben angeben, wenn wir die Lage der Punkte zur Zeit  $t = 0$  als Funktion von  $x$  kennen, wir erhalten als Gleichung für  $y$  zur Zeit  $t$

$$y = a_1 \sin \pi \frac{x}{l} \cos 2\pi \frac{t}{T} + a_2 \sin 2\pi \frac{x}{l} \cos 4\pi \frac{t}{T} + a_3 \sin 3\pi \frac{x}{l} \cos 6\pi \frac{t}{T} \quad (b)$$

Ziehen wir z. B. eine Saite in 0,3 ihrer Länge zur Seite, so geben wir ihr sehr nahe die Form, welche durch drei Schwingungen der Periode  $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T$  mit den Amplituden  $a_1, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_1$  dargestellt wird. Für die Zeit  $t = 0$  erhalten wir für die verschiedenen Stellen der Saite die Werte von  $y$ , indem wir in die Gleichung (a) für  $x$  die betreffenden Werte einsetzen. Setzen wir  $a_1 = 1$ , so werden die Werte für

$x = 0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$
$y = 0,546,$	$0,932,$	$1,081,$	$1,032,$	$0,889,$	$0,739,$	$0,605,$	$0,456,$	$0,252.$

In Fig. 272 ist die Gestalt der Saite hiernach dargestellt; die Ausschläge sind der Deutlichkeit wegen erheblich zu groß dargestellt; man sieht, annähernd nimmt die Saite die Gestalt zweier in  $B$  sich treffender gerader Linien an, mit sanfter Abrundung, wie sie etwa dem Zupfen mit dem weichen Finger entspräche. Lassen wir die Saite los, so werden die Werte  $y$  zur Zeit  $t$  durch die Gleichung (b) gegeben. Für die Zeit  $t = \frac{1}{2}T$

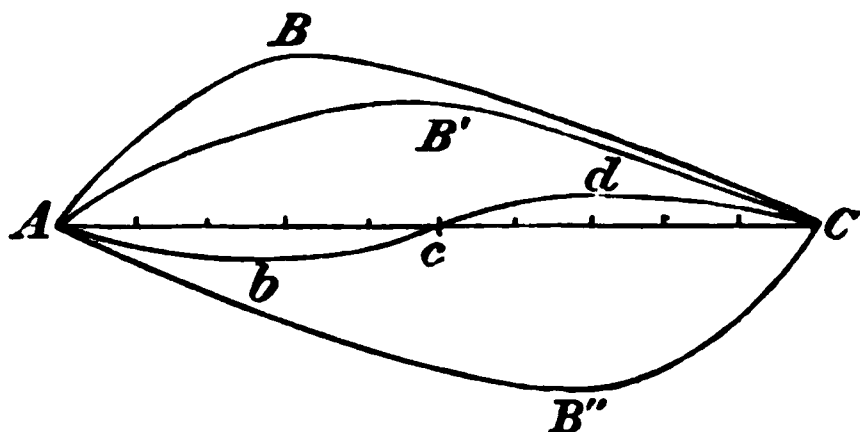


würde in dem ersten Gliede der Gleichung (b)  $\cos \frac{\pi}{4}$ , im zweiten  $\cos \frac{\pi}{2}$ , im dritten  $\cos 3 \frac{\pi}{4}$  als von der Zeit abhängiger Faktor eintreten, die Werte von  $y$  werden sein

$x = 0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$
$y = 0,281,$	$0,490,$	$0,589,$	$0,718,$	$0,784,$	$0,729,$	$0,543,$	$0,341,$	$0,155.$

Die Kurve  $AB'C$  gibt die Gestalt der Saite an. Für  $t = \frac{1}{4}T$  bleibt

Fig. 272.



nur das zweite Glied der Gleichung (b) übrig, der Kosinus hat den Wert  $-1$ , die Saite zeigt also nur die Form, wie wenn die Schwingung von  $\frac{1}{4}T$  allein in ihr vorhanden wäre,  $AbcdC$  zeigt die Form der Saite in diesem Augenblick. Für die Zeit  $t = \frac{1}{2}T$  wird das erste und dritte Glied der Gleichung (b) negativ, da  $\cos \pi =$

$\cos 3\pi = -1$ , das zweite bleibt positiv.

Die Werte von  $y$  werden allesamt negativ, und zwar wird für

$x = 0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$
$y = 0,252,$	$0,456,$	$0,605,$	$0,739,$	$0,889,$	$1,032,$	$1,081,$	$0,932,$	$0,546.$

Die Werte von  $y$  folgen sich von  $C$  aus gerade so wie bei  $t = 0$  von  $A$ , die Form der Saite ist also in doppelter Weise umgekehrt, wie Fig. 272  $AB'C$  sie darstellt.

Welche Form wir auch der Saite geben, wir können dieselbe nach einem von Fourier bewiesenen Satze immer durch eine strenge genommen unendliche Reihe darstellen, deren einzelne Glieder nach vielfachen des Bogens  $\pi \frac{x}{l}$  fortschreiten, also durch

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi \frac{x}{l},$$

wenn  $n$  alle ganzen Zahlen von 0 bis  $\infty$  bezeichnet. Ist die Form zur Zeit  $t = 0$  bekannt, so lehrt die Theorie der Fourierschen Reihen gleichzeitig die Koeffizienten der einzelnen Glieder dieser Reihen in Form bestimmter Integrale berechnen.

Beginnt die Bewegung der Saite zur Zeit  $t = 0$ , so daß also für  $t = 0$  die Geschwindigkeit in allen Punkten der Saite gleich Null ist, so ist die Form der Saite zur Zeit  $t$  gegeben, wenn wir jedes Glied der Reihe mit  $\cos 2n\pi \frac{t}{T}$ , wo für  $n$  die dem betreffenden Gliede zukommende Zahl einsetzen ist, multiplizieren; es wird also zur Zeit  $t$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cos 2n\pi \frac{t}{T}.$$

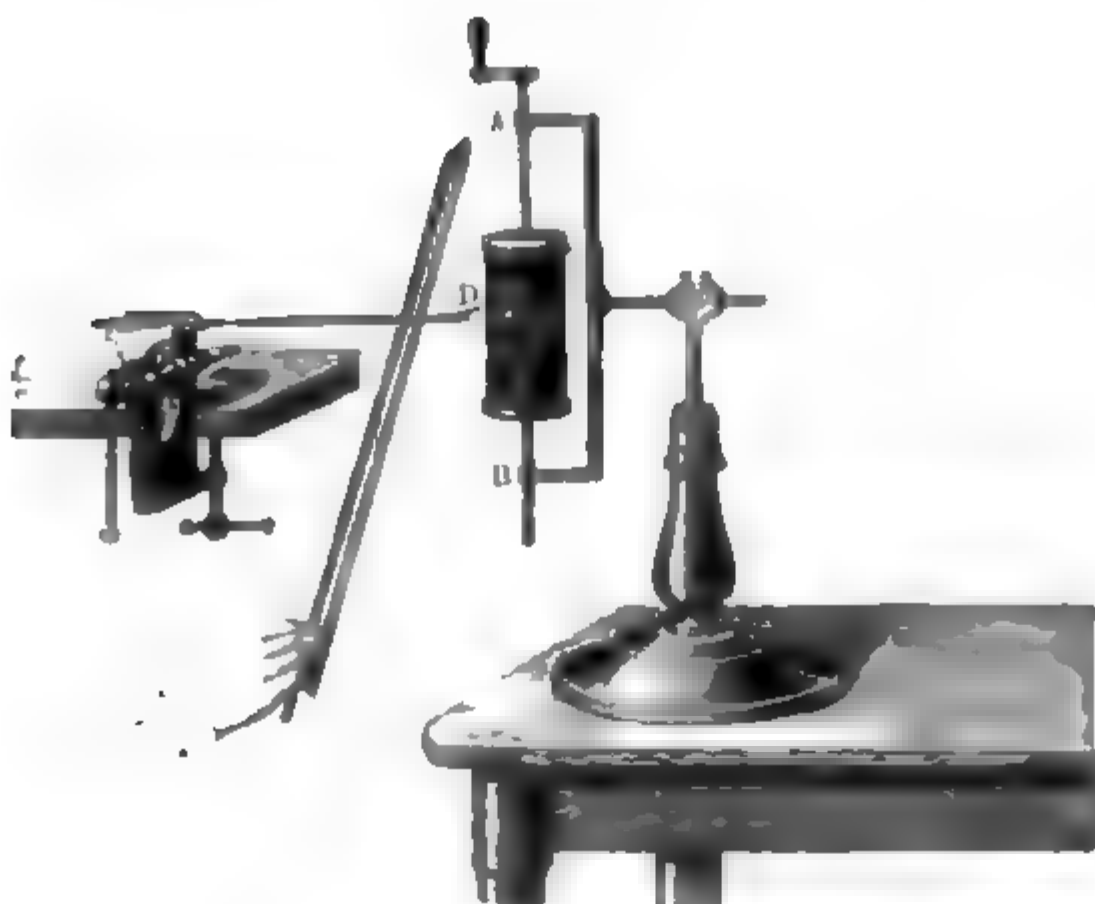
Setzen wir die Saite in Schwingung, indem wir an einer Stelle  $x$

lag von bestimmter Dauer erteilen, so erhalten die Teilchen, welche zur  $t = 0$ , im Augenblicke des Schlages, in der Gleichgewichtslage,  $y = 0$  l, eine an den verschiedenen Stellen verschiedene Geschwindigkeit. Wir setzen, wenn uns die Geschwindigkeit als Funktion von  $x$  bekannt ist, diese durch eine Fouriersche Reihe darstellen und aus dieser die Einzelschwingungen erkennen, welche die Bewegung der Saite zusammensetzen. in allen Fällen.

Wir können selbstverständlich auf diese Rechnungen nicht eingehen (verweisen deshalb auf die betreffenden mathematischen Werke.<sup>1)</sup>)

Um die Schwingungen der Saite zu analysieren, bedient man sich weder graphischer Methoden oder des Vibrationsmikroskopes. Bei der physischen Methode, wie sie zuerst von Savart und Duhamel<sup>2)</sup> ange-

Fig. 273



ordnet ist, versieht man den schwingenden Körper mit einem feinen leuchten ft, etwa einer Schweinsborste, die man mit etwas Wachs anklebt, und legt vor demselben einen Zylinder, der mit Ruß geschwärzt ist. Fig. 273 zeigt die Anordnung, wenn man etwa die Schwingungen eines Stabes aufnehmen will. Die Spitze berührt den Zylinder nur ganz leicht. Die Achse des Zylinders ist mit einem Schraubengewinde versehen, so daß er bei dem Schwingen gleichzeitig fortbewegt wird. Dreht man den Zylinder, wenn der schwingende Körper sich nicht bewegt, so zieht die Spitze auf dem Zylinder eine einfache Spirallinie; wenn der Körper und mit ihm die Spitze der Anordnung Fig. 273 in vertikaler Richtung schwingt, so erhält

1. Man sehe z. B. *Riemann-Hattendorf*, Partielle Differentialgleichungen Braunschweig 1889. *Helmholtz*, Tonempfindungen Braunschweig 1863

2) *Duhamel* L'Institut 1840, p. 19 u. p. 41.

die Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des schwingenden Körpers. Wenn der Stab in einer komplizierten Form schwingt, wenn gleichzeitig Schwingungen verschiedener Periode vollführt werden, so prägen sich dieselben in der Welle vollständig aus, da die nacheinander stattfindenden Bewegungen sich auf dem Zylinder nebeneinander darstellen.

Eine wesentliche Verbesserung des graphischen Verfahrens rührt von Raps und Krigar Menzel<sup>1)</sup> her. Bei dem soeben beschriebenen Verfahren wird die Schwingung der Saite durch die angebrachte Spitze immer etwas beeinflusst, da die Spitze mit dem Klebstoff die Saite an der betreffenden Stelle immer etwas belastet. Raps und Krigar Menzel haben deshalb das Schreiben durch die Photographie ersetzt. Der Punkt der Saite, dessen Schwingungen dargestellt werden sollen, wird auf einem um einen Zylinder gewickelten photographischen Papier abgebildet; der Zylinder ist drehbar und bei der Drehung wird das Papier allmählich abgezogen. Zur Abbildung der Schwingungen wird die Saite in Bewegung versetzt; das Abbild des Punktes auf dem photographischen Papier geht dann in genau gleichem Rythmus hin und her wie der schwingende Punkt selbst. Wird nun das Papier abgewickelt, so werden die nacheinander stattfindenden Bewegungen des Punktes auf dem Papier nebeneinander photographiert, wie sie der schreibende Stift auf dem beruhten Zylinder hinschreibt.

Zur Ausführung der Versuche wurde ein schmaler Spalt durch eine elektrische Lampe intensiv beleuchtet, und von diesem Spalt mit Hilfe von Linsen ein reelles Bild an der Stelle erzeugt, wo die Saite in Schwingung versetzt werden sollte. Ein Bild dieses Spaltbildes wurde auf dem photographischen Papier entworfen, und in diesem Bilde erschien die Stelle der Saite, deren Schwingungen abgebildet werden sollten, als ein scharfer dunkler Fleck. Um die sich abbildenden Wellen recht gleichmäßig zu machen, wurde der das photographische Papier (Bromsilber-Gelatine-Papier) tragende Zylinder durch ein Uhrwerk gedreht. Wegen des Details des Verfahrens verweisen wir auf die Abhandlungen von Krigar Menzel und Raps.

Um zu übersehen, in welcher Weise sich die Schwingungen darstellen wollen wir die Wellen bestimmen, wenn die Bewegung die vorhin untersuchte, also durch die Gleichung gegeben ist

$$y = a \sin \pi \frac{x}{l} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \frac{1}{4} a \sin 2\pi \frac{x}{l} \cos 4\pi \frac{t}{T} \\ + \frac{1}{9} a \sin 3\pi \frac{x}{l} \cos 6\pi \frac{t}{T}.$$

Wir wollen zunächst annehmen, es würden die Schwingungen der Saitenmitte graphisch dargestellt.

Für die Saitenmitte ist  $x = \frac{1}{2}l$ , somit für die Zeit  $t = 0$

$$y = a \sin \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4} a \sin \pi + \frac{1}{9} a \sin \frac{3}{2}\pi = a - 0,111 a.$$

Man sieht sofort, daß die Saitenmitte die Schwingungen der Periode  $\frac{1}{2}T$  gar nicht erkennen läßt, da die Saitenmitte für diese Schwingungen ein Knotenpunkt ist. Alle die Schwingungen, welche in dem Punkt

1) Krigar Menzel und Raps, Wiedem. Ann. 44. p. 623. 1891. ~~Abbild~~  
Schönrock, Bull. de l'Acad. de Petersb. 16. p. 125. 1902.

nen Bewegungen graphisch dargestellt werden, einen Knotenpunkt haben, wenn in der Darstellung nicht sichtbar sein. Die Saitenmitte kann also die ungradlinigen Schwingungen zeichnen.

Die Werte von  $y$  zur Zeit  $t$  erhalten wir aus der Gleichung

$$y = a \cos 2\pi \frac{t}{T} - 0,111 a \cos 6\pi \frac{t}{T}.$$

Die nach dieser Gleichung für die einzelnen Zehntel  $T$  berechneten Werte von  $y$  sind unter Voraussetzung  $a = 1$  folgende. Für

$t = 0$	$0,1 T$	$0,2 T$	$0,3 T$	$0,4 T$	$0,5 T$	$0,6 T$
$-0,889,$	$0,843,$	$0,399,$	$-0,399,$	$-0,843,$	$-0,889,$	$-0,843,$
	$t = 0,7 T$	$0,8 T$	$0,9 T$			
	$y = -0,399,$	$0,399,$	$0,843.$			

Fig. 274.

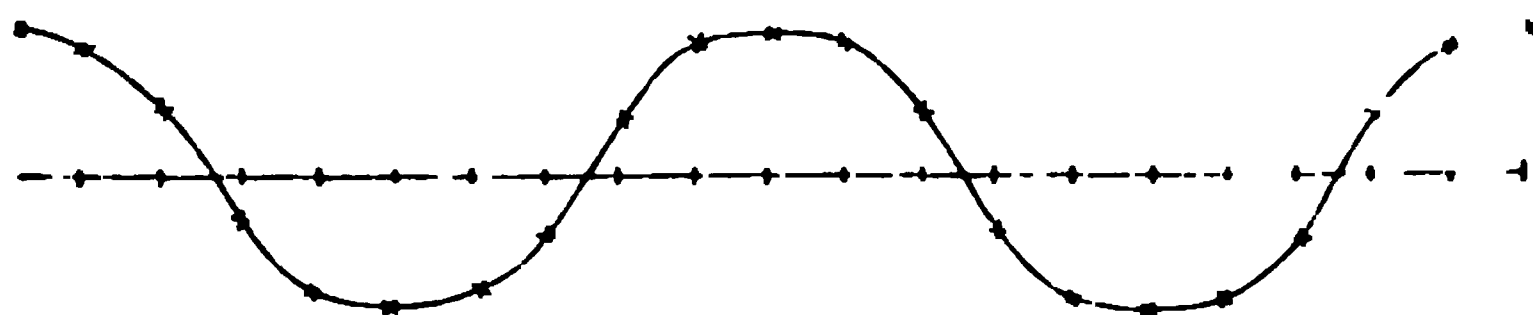


Fig. 275.

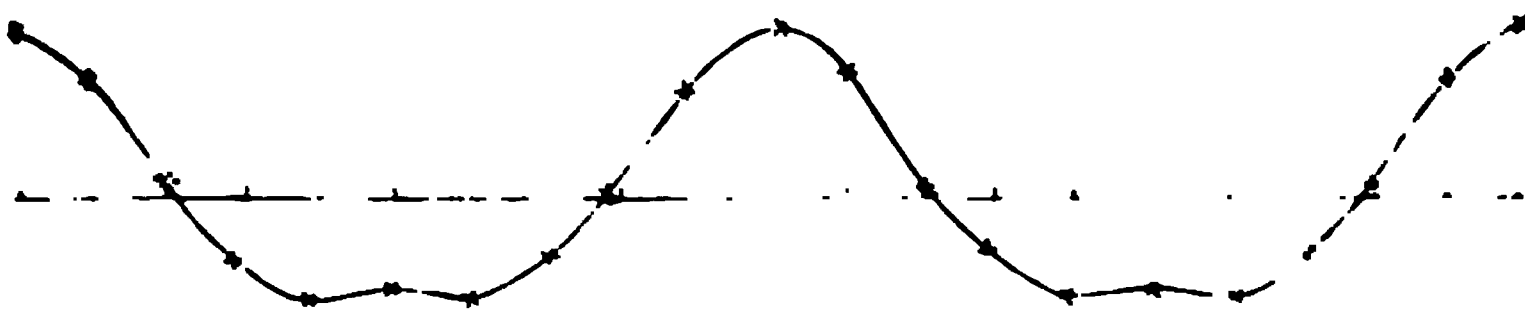


Fig. 276.

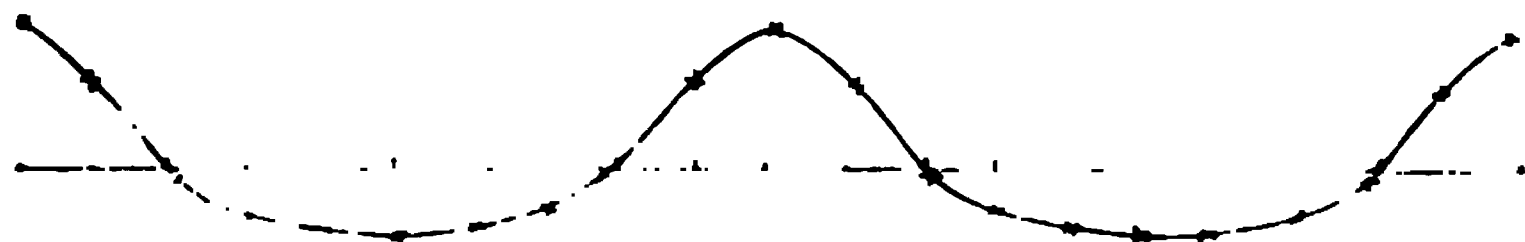


Fig. 274 stellt die Wellenlinie, die durch Aufzeichnung der Saitenmitte sich ergibt, dar.

In den äußersten Lagen bleibt die Saitenmitte 0,2 der Schwingungsdauer hindurch fast in Ruhe und geht in 0,3 der Schwingungsdauer von einer äußersten Lage zu der andern über.

Läßt man die Bewegung des Punktes in 0,3 der Saitenlänge sich bilden, so wird die Gleichung der Welle

$$y = 0,809 \cos 2\pi \frac{t}{T} + 0,238 \cos 4\pi \frac{t}{T} + 0,034 \cos 6\pi \frac{t}{T}.$$

Die Werte werden für

$t = 0$	$0,1 T$	$0,2 T$	$0,3 T$	$0,4 T$	$0,5 T$	$0,6 T$
$-1,081,$	$0,783,$	$0,030,$	$-0,414,$	$-0,637,$	$0,605,$	$-0,637,$
	$t = 0,7 T$	$0,8 T$	$0,9 T$			
	$y = -0,414,$	$0,030,$	$0,783.$			

Fig. 275 zeigt diese Welle; sie fällt von der einen äußersten Lage rasch ab zur andern, bleibt in dieser ein Fünftel der ganzen Schwingungszeit und steigt rasch wieder zu der andern äußersten Lage.

Fig. 276 zeigt die Form der Welle, wenn die Schwingungen der Stelle 0,2 der Saitenlänge aufgezeichnet werden. Die Zahlenwerte für die Zehntel der Schwingungsperiode sind:

$t = 0$	$0,1 T$	$0,2 T$	$0,3 T$	$0,4 T$	$0,5 T$	$0,6 T$
$y = 0,93,$	$0,52,$	$- 0,08,$	$- 0,28$	$- 0,38,$	$- 0,45,$	$- 0,38.$
	$t = 0,7 T$	$0,8 T$	$0,9 T$			
	$y = - 0,28,$	$- 0,08,$	$0,52.$			

Man wird die verschiedenen Formen je nach der Stelle der Saite, welche ihre Schwingungen abbildet, stets durch die Überlegung erhalten, daß diejenigen Schwingungen, welche an der betreffenden Stelle einen Knotenpunkt haben, in der Figur gar nicht, diejenigen, welche an derselben ein Schwingungsmaximum haben, am stärksten vertreten sind.

Weiter erkennt man, daß in der schwingenden Saite Schwingungen überhaupt nicht vorkommen können, welche an der Stelle der Erregung einen Knotenpunkt haben, da die Stelle der Erregung notwendig eine Bewegung annehmen muß, dort also kein Knotenpunkt entstehen kann.

Das zuerst von Lissajous<sup>1)</sup> konstruierte Vibrationsmikroskop benutzt zur Erkennung der Schwingungen ein anderes Mittel. Sieht man durch eine ruhende Lupe einen ruhenden glänzenden Punkt an, so erscheint der letztere in Ruhe; wird aber die Lupe rasch bewegt, so scheint sich der Punkt in einer der Bewegungsrichtung der Lupe parallelen Richtung zu bewegen, eine Erscheinung, die wir in der Lehre vom Licht besprechen und erklären werden. Wird deshalb eine solche Lupe in eine einfach schwingende Bewegung versetzt, so scheint der Punkt in derselben Richtung hin und her zu schwingen und man sieht statt des Punktes eine glänzende Linie. Wird nun der Punkt gleichzeitig in einer zu der erstern senkrechten Richtung bewegt, so kombiniert sich die wirkliche Bewegung mit der scheinbaren, und man sieht den Punkt die Kurve beschreiben, welche sich als die resultierende der beiden einzelnen Bewegungen nach den Sätzen des § 133 ergibt.

Die Form, welche von Helmholtz<sup>2)</sup> dem Vibrationsmikroskop gegeben, zeigt Fig. 277. Die zur Beobachtung dienende Lupe ist an dem Ende einer Zinke der Stimmgabel  $G$  befestigt; dieselbe besteht aus Sammellinsen, wie sie als Objektivlinsen von Mikroskopen gebraucht werden. In der Öffnung der Metallplatte, welche die Stimmgabel trägt, ist ein Rohr  $M$  angebracht, in welchem sich eine Okularlinse befindet und die so eingestellt wird, daß man, während die Stimmgabel nicht schwingt, den auf dem schwingenden Körper angebrachten glänzenden Punkt scharf sieht. Durch den Elektromagnet  $E$ , der durch intermittierende elektrische Ströme periodisch erregt wird, wird die Stimmgabel in vertikale Schwingungen versetzt. Der Körper, etwa eine Saite, wird dann vor dem Mikroskop so aufgestellt.

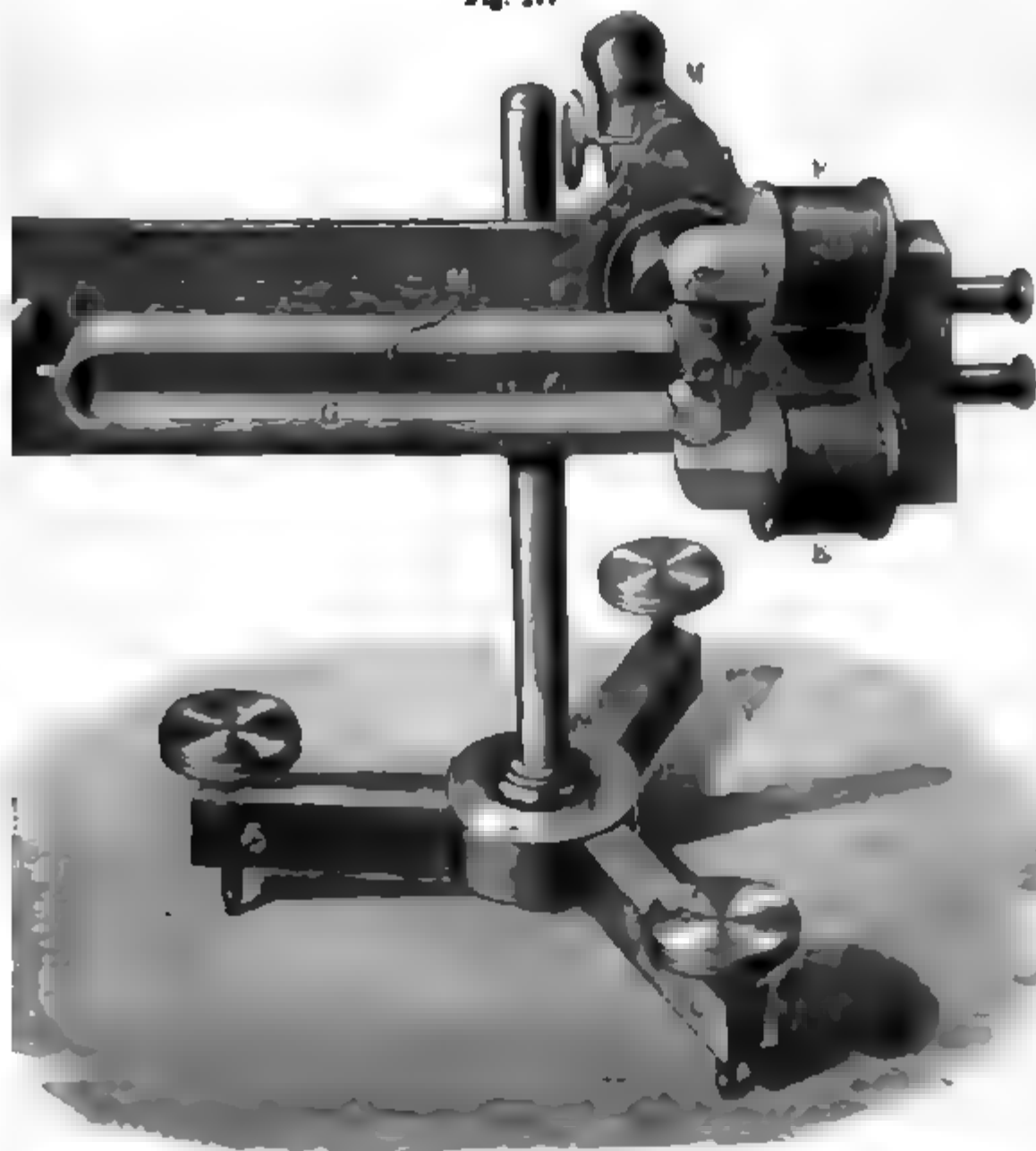
1) Lissajous. Ann. de chim. et de phys. 51. (3.) p. 147. 1857.

2) von Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863 p. 138.

r in horizontaler Richtung schwingt, und auf demselben gerade vor Mikroskop etwa durch Aufkleben eines Stärkekörnchens ein glänzenpunkt markiert.

Helmholtz<sup>1)</sup> hat über die zusammengesetzten Schwingungen der , wenn sie geschlagen oder gezupft werden, ausführliche theoretische experimentelle Untersuchungen angestellt. Als allgemeines Resultat sich dabei ergeben, daß die Intensität und Anzahl der in den zusammen-

Fig. 377



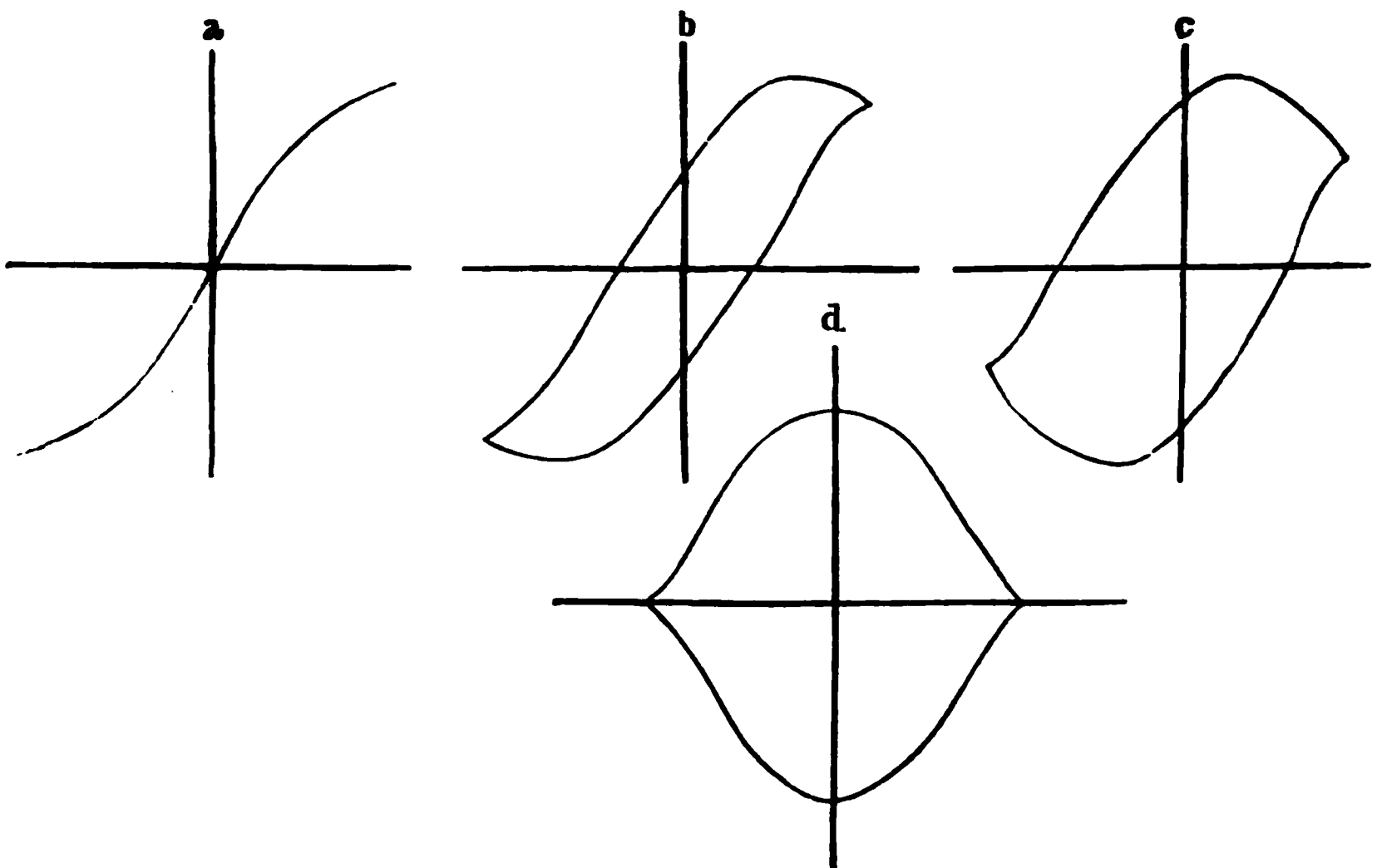
ten vorhandenen Einzelschwingungen außer von der Stelle, wo die angeschlagen ist, von der Art und Dauer des Anschlags, sowie von iche, Steifigkeit und Elastizität der Saite abhängt. Wir werden auf Fragen im nächsten Abschnitte nochmals zurückkommen (Man sehe .)

Sehr viel komplizierter sind die Schwingungen einer Saite, wenn die nicht geschlagen oder gezupft, sondern mit einem Bogen gestrichen

<sup>1)</sup> Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen Braunschweig 1863, p 128ff.  
<sup>2)</sup> Man sehe auch Braun, Über den Einfluß von Stetigkeit, Befestigung amplitude auf die Schwingungen der Saiten Poggend. Ann 147. 1872.

wird. Helmholtz<sup>1)</sup> hat das Vibrationsmikroskop vorzugsweise benutzt, um die Schwingungen einer Violinsaite zu studieren, welche in gewöhnlicher Weise in der Nähe des Steges mit dem Bogen gestrichen wird. Die Schwingungsfigur, welche die Mitte der Saite dann zeigte, wenn die Saite einen reinen vollen Ton gab, ein Beweis, daß die Schwingungen ganz regelmäßig waren, ist in Fig. 278 abgebildet für den Fall, daß die Schwingungszahlen der Saite und der Gabel ganz genau gleich waren. Fig. 278a zeigt die Figur, wenn die Schwingungen ohne Phasendifferenz stattfanden, 278b wenn die vertikal schwingende Gabel  $\frac{1}{12}$ , 278c wenn sie  $\frac{2}{12}$ , 278d wenn sie  $\frac{3}{12}$  Schwingung voraus ist. Dabei ist die Bewegung als ohne Phasendifferenz vorausgesetzt, wenn dieselbe gleichzeitig nach rechts und oben geht, und angenommen, daß beide Amplituden gleich sind. Die Figuren

Fig. 278.



zeigen ohne weiteres, daß die Schwingung der Saite keine einfache ist, denn dann müßten nach § 132 die Fig. 278a eine gerade um  $45^\circ$  gegen die horizontale geneigte Linie, b und c Ellipsen, d ein Kreis sein. Welcher Art die Bewegung der Saite hiernach ist, das ergibt die Untersuchung, wie die Bewegung beschaffen sein muß, welche mit einer einfachen Schwingung zusammengesetzt obige Schwingungsfiguren liefert. Dabei ergibt sich das überraschende Resultat, daß die Saite zwischen ihren äußersten Lagen sich mit ganz konstanter Geschwindigkeit hin und her bewegt. Daß in der Tat obige Schwingungsfiguren aus einer vertikalen einfachen Schwingung und einer horizontalen mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und hergehenden Bewegung sich ergeben, das zeigt die Konstruktion Fig. 279a, welche die Fig. 278a und b, und Fig. 279b, welche Fig. 278c und d liefert. Die Konstruktion ist der in § 126 angewandten ganz analog. Um die einfachen Schwingungen in ihrer einzelnen Phase darzustellen, ist

1) Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 148.



den Mittelpunkt  $O$  mit der Amplitude der Schwingungen ein Kreis gezogen und dieser in zwölf gleiche Teile geteilt. Entsprechend der Gleichung

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

ben dann auf dem vertikalen Durchmesser die Sinus dieser Bögen  $Oa, O\beta \dots$  von dem Vibrationsmikroskope in  $\frac{1}{12}T, \frac{2}{12}T \dots$  zurückgelegten Wege, so  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  die Lage des einfach schwingenden Punktes in den angegebenen Momenten. Der horizontale Durchmesser ist in sechs gleiche Teile teilt, so daß  $a, b, c$  die Lage des mit gleichförmiger Bewegung horizontal schwingenden Punktes nach  $\frac{1}{12}T, \frac{2}{12}T \dots$  angibt. Bewegt sich der Punkt nach beiden Richtungen, so ist die Lage, wenn keine Phasendifferenz vorhanden ist, zu den Zeiten  $\frac{1}{12}T, \frac{2}{12}T \dots$  durch  $O, \alpha a, \beta b$  usw. gegeben, wenn die Phasendifferenz  $\frac{1}{12}T$  beträgt, durch  $\alpha, \beta a, \gamma b, \delta c$  usw., er ist  $\alpha b$  der vertikalen jedesmal  $\frac{1}{12}$  voraus. Die Verbindungslinien der so er-

Fig. 279a.

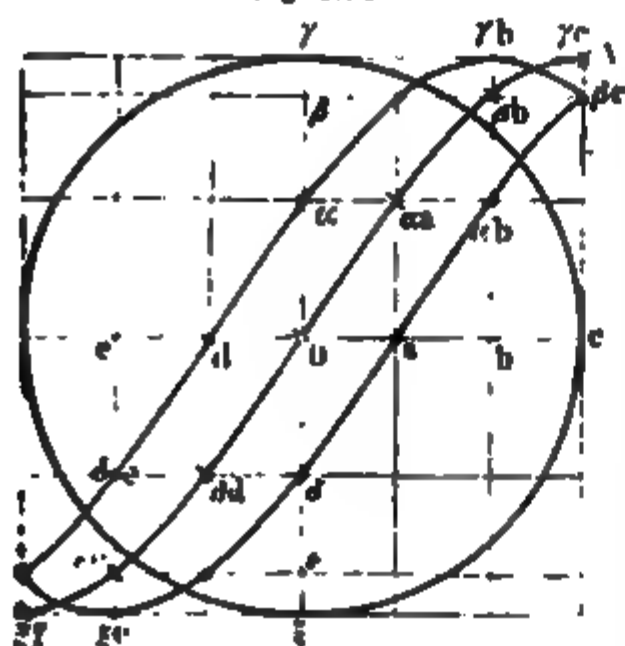
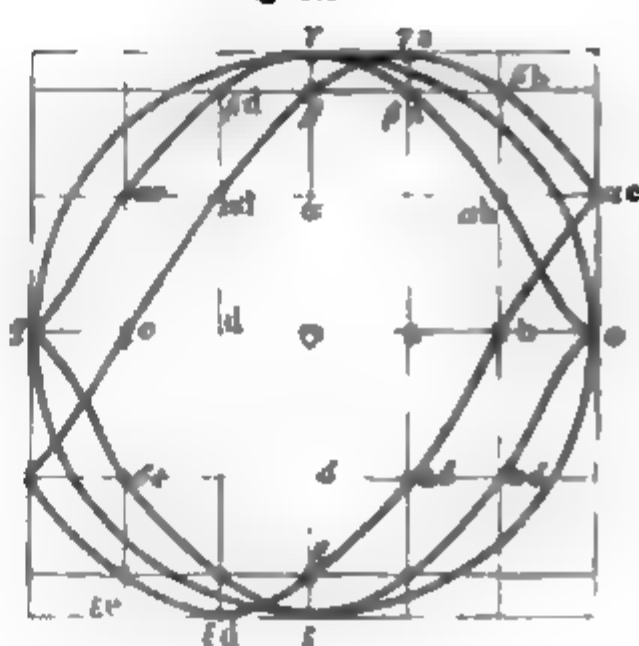


Fig. 279b.



halten einzelnen Punkte geben dann die Bahn desselben, und man sieht, daß die so in Fig. 279 konstruierten Kurven mit den in Fig. 278 abgeleiteten identisch sind.

Auch die graphische Methode zeigt, daß die Mitte einer an ihrem Ende gestrichenen Saite mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und hergeht. Die Schwingungskurven müssen in dem Falle gegen die horizontale Richtung geneigte auf- und absteigende gerade Linien sein. Fig. 280a zeigt die Abbildung der von Krüger Menzel und Raps<sup>1)</sup> photographierten Schwingungskurven der Saitenmitte, wenn die Saite in  $\frac{1}{13}$  ihrer Länge gestrichen wurde. Auch die andern Punkte der Saite bewegen sich mit gleichförmiger Bewegung, doch ist der Anstieg, das heißt wenn die Saite im streichenden Bogen folgt, ein langsamerer als die Rückkehr, das heißt, wenn sie von dem streichenden Bogen losgelassen wieder gegen ihre Gleichgewichtslage schwingt; die Fig. 280b zeigt die von dem Punkte  $\frac{1}{3}$ , c die

1) Krüger Menzel und Raps, Wiedem Ann 44. p 623 1891

von  $\frac{1}{4}$ , d die von  $\frac{1}{6}$ , e die von  $\frac{1}{7}$ , f die von  $\frac{1}{10}$  der Saitenlänge beschriebene Kurve, immer, wenn in  $\frac{1}{15}$  der Saitenlänge gestrichen wurde.

Der Mechanismus der Erregung einer Saite durch das Streichen eines durch aufgestrichenes Harz klebrig gemachten Bogens läßt eine solche Bewegung der Saite voraussehen. Der angestrichene Punkt der Saite klebt an den harzigen Bogenhaaren; er folgt deshalb dem Bogen, der mit gleichförmiger Geschwindigkeit an der Saite her gezogen wird. Bei der mit

Fig. 280 a

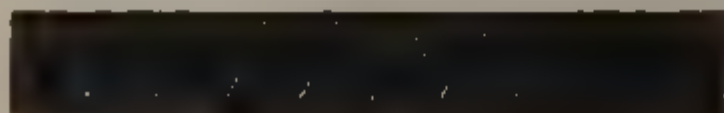


Fig. 280 b



Fig. 280 c

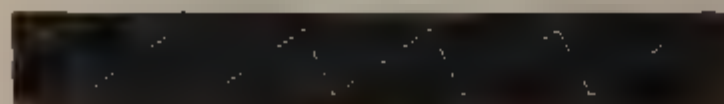


Fig. 280 d



Fig. 280 e



Fig. 280 f



war, die sie ursprünglich hervorrief. Der Bogen, dessen Bewegung ein periodisches an sich hat, tut, wie Krigar Menzel und Rapschitz ausdrücken, jetzt zu der Bewegung gar nichts hinzu, als daß er durch den klebrigen Zwang die Bewegung nur ebenso wieder verstärkt, als an der Abgabe der Bewegung an den festen Enden, die ja nicht absolut fest, geschwächt war.

Welche Schwingungen in den verschiedenen in der Praxis gebrachten Erregungen der Saiten in denselben vorhanden sind, werden wir § 11 besprechen.<sup>1)</sup>

1. Die Schwingungen geschlagener Saiten hat H. Kaufmann, *Wiener Anz.* 54 p. 675 1895, jene elektromagnetisch bewegter G. Klinkert, *Wiener Anz.* 64 p. 849 1898 nach der Methode von Krigar Menzel und Rapschitz untersucht.

wachsender Elongation des Punktes wachsender Spannung der Saite reißt sich die Saite endlich los und gleitet mit starker Reibung gegen den Bogen, deshalb mit konstanter Geschwindigkeit am Bogen zurück, bis sie wieder getaßt und wieder wie zuerst hinausgeführt wird.

Die Bewegung der Saite ist demnach zunächst eine erzwungene, das Resultat ist aber doch eine zusammengesetzte Form der der Saite natürlich zukommenden Schwingungen. Denn jede der durch den Bogen einmal erzwungenen Bewegungen pflanzt sich auf der Saite fort, und wird an den Enden reflektiert. Die an den Enden reflektierten Schwingungen setzen sich dann zu den in der Saite möglichen stehenden Wellen zusammen. Wenn sich die Schwingungen nach der Reflexion an der Streichen wieder treffen, setzen sie sich derselben periodischen Schwingung wieder zusammen, wie es

## Drittes Kapitel.

## Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

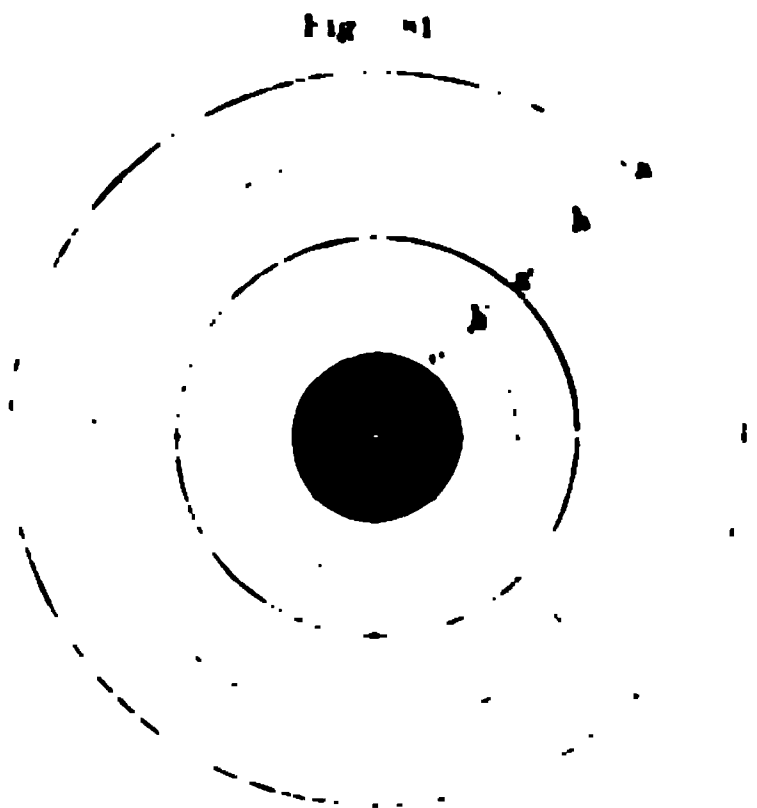
## § 149.

**Longitudinale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen.** Gase und Flüssigkeiten haben, wie wir sahen, keine selbständige Gestalt; in ihnen können daher infolge der Elastizität keine schwingenden Bewegungen entstehen, welche mit einer Gestaltsänderung des Körpers verbunden sind, wie transversalen Schwingungen. Da aber die Flüssigkeiten ein selbständiges Volumen haben und, wie wir früher sahen, elastisch sind, und da auch die Luft infolge des Druckes, unter dem sie an der Erdoberfläche steht, eine bestimmte Dichtigkeit und Elastizität hat, so können in beiden longitudinalen Wellen bestehen und sich fortpflanzen.

Da das Wasser sowohl als die Luft, als Typus der tropfbar und elastisch flüssigen Körper, homogen und isotrop sind, so müssen nach dem Oben die an einer Stelle im Innern derselben erregten Wellen sich in runder Form von Kugeln ausbreiten.

Um von der Entstehung und Fortpflanzung dieser Wellen ein deutliches Bild zu erhalten, denken wir uns eine Kugel (*Fig. 281*) im Innern der Flüssigkeit in longitudinale Schwingungen versetzt, so daß also die Kugel hin und her in rascher Folge abwechselnd vergrößert und verkleinert wird. Eine Vergrößerung der Kugel wird alle die Kugel umgebenden Flüssigkeitsteile in der Richtung der Radien fortstoßen, also werden die Teilchen eine rings um die Kugel fortgerichtete Bewegung erteilen. Infolge dieser nach außen gerichteten Bewegung tritt rings um die Kugel eine Verdichtung der Flüssigkeit ein, und infolge dieser Verdichtung übt diese Flüssigkeitsschicht auf die folgenden Schichten einen stärkern Druck von innen nach außen aus, als umgekehrt die umgebende Flüssigkeit von außen nach innen entgegenedrückt. Daraus ergibt sich an, daß diese fortschreitende Bewegung sich rings um die Kugel immer weiter ausbreitet.

Hat die Kugel das Maximum ihrer Ausdehnung erreicht, so zieht sie sich wieder zusammen. In den durch diese Zusammenziehung entstehenden leeren Raum wird wegen des Druckes der Umgebung die Flüssigkeit von allen Seiten her sich hineinbegeben; die Flüssigkeitsschicht erhält also rings um die Kugel eine rückgängige Bewegung. Dadurch tritt rings um die Kugel eine Verdünnung ein, und wegen dieser Verdünnung erhalten auch die folgenden Schichten eine rückgängige Bewegung. Die Verdünnung pflanzt somit die rückgängige Bewegung auf die Verdichtung und



fortschreitende Bewegung folgend, somit gerade so um die Kugel fort wie die letztere.

Durch die Vibration der Kugel gelangen also zunächst die Flüssigkeitsteile, welche unmittelbar an der Kugel anliegen, in eine schwingende Bewegung und diese schwingende Bewegung pflanzt sich auf jedem Radius einer Kugel, die wir um den Mittelpunkt der Kugel  $C$  uns gelegt denken, fort wie die Schwingungen in den früher betrachteten Punktreiben, wie die longitudinalen Schwingungen in den Stäben der festen Körper.

Die longitudinalen Schwingungen in einer Flüssigkeit, sei sie tropfbar oder elastisch flüssig, sind also ein Fall der früher betrachteten Fortpflanzung einer Wellenbewegung in einem elastischen Punktsysteme. Bezeichnen bei einer kontinuierlichen Schwingung die Kreise  $a$  und  $a'$  die Stellen, in denen die Punkte in den gleichen Phasen der Bewegung sind, wo sie z. B. ihre fortschreitende Bewegung, in  $a$  zum ersten Male, in  $a'$  zum zweiten Male beginnen, so ist der Abstand der beiden Kreise eine Wellenlänge, und auf der Strecke  $aa'$  sind alle Oszillationsphasen vertreten. Der Kreis  $b$  bezeichnet dann alle die Punkte rings um die Kugel, welche eine halbe Oszillation zurückgelegt haben und gerade im Begriffe sind, von der Gleichgewichtslage aus ihre rückschreitende Bewegung zu beginnen. Bezeichnen wir demnach auch hier jene Strecke der Radien, in denen sich die Flüssigkeitsteilchen auf der einen Seite ihrer Gleichgewichtslage befinden, als Wellenberg, jenen Teil, wo sie sich auf der andern befinden, als Wellental, so sind die Strecken  $ba$ ,  $b'a'$  Wellenberge, die Strecken  $ba'$ ,  $b'c$  Wellentäler.<sup>1)</sup>

Da diese longitudinalen Wellen nur in der Elastizität der Flüssigkeiten ihren Grund haben und durch die zwischen den einzelnen Flüssigkeitsteilchen tätige elastische Kraft fortgepflanzt werden, so können wir zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unmittelbar unsere früher erhaltene Gleichung anwenden:

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}},$$

worin  $e$  die elastische Kraft und  $d$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit in der früher erwähnten Weise bedeuten.

Um demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu erhalten, haben wir nur diese beiden Größen für die jetzt vorliegenden Fälle zu bestimmen. Beginnen wir mit den tropfbaren Flüssigkeiten.

Die Größe  $e$  ist, wie wir sahen, die Kraft, mit der die einander genäherten Teilchen sich abstoßen, die entfernten sich anziehen, wenn die Verschiebung der Teilchen der Einheit gleich geworden ist, mit der wir also die Größe der Verschiebung multiplizieren müssen, um die einer vorhandenen Verschiebung entsprechende Anziehung oder Abstoßung zu erhalten. Denken wir uns eine Flüssigkeitssäule in einem Gefäße eingeschlossen, dessen Wände sich nicht ausdehnen können, und komprimieren wir diese Flüssigkeit etwa parallel der Längsachse des Gefäßes, so wird die

1) An dieser Auffassung der Wellenbewegung in Gasen brauchen wir auch infolge der dynamischen Gastheorie nichts zu ändern, da wir im vorigen Abschnitt sahen, daß den Gasmolekülen mitgeteilte Bewegungen sich einfach in den Molekularbewegungen superponieren.

der Kompression entsprechende elastische Kraft gleich jener sein, welche die schwingende Bewegung veranlaßt und fortpflanzt, da auch bei dieser nur eine Zusammendrückung und Ausdehnung nach der Richtung der Radien stattfindet, weil jeder parallel einem Radius liegende Flüssigkeitsfaden von der umgebenden Flüssigkeit eingeschlossen ist.

Ist  $v$  das Volumen der in dem Gefäße eingeschlossenen Flüssigkeit,  $\kappa$  der Kompressionskoeffizient der Flüssigkeit, wenn der Druck für die Flächeneinheit um die Größe  $p$  zunimmt, so ist die einer Volumverminderung entsprechende Druckzunahme  $dp$  durch die Gleichung gegeben

$$\frac{dv}{v} = \kappa \frac{dp}{p}$$

oder

$$dp = \frac{p}{\kappa} \frac{dv}{v}.$$

Der Quotient  $\frac{dv}{v}$  gibt uns die Volumverminderung der Flüssigkeit in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens. Da nun der Voraussetzung nach die Volumverminderung nur durch eine Verkürzung der Flüssigkeitssäule parallel einer Richtung, wie bei den longitudinalen Schwingungen, stattfindet, so gibt uns der Quotient gleichzeitig die Verschiebung der Flüssigkeitsteile gegeneinander gemessen nach ihrem ursprünglichen Abstand. Da wir weiter wissen, daß die durch eine Kompression geweckte elastische Kraft stets gleich ist der äußern dieselbe bewirkenden Kraft, so folgt, daß die Kraft gleich ist der zwischen den Molekülen in der Flächeneinheit tätigen Kraft, wenn dieselbe um die Größe  $\frac{dv}{v}$ , dieselbe gegeben in Bruchteilen des ursprünglichen Abstandes, einander genähert sind. Daraus folgt, daß die Größe  $c$  gegeben ist durch

$$c = \frac{p}{\kappa} q,$$

wo wir mit  $q$  den Querschnitt der betrachteten oder schwingenden Flüssigkeitssäule bezeichnen.

Die Größe  $d$  ist die Masse der Längeneinheit der schwingenden Flüssigkeitssäule, es ist somit, wenn  $s$  das spezifische Gewicht derselben bedeutet,

$$d = sq.$$

Wir erhalten demnach für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung

$$c = \sqrt{\frac{p}{\kappa s}}.$$

oder wenn wir den der Druckeinheit entsprechenden Kompressionskoeffizienten mit  $\kappa_1$  bezeichnen,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa_1 s}}.$$

Der reziproke Wert von  $\kappa_1$  ist nach den Entwicklungen des § 64 der Kompressibilitätskoeffizient der Flüssigkeit  $K$  in denjenigen Druckeinheiten, welche die Werte  $\kappa_1$  zugrunde liegen, so daß wir für die in Flüssigkeiten sich

fortpflanzenden longitudinalen Wellen genau zu demselben Ausdruck gelangen wie für die longitudinalen Wellen in festen Körpern

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Da wir die Masse der Längeneinheit der Flüssigkeitsschicht ihrem Gewichte gleich gesetzt haben, muß  $E$  in den Einheiten des absoluten Systems gegeben werden.

Im § 64 haben wir für einige Flüssigkeiten nach den Versuchen von Grassi u. a. die Werte von  $E$  in Kilogrammen für das Quadratmillimeter ausgedrückt. Um dieselben in das *C. G. S.*-System zu übertragen, haben wir die dort angegebenen Werte mit 98 100 000 zu multiplizieren. Wir gaben damals für Wasser von der Temperatur 4° C.

$$E = 205.$$

Der Wert wird im *C. G. S.*-System

$$E = 201,1 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2}.$$

Da in diesem System die Längeneinheit das Zentimeter, somit  $s$  die Masse eines Kubikzentimeters Wasser bei 4° ist, so ist  $s = 1$ , und es wird in Zentimetern

$$c = \sqrt{201,1 \cdot 10^8} = 141\,800^{\text{cm}}$$

oder in Metern  $c = 1418^{\text{m}}$ .

Für Quecksilber ergibt sich aus dem § 64 angegebenen Werte von  $E = 2582$

$$E = 2582 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2}.$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers ist 13,5959, also

$$c = \sqrt{\frac{2582 \cdot 10^8}{13,5959}} = 138\,000^{\text{cm}} = 1380^{\text{m}}.$$

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, haben Colladon und Sturm<sup>1)</sup> für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Wasser ganz der Theorie entsprechende Werte gefunden, nämlich für die Temperatur 8° den Wert 1435<sup>m</sup>.

Wir können auch dem Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Flüssigkeiten dieselbe zweite Form geben, die wir für die festen Körper ableiteten. Wir denken uns ein Kubikzentimeter Flüssigkeit in einem unausdehnenden Würfel und üben auf die obere Fläche der Flüssigkeit einen Druck durch ein Kubikzentimeter derselben Flüssigkeit. Der von dieser Flüssigkeit ausgeübte Druck ist in den Einheiten des *C. G. S.*-Systems gleich  $gs$ . Die dadurch eintretende Volumverminderung in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens ist

$$\delta = \kappa_1 gs = \frac{gs}{E}.$$

1) Colladon und Sturm, Ann. de chim. et de phys. 36. 1827. Poggend Ann. 12. 1828.

Daraus folgt

$$\frac{E}{\kappa} = \frac{g}{\delta}$$

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen ist also die Quadratwurzel aus der Beschleunigung beim freien Fall dividiert durch die Quadratwurzel aus der Volumverminderung, welche die Volumeneinheit durch einen Druck erfährt, der dem Gewichte der Volumeinheit der Flüssigkeit entspricht, oder wie man sich kurz ausdrückt, welche die Volumeneinheit durch ihr eigenes Gewicht erfährt.<sup>1)</sup>

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Gasen erhalten wir, wenn wir in dem ersten für die Flüssigkeiten abgeleiteten Ausdrucke  $\kappa = 1$  setzen; denn nach dem Mariotteschen Gesetze ist die Volumverminderung  $dr$  entsprechende Druckvermehrung  $dp$  durch die Gleichung gegeben

$$\frac{dr}{v} = \frac{dp}{p}.$$

Denn haben wir ein Volumen  $v$  eines Gases unter dem Drucke  $p$  und wächst der Druck um  $dp$ , so nimmt das Volumen um  $dr$  ab, so daß nach dem Mariotteschen Gesetze

$$pv = (p + dp)(v - dr) = pv + vdp - pdr - dpdr.$$

Bei den hier betrachteten schwingenden Bewegungen ist  $dr$  so klein, daß wir  $dpdr$  gleich Null setzen dürfen, dann folgt aber aus dieser Gleichung

$$vdp - pdr = 0 \quad \text{oder} \quad dp = p \frac{dr}{v}.$$

Wir haben somit für die Größe  $c$  in jedem Falle den Druck einzusetzen, unter welchem das Gas augenblicklich steht. Bedeutet demnach  $\kappa$  jetzt das spezifische Gewicht des Gases, so wird

$$c = \sqrt{\frac{p}{\kappa}}.$$

Ist  $\kappa'$  die Dichtigkeit des Gases unter dem Druck  $p'$  der Atmosphäre, ist nach dem Mariotteschen Gesetze

$$\frac{p}{\kappa} = \frac{p'}{\kappa'}.$$

mit

$$c = \sqrt{\frac{p'}{\kappa'}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen hängt demnach, da die Dichtigkeit und Elastizität des Gases sich im gleichen Verhältnis ändern, nicht von dem Drucke, unter welchem das Gas steht, ab, sondern ist für alle Drucke dieselbe.

<sup>1)</sup> Man sehe auch *Poisson*, *Traité de mécanique*, livre sixième, chap. II. 167.



An dem Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Gasen müssen wir eine Korrektur anbringen, die, wie wir später in der Wärmelehre nachweisen werden, ihren Grund darin hat, daß jede Kompression der Gase eine Erwärmung, jede Ausdehnung eine Abkühlung zur Folge hat. Diese Erwärmung und Abkühlung bewirkt, daß von den Stellen der Verdichtung die Moleküle mit größerer Kraft zu denen der Verdünnung getrieben werden, so zwar, daß die elastische Kraft im Verhältnis 1 zu  $k$ , wenn  $k$  der Quotient aus der spezifischen Wärme des Gases bei konstantem Druck und derjenigen bei konstantem Volumen ist, vergrößert wird.<sup>1)</sup> Wir müssen deshalb den vorhin bestimmten Wert von  $c$  mit  $\sqrt{k}$  multiplizieren und erhalten somit

$$c = \sqrt{\frac{p'}{s'}} k.$$

Bei der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Gasen ist ferner darauf zu achten, daß die Dichtigkeit derselben bei einem gegebenen Drucke wesentlich von der Temperatur abhängig ist. Bezeichnen wir die Dichtigkeit des Gases bei der Temperatur des schmelzenden Eises mit  $s_0$ , so ist bei einer Temperatur  $t$ , dieselbe nach Graden der hunderttheiligen Skala gemessen,

$$s' = \frac{s_0}{1 + 0,003\,67\,t}.$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bei der Temperatur  $t$  erhalten wir demnach

$$c = \sqrt{\frac{p'k}{s_0}} (1 + 0,003\,67\,t).$$

Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft ist unter dem Drucke einer Atmosphäre und bei der Temperatur  $0^\circ$  gleich 0,001 293. Für Luft ist der Wert von  $k$ , wie wir in der Wärmelehre zeigen werden, 1,405. Der Druck der Atmosphäre ist in den Einheiten des C. G. S.-Systems

$$p' = 10\,136 \cdot 10^2 \frac{G}{CS^2}.$$

Wir setzen zur Bestimmung von  $p'$  den Normaldruck zu Paris, also berechnet mit dem Pariser  $g$  ein, weil die Dichtigkeit  $s_0$  der Luft von Regnault zu Paris bestimmt ist. Mit diesen Werten wird

$$c = 33\,180 \sqrt{1 + 0,003\,67\,t} \text{ Cm} = 331,8 \sqrt{1 + 0,003\,67\,t} \text{ M}.$$

Für ein anderes Gas haben wir die betreffenden Werte von  $k$  und  $s_0$  einzusetzen; nennen wir das spezifische Gewicht des Gases bezogen auf Luft  $\sigma$ , so können wir für ein beliebiges Gas die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen schreiben

$$c = 331,8 \sqrt{\frac{k}{1,405 \cdot \sigma}} (1 + 0,003\,67\,t).$$

1) Man sehe im zweiten Bande den Paragraphen: Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen.

Bestätigungen dieser Ausdrücke werden wir bei Besprechung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Gasen kennen lernen.

### § 150.

**Stehende Wellen in Flüssigkeitszylindern.** Wenn man in ein zylindrisches Gefäß eine Flüssigkeit einschließt und man erregt an einer Stelle des Flüssigkeitszylinders eine schwingende Bewegung, so pflanzt sich dieselbe durch die Säule fort, wird an den Enden reflektiert und es entstehen durch Interferenz der direkten und reflektierten Welle stehende Schwingungen. Da wir auf die Wellenbewegung dieser Art nach dem vorigen Paragraphen unmittelbar unsere frühere Theorie der longitudinalen Schwingungen anwenden können, so haben wir für die Schwingungsdauer einer stehenden Welle den Ausdruck

$$T = 2L \sqrt{\frac{d}{c}} = \frac{2L}{c}$$

da wir haben nur die Länge  $L$  der stehenden Welle zu bestimmen, in welcher die Flüssigkeitssäule schwingt.

Wir können auch hier die Fälle unterscheiden, wo die Flüssigkeitssäule an beiden Seiten frei ist, oder wo sie an einem Ende frei ist, am andern befestigt. Ersteres ist dann der Fall, wenn wir eine Flüssigkeitssäule in einer heberförmigen an beiden Seiten offenen Glasröhre oder in einer in eine Flüssigkeitsmasse getauchten Glasröhre zum Schwingen bringen. Auch in dem letztern Falle ist die umgebende Flüssigkeit gewissermaßen weniger dicht als die in der Röhre eingeschlossene, da die Flüssigkeit außerhalb der Röhre bei einer an dem Ende der Röhre ankommenden Verdichtung nach allen Seiten und deshalb leichter ausweichen kann, als die Flüssigkeit in der Röhre, welche sich nur der Längsrichtung der Röhre nach bewegen kann. In diesen beiden Fällen tritt demnach eine Reflexion ohne Wechsel des Vorzeichens, ohne Verlust einer halben Wellenlänge ein.

Der zweite Fall ist vorhanden, wenn wir eine Flüssigkeitssäule in einer geraden unten geschlossenen Glasröhre zum Schwingen bringen, es tritt dann an der untern Grenze eine Reflexion mit Verlust einer halben Wellenlänge ein: ein ankommender Wellenberg wird als Wellental reflektiert.

Die Oszillationsdauern und Schwingungszahlen solcher Flüssigkeitszylinder ergeben sich daher unmittelbar wie diejenigen longitudinal schwingender Stäbe, wenn wir dasselbe Verfahren anwenden wie § 140. Für den beiden Enden freien Flüssigkeitszylinder von der Länge  $l$  wird

$$T = \frac{2l}{c}.$$

Die Länge der stehenden Welle ist gleich der Länge des Flüssigkeitszylinders, und daraus

$$N = \frac{c}{2l}.$$

Für den zweiten Fall wird

$$T = \frac{4l}{c}.$$

die stehende Welle hat die doppelte Länge des Flüssigkeitszylinders, die Schwingungsdauer ist die doppelte des vorigen Falles. Die Schwingungszahl ist die Hälfte

$$N = \frac{c}{4l}.$$

Diese Zahlen entsprechen den langsamsten Schwingungen, welche die Flüssigkeitszylinder vollführen können. Auch hier können sich die Zylinder in schwingende Teile zerlegen, welche selbständig schwingen und wegen der geringern Länge größere Schwingungszahlen haben. Durch ein gleiches Verfahren, wie wir es im § 140 anwandten, findet man, daß die möglichen Schwingungszahlen einer an beiden Enden freien Flüssigkeitssäule sind

$$N = n \frac{c}{2l},$$

worin  $n$  jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann; und für die in einer geschlossenen Röhre enthaltene Flüssigkeitssäule

$$N = (2n - 1) \frac{c}{4l}.$$

Da die experimentelle Bestätigung dieser Gesetze hauptsächlich durch die von den Schwingungen der Flüssigkeit erzeugten Töne gegeben wird, so werden wir die Versuche von Cagniard Latour und Wertheim und ebenso die von Kundt und Lehmann erst im nächsten Abschnitte besprechen.

Luftsäulen, welche in Röhren eingeschlossen sind, können ebenfalls durch Erregung einer vibrierenden Bewegung an ihrem einen Ende in stehende Schwingungen versetzt werden. Sind die Röhren an dem einen Ende geschlossen, so tritt dort Reflexion mit Verlust einer halben Wellenlänge ein; sind sie offen, so tritt eine Reflexion an der umgebenden Luft ein ohne Verlust einer halben Wellenlänge, da die Luftteilchen außerhalb der Röhre nach allen Richtungen und somit freier beweglich sind als in der Röhre. Die an die Röhre angrenzende Luft ist somit gewissermaßen weniger dicht als jene in der Röhre. Die sich ergebenden Schwingungsdauern und Schwingungszahlen sind daher in offenen Röhren von der Länge  $l$ , für die langsamsten Schwingungen

$$T = 2l \sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{2l}{c},$$

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{2l}$$

und die überhaupt möglichen Schwingungen

$$N = n \frac{c}{2l}.$$

Für an dem einen Ende geschlossene Röhren erhalten wir statt dessen

$$T = 4l \sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{4l}{c},$$

$$N = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{4l}$$

und als mögliche Schwingungszahlen

$$N = (2n - 1) \frac{c}{4l}.$$

Wenn auch in den letzten Jahren die Gesetze der in Pfeifen schwingenden Luftsäulen durch manometrische Methoden in ausgedehnter Weise experimentell verfolgt sind, so wollen wir doch des historischen Ganges wegen diese Methode erst besprechen, wenn wir in den von offenen und gedeckten Pfeifen gelieferten Tönen die Gesetze dieser Bewegungen experimentell untersucht haben. Die manometrischen Methoden geben so eine schöne Bestätigung der auf akustischem Wege schon länger aufgefundenen Beziehungen.

Ebenso wie in Luftsäulen kann man auch plattenförmige Luftmengen in stehende Schwingungen versetzen, das heißt dünne Luftschichten, welche zwischen ebenen Platten eines festen Körpers, etwa zwischen zwei Glasplatten eingeschlossen sind, sowohl wenn man die Luftplatten seitlich fest begrenzt, das heißt die Ränder der beiden ebenen Platten, welche die Luftplatte einschließen, durch einen festen Rahmen verbindet, als wenn man sie seitlich unbegrenzt läßt. Die Untersuchung der schwingenden Bewegung solcher Platten hat ein großes Interesse, weil man die Theorie dieser Bewegungen vollständig durchführen kann. In einer ausführlichen theoretischen und experimentellen Untersuchung hat Kundt<sup>1)</sup> für die ganz geschlossenen, das heißt rings von einem festen Rande umgebenen Luftplatten die volle Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachgewiesen, während für die offenen, das heißt rings nicht mit einem festen Rand umgebenen Luftplatten sich Abweichungen zwischen der Theorie und der Erfahrung zeigen, wie wir sie im nächsten Abschnitt auch für die offenen Luftsäulen, die offenen Orgelpfeifen finden werden. Wir müssen uns hier begnügen, auf die interessante Arbeit von Kundt hinzuweisen, da eine Behandlung dieses speziellen Falles zu viel Raum in Anspruch nehmen würde.

### § 151.

**Transversale Wellen in Flüssigkeiten.** Außer den longitudinalen Schwingungen kann man den tropfbar flüssigen Körpern auch transversale Schwingungen erteilen. Die in einem Gefäße eingeschlossene Flüssigkeit hat nämlich eine ganz bestimmte Gleichgewichtslage, und die auf eine der Schwer- unterworfenen Flüssigkeit wirkenden Kräfte veranlassen, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene bildet. Wird das Gleichgewicht der Flüssigkeit an irgend einer Stelle gestört und dort eine Bewegung eingeleitet, so pflanzt sich die Gleichgewichtsstörung nach und nach auf andere Stellen der Flüssigkeit fort.

Wirft man einen Stein in eine ruhende Wassermasse, oder läßt man einen Tropfen auf die Oberfläche einer in einem weiten Gefäße befindlichen Flüssigkeit fallen, so sieht man bald die Flüssigkeit in einem Kreise rings um die getroffene Stelle wallförmig sich emporheben. Dieser Flüssigkeitswall breitet sich ringsum aus, an der Stelle aber, wo zuerst die Flüssigkeit

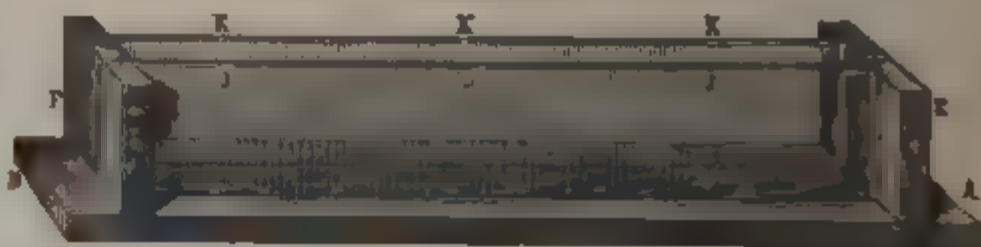
<sup>1</sup> Kundt, Poggend. Ann. 150 1873.

über das Niveau sich erhob, zeigt sich dann eine Vertiefung der Flüssigkeit. Sowie die wallförmige Erhöhung sich rings durch die Flüssigkeit ausbreitet, so auch diese Vertiefung. Meist zeigt sich auf eine solche Störung des Gleichgewichts nicht nur eine solche Erhöhung und Vertiefung, sondern mehrere, die nacheinander, abwechselnd eine Erhöhung und eine Vertiefung als ebenso viele Wellenberge und Wellentäler, sich über der Flüssigkeitsoberfläche verbreiten.

Daß wir es hier mit einer wirklichen Wellenbewegung, daß heißt mit einer hin und her gehenden Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, nicht mit einer fortschreitenden zu tun haben, ergibt sich aus den Versuchen der Gebrüder E. H. und W. Weber auf das entschiedenste<sup>1)</sup>

Um die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen zu untersuchen, bedienten sich die beiden Weber der Wellenrinne. Dieselbe besteht (Fig 282) aus einem zirka 1,6<sup>m</sup> langen geraden glatt gehobelten Brette aus Fichtenholz *AB*, auf dem in zwei tiefen Furchen zirka 15<sup>mm</sup> voneinander zwei dicke Glasscheiben fest eingefügt sind. Diese beiden Glasscheiben *J/J*, *KKK* werden außerdem durch die beiden senkrechten Bretter *E* und *F*, in welche sie auch eingefügt sind, festgehalten.

Fig. 282



Die Befestigung der Scheiben in den Fugen sind vollständig wasserdicht. Der schmale zwischen den beiden Glasscheiben und den Brettern eingeschlossene Raum von zirka 1,5<sup>m</sup> Länge, 15<sup>mm</sup> Breite im Lichten und 16<sup>cm</sup> Tiefe wird mit Wasser, Quecksilber, Milch usw., je nach Bedürfnis zu irgend einer Höhe angefüllt. Dabei werden die Glasscheiben, um ein Biegen oder Brechen derselben zu verhindern, durch mehrere feste hölzerne Gabeln oder Klammern zusammen gehalten.<sup>2)</sup>

Hat man die Wellenrinne bis zu irgend einer Höhe mit Wasser angefüllt, so hebt man an einem Ende derselben durch Aufsaugen in eine Glasröhre etwas Flüssigkeit in die Höhe und erzeugt, indem man die Flüssigkeit wieder niederfallen läßt, eine Welle, welche durch die Rinne fortschreitet.

Man sieht zunächst einen senkrechten Durchschnitt der errigten Welle durch die Glaswände und kann so die Gestalt der Wellen aufs genaueste bestimmen. Man sieht aber auch zugleich, wenn man in die Rinne kleine Bernsteinstückchen, von gleichem spezifischen Gewicht wie das Wasser bringt, und dann durch die Glaswände hindurch gegen das Licht sieht, die Bewegung dieser festen Teilchen und kann ihre Bahnen bestimmen.

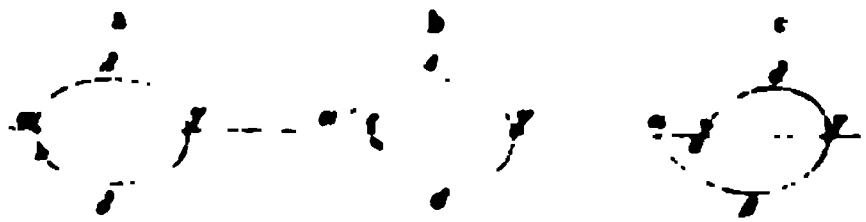
1, Wellenlehre, auf Experimente gegründet von den Brüdern E. H. Weber und W. Weber. Leipzig 1825.

2) Ebendasselbst p 105

da diese Teilchen genau dieselbe Bewegung haben wie die Wasserteilchen, an deren Stelle sie vertreten, so kann man dadurch die Bewegung der Flüssigkeit genau bestimmen.

Aus ihren mannigfachen Versuchen ersahen die Gebrüder Weber, daß die Flüssigkeitsteilchen wirklich keine fortschreitende, sondern nur hin und her gehende Bewegung bei Erregung einer Welle annehmen, und zwar, wenn die aufeinander folgenden Wellen eine gleiche oder fast gleiche Gestalt haben, daß dann die Teilchen in oder nahe der Oberfläche in geschlossenen, nahezu elliptischen Bahnen (Fig. 283a) bewegen. Bewegt sich durch die Rinne eine Welle von *B* nach *A* fort, und zwar vor dem Wellenberg voraus, so bewegen sich die Wasserteilchen, wenn der Berg über sie zieht, in dem Bogen  $\alpha\beta\gamma$  vorwärts, vorwärts, abwärts in derselben Richtung, in welcher der Berg vorübergeht. Folgt das Wellental, das ebenso tief ist als der Wellenberg hoch war, so bewegt sich das Teilchen weiter nach dem Bogen  $\gamma\delta\alpha$  nach  $\alpha$  zurück. Der senkrechte Abstand des höchsten Punktes  $\beta$  dieser Bahn von dem Niveau  $\alpha\gamma$  ist gleich der Höhe des Wellenberges und der des tiefsten Punktes  $\delta$  von  $\alpha\gamma$  gleich der Tiefe des Wellentales.

Fig. 283.



Geht das Wellental dem Wellenberge voraus, so bewegt sich das Teilchen zunächst durch  $\gamma\delta$  nach  $\alpha$  und dann durch den Bogen  $\alpha\beta\gamma$  in seine höhere Lage  $\gamma$  zurück. Die fortschreitende Bewegung ist unter dem Wellenberge stets der Richtung gleich, in welcher die Welle fortschreitet, in das Wellental dieser Richtung entgegengesetzt.

Die Schwingungsbahnen der Flüssigkeiten laufen aber nicht in sich selbst zurück, wenn die den Wellenbergen folgenden Täler mit den erstern aus der Richtung von gleicher Größe sind.

Ist das dem vorhergehenden Wellenberg folgende Wellental merklich kleiner, so wird die Bahn der Flüssigkeitsteilchen Fig. 283b, und ist das Tal, aber in der Richtung von *A* nach *B*, voraus und folgt ihm der kleinere Wellenberg, so wird die Bahn Fig. 283c, in beiden Fällen gelangt das Flüssigkeitsteilchen nicht zu seiner ursprünglichen Ruhelage  $\alpha$  zurück.

Die schwingende Bewegung der Flüssigkeitsteilchen beschränkt sich jedoch nicht auf die Teilchen in oder nahe der Oberfläche der Flüssigkeiten, sondern in sehr großen Tiefen unter der Oberfläche zeigen die Flüssigkeitsteilchen noch eine schwingende Bewegung. Die Versuche der Gebrüder Weber ergaben, daß in einer Tiefe, welche 350mal die Höhe der Wellen, das heißt den Abstand des höchsten Punktes des Wellenberges von dem tiefsten des Wellentales betrug, noch eine deutliche schwingende Bewegung stattfand. Indes zeigte sich ein merklicher Unterschied in den Bahnen der Teilchen. Während nämlich die Teilchen ganz nahe unter der Oberfläche kreisförmige Bahnen besaßen, wurde die vertikale Höhe der Ellipsen immer kleiner, je tiefer die Flüssigkeitsteilchen sich unter der Oberfläche befanden. In einer Tiefe, welche ungefähr das Hundertundzwanzigfache der Höhe der Welle betrug, war die vertikale Bewegung der Teilchen

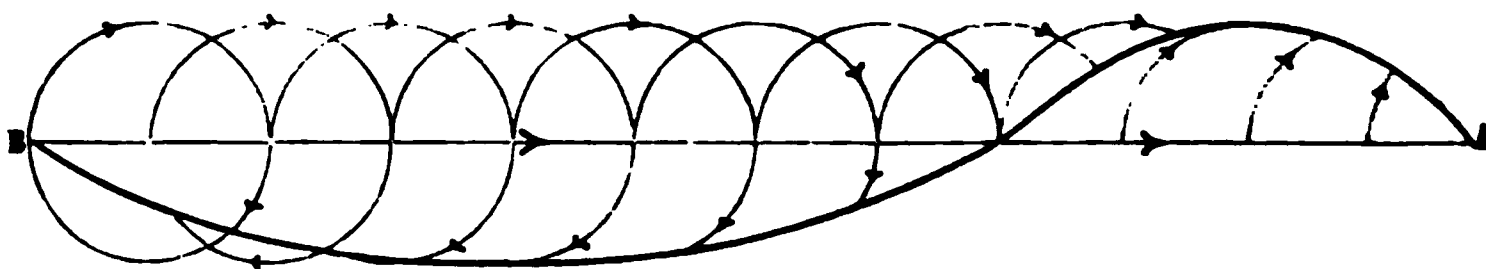


fast unmerklich und in noch größeren Tiefen bestand die Bewegung der Teilchen nur in einem Hin- und Hergehen in horizontaler Richtung.

So fanden die beiden Weber z. B. bei einer Welle, die eine Höhe von zirka  $2^{\text{mm}}$  hatte, nahe unter der Oberfläche die vertikale Höhe der Bahn gleich dieser Höhe, den horizontalen Durchmesser gleich  $2,5^{\text{mm}}$ , in einer Tiefe von  $230^{\text{mm}}$  betrug die vertikale Höhe der Bahn nur  $0,5^{\text{mm}}$ , der horizontale Durchmesser  $1^{\text{mm}}$  und in größern Tiefen war der vertikale Durchmesser nicht mehr meßbar, während der horizontale sich nur mehr unbedeutend verkleinerte und in der Nähe des Bodens sogar wieder etwas größer wurde.

Aus dieser Art der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen ersehen wir, daß dieselben sich zugleich nach zwei verschiedenen Richtungen bewegen, auf und nieder und vor- und rückwärts. Daraus folgt dann, daß die Gestalt der Flüssigkeitswellen die bereits § 132, Fig. 241 betrachtete sein muß, oder daß, wenn das dem Wellenberg folgende Wellental eine Tiefe besitzt, welche der Höhe des Berges gleich ist, es stets etwas länger sein muß. Die Welle muß, wie man unmittelbar sieht, die Gestalt Fig. 284

Fig. 284.



haben. Die Welle schreitet in der Richtung der Pfeilstriche von *B* nach *A* fort und die einzelnen Flüssigkeitsteilchen durchlaufen hier die als kreisförmig vorausgesetzten Bahnen in dem von den Pfeilen angedeuteten Sinne, im Wellenberge in horizontaler Richtung vorwärts und im Wellentale wieder zu ihrer Gleichgewichtslage zurück.

Daß die Wasserwellen wirklich diese Gestalt haben, sahen die Gebrüder Weber; sie sahen stets, daß bei gleicher Tiefe die Länge oder Breite des Wellentales etwas größer war als diejenige des Wellenberges.

## § 152.

**Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen.** Die an der Oberfläche einer Flüssigkeit erregte, mit Gestaltsänderung verbundene schwingende Bewegung der Flüssigkeitsteilchen pflanzt sich nach dem Vorigen nach zwei Richtungen fort, einmal an der Oberfläche hin, indem sie derselben das wellenförmige Ansehen gibt, andererseits nach der Tiefe, indem wir sahen, daß die Teilchen auch in der Tiefe, wenn eine Welle über der Flüssigkeit fortschreitet, eine schwingende Bewegung annehmen. Es fragt sich nun, mit welcher Geschwindigkeit sich die Bewegung nach beiden Richtungen fortpflanzt.

Was zunächst die Fortpflanzung der Bewegung in die Tiefe der Flüssigkeit betrifft, so bemerkt man weder bei der Erregung noch beim horizontalen Fortgange der Wellen ein allmähliches Fortschreiten derselben



sondern die schwingende Bewegung scheint, wenigstens soweit es sich beurteilen läßt, gleichzeitig in der Tiefe und an der Oberfläche zu geschehen. Die senkrecht oder fast senkrecht untereinander liegenden Flüssigkeitsteilchen scheinen alle gleichzeitig in der gleichen Oszillationsphase sich zu befinden.

Dieses Resultat ist nach dem ersten Paragraphen dieses Kapitels vor auszusehen; denn die Bewegung der Flüssigkeit in der Tiefe kann nur Folge des fortgepflanzten Stoßes, der Dichtigkeitsänderung an der Oberfläche der Flüssigkeit, bei Erregung und Fortdauer der schwingenden Bewegung sein; nach unten hin pflanzt sich daher die Bewegung ebenso rasch fort wie die longitudinalen Wellen, welche wir in den vorigen Paragraphen betrachtet haben.

Anders jedoch mit der Fortpflanzung der Wellenbewegung an der Oberfläche der Flüssigkeit, diese ist viel langsamer, so daß man die einzelnen Wellen recht gut verfolgen kann.

Zunächst wiesen die Gebrüder Weber nach, daß auch bei diesen Wellen, gerade wie wir es im ersten Kapitel dieses Abschnittes entwickelten, die Bewegung sich genau um die Länge einer Welle fortpflanzt, während ein Flüssigkeitsteilchen eine Oszillation zurücklegt. Dann aber zeigten sie, daß bei diesen Flüssigkeitswellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht für alle Wellen die gleiche sei und nicht von der Elastizität und Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängt, sondern daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von einer Menge von Umständen abhängt.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitswellen hängt wesentlich von der Höhe und Länge der Wellen ab; alle Umstände, welche daher Höhe und Länge der Welle ändern, ändern auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die Höhe und Länge, oder wie die Gebrüder Weber sie nennen, Breite der Wellen hängt nun zunächst ab von der Stärke des Stoßes, der die Welle erregt, je stärker der Stoß ist, um so höher ist die Welle; da die höhere Welle sich rascher fortpflanzt, so nimmt die Geschwindigkeit der Welle mit der Stärke des erregenden Stoßes zu.

Breitet sich eine Welle über einen immer größern Raum aus, so nimmt dadurch die Höhe der Welle ab, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher kleiner, je weiter sich in diesem Falle die Welle von dem Punkte ihrer Erregung entfernt. Man kann dieses sehr leicht wahrnehmen, wenn man in einer ruhenden Wasseroberfläche durch Hineinwerfen eines Steines Wellen erzeugt. Es bilden sich dann eine Anzahl von Wellen, die sich in immer größern Kreisen ausbreiten. Erregt man dann durch Hineinwerfen eines Steines von gleicher Größe wie vorhin zwischen den ausgedehnten Wellen ein neues Wellensystem, so sieht man, wie sich dort die Wellen sehr viel rascher ausbreiten.

Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung hängt ferner ab von der Tiefe der Flüssigkeit; je tiefer die Flüssigkeit ist, um so rascher pflanzt sich die Welle fort. Der Grund dafür ist einmal in der Reibung und Adhäsion der Flüssigkeit am Boden zu suchen; dann aber auch darin, daß in der Nähe des Bodens, wie wir vorhin sahen, die Höhe der Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen und somit die Höhe der Welle abnimmt.

Die Geschwindigkeit der Wellen nimmt übrigens nicht in demselben Verhältnisse ab wie die Tiefe der Flüssigkeiten, sondern langsamer.

Die Versuche, mittels deren die beiden Weber<sup>1)</sup> diese Sätze ableiteten, wurden so angestellt, daß eine Glasröhre an dem einen Ende der Rinne so befestigt war, daß ihre Mündung konstant nahe 2<sup>mm</sup> unter dem Niveau der Flüssigkeit war. Durch Aufsaugen und nachheriges Fallenlassen der Flüssigkeit wurde die Welle erregt. Mittels einer Uhr, welche  $\frac{1}{60}$  Sekunde angab, und die durch einen Druck mit dem Finger angehalten und losgelöst werden konnte, wurde die Zeit beobachtet, in welcher der Gipfel der Welle an dem andern Ende der Wellenrinne ankam. Die Uhr wurde in dem Momente losgelassen, in welchem man die gehobene Flüssigkeitssäule fallen ließ, und festgehalten, wenn der Gipfel der erregten Welle das andere Ende erreichte; die Quotienten aus der Länge der Rinne und den beobachteten Zeiten ergaben die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

Wir teilen hier die Resultate einiger Versuche mit, um zugleich eine Vorstellung von der Geschwindigkeit zu geben, mit welcher sich derartige Wellen fortpflanzen.

Die Wellen wurden bei gleicher Tiefe in verschiedenen Flüssigkeiten durch gleich hohe Flüssigkeitssäulen erregt. Es zeigte sich folgendes:

Tiefe der Flüssigkeit	Höhe der wellenerregenden Säule	Geschwindigkeit der Wellen	
		auf Wasser	auf Quecksilber
2,7 Zent.	5,4 Zent.	53,3 Zent.	51,3 Zent.
	8,1 „	54,4 „	54,0 „
	10,8 „	55,5 „	55,76 „
	16,2 „	56,9 „	60,3 „
	21,6 „	56,9 „	62,1 „
5,4 Zent.	5,4 Zent.	75,3 Zent.	60,9 Zent.
	8,1 „	75,9 „	64,3 „
	10,8 „	77,4 „	66,3 „
	16,2 „	77,0 „	65,5 „
	21,6 „	75,9 „	69,2 „
10,8 Zent.	8,1 Zent.	79,2 Zent.	Branntwein
	16,2 „	100,1 „	—
	32,4 „	100,1 „	81,8 Zent.
	48,6 „	—	86,8 „
21,6 Zent.	32,4 Zent.	135 Zent.	135 Zent.

Aus einer Betrachtung dieser Zahlen scheint ferner hervorzugehen, daß die Wellen in Flüssigkeiten von verschiedenem spezifischen Gewichte sich mit merklich gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, wenn sie durch gleich hohe Säulen der Flüssigkeiten erregt sind. Strenge genommen ist das jedoch nur der Fall, wenn die Flüssigkeiten eine bedeutende Tiefe haben, bei geringerer Tiefe bewirkt der Einfluß des Bodens, die verschiedene Adhäsion der Flüssigkeiten an demselben und an den Wänden des Gefäßes, daß die Geschwindigkeiten verschieden sind.

1) E. H. und W. Weber, Wellenlehre usw. p. 166 ff.

## § 153.

**Die Ursachen der Flüssigkeitswellen.** Vergleichen wir diese Sätze über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der sichtbaren Flüssigkeitswellen mit den früheren Sätzen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch die Elastizität bedingten Wellen in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern, so ergibt sich unmittelbar, daß wir die hier in Rede stehenden Wellen nicht als eine Äußerung der Elastizität der Flüssigkeiten ansehen dürfen. Denn für die durch die elastische Kraft der Körper fortgepflanzten Wellen erhielten wir als Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = c' \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit war proportional der Quadratwurzel aus der elastischen Kraft und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der betreffenden Substanz; sie war unabhängig von der Länge der Welle und unabhängig von ihrer Höhe, das heißt, der Größe der Amplituden. Bei den Flüssigkeitswellen aber, die wir hier betrachten, findet gerade das Umgekehrte statt: ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nahezu unabhängig von der Natur der Flüssigkeit, ändert sich aber wesentlich mit der Länge der Wellen und ihrer Höhe. Vergleichen wir ferner die Werte, welche die beiden Weber für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in verschiedenen Fällen erhalten haben, mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch Elastizität entstehenden Wellen, so weist auch dieses uns darauf hin, die Ursache dieser Wellen nicht in der Elastizität der Flüssigkeit zu suchen; denn für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch Elastizität erregten Wellen hatten wir für Wasser z. B. mehr als  $14000^m$ , hier jedoch nur wenige Dezimeter.

Noch ein anderer Umstand läßt es klar hervortreten, daß diese Art der Wellenbewegung nicht eine Folge der elastischen Kraft der Flüssigkeiten ist, nämlich die Höhe der Wellen. Wir sehen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit bereits eine deutliche Erhebung eintreten, wenn wir nur einen Tropfen der Flüssigkeit auf die Oberfläche fallen lassen. Bei der äußerst geringen Kompressibilität der Flüssigkeiten kann aber die Zusammendrückung derselben infolge einer so kleinen Kraft nur unmeßbar klein sein und deshalb die auf die Zusammendrückung folgende Ausdehnung der Flüssigkeit und somit die Erhebung derselben über das Niveau auch nur unmeßbar klein und nicht mit der beobachteten Höhe der Welle vergleichbar sein.

Wenn man sich nun daran erinnert, daß unter Einwirkung der Schwere die Flüssigkeit eine horizontale ebene Oberfläche haben muß, so ist es leicht ersichtlich, daß die Schwere es ist, welche die Wellenbewegung veranlaßt und fortpflanzt. Haben wir durch Aufsaugen an irgend einer Stelle eine Flüssigkeitssäule über das Niveau der umgebenden Flüssigkeit gehoben und lassen dann die gehobene Säule los, so muß nach den Gesetzen der Hydrostatik diese Flüssigkeit niedersinken; rings um diese Stelle muß aber, um das hydrostatische Gleichgewicht herzustellen, die Flüssigkeit steigen; und da sich die Ausgleichung nicht momentan durch die ganze Flüssigkeit ausbreitet, wird sich die Flüssigkeit um jene Stelle in Form eines Walles über

das Niveau der Flüssigkeit erheben. An der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst erhoben war und dann fallen gelassen wurde, hat dieselbe eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit, sie wird daher nicht im Niveau der Flüssigkeit zur Ruhe kommen, sondern da die Flüssigkeit, auf welche sie fällt, ringsum ausweichen kann, tiefer sinken.

Nach kurzer Zeit muß daher an der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst aufgesaugt war, ein Wellental entstehen, rings umher ein Wellenberg. Dieser Wellenberg wird dann aber ebenso durch die Schwere niedergezogen, er bewirkt, daß rings um ihn nach außen hin die Flüssigkeit steigt, daß weiter ein Wellenberg entsteht, während an der Stelle, wo er sich befand, ein Wellental sich bilden muß. Man sieht, wie infolge einer solchen Gleichgewichtsstörung durch Wirkung der Schwere sich Wellenberg und Wellental durch die Flüssigkeit fortpflanzen muß.

Daß eben dasselbe der Fall sein muß, wenn der ursprüngliche Stoß an der Erregungsstelle der Wellen nicht durch eine gehobene Flüssigkeitssäule, sondern auf irgend eine andere Weise, etwa durch einen auf die Flüssigkeit geworfenen Stein bewirkt wird, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Nach dem Gesagten ist es also der hydrostatische Druck der im Wellenberge gehobenen und durch die Schwere niedersinkenden Flüssigkeitssäule, welche die Wellenbewegung veranlaßt; wird also der hydrostatische Druck an der Stelle der gehobenen Flüssigkeit auf andere Weise fortgenommen, so darf sich die Wellenbewegung nicht weiter fortpflanzen.

Die Gebrüder Weber haben durch einen sehr einfachen Versuch dies nachgewiesen und somit die Richtigkeit der angegebenen Erklärung gezeigt. Bei einer regelmäßig viereckigen, an beiden Enden geschlossenen Röhre von Holz wurde die eine Seitenwand mehrfach durchbohrt, so daß auf der ganzen Länge der Röhre eine Anzahl Löcher in gerader Linie nebeneinander lagen. In ein dem einen Ende der Röhre zunächst liegendes Loch wurde eine Glasröhre eingekittet und darauf die ganze Röhre vollständig mit Quecksilber gefüllt. Dann wurde in der Glasröhre eine Quecksilbersäule von ungefähr 2,5<sup>cm</sup> aufgesaugt und wieder soviel Quecksilber nachgefüllt, daß es aus allen Öffnungen halbkugelförmig hervorsah. Nachdem das geschehen war, wurde die gehobene Quecksilbersäule fallen gelassen, und es zeigte sich dann, daß nur aus den der Röhre zunächst liegenden Öffnungen Quecksilber ausfloß, in den entferntern Öffnungen trat keine Bewegung des Quecksilbers ein. Da aus den der Röhre zunächst liegenden Öffnungen, als dort der Wellenberg sich bildete, das Quecksilber ausfloß und der vergrößerte hydrostatische Druck durch das Abfließen aufgehoben wurde, hörte die Ursache des Steigens für die entferntern auf, dort entstand kein Wellenberg mehr, es floß kein Quecksilber mehr aus.

Als nun aber in alle Löcher Röhren gekittet wurden, das Abfließen also gehindert wurde, da sah man das sukzessive Steigen des Quecksilbers in allen Röhren, der Wellenberg pflanzte sich fort und das auf das Steigen des Quecksilbers in jeder Röhre folgende Sinken zeigte das dem Wellenberge folgende Wellental.

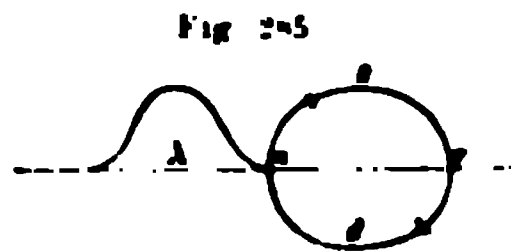
Dieser Versuch beweist aber auch zugleich die Richtigkeit unserer Annahme, daß die Ausgleichung des gestörten hydrostatischen Druckes nicht momentan durch die ganze Flüssigkeit erstreckt, denn wäre das der Fall gewesen, so hätte zugleich aus allen Öffnungen die gleiche Menge

Quecksilber ausfließen müssen. Wägungen des ausgeflossenen Quecksilbers zeigten aber, daß aus der der Glasröhre am nächsten liegenden Öffnung am meisten Quecksilber ausfloß, aus den weitem um so weniger, je weiter sie von der Röhre entfernt waren. Die Röhre hatte neun Öffnungen; als nun in der Glasröhre das Quecksilber nahezu 10<sup>cm</sup> gehoben war, floß Quecksilber aus den fünf ersten Öffnungen; aus der ersten traten 72<sup>g</sup>, aus der zweiten 52, aus der dritten 26, aus der vierten 12 und aus der fünften Öffnung ungefähr 0,5<sup>g</sup> Quecksilber.<sup>1)</sup>

Dieser Versuch bestätigt also die Voraussetzungen der mitgetheilten Erklärung der Wasserwellen vollständig.

Zugleich aber stehen mit ihr alle vorhin beschriebenen Erscheinungen der Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen in den Wellen, wie auch die Bewegung der Wellen als solcher im Einklang.

Was zunächst die krummen Bahnen der Flüssigkeitsteilchen betrifft, so muß anfangs, wenn in *A* (Fig. 285) die primär gehobene Flüssigkeitssäule niedersinkt, das Teilchen *a* nach rechts hin geschoben und gehoben werden, es bewegt sich nach *β* hin. Von der Spitze des Wellenberges sinkt es dann nach unten, behält aber seine fortschreitende Bewegung noch bei und bewegt sich nach *γ* hin. Dort angekommen, sinkt es wegen der in dem Fallen erhaltenen Geschwindigkeit weiter nach unten und bewegt sich dabei, da links von *γ* jetzt das Wellental ist, also der Druck von rechts nach links hin größer ist, nach links hin, um so, wenn das Tal ganz vorüberzieht, über *δ* nach *α*, oder wie in andern Fällen nicht ganz nach *α* sich zurückzubewegen.



Nach dieser Erklärungsweise muß auch die Geschwindigkeit der Fortpflanzung mit der Höhe der Wellen zunehmen, denn da sich die Bewegung während einer Oszillation der Teilchen um eine Wellenlänge fortpflanzt, muß bei gleicher Wellenlänge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so größer sein, je rascher das Teilchen oszilliert. Je größer nun die bewegende Kraft, der primäre Stoß ist, um so höher hebt sich das Teilchen, und je höher es gehoben ist, um so mehr wird seine Bewegung durch die Schwere beschleunigt, die Oszillation und somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher rascher. Bei den durch Elastizität erregten Wellen war das anders, da war die beschleunigende Kraft dem Abstände der bewegten Punkte von der Gleichgewichtslage proportional, bei größerem Abstände wurde daher die Geschwindigkeit der Teilchen in demselben Verhältnisse mit dem Abstände größer, die Oszillationsdauer war konstant.

Wurde aber in ein und derselben Punktreihe die Oszillationsdauer geändert, so änderte sich ebenso auch die Wellenlänge, indem die beschleunigende Kraft zugleich dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional war und somit Wellenlänge und Oszillationsdauer in gleichem Verhältnisse wachsen und abnehmen.

Hier, wo die bewegende Kraft nicht von der gegenseitigen Einwirkung der Teilchen, sondern von der Schwere derselben abhängt, besteht diese

1) E. H. und W. Weber, Wellenlehre usw. p. 280 ff.



Beziehung nicht, deshalb hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge ab.

Daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängt, ergibt die Überlegung, daß, wenn in schwereren Flüssigkeiten wegen des größern Gewichtes der gehobenen Teilchen die bewegende Kraft zunimmt, in eben demselben Verhältnisse bei gleicher Höhe der Welle die zu bewegende Masse zunimmt, die Beschleunigung und somit die Geschwindigkeit der bewegten Teilchen bleibt daher unverändert.

Es sind vielfach Versuche gemacht aufgrund der hier entwickelten Auffassung eine mathematische Theorie der Wellenbewegung zu geben.<sup>1)</sup> Der erste, dem eine annähernde Lösung der Aufgabe glückte, war Gerstner<sup>2)</sup>. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flüssigkeitswellen führt die Gerstnersche Theorie zu der Gleichung

$$c^2 = \frac{\lambda}{2\pi} g,$$

worin  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit,  $\lambda$  die Wellenlänge und  $g$  die Beschleunigung durch die Schwere bedeutet.

Die Theorie führt also zu dem Resultate, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich einer Konstanten multipliziert mit der Quadratwurzel aus der Wellenlänge ist, sie gelangt also insoweit zu dem Resultate der Weberschen Versuche, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit wachsender Wellenlänge wächst, aber langsamer als diese. Dagegen zeigt die Theorie keine Abhängigkeit von der Tiefe der Flüssigkeit. Da nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen der Einfluß der Tiefe auf den Einfluß des Bodens auf die Bewegung zurückzuführen ist, so wird die Gerstnersche Theorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen für unendliche Tiefe der Flüssigkeit geben. Es ergibt sich das auch aus spätern Untersuchungen, welche für  $c^2$  geben<sup>3)</sup>

$$c^2 = \frac{1 - e^{-\frac{4\pi h}{\lambda}}}{1 + e^{-\frac{4\pi h}{\lambda}}} \frac{\lambda}{2\pi} g,$$

wenn  $h$  die Tiefe der Flüssigkeit bedeutet. Ist  $h$  gegen  $\lambda$  sehr groß, so wird der die Tiefe enthaltende Faktor gleich eins.

## § 154.

**Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen.** Die Unabhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flüssigkeitswellen von der Natur der Flüssigkeit gilt nur für Wellen, deren Höhe relativ groß ist. Für Wellen von sehr geringer Höhe kann, worauf zuerst W. Thomson<sup>4)</sup> aufmerksam gemacht hat, diese Unabhängigkeit von der Natur der

1) E. H. und W. Weber, Wellenlehre. p. 303 ff.

2) Die Theorie von Gerstner (Prag 1804) ist abgedruckt in Webers Wellenlehre, p. 338 ff. Die spätern Untersuchungen sind sehr vollständig angeführt in der Abhandlung von Rieß, Repertorium d. Physik von Erner. 26. p. 133. 1804.

3) Man sehe unter andern Kolaček, Wiedem. Ann. 5. p. 425. 1878.

4) W. Thomson, Philosophical Magazin. 42. (4) p. 368. 1871.

Flüssigkeit nicht mehr bestehen, bei solchen Wellen muß sich die Oberflächenspannung der Flüssigkeit bemerkbar machen. Derartige kleine Wellen, die sich vielfach neben und auf größeren als kleine Kräuselwellen bilden, kann man erregen, wenn man auf eine Platte eine Flüssigkeitsschicht bringt und die Platte in Schwingungen versetzt, oder bequemer noch, wenn man in einer hinreichend großen Flüssigkeitsfläche durch einen an einem schwingenden Stabe oder Stimmgabel befestigten Stift Wellen erregt.<sup>1)</sup>

Wenn sich an der Oberfläche einer Flüssigkeit Wellen befinden, so ist über den Wellenbergen die Oberfläche konvex gekrümmt, über den Wellentälern dagegen konkav; es folgt demnach, daß in den Wellenbergen die Flüssigkeitsteilchen einen stärkeren Normaldruck erfahren als in den Wellentälern, daß somit der Druck der Schwere dort durch den Normaldruck vergrößert wird. Nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen können wir ohne weiteres erkennen, daß der Oberflächendruck gerade so wirken muß, wie wenn die Schwere der im Wellenberge gehobenen Flüssigkeitsteilchen vergrößert wäre, ohne daß eine Vergrößerung der schwingenden Masse eintritt. Die Beschleunigung der Flüssigkeitsteilchen muß deshalb eine größere sein, als wenn der Oberflächendruck nicht vorhanden wäre. Diese Bemerkung läßt sofort erkennen<sup>2)</sup>, wie wir die Gerstnersche Gleichung

$$c^2 = \frac{\lambda}{2\pi} g$$

ergänzen müssen, um den Einfluß des Oberflächendruckes in Rechnung zu ziehen, wir haben einfach die Beschleunigung  $g$  an jeder Stelle durch die Beschleunigung infolge des dort vorhandenen Oberflächendruckes zu vermehren bzw. an den Stellen des Wellentals zu vermindern. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, wir hätten die Wellen in einer Wellenrinne erregt, so daß sie nur in der Richtung der  $x$ , nach der Länge der Rinne fortschreiten, so ist die Oberfläche der Flüssigkeit in den Wellen nur nach dieser Richtung gekrümmt, in der dazu senkrechten Richtung ist die Flüssigkeitsoberfläche eben. Ist an irgend einer Stelle der Oberfläche der Krümmungsradius in einem parallel der Richtung  $x$  geführten Schnitt gleich  $r$ , positiv wenn die Krümmung nach außen konvex ist, ist  $\sigma$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so haben wir anstatt  $g$  zu setzen

$$g + \frac{H}{2r\sigma},$$

wo  $H$  die in absolutem Maße gemessene Konstante der Oberflächenspannung bedeutet (S. 382).

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, daß bei diesen kleinen Wellen dieselbe durch die einfache Wellengleichung

$$y = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

dargestellt werde, worin  $y$  die Erhebung an der Stelle  $x$  über dem ebenen Flüssigkeitsniveau bedeutet, so erhalten wir den Wert von  $r$  in folgender

1) Man sehe *L. Matthiessen*, Poggend. Ann. 184. p. 107 1868; 141. p. 386 1870. Wiedem. Ann. 38. p. 118 1889. *Lord Rayleigh*, Philos. Mag. 16 5. p. 50. 1883; 20. (5) p. 386. 1890

2) Man sehe *Koladetz*, Wiedem. Ann. 5. p. 429 1878. *Rieß*, Repertorium d. Physik von Exner. 26. p. 102. 1890.



Weise. In der analytischen Geometrie wird bewiesen, daß der Krümmungsradius  $r$  an der Stelle  $x$  einer Kurve, deren Gleichung  $y = f(x)$  ist, gegeben wird durch die Gleichung

$$r = \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Der im Zähler stehende Differentialquotient ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die an den betrachteten Punkt der Kurve gelegte Tangente mit der Achse der  $x$  bildet. Bestehen die Wellen aus flachen Kräuselungen, so ist der Winkel immer so klein, daß wir das Quadrat seiner trigonometrischen Tangente gegen 1 vernachlässigen dürfen. Unter dieser Annahme wird

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} y.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß an der betrachteten Stelle der Krümmungsradius immer entgegengesetzt liegt als der Wert von  $y$ ; ist  $y$  positiv nach oben, also an Stelle eines Wellenberges, so ist der Mittelpunkt der Krümmung unterhalb des Flüssigkeitsniveaus; an Stelle eines Wellentales, wo  $y$  negativ, die Flüssigkeit nach außen konkav gekrümmt ist, befindet sich der Krümmungsmittelpunkt oberhalb der Flüssigkeit.

Da es sich hier nur um den absoluten Wert von  $r$  handelt, setzen wir dasselbe positiv.

Ebenso wie in dem von der Schwere abhängigen Gliede die Niveaudifferenz nicht eingeht, haben wir auch in dem vom Oberflächendrucke abhängigen Gliede  $y = 1$  zu setzen; dann wird

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

und es wird

$$c^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \left( g + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{H}{2\sigma} \right).$$

Dies ist die von W. Thomson abgeleitete Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen unter dem Einflusse der Schwere und der Oberflächenspannung; schreibt man die Gleichung in der Form

$$c^2 = g \left( \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{H}{2g\sigma} \right),$$

so erkennt man unmittelbar, daß für Wellen von großer Länge das zweite, für Wellen sehr kleiner Länge das erste Glied ohne Einfluß ist. Für Wasser z. B. bei 20° mit dem Brunnenschen Werte von  $\frac{H}{2g} = 0,074$  in Gramm pro Quadratcentimeter ist bei einer Welle, für welche  $\lambda = 30^{\text{cm}}$ , das erste Glied in der Klammer 4,77, das zweite 0,018. Mit Berücksichtigung des zweiten Gliedes ergibt sich  $c = 68,41^{\text{cm}}$ , ohne Berücksichtigung 68,4, so daß der Unterschied kaum oder gar nicht meßbar ist. Bei sehr kleinen Wellen tritt dagegen das erste Glied sehr zurück, für Wellen von  $0,3^{\text{cm}}$  wird  $c = 39,5^{\text{cm}}$ ; läßt man das erste Glied außer acht, so wird  $c = 39^{\text{cm}}$ .

Die Thomsonsche Gleichung führt zu dem interessanten Resultat, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen für eine gewisse Wellenlänge den kleinsten Wert hat; wir erhalten den Wert von  $\lambda$  nach den Regeln der Differentialrechnung, wenn wir die Gleichung für  $c^2$  nach  $\lambda$  differenzieren und den Differentialquotienten gleich Null setzen, also aus der Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} - \frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{H}{2g\sigma} = 0; \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{H}{2g\sigma}}.$$

Für Wasser würde dieser Wert von  $\lambda = 1,709$  und die kleinste Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c = 23,1\text{ cm}$ .

Es folgt daraus, daß man denselben Wert von  $c$  für zwei verschiedene Wellenlängen, eine kleiner als 1,709, eine größer als dieser Wert erhält.

Wir haben schon bei Besprechung der Kapillaritätskonstanten erwähnt, daß besonders L. Matthiessen und Lord Rayleigh sich mit der Untersuchung der kleinen Wellen beschäftigt haben. Wir teilen in folgenden Tabellen einige der Versuche von Matthiessen<sup>1)</sup> mit, welche die Thomsonsche Formel nach jeder Richtung bestätigen. Die kleinen Wellen wurden mit Hilfe von an den Zinken von Stimmgabeln, deren Schwingungszahlen  $n$  am schärfsten bestimmt waren, angebrachten feinen Spitzen hervorgerufen. Zwischen den beiden Spitzen bildete sich ein System von stehenden Wellen, und bei passender Beleuchtung wurden auf einer gemessenen Länge die stehenden Wellen gezählt, der Quotient der Länge und der halben Anzahl stehender Wellen gab die Länge  $\lambda$  einer Welle. Aus den Beobachtungen für kleiner Wellen, kleiner als 0,3, wurde die Größe  $\frac{H}{2\sigma}$  abgeleitet, und mit dieser aus der nach  $\lambda$  aufgelösten Gleichung, indem man, wenn  $n$  die Schwingungszahl ist,  $c = n\lambda$  setzte, die der Schwingungszahl  $n$  zukommende Wellenlänge  $\lambda$  berechnet, aus welcher sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt.

n	Wasser		Quecksilber		Schwefelkohlenstoff	
	$\frac{H}{2\sigma} = 72,6$		$\frac{H}{2\sigma} = 35,9$		$\frac{H}{2\sigma} = 32,9$	
	nλ beob.	nλ ber.	nλ beob.	nλ ber.	nλ beob.	nλ ber.
8,4	24,15	24,81	21,89	22,38	21,97	22,12
16,4	22,61	23,30	18,58	19,39	18,12	18,94
36,9	25,71	27,12	20,07	21,77	19,59	21,18
64,7	30,60	31,70	23,49	25,30	22,84	24,54
128	38,27	38,02	29,82	31,10	29,44	30,18
256	47,89	48,90	38,66	38,66	36,86	37,50
458	59,54	59,54	46,72	46,72	48,55	47,26
916	75,03	75,11	60,45	58,62	—	—

Der Gang der beobachteten Werte entspricht durchaus der Thomsonschen Gleichung, wenn auch in der Nähe des Minimums die Werte nicht vollkommen übereinstimmen, die beobachteten meist etwas kleiner sind, als sich mit den darüber angegebenen Werten der spezifischen Kohäsion ergeben.

<sup>1)</sup> Matthiessen, Wiedem. Ann. 38. p. 118. 1889.

Man sieht, daß diese Methode ein Mittel zur Bestimmung der Kapillarkonstanten ist. Die Thomsonsche Gleichung nach  $\frac{H}{2\sigma}$  aufgelöst gibt

$$\frac{H}{2\sigma} = \frac{n^2 \lambda^2}{2\pi} - \frac{g \lambda^2}{4\pi^2}.$$

Wir haben die von Lord Rayleigh<sup>1)</sup> nach dieser Methode gefundenen Werte, ebenso einige der von Ochsé<sup>2)</sup> erhaltenen in § 79 und 80 angegeben. Lord Rayleigh schätzt die Genauigkeit der gefundenen Werte auf etwa ein Prozent.

Auch die Versuche Grunmachs<sup>3)</sup> über die Abnahme der Oberflächenspannung des Quecksilbers, welche wir § 79 erwähnten, sind nach dieser Methode ausgeführt.

### § 155.

**Durchkreuzung und Reflexion der Wellen.**<sup>4)</sup> Die Erscheinungen der Interferenz, der Reflexion der Wellenbewegung und die Bildung stehender Wellen infolge der fortgepflanzten und reflektierten Wellen lassen sich nach den Versuchen der beiden Weber mit den Flüssigkeitswellen sehr schön darstellen.

Die Erscheinungen der Interferenz zeigen sich, wenn man an beiden Enden der Wellenrinne eine Welle gleichzeitig erregt.

In der Mitte der Wellenrinne vereinigen sich beide vorausgehenden Wellenberge zu einem neuen, der nahezu die Summe der Höhen der einzelnen Wellenberge hat, wie es die Interferenztheorie verlangt, nach welcher die Bewegung infolge des Zusammenwirkens mehrerer Teilbewegungen die Summe letzterer sein muß. Treffen demnach die Wellen ohne Phasendifferenz zusammen, so muß ein Berg von doppelter Höhe und ein Tal von doppelter Tiefe entstehen. Als Mittel von zwölf Messungen fanden die beiden Weber die Höhe des resultierenden Wellenberges gleich 1,8, wenn die Höhe der beiden komponierenden Wellenberge gleich 1 war; der Unterschied der beobachteten Höhe von der theoretischen ist so klein, daß dieser Versuch als eine Bestätigung des Interferenzgesetzes, wenn es dessen noch bedürfte, angesehen werden könnte.

Gehen ein Wellenberg und ein Wellental durcheinander hindurch, so ist die Höhe des Berges oder die Tiefe des Tales gleich der Differenz beider, ist der Berg ebenso hoch, als das Tal tief ist, so wird die Oberfläche der Flüssigkeit eben. Dies zeigt sich jedesmal, wie wir sofort sehen werden, bei der Reflexion der Wellen.

Nach der Durchkreuzung bewegt sich jede Welle ganz ungestört weiter, Wellenberge und Wellentäler sind in der Lage zueinander, als hätte in jedem Wellenzuge gar keine Störung stattgefunden. Es ist diese Beobachtung ein Beweis für die Richtigkeit des zweiten Teiles des Prinzipes, das wir der Lehre von den Interferenzen zum Grunde legten, des Satzes, daß wenn von der Interferenzstelle aus sich die Bewegung Punkten mittel-

1) Lord Rayleigh. Philos. Mag. 30. (5.) p. 386. 1890.

2) Ochsé, Exner, Repertor. d. Physik. 26. p. 646. 1890.

3) Grunmach, Ann. d. Physik. 9. p. 1261. 1902.

4) E. H. und W. Weber, Wellenlehre usw. p. 212 ff.

welche nur durch einen der Wellenzüge eine Bewegung annehmen, die Bewegung dieser Punkte gerade so geschieht, als hätte keine Interferenz stattgefunden.

Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen an der Interferenzstelle ist diejenige, welche das Interferenzgesetz verlangt. Schreiten die beiden Wellen nach entgegengesetzten Richtungen fort, so ist die horizontale Bewegung der Flüssigkeitsteilchen, wenn die Wellen ohne Phasendifferenz zusammentreffen, der Richtung nach gerade entgegengesetzt, die vertikale jedoch gleich gerichtet. Die horizontale Bewegung muß sich somit aufheben, die vertikale summieren.

Das wurde von den beiden Weber durch die Beobachtung bestätigt. Es ergab sich, wenn man senkrecht unter der Stelle beobachtete, wo der Gipfel des resultierenden Berges lag, wo also die Bewegungen genau ohne Phasendifferenz zusammentrafen, daß dort die Teilchen in genau senkrechter Richtung sich auf und ab bewegten.

Wenn die Wellen nicht genau ohne Phasendifferenz zusammentreffen, hebt sich die horizontale Bewegung nicht ganz auf; Weber sahen auch, wie seitwärts von den eben erwähnten Stellen die Bahnen der Teilchen nicht senkrecht waren, sondern gegen die Vertikale geneigt, und zwar um so mehr, je weiter man sich von der Stelle der vollkommenen Durchkreuzung entfernte.

Wenn auch die Wellen insofern sich ungehindert durchkreuzen, daß die Bewegung der Flüssigkeit in jedem Wellenzuge dieselbe bleibt, als habe eine Durchkreuzung stattgefunden, so findet doch bei der Durchkreuzung der Wellen ein kleiner Zeitverlust statt. Die Versuche der beiden Weber ergaben, daß, während eine Welle ihre Wellenrinne in 2,283 Sekunden durchlief, wenn sie sich nicht mit einer andern kreuzte, bei der Kreuzung zweier Wellen eine Welle von genau gleicher Größe als die vorige zum Durchlaufen derselben Strecke die Zeit von 2,4 Sekunden brauchte.

Diese Verzögerung denken sich die beiden Physiker folgendermaßen. Bei dem ungehinderten Fortschreiten der Wellen, wo sich die Teilchen in ihren kreisförmigen oder elliptischen Bahnen bewegen, bleiben die Teilchen immer in ihrer beschleunigten Bewegung, bei der Durchkreuzung der Wellen dagegen, wo sich einmal die horizontalen Geschwindigkeiten ganz aufheben und die Teilchen sich nur vertikal auf und ab bewegen, tritt ein Zeitpunkt ein, wo die Bewegung des Teilchens sich umkehrt, wo also seine Geschwindigkeit ganz und gar gleich Null ist. Von da ab erhält erst das Teilchen durch Untersinken wieder eine beschleunigte Bewegung. Daraus scheint nun zu folgen, daß bei einer Durchkreuzung zweier gleich großer Wellen so viel Zeit verloren gehe, als der Verlust der beschleunigten Bewegung während der Vereinigung der Wellen herbeiführt. Nach der Durchkreuzung behalten die Teilchen der Welle ihre vorige Beschleunigung und dadurch ihre vorige Bewegung.

Die Erscheinungen der Reflexion der Wellen treten am einfachsten auf, wenn eine Welle senkrecht gegen eine feste Wand anprallt. Da die Flüssigkeit an der Wand vollkommen frei beweglich ist, so muß die Reflexion der Wellen an der Wand so erfolgen, wie die Reflexion der Wellen an der Grenze zweier Punktsysteme, von denen das zweite weniger dicht ist als das erste, das heißt ein ankommender Wellenberg muß als Wellen-

berg und ein ankommendes Wellental muß als Wellental reflektiert werden. Die Erscheinungen an der Wand müssen daher sich folgendermaßen darstellen.

Nach Verlauf von  $\frac{1}{4}$  Oszillationsdauer muß unmittelbar an der Wand ein halber Wellenberg sein, dessen Mitte an der Wand liegt, dessen Höhe nahezu die doppelte des einfachen ankommenden Berges ist, da er aus der ersten Hälfte des reflektierten und der zweiten Hälfte des ankommenden Wellenberges besteht. Nach Verlauf eines weitem Viertels der Oszillationsdauer ist das auf den Wellenberg folgende Wellental bis zur Wand fortgeschritten; zugleich aber ist der erste Wellenberg ganz reflektiert, und der reflektierte Wellenberg erstreckt sich bis eine halbe Wellenlänge von der Wand, gerade so weit, als sich das dem Berge folgende Tal erstreckt. Die Bewegung an der Wand muß daher aufgehoben werden und die Wasseroberfläche an der Wand bis zur Länge einer halben Welle eben sein.

In dem folgenden Viertel der Oszillationsdauer pflanzt sich der reflektierte Wellenberg um eine viertel Wellenlänge nach rückwärts fort, das angekommene Wellental ebenso viel vorwärts, so daß also die tiefste Stelle des Wellentales sich gerade an der Wand befindet. In dem Augenblicke aber, wo das ankommende Wellental die Wand traf, pflanzte sich auch ein reflektiertes Wellental fort, in dem betrachteten Augenblicke befindet sich also an der Wand die zweite Hälfte des ankommenden und die erste Hälfte des reflektierten Wellentales, es muß dort ein halbes Wellental von nahezu doppelter Tiefe des ankommenden Wellentales sein, dessen tiefste Stelle sich gerade an der Wand befindet.

Endlich nach Verlauf des letzten Viertels der Oszillationsdauer ist auch das Wellental ganz reflektiert, der Wellenberg hat sich um eine halbe Wellenlänge von der Wand entfernt; die ganze Welle ist reflektiert und bewegt sich von da an, der Wellenberg voraus, das Wellental folgend, in der Flüssigkeit zurück.

Wellenberg und Wellental haben also ihre Lage gegen die feste Wand vertauscht, vorher war der Berg, jetzt ist das Tal der Wand am nächsten; Wellenberg und Wellental gehen durcheinander hindurch.

Diese aus dem Früheren abgeleitete Darstellung des Reflexionsvorganges bestätigt sich auf das vollständigste durch die Anschauung bei den Versuchen in der Welleurinne, und die Messungen über die Höhe des Berges und die Tiefe des Tales an der Wand in dem ersten und dritten der uns betrachteten Zeiteile ergaben die Höhe, wie sie die Theorie verlangt. Bei einer Höhe der ankommenden Welle von  $6,2^{\text{mm}}$  war die Höhe des Berges in dem ersten der betrachteten Zeiteile gleich  $10,35^{\text{mm}}$ , also fast wie  $\frac{5}{3}$  der ankommenden Welle.

Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen an der festen Wand muß mit derjenigen übereinstimmen, welche die Flüssigkeitsteilchen haben, wenn die Wellen sich durchkreuzen; auch dieses haben die Versuche der Herren Weber gezeigt.

Wenn eine Welle nicht senkrecht gegen eine feste Wand ankommend, muß sie nach § 136 so zurückgeworfen werden, daß der Wellenstrahl mit der zurückgeworfenen Welle mit dem Einfallslot denselben Winkel bildet, wie der Strahl der einfallenden Welle. Auch dieses haben die Versuche bestätigt. Es folgt nämlich aus dem Satze, wie wir bereits § 136 ermittelten,



daß eine kreisförmige Welle, welche im Mittelpunkte eines kreisförmigen Gefäßes erregt ist, wenn sie an der kreisförmigen Wand anprallt, sich nach der Reflexion als kreisförmige Welle mit immer kleinerem Radius wieder zur Mitte des Gefäßes fortpflanzen muß. Der Versuch zeigt dieses deutlich, wenn man z. B. einen Teller mit Quecksilber füllt und nun aus einem mit einem kleinen Loche versehenen Papiertrichter auf die Mitte des Tellers Quecksilber tropfen läßt.

Läßt man auf diese Weise in den einen Brennpunkt eines mit Quecksilber gefüllten elliptischen Gefäßes Quecksilber tropfen, so müssen die sich von diesem Brennpunkte aus kreisförmig fortpflanzenden Wellen von der Wand so reflektiert werden, daß sie als kreisförmige Wellen in dem andern Brennpunkte der Ellipse wieder zusammenlaufen, da die Radien Vektoren mit dem Einfallslot, der Normale an den verschiedenen Stellen, gleiche Winkel bilden. In dem zweiten Brennpunkte geben dann die vereinigten Wellen zu einer kegelförmigen Erhöhung Veranlassung, die durch ihr Niedersinken ein neues zurückkehrendes Wellensystem gibt, welches sich ebenso in dem ersten Brennpunkte wieder vereinigt, dort wiederum zu einem Wellensysteme Veranlassung wird usf. Man sieht dieses vielfache Hin- und Herlaufen sehr leicht in der schönen gekräuselten Oberfläche, welche die Flüssigkeit bei einem solchen Versuche zeigt.

Wenn man in der Wellenrinne nach und nach mehrere Wellen erzeugt, deren Länge gleich ist der Länge der Rinne oder einem aliquoten Teile derselben, so müssen durch die Interferenz der von der Erregungsstelle fortschreitenden und der von der festen Wand reflektierten Wellen sich stehende Wellen bilden, deren Schwingungsknoten gerade so liegen müssen, wie die Schwingungsknoten in einem an beiden Enden freien longitudinal schwingenden Stabe. Wenn man demnach Wellen erregt, welche genau die doppelte Länge der Wellenrinne besitzen, so geht durch die Mitte derselben immer nach der einen Seite ein Wellenberg, nach der andern ein Wellental, in der Mitte muß sich daher ein Schwingungsknoten bilden und jede Hälfte der Rinne schwingt als eine halbe stehende Welle hin und her.

Ist die Länge der erregten Wellen gleich der Länge der Wellenrinne, so sieht man zwei Schwingungsknoten entstehen, beide im Abstände von  $\frac{1}{2}$  Wellenlänge von den Wänden der Rinne und im Abstand einer halben Wellenlänge voneinander. Jeder der drei Teile, in welche dadurch die Flüssigkeit der Länge nach zerfällt, schwingt für sich als stehende Welle von der Länge der halben Wellenrinne. An den Wänden befinden sich die Mitten der beiden äußersten Wellen, die Schwingungsmaxima.

Auf diese Weise kann man leicht, wie die Gebrüder Weber zeigten, 2, 4 und mehr Schwingungsknoten und somit eine leicht sichtbare experimentelle Bestätigung der früher vorgetragenen Sätze über die Bildung der stehenden Wellen durch Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung fortgeplanter Wellensysteme erhalten.

## Vierter Abschnitt.

### Vom Schalle.

---

#### Erstes Kapitel.

#### Über die Erregung des Schalles.

##### § 156.

**Von der Ursache des Schalles.** Wenn man eine schwachgespannte Saite in Schwingungen versetzt, so lassen sich die Schwingungen derselben mit den Augen wahrnehmen, man sieht die Saite in ihren verschiedenen Lagen nacheinander. Wird die Spannung jedoch mehr und mehr verstärkt, so werden die Schwingungen bald so rasch, daß man die Saite in den verschiedenen Lagen nicht mehr unterscheiden kann, man sieht an der Stelle, wo sie schwingt, nur mehr eine halbdurchsichtige Fläche. Verstärkt man die Spannung der Saite noch mehr, so ist die Bewegung derselben kaum mehr sichtbar, statt dessen wird sie uns aber in einer andern Weise wahrnehmbar, wir hören sie, wir erhalten einen von der schwingenden Saite ausgehenden Eindruck auf unser Ohr. Den Eindruck, welchen unser Ohr erhält, nennen wir Schall; es ist im folgenden unsere Aufgabe, diese, die schwingende Bewegung begleitende Erscheinung zu untersuchen.

Der Schall entsteht nur durch eine schwingende Bewegung, und jede schwingende Bewegung von hinreichender Schnelligkeit erzeugt einen Schall.

Wir sahen in dem vorigen Abschnitt, daß wir auf sehr viele Weisen schwingende Bewegungen erzeugen können, alle diese können auch die Ursache eines Schalles werden.

Reiben wir einen Stab seiner Länge nach, so erzeugt die Elastizität des Stabes stehende Schwingungen, die Savart durch die Stöße des Stabendes gegen eine Spitze dem Auge sichtbar gemacht hat; wir vernehmen nun auch stets einen Schall, wenn wir einen Stab in longitudinale Schwingungen versetzen. Ebenso erzeugen die transversalen Schwingungen von Stäben und Saiten, sobald sie hinreichend rasch sind, die Schwingungen von Platten und Glocken sowie die drehenden Schwingungen der Stäbe einen Ton.

In allen diesen Fällen sind es die regelmäßigen Schwingungen der Körper infolge ihrer Elastizität, welche einen Ton erzeugen; man kann jedoch auch auf andere Art, durch in kurzer Zeit wiederholte Stöße, einen Schall hervorbringen. So erhält man einen Schall, wenn man eine Karte oder eine biegsame Feder dem Umfange eines in rasche Rotation versetzten gezähnten Rades so weit nähert, daß jeder Zahn der Karte oder Feder



einen Schlag erteilt; so auch, wenn man einen Strom eines Gases oder einer Flüssigkeit gegen eine rotierende Scheibe führt, welche in regelmäßigen Zwischenräumen durchbohrt ist; die Flüssigkeit dringt abwechselnd durch eine Öffnung der Scheibe, abwechselnd wird sie durch eine geschlossene Stelle derselben zurückgehalten; es entsteht so eine regelmäßige Folge von Stößen, die wir als Ton wahrnehmen. Läßt man einen Körper um eine Achse rotieren, welche nicht durch dessen Mittelpunkt geht, so erteilt dieser der umgebenden Luft eine Reihe von Stößen, indem abwechselnd das größere und kleinere Stück des Körpers an derselben Seite der Rotationsachse sich befindet; diese Reihenfolge von Stößen erzeugt einen Ton.

Auch scheinbar kontinuierliche Bewegungen können einen Ton erzeugen, in der That ist es aber wieder eine regelmäßige Reihenfolge von Stößen, welche auch in solchen Fällen den Schall hervorrufen.<sup>1)</sup> Bläst man in das Mundstück einer gewöhnlichen Pfeife, so erzeugt dieser kontinuierliche Luftstrom einen Ton; indes in diesem Falle teilt sich der Luftstrom an der Lippe der Pfeife, der eine Teil dringt in die Pfeife ein, der andere entweicht in die umgebende Luft. Der in die Pfeife eingedrungene Teil des Luftstromes komprimiert anfänglich die der Lippe am nächsten liegende Schicht der Luft; diese Verdichtung der Luftschicht verhindert wegen der größeren Elastizität der komprimierten Luft so lange ein neues Eindringen der Luft in die Pfeife, bis sich die Verdichtung auf die weiteren Luftschichten der Pfeife übertragen hat. Es entsteht daher auch in diesem Fall eine periodische Bewegung, eine Reihenfolge von Stößen, welche den Schall veranlaßt.

Wir können daher ganz allgemein sagen, daß die Ursache des Schalles hinreichend schnell wiederholte Stöße sind, welche zu unserem Ohre gelangen.

Damit das letztere, die Mitteilung der Stöße an unser Ohr, der Fall sein kann, genügt nicht allein das Schwingen eines Körpers, sondern es ist notwendig, daß diese schwingende Bewegung durch ein elastisches Mittel zu unserem Ohre hingeführt werde. In den meisten Fällen ist dieses Mittel die atmosphärische Luft. Versetzen wir einen Körper in longitudinale Schwingungen, so dehnt er sich abwechselnd aus, abwechselnd zieht er sich zusammen. Bei der Ausdehnung treibt er die zunächst an ihn angrenzende Luft von sich fort, bei der Zusammenziehung stürzt die vorher fortgetriebene Luft in den jetzt leeren Raum, welcher den Körper umgibt, hinein, und diese hin- und hergehende Bewegung der Luft pflanzt sich als longitudinale Schwingung durch die Umgebung bis zu unserem Ohre fort. Schwingt eine Saite, ein Stab oder eine Platte transversal, so tritt dasselbe ein; bewegt sich die Saite nach der einen Seite, so treibt sie die angrenzende Luft in der Richtung fort, schwingt sie zurück, so saugt sie die Luft gewissermaßen nach sich hin; sie erteilt also der Luft eine hin- und hergehende Bewegung, welche bis zu unserem Ohre fortgepflanzt und als Stöße auf dasselbe wirkend uns die Empfindung des Schalles gibt.

Es kann aber jeder Körper, die festen sowohl als die flüssigen, wenn in ihnen ein Schall erregt wird, denselben fortpflanzen, wie man sich leicht dadurch überzeugt, daß eine unter Wasser erregte periodische Bewegung

1. Man sehe *Strouhal*, *Wiedem. Ann.* 5. p. 216. 1878.

sich als Schall wahrnehmen läßt. Wir sahen, in allen elastischen Körpern pflanzen sich an einer Stelle erregte Schwingungen fort; da der Schall eine schwingende Bewegung ist, die zu unserem Ohr fortgeflanzt ist, so folgt aus dem vorigen Abschnitte schon, daß jeder elastische Körper den Schall fortzupflanzen imstande ist.

Daß wir aber überhaupt nur dann einen Schall vernehmen, wenn durch irgend einen elastischen Körper die Schwingungen zu unserem Ohre fortgepflanzt werden, zeigt die Erfahrung. Denn bringen wir unter die Glocke der Luftpumpe ein kleines Glöckchen, welches mit einem Klöppel versehen und an einem Faden in der Glocke so aufgehängt ist, daß es nirgendwo eine der festen Begrenzungen des von der Glocke und dem Luftpumpenteller abgesperrten Raumes berührt, so hört man keinen Ton, wenn man die Luft durch Pumpen aus der Glocke fortnimmt und durch Bewegung des Apparates den Klöppel zum Anschlagen bringt. Man hört aber einen Schall, wenn man eine Verbindung zwischen der Glocke und dem Rezipienten der Pumpe herstellt, sei es, daß man den Rezipienten mit Luft oder mit einer Flüssigkeit anfüllt, oder daß man das Glöckchen an einem Metalldraht in der Glocke aufhängt.

### § 157.

**Qualität des Schalles.** Jeden Eindruck, welchen wir durch unser Gehör erhalten, nennen wir Schall; indes können diese Eindrücke sehr verschieden sein.

1. Der Schall kann in einem einzigen mehr oder weniger starken, kurz abgebrochenen Eindruck auf unser Gehör bestehen, man nennt ihn dann meistens Knall, wenn man auch häufig unter Knall nur einen heftigen, einmaligen, kurz abgebrochenen Eindruck auf unser Gehör versteht. Der Schall kann ferner von einiger Dauer sein, in einer Reihenfolge von Stößen entstehen, welche unser Ohr erhält. Je nachdem nun diese Stöße regelmäßig oder unregelmäßig, gleichartig oder ungleichartig sich folgen, unterscheidet man den Schall als Ton oder Klang oder als Geräusch. Die Geräusche selbst unterscheidet unsere Sprache wieder als Rasseln, Knistern, Sausen, Brausen usw.

Daß nur eine regelmäßig periodische Bewegung einen Ton, eine unregelmäßige ein Geräusch verursacht, kann man leicht durch eine durchlöchernte Scheibe, eine einfache Form der im nächsten Paragraph zu beschreibenden Sirene nachweisen. Man nehme eine kreisförmige Scheibe von steifer Pappe und versehe einen auf derselben gezogenen Kreis mit einer Anzahl von Löchern in genau gleichen Abständen. Man ziehe einen zweiten Kreis auf der Scheibe von einem Durchmesser, der dem des ersten nahe ist, und versehe den zweiten Kreis mit etwa der gleichen Zahl aber ganz unregelmäßig verteilten Löchern. Setzt man die Scheibe auf die Zentrifugalmaschine um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse in hinreichend schnelle Rotation und bläst durch ein Glasrohr gegen die an gleich weit voneinander stehenden Löchern gebildete Reihe, so hört man einen Ton, während gleiches Blasen gegen die unregelmäßige Löcherreihe nur das Blasegeräusch hören läßt.

2. Die musikalischen Töne unterscheidet man nach ihrer Höhe ab

höhere oder tiefere Töne. Worauf dieser Unterschied beruht, läßt sich leicht durch den Versuch zeigen. Ein longitudinaler Ton ist stets viel höher, als der Transversalton desselben Stabes, und der Transversalton eines Stabes ist um so höher, je kürzer und dicker der Stab ist; bei schwingenden Saiten ist der Ton um so höher, je kürzer die Saite ist oder je stärker man sie spannt. Da wir nun sahen, daß die longitudinalen Schwingungen rascher sind als die transversalen, und diese um so rascher, je kürzer der schwingende Körper ist, so folgt, daß ein Ton um so höher ist, je mehr Schwingungen der den Ton erzeugende Körper macht, je mehr Stöße also in gleichen Zeiten unser Ohr treffen.

Man kann die Schwingungszahl einer gespannten Saite berechnen: läßt man nun einen Stab mit der Saite genau isochron schwingen, oder bringt man einen Ton dadurch hervor, daß man ebenso oft die Zähne eines Rades gegen eine Karte schlagen läßt, so haben alle diese Töne die gleiche musikalische Höhe. Jeder Ton entspricht somit einer ganz bestimmten Schwingungszahl.

Man kann übrigens auch bei den Geräuschen eine verschiedene Höhe wahrnehmen, wie man aus folgendem Versuche sieht. Man nimmt sieben Stäbe von hartem Holze gleicher Dicke und Breite, aber verschiedener Länge, so daß beim Anschlagen diese Stäbe eine Tonreihe geben. Läßt man dann einen der Stäbe auf den Boden fallen, so hört man ein Geräusch ohne bestimmten musikalischen Charakter; läßt man aber die Stäbe nacheinander zu Boden fallen, und zwar der Reihe nach die größeren zuerst, so unterscheidet man auch bei diesen Geräuschen eine bestimmte Höhe.

3. Töne gleicher Höhe können auf das Ohr einen ganz verschiedenen Eindruck machen; so unterscheidet man deutlich den Ton selbst bei gleicher Höhe der Blas- und Saiteninstrumente, bei den Blasinstrumenten den der Holz- und Blechinstrumente.

Die Töne unterscheiden sich durch eine eigentümliche Beschaffenheit, die man häufig als Klang oder Klangfarbe oder Tonfarbe bezeichnet. Vielfach wendet man auch dafür das französische Wort *Timbre* an. Die Ursache der Klangverschiedenheit, welche schon Ohm<sup>1</sup> in der verschiedenen Form der Schwingungen gesehen hatte, ist besonders von Helmholtz<sup>2</sup> in neuerer Zeit untersucht worden, er hat gezeigt, daß dieselbe in der Tat von der Form der Schwingungen, oder vielmehr von den gleichzeitig auftretenden Tönen bedingt ist. Einen Ton erzeugt jede regelmäßig periodische Wiederkehr von Stößen in unser Ohr; innerhalb jeder Schwingungsperiode bleibt die Bewegung dabei ganz willkürlich, wenn nur dieselbe Bewegung, welche innerhalb der ersten Periode bestand, in den folgenden Perioden in ganz gleicher Weise wiederkehrt. So kann die Schwingung, die wir als Ton vernehmen, eine einfache sein, sie kann aber auch aus der Überlagerung mehrerer Schwingungen bestehen, deren jede einem andern höhern Tone entspricht, welcher den gehörten Ton begleitet, welcher sich aber nur in soweit bemerkbar macht, daß er die Farbe des Grundtones verändert. In welcher Weise wir die einzelnen Töne eines Klanges erhalten können, werden wir in einem der nächsten Paragraphen besprechen.

<sup>1</sup> Ohm, Poggend. Ann. 60. 1813; 62. 1814. Man sehe auch Seebeck, Poggend. Ann. 60. 1813; 63. 1814. Doves Repert. 8. 1819.

<sup>2</sup> Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863.

4. Die Töne können bei gleicher Höhe und gleicher Klangfarbe an Stärke oder Intensität verschieden sein. Verschiedenheit der Stärke erzeugen wir bei einer gespannten Saite durch Änderung der Schwingungsamplitude, oder was dasselbe ist, durch Änderung der Schwingungsgeschwindigkeit bei ungeänderter Dauer der Schwingung. Der größern Amplitude entspricht der stärkere Ton.

Wir nehmen indes nicht an, daß die Intensität einfach wie die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung zu- oder abnehme, sondern wie das Quadrat derselben, indem wir annehmen, daß die Stärke des Schalles von der Stärke des Stoßes abhängt, welchen die bewegten Lufttheile unserm Gehörorgane erteilen. Die Stärke des Stoßes ist aber proportional der lebendigen Kraft der bewegten Körper, und da diese bei gleicher Masse dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so setzen wir die Intensität des Schalles dem Quadrate der Geschwindigkeit der schwingenden Teile in dem Augenblicke der größten Geschwindigkeit proportional also dem Quadrate der Amplitude.

### § 158.

**Bestimmung und Vergleichung der Schwingungszahlen.** Um die Schwingungszahl von Tönen zu erhalten, kann man sich entweder der Gesetze der Elastizität bedienen oder der Tonerzeugung durch mechanische Stöße, indem man letztere durch irgend eine mechanische Vorrichtung direkt zählt.

Die Sirene von Cagniard Latour<sup>1)</sup> bestimmt die Schwingungszahlen durch direkte Zählung der den Ton erzeugenden Stöße, sie besteht (Fig. 286)



Fig. 286



Fig. 287

aus einer zylindrischen Trommel, von der unten in der Mitte der Bodenplatte eine Röhre *k* ausgeht, mittels welcher der Apparat auf einen Windkasten gestellt wird, und durch welche die comprimierte Luft in die Trommel *BB* eindringt. Die obere Platte der Trommel ist durch eine bestimmte Anzahl von Löchern, welche auf dem Umfange eines Kreises liegen, durchbohrt. Die Löcher sind alle gleichweit voneinander entfernt und alle nach gleicher Richtung schief gestellt,

so daß die Öffnungen alle z. B. von links nach rechts aufsteigend zu einem bestimmten Winkel gegen die Vertikale geneigte Kanäle durch die Platte bilden.

Unmittelbar über der die Trommel deckenden Platte befindet sich eine zweite Platte, welche an der Achse *AF'* (Fig. 287) befestigt ist und an dieser Achse sich drehen kann. Um die Platte möglichst leicht bewegen

<sup>1)</sup> Cagniard Latour, Annales de chim. et de phys. 12 1819 et 15 1821  
Poggend Ann 4 1826 und 10 1827

zu machen, ist die stählerne Achse  $AF'$  unten bei  $a$  (Fig. 286) in ein Zapfenlager von Messing gestellt, und oben durch die Schraube  $A$ , deren Spitze in eine konische Vertiefung der Achse paßt, lose gehalten.

Die Platte  $C'$  (Fig. 287) hat ebenfalls auf einem Kreise 16 Löcher, so daß dieselben sich auf die Löcher der untern Platte legen und die Trommel mit der äußern Luft in Verbindung setzen können, oder bei einer kleinen Drehung der obern Scheibe den Zwischenräumen der untern Scheibe entsprechen, die Trommel also verschließen. Bilden die Löcher die Fortsetzung der Löcher der untern Platte, so kann die in die Trommel getriebene verdichtete Luft nach außen entweichen; entsprechen die Löcher den Zwischenräumen zwischen den unteren Löchern, so ist die Trommel abgesperrt, die Luft kann nicht entweichen. Die Löcher sind schief durch die Platte gebohrt, aber nach entgegengesetzter Richtung als die unteren Löcher; also wenn diese von links nach rechts durch die untere Platte aufsteigende Kanäle bilden (Fig. 288), so bilden die Löcher der obern Platte von rechts nach links aufsteigende Kanäle. Durch diese Art der Durchbohrung wird bewirkt, daß die Scheibe  $C'$  durch den Luftstrom selbst zum Rotieren gebracht wird, der zu den Löchern austritt, wenn die obern Löcher auf den unteren stehen, denn der in den unteren Löchern von links nach rechts aufsteigende Luftstrom stößt gegen die Wände der oberen Löcher und erteilt dadurch der Scheibe eine Drehung, welche derjenigen des Zeigers einer Uhr entgegengesetzt ist. Die Geschwindigkeit der obern Scheibe wird dadurch um so größer, je stärker der Druck der Luft in der Trommel ist. Durch Regulierung des Luftstromes kann man daher der Scheibe eine ganz bestimmte Geschwindigkeit geben.

Fig. 288.



Dreht sich die Scheibe mit einer gewissen Geschwindigkeit, so wird bei 16 Löchern bei jeder Umdrehung, da alle oberen Löcher zugleich auf alle unteren zu stehen kommen, 16 mal die Trommel geöffnet und 16 mal geschlossen. Die von unten in die Trommel geführte verdichtete Luft kann also 16 mal durch die obere Platte entweichen und ebenso wird 16 mal der Luftstrom unterbrochen. Wir erhalten somit bei jeder Umdrehung 16 Verdichtungen der Luft über der Scheibe und beim Verschluß der unteren Löcher 16 Verdünnungen, also bei jeder Umdrehung 16 Schwingungen der Luft, welche sich als 16 Wellen in die umgebende Luft fortpflanzen.

Wenn wir demnach durch diese Schwingungen einen bestimmten Ton hervorgebracht haben, können wir aus einer Beobachtung der Umdrehungszahl der Scheibe die Schwingungszahl des gehörten Tones unmittelbar ableiten.

Um die Umdrehungszahl der Scheibe zu erhalten, ist in die Achse  $AF'$  bei  $a$  eine Schraube ohne Ende eingeschnitten, welche in ein Zahnrad  $E$  (Fig. 286) eingreift und dieses bei jeder Umdrehung um einen Zahn dreht. An der Achse des Rades ist ein Zeiger befestigt, der auf dem Zifferblatte (Fig. 287) die Umdrehungen der Scheibe angibt. Das Rad hat 100 Zähne; bei 100 Umdrehungen der Scheibe dreht es sich somit einmal herum und die Spitze des Zeigers durchläuft einmal den Umfang des Zifferblattes. Dieses ist in 100 Teile geteilt, die an ihm befindlichen Zahlen geben also die einzelnen Umdrehungen des Rades an. Eine Umdrehung des Zeigers gibt also  $16 \cdot 100$  Vibrationen an.



Hat sich das Rad  $E$  einmal vollständig gedreht, so greift ein Vorsprung  $H$ , der am Umfange des Rades befestigt ist, in die Zähne des Rades  $G$  und bewirkt, daß der an der Achse dieses Rades befestigte Zeiger auf seinem Zifferblatte um einen Teilstrich weiter rückt, jeder Teilstrich dieses Zifferblattes gibt also 100 Umdrehungen der Scheibe oder 1600 Schwingungen an. Hat man sonach während einer Zeit  $T$  eine Bewegung des Zeigers auf dem zweiten Zifferblatte um  $n$  Teilstriche beobachtet und auf dem ersten  $n'$ , so ist die Anzahl der während der Zeit  $T$  stattgefundenen Schwingungen

$$N = n \cdot 1600 + n' \cdot 16,$$

und die Schwingungszahl des Tones, wenn  $T$  in Sekunden gegeben ist,

$$\nu = \frac{N}{T}.$$

Die beiden gezahnten Räder sind auf der einen Platte des Gehäuses in welchem sie eingeschlossen sind, befestigt. Diese Platte ist ein wenig verschiebbar, und drückt man auf die Fig. 287 zur Rechten befindliche Schraube  $a$ , so wird die Platte und damit die gezahnten Räder so weit zur Linken verschoben, daß die Schraube ohne Ende nicht in das Zahnrad  $E$  eingreift. In dieser Lage wird die Platte durch die oben auf dem Gehäuse befindliche Feder, deren Vorsprung in einem Ausschnitt der Platte eingreift, festgehalten. Wenn sich also auch jetzt die Scheibe dreht, so bewegen sich doch die Räder und Zeiger nicht. Drückt man dann auf die Feder  $f$ , so springen Platte und Räder in ihre frühere Lage zurück und die Räder und Zeiger bewegen sich.

Um nun mittels der Sirene die Schwingungszahl eines Tones zu bestimmen, bewirkt man zunächst, daß beide Zeiger auf 0 stehen. Dann werden sie ausgelöst und man setzt durch einen Luftstrom die Sirene in Bewegung. Der Ton ist anfangs tief, wird aber, da die Bewegung der Scheibe eine beschleunigte ist, immer höher. Durch Regulierung des Luftstromes bringt man dann den Ton hervor, dessen Schwingungszahl man untersuchen will, und drückt, wenn er konstant geworden ist, zu einer ganz bestimmten Zeit auf die Feder  $f$ . Dadurch werden die Räder eingeschaltet und die Zeiger bewegen sich. Nach einer bestimmten Zeit drückt man auf den Knopf  $a$  und schaltet so die Räder wieder aus und liest sowohl die Teilstriche  $n$  auf dem Zifferblatt des Rades  $G$  ab, als die  $n'$  auf dem andern und hat somit alle Daten, die erforderlich sind, um die Schwingungszahl  $\nu$  zu bestimmen.

Savart wandte zu seinen Versuchen, um die Grenze der Wahrnehmbarkeit der Töne zu bestimmen, ein anderes Verfahren an.<sup>1)</sup> Er ersetzte die Sirene durch ein in schnelle Rotation versetztes gezahntes Rad, dessen Zähne gegen eine Karte oder ein keilförmiges zugeschnittenes Blättchen von leichtem Holze schlugen. Jeder Schlag entspricht einer einmaligen Öffnung der Sirene, also einer Schwingung, aus der Anzahl der Zähne des Rades und der Umdrehungsgeschwindigkeit desselben erhält man also durch eine einfache Multiplikation die Anzahl der einem bestimmten Tone entsprechenden Schwingungen.

1) Savart, Über die Empfindlichkeit des menschlichen Gehöres. Ann. de chim. et de phys. 44. 1830. Poggend. Ann. 20. 1830.

Die Umdrehungen des Rades werden auch hier durch einen Zähler von gleicher Einrichtung wie derjenige der Sirene bestimmt.

Duhamel hat es versucht, die Schwingungen zu zählen, indem er die § 148 schon besprochene graphische Methode anwandte.<sup>1)</sup> Der schwingende und tonangebende Körper, z. B. ein schwingender Stab, wird an seinem Ende mit einer feinen Spitze versehen und vor ihm ein Glaszylinder gedreht, der durch Ruß mit einem leicht fortzunehmenden Überzuge versehen ist. Die Spitze berührt den Zylinder nur ganz leicht. Wenn nun der Stab nicht schwingt, so zieht die Spitze auf dem Zylinder, der sich bei der Drehung zugleich langsam hebt oder senkt, eine einfache Spirallinie; wenn aber der Stab schwingt, so erhält diese Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des Stabes. Wenn der Zylinder durch irgend eine mechanische Vorrichtung in eine stetige Rotation versetzt wird und durch irgend eine andere Zählvorrichtung die Umdrehungsgeschwindigkeit bestimmt werden kann, so genügt es, die Länge der Spirallinie zu messen und die Anzahl der Wellen zu zählen, um die Schwingungszahl zu erhalten. Habe z. B. die Walze fünf Umdrehungen in der Sekunde, und beobachtet man, daß die Spirallinie genau 2,5 Umlänge der Walze beträgt, so gibt die Zahl der Wellen auf derselben die Schwingungszahl in einer halben Sekunde an, die doppelte Zahl also die Schwingungszahl des Tones.

Duhamel und später Wertheim wandten indes dieses Verfahren hauptsächlich dazu an, um die Schwingungszahlen zweier Töne zu vergleichen. Zu dem Ende braucht man die Drehungsgeschwindigkeit der Walze nicht einmal zu kennen.

Man bringt die beiden Stäbe oder schwingenden Körper nahe beieinander an, so daß sie ihre Schwingungen auf einer und derselben Walze gleichzeitig abzeichnen.

Man hat dann nur die auf gleichen Längen der beiden Spiralen befindlichen Wellen zu zählen, und da diese in gleichen Zeiten von den beiden schwingenden Körpern beschrieben sind, so ist das Verhältniß der beiden Zahlen genau das der Schwingungszahlen der Töne.

Ein ganz vorzügliches Mittel, um das Schwingungsverhältniß zweier Töne, die etwa von Stimmgabeln gegeben werden, zu vergleichen, bieten, wenigstens wenn das Schwingungsverhältniß durch kleine Zahlen gegeben ist, die Lissajousschen Figuren. Die Methode ist einer fast unbegrenzten Genauigkeit fähig, da, wie wir sahen, die Schwingungsfigur nur feststeht, wenn die Gabeln genau das durch die Figur charakterisierte Schwingungsverhältniß haben, die Schwingungszahl der einzelnen Gabeln mag so groß oder so klein sein, wie sie will. Weichen die Schwingungszahlen von diesem Verhältnisse ab, so wird jedesmal innerhalb der Zeit, in welcher die rascher schwingende Gabel eine Schwingung mehr oder weniger macht, als dem Verhältnisse entspricht, einmal die ganze Reihe der durch die verschiedenen Phasendifferenzen bewirkten Schwingungsfiguren durchlaufen. Um zu erkennen, ob die schneller schwingende Gabel zu schnell oder zu langsam schwingt, hat man nur ein Stückchen Wachs an deren Ende anzukleben. War die Schwingung zu schnell, so wird jetzt die Zeit zum

1) *Duhamel*, L'Institut 1840. p. 19 und 41.



Durchlaufen aller Figuren größer, war sie zu langsam, so wird die Zeit kleiner, da durch das Ankleben des Wachses die Schwingungen etwas verlangsamt werden.

Die andere Methode, um die Schwingungszahlen der Töne zu bestimmen, beruht auf der Anwendung der Elastizitätsgesetze, welche uns nach dem vorigen Abschnitte die Schwingungszahl eines gegebenen Körpers aus seiner Beschaffenheit zu berechnen gestatten. Sie ist besonders bequem, um die Schwingungszahlen der Töne zu vergleichen, und da, wie wir sehen werden, aus der Schwingungszahl eines Tones sich die aller übrigen berechnen läßt, so wendet man diese Methode fast immer zur Bestimmung der Schwingungszahl der Töne an.

Das gebräuchlichste auf dieser Methode beruhende Verfahren ist die Bestimmung der Schwingungszahlen mittels des Monochordes, einer auf einem Kasten von trockenem Holze aufgespannten Saite (Fig. 289). Die

Fig. 289.



Saite ist bei  $a$  mittels einer Schraube befestigt und, um eine genau bestimmbare Länge derselben zu den Versuchen zu verwenden, über die beiden scharfen Stege  $ss'$  gelegt und dann über die Rolle  $R$  geführt, welche sich mit möglichst wenig Reibung in ihrem Zapfenlager dreht. In dem an dem Ende der Saite befestigten Haken  $h$  können verschiedene spannende Gewichte aufgehängt werden. Der Abstand  $ss'$  zwischen den beiden Stegen ist in 1000 gleiche Teile geteilt und ein auf dem Brette des Monochords verschiebbarer Steg gestattet von der Saite beliebige Stücke schwimmen zu lassen.

Um nun die Schwingungszahl eines Tones zu bestimmen, stimmt man zunächst das Monochord nach dem betreffenden Ton, sei es dem einer Stimmgabel oder irgend eines andern Instrumentes, indem man das spannende Gewicht oder die Länge der Saite so lange ändert, bis sie bei einfachen Anschlagen oder Anstreichen mit dem Geigenbogen genau den Ton der Gabel angibt.

Aus der beobachteten Länge der Saite, dem spannenden Gewichte und dem Gewichte der Längeneinheit der Saite erhält man, wenn die Steifigkeit der Saiten nicht beachtet zu werden braucht, die Schwingungszahl nach der Formel des § 142

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{gP}{qs}}$$

worm  $l$  die Länge der Saite,  $P$  das spannende Gewicht,  $q$  den Querschnitt und  $s$  das spezifische Gewicht der Saite, also  $qs$  das Gewicht der Längeneinheit bedeutet

Man wendet meist zu dem Monochord Metallsaiten an, da diese regelmäßiger zu bearbeiten sind als andere und da sie bei gleicher Spannung nicht so leicht Änderungen ausgesetzt sind durch den Feuchtigkeitsgehalt der Luft. Sind jedoch diese Saiten nicht sehr dünn und nicht vollkommen biegsam, wie z. B. die Stahlsaiten, die zu den Klavieren benutzt werden, so muß man zur Berechnung der Schwingungszahlen die vollständigere Formel von Seebeck anwenden, in welcher auf die Steifigkeit der Saiten Rücksicht genommen ist.

Eine andere Methode, welche Scheibler<sup>1)</sup> angewandt hat, um mittels des Monochords nur durch Versuche die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, werden wir erst im nächsten Kapitel bei Abhandlung der Stöße und Kombinationstöne kennen lernen können.

### § 159.

**Von dem Verhältniß der Töne und den Intervallen.** Man kann auf die verschiedenste Weise und mit den verschiedensten Instrumenten Töne gleicher Höhe hervorbringen. Nimmt man z. B. den Ton eines gekrümmten Stabes und bringt auf der Sirene oder mittels gezahnter Räder, oder mittels gespannter Saiten den Ton hervor, so findet man stets bei Messung der Schwingungszahlen, wie verschieden auch die Klangfarbe aller dieser Töne sein mag, daß sie doch alle dieselbe Schwingungszahl haben. Wir folgern daraus das erste Gesetz der Tonlehre:

Allen Tönen gleicher Höhe, welches auch der schwingende Körper sei, welcher sie veranlaßt, entsprechen gleiche Schwingungszahlen, und umgekehrt, gleichen Schwingungszahlen entsprechen immer gleiche Tonhöhen.

Daraus folgt, daß ein gegebener Ton seiner Höhe nach bestimmt ist durch die Zahl  $n$  seiner Schwingungen, und daß man ihn mittels derselben bezeichnen kann.

Töne verschiedener Schwingungszahlen sind verschieden, das Verhältniß ihrer Schwingungszahlen nennt man ein Tonverhältniß oder Intervall.

Wenn man zugleich zwei Töne verschiedener Höhe hervorbringt und anhalten läßt, so kann das Zusammenklingen derselben auf unser Ohr entweder einen angenehmen Eindruck machen oder einen nicht so angenehmen. In dem ersten Falle nennt man das Zusammenklingen der Töne oder den Akkord konsonierend, im zweiten Falle dissonierend. Je weniger angenehm der Akkord unser Ohr für sich allein stehend berührt, um so dissonanter ist derselbe.

Es gibt eine große Menge verschiedener Akkorde, welche alle in der Musik gebraucht werden, das Ohr unterscheidet sie als angenehm oder weniger angenehm, und darnach ist denselben in der Musik ihre Stelle angewiesen. Die Aufgabe der Physik ist es, zu untersuchen, worin die Akkorde sich unterscheiden. Nehmen wir z. B. einen häufig gebrauchten Akkord, den Zweiklang von  $c$  und  $c$  der gewöhnlichen Tonleiter, so sagt uns unser Ohr zunächst, daß dieser Akkord mit denselben wesentlichen Eigenschaften, mit wesentlich demselben Eindruck auf unser Ohr sowohl zwischen hohen als tiefen Tönen bestehen kann, daß er ebenso zwischen je zwei andern

<sup>1)</sup> Über Scheiblers Versuche *Roeder* in *Poggend. Ann.* 32 1834 und in *Doves Repertorium* 3. p. 19. 1839

Tönen der Tonleiter *d*, *fis* usw. bestehen kann. Es folgt daraus, der Akkord ist unabhängig von der Höhe der ihn zusammensetzenden Töne, also unabhängig von ihrer absoluten Schwingungszahl. Wenn man nun aber in allen den verschiedenen Fällen die Schwingungszahlen der den Akkord zusammensetzenden Töne bestimmt, so findet man, daß dieselben stets im Verhältnisse von 4 zu 5 zueinander stehen, und ebenso auch umgekehrt, daß ein Akkord, dessen Töne Schwingungszahlen besitzen, welche im Verhältnisse von 4 zu 5 zueinander stehen, stets als derselbe erscheint. Gleiches gilt für alle übrigen Akkorde. Wir erhalten demnach als zweites Gesetz der Tonlehre folgendes:

Jeder musikalische Akkord zwischen zwei Tönen ist bestimmt und kann dargestellt werden durch das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen  $\frac{n}{n'}$  der komponierenden Töne.

Ist das Verhältnis  $\frac{n}{n'}$  der Einheit gleich, so sind die beiden Töne im Einklang; ist es verschieden, so sind sie an Höhe verschieden und zwar um so mehr, je mehr dies Verhältnis von der Einheit verschieden ist. Ihr musikalisches Intervall ist unabhängig von der absoluten Anzahl der Schwingungen, es wird nur bestimmt von dem Verhältnis derselben.

Um zu unterscheiden, welche Intervalle konsonierend sind, welche nicht, müssen wir untersuchen, wie sich die Intervalle der von der Musik als die konsonierendsten angenommenen Akkorde verhalten. Es sind dieses die Oktave, in der gewöhnlichen Dur-Tonleiter *c* und *c*<sub>1</sub>, die Sexte *c* und *a*, die Quinte *c* und *g*, die Quarte *c* und *f*, die große Terz *c* und *e* und die kleine Terz *c* und *es*. Eine Vergleichung der Schwingungszahlen hat ergeben, wenn man von dem tiefsten Tone der Reihe ausgeht, und dessen Schwingungszahl, wo der Ton sonst seiner absoluten Höhe nach auch liegen mag, gleich 1 setzt:

Für die Oktave	das Verhältnis	$\frac{n}{n'} = 2$
„ „ Sexte	„ „	$\frac{n}{n'} = \frac{5}{3}$
„ „ Quinte	„ „	$\frac{n}{n'} = \frac{3}{2}$
„ „ Quarte	„ „	$\frac{n}{n'} = \frac{4}{3}$
„ „ große Terz	„ „	$\frac{n}{n'} = \frac{5}{4}$
„ „ kleine Terz	„ „	$\frac{n}{n'} = \frac{6}{5}$

Das heißt die Oktave macht zwei Schwingungen, wenn der Grundton eine macht, die Sexte 5, wenn der Grundton 3, oder  $\frac{3}{2}$ , wenn letzterer 1 vollführt usf.

Es folgt daraus, wenn man zwei Töne, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie zwei Zahlen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, zusammenklingen läßt, daß man dann einen konsonierenden Akkord erhält.

Man teilt diese Akkorde in vollkommene und unvollkommene Konsonanzen. Die vollkommenen sind die Oktave und die Quinte, welche den Verhältnissen 1, 2, 3 entsprechen, die übrigen sind die unvollkommenen Konsonanzen. Wir sehen demnach, eine Konsonanz ist um so vollkommener, je einfacher das Schwingungsverhältnis der sie komponierenden Töne ist. Ein Akkord wird um so dissonierender, je komplexer das Verhältnis der Zahlen ist, welche ihn zusammensetzen. So gilt die Sekunde  $\frac{2}{3}$  und noch mehr die kleine Sekunde  $\frac{1}{2}$  als Dissonanz.

## § 160.

**Von den mehrfachen Akkorden.** Aus dem Gesetze der Konsonanz läßt sich leicht voraussehen, welche mehrfach zusammengesetzte Akkorde auf unser Ohr einen wohltnenden Eindruck machen, welche als Konsonanzen wirken und welche als Dissonanzen eine Auflösung verlangen. Konsonierende Akkorde können nur solche sein, in denen alle Töne in einfachen Verhältnissen zueinander stehen.

Wir wenden zur Bestimmung der Tonverhältnisse die erwähnte Bezeichnungsweise an, die Schwingungszahl eines Tones, und zwar, wenn nichts anderes bemerkt wird, des tiefsten, wird gleich 1 gesetzt. Jeder der folgenden Brüche bezeichnet einen Ton und zwar denjenigen, welcher die durch den Bruch angedeuteten Schwingungen vollführt, wenn der mit 1 bezeichnete Ton eine Schwingung vollführt, oder der in derselben Zeit die im Zähler angegebenen Schwingungen zurücklegt, wenn der Grundton die im Nenner stehende Anzahl von Schwingungen zurücklegt.

Nach dem Vorigen können also nicht konsonierend sein

$$\text{Prim Terz Quart } 1 : \frac{3}{2} : \frac{4}{3}$$

$$\text{Prim Quart Quint } 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3}$$

$$\text{Prim Quint Sext } 1 : \frac{5}{3} : \frac{6}{5};$$

denn wenn auch die beiden ersten Töne dieser Akkorde konsonierend sind, so sind es nicht die beiden letzten, da diese den Verhältnissen  $\frac{16}{15}$ ,  $\frac{8}{7}$ ,  $\frac{10}{9}$  entsprechen.

Konsonierend sind die Akkorde

$$1) \text{ Prim große Terz Quint } 1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{3}$$

$$2) \text{ Prim kleine Terz Quint } 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3}$$

$$3) \text{ Prim große Terz Sext } 1 : \frac{3}{2} : \frac{4}{3}$$

$$4) \text{ Prim Quart Sext } 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3};$$

denn in allen diesen Fällen sind diese Töne sowohl mit dem Grundton als unter sich in Konsonanz, denn bei den beiden letzten Tönen haben wir

$$\text{in 1) große Terz Quint } \frac{3}{2} : \frac{5}{3} = 5 : 6$$

$$\text{„ 2) kleine Terz Quint } \frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 4 : 5$$

$$\text{„ 3) große Terz Sext } \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = 3 : 4$$

$$\text{„ 4) Quart Sext } \frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 4 : 5$$

Die Akkorde 3 und 4 sind übrigens nur Umlagerungen der Akkorde 1 und 2, denn multiplizieren wir in 3 die Töne 1 und  $\frac{3}{2}$  mit 2, setzen also für diese Töne die mit ihnen vollkommen konsonierenden Oktaven, so erhalten wir für 3

$$2, \frac{10}{4}, \frac{5}{3}$$

oder setzen wir jetzt  $\frac{3}{2}$  als Grundton, also seine Schwingungszahl gleich 1,

$$1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3}.$$

Multiplizieren wir in 4 nur die Prim mit 2 und dividieren dann alle Zahlen mit  $\frac{4}{3}$ , das heißt, machen wir die Quart zum Grundton, so erhalten wir

$$1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{3}.$$

Der Akkord 3 ist also nur eine Umkehrung von 2, und der Akkord 4 eine Umkehrung von 1.

Außer den angegebenen vier konsonierenden Akkorden erhalten wir durch nochmalige Umlagerung der beiden Akkorde 1 und 2 noch zwei weitere konsonierende Akkorde; indem wir nämlich den Akkord 1 ebenso umlegen, wie der Akkord 3 aus 2 entstanden ist, also nur für die Prim ihre höhere Oktave einsetzen, bekommen wir den fünften Akkord

$$\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2,$$

oder indem wir diesen Akkord vom Grundton aus gebildet denken, erhalten wir durch Multiplikation aller Zahlen mit  $\frac{4}{3}$

$$1, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}.$$

Daß von diesen drei Tönen der zweite mit dem ersten, der dritte mit dem zweiten in Konsonanz sind, ergibt sich unmittelbar, da es die Intervalle  $\frac{6}{5}$  und  $\frac{4}{3}$  sind; daß der dritte mit dem ersten konsonant ist, folgt aus den im vorigen Paragraphen angeführten Intervallen nicht; wir können es aber schon aus der Bemerkung ableiten, daß die Oktave mit dem Grundton die vollkommenste Konsonanz bildet, und daß deshalb ein Intervall nicht dissonierend wird, wenn wir den Grundton durch seine Oktave ersetzen. Da nun das Intervall  $\frac{8}{5}$  nichts anderes ist als die Umlagerung der Terz, indem wir den Grundton durch die Oktave ersetzen, so folgt, daß auch dieses Intervall konsonierend ist. Wir werden im übrigen sofort bei Ableitung der Tonleiter dieses Intervall als ein Sextenintervall kennen lernen.

Lagern wir den Akkord 2 in derselben Weise um, wie wir zur Bildung von 4 den Akkord 1 umlagerten, setzen wir also für Grundton und kleine Terz die höhere Oktave, so erhalten wir als sechsten Akkord

$$\frac{3}{2}, 2, \frac{12}{5},$$

und bilden wir jetzt diesen Akkord anstatt von der Quint von dem Grundton, indem wir alle Zahlen mit  $\frac{2}{3}$  multiplizieren, so erhalten wir

$$1, \frac{4}{3}, \frac{24}{15} = \frac{8}{5}.$$

Nach der soeben gemachten Bemerkung wird man auch diesen Akkord sofort als konsonierend erkennen.

Man nennt die konsonierenden Akkorde, welche aus drei Tönen zusammengesetzt sind, welche im Verhältnisse  $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$  oder  $1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{4}$  stehen, Dreiklänge, und zwar den Dreiklang mit der großen Terz den großen oder Dur-Dreiklang, den mit der kleinen Terz den Moll-Dreiklang; sie sind mit ihren beiden Umlagerungen die einzigen konsonierenden Akkorde, die sich aus der Reihe der harmonischen Töne ergeben. Die Akkorde 3 und 5, welche der erstere aus dem Moll-Dreiklange, der zweite aus dem Dur-Dreiklange, durch Ersetzen des Grundtons durch die höhere Oktave entstanden gedacht sind, heißen die Terzsextakkorde oder schlechthin Sextakkorde, die beiden andern die Quartsextakkorde jedesmal desjenigen Dreiklanges, aus dem sie entstanden sind.

Die beiden Dreiklänge sind aus ganz gleichen Intervallen aufgebaut, beide aus einer großen und einer kleinen Terz, der einzige Unterschied ist der, daß beim Dur-Dreiklange die beiden untern, beim Moll-Dreiklange die beiden obern Töne das Intervall der großen Terz bilden.

Auf die Frage, warum nur diese und keine andern Intervalle und Akkorde konsonierend sind, kommen wir im nächsten Kapitel nochmal

zurück, wenn wir die Wahrnehmung der Töne überhaupt besprechen, es genügt uns, an dieser Stelle die erfahrungsgemäß bestimmten konsonierenden Akkorde und Intervalle zu kennen.

## § 161.

**Die Tonleiter.** Außer den harmonischen Tönen 1, 2, 3, 4, 5, 6, oder wenn wir für die höhern Töne dieser Reihe die tiefern Oktaven einsetzen, so daß alle Schwingungszahlen entsprechen, welche zwischen 1 und 2 liegen, den Tönen 1,  $\frac{9}{8}$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{3}$ , 2, sind in der Musik noch viele andere gebräuchlich, welche zwischen diesen eingeschaltet werden; die Musik ordnet dieselben in eine Reihe, welche den Namen Tonleiter führt. Wenn wir den Grundton 1 mit *c* bezeichnen, so ist die sogenannte diatonische Dur-Tonleiter

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2 \\ c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad a \quad h \quad c_1.$$

Außer der Terz, Quart, Quint, Sext tritt noch die Sekunde  $\frac{9}{8} = d$  und die Septime  $\frac{15}{8} = h$  hinzu. Von der Oktave  $c_1$  wiederholt sich die Reihe einfach, indem ebenso, wie die Oktave die Verdoppelung des Grundtones ist, so auch in der weitem Tonreihe die folgenden Töne die Verdoppelungen der entsprechenden Töne in den nächst tiefern Oktaven sind. Um diese höhern Oktaven zu bezeichnen, werden wir rechts unten die Zahlen 1, 2 ... an die Buchstaben setzen, welche die Töne unserer Grundoktave angeben; diese Zahlen sind dann jene Potenzen von 2, mit welcher wir die Töne der Grundoktave multiplizieren müssen, um den Ton der entsprechenden Oktave zu erhalten. Tiefer Oktaven bezeichnen wir dadurch, daß wir der unten rechts geschriebenen Zahl das negative Vorzeichen geben, andeutend, daß wir, um zu diesen Tönen zu gelangen, diejenigen der Grundoktave mit der von der Zahl angegebenen negativen Potenz von 2 multiplizieren bzw. durch die betreffende Potenz von 2 dividieren müssen.

Man hat viel darüber gestritten, wie diese Tonleiter entstanden sei, es ist indes wahrscheinlich, daß sie sich allmählich durch das musikalische Bedürfnis gebildet und erweitert hat, und daß nicht theoretische Entwicklungen darauf geführt haben. Indes kann man dieselbe auf mehrfache Weise entstanden denken.

Setzt man die Reihe der harmonischen Töne fort, indem man z. B. die Seite des Monochords, deren Schwingungen, wenn sie ungeteilt schwingt, mit 1 bezeichnet werden, immer weiter nach der Reihe der natürlichen Zahlen läuft, so erhält man Töne mit den Schwingungszahlen

$$7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.$$

und durch Division durch die verschiedenen Potenzen von 2, um die tieferen Oktaven der Töne zu erhalten, so daß sie in die Oktave 1—2 fallen

$$1, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \frac{11}{8}, \frac{12}{8}, \frac{13}{8}, \frac{7}{4} = \frac{14}{8}, \frac{15}{8}, 2.$$

oder mit den vorigen 1,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{3}$  zusammen

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{3}{2}, \frac{13}{8}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, 2.$$

also die Töne

$$c \quad d \quad e \quad - \quad g \quad - \quad - \quad h \quad c_1$$



Nun unterscheiden sich die Töne  $\frac{11}{8}$  und  $\frac{4}{3}$  oder  $\frac{5}{3}$  und  $\frac{13}{8}$  und  $\frac{7}{4}$  nur wenig voneinander, man könnte daher denken, daß jene für diese eingesetzt wären, und so die Tonleiter entstanden wäre. Indes das Fehlen des einfachen Intervalles  $\frac{7}{4}$  in der Tonleiter spricht nicht für diese Entstehungsweise.

Nach dem Vorgange von Chladni<sup>1)</sup> gelangen wir auf andere Weise zur Tonleiter, wo wir es nicht nötig haben, anstatt der direkt erhaltenen Verhältnisse andere einzusetzen. Bilden wir nämlich von dem Grundton der Quint und der Unterquint, also dem Tone, dessen Quinte der Grundton ist, die großen Dreiklänge, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} \text{von der Unterquint } \frac{2}{3}, \dots \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}, \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1 \\ \text{von dem Grundton } 1, \dots 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, = 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \\ \text{von der Quint } \dots \frac{3}{2}, \dots \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{4}, \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{9}{4} \end{array}$$

und durch Ordnung nach den Schwingungszahlen, wenn wir zugleich für einzelne Töne die tiefern und höhern Oktaven einsetzen, um alle Töne in der Oktave 1—2 zu erhalten,

$$1, \frac{10}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{13}{8}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2 \\ c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad a \quad h \quad c_1.$$

Betrachten wir nun die aus dieser Tonleiter sich ergebenden Sekunden, Terzen, Quartan, Quinten, Sexten, Septimen, so werden wir finden, daß dieselben nicht alle gleichwertig sind, sondern daß die Intervalle verschieden sein können, ohne darum aufzuhören, Sekunden, Terzen usw. zu sein.

Der Wert der Intervalle ist auf Seite 877 angegeben.

Ein Überblick nachstehender Tabelle ergibt, daß die gleichnamigen Intervalle keineswegs alle denselben Wert haben.

Die Sekunden haben drei verschiedene Werte, nämlich zunächst ist das Schwingungsverhältnis  $\frac{9}{8}$ , die Töne, zwischen denen dieses Intervall stattfindet, unterscheiden sich um einen großen ganzen Ton; zweitens ist dasselbe  $\frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$ , das Intervall ist das eines kleinen ganzen Tones, der sich von dem vorigen um  $\frac{80}{81}$ , ein syntonisches Komma unterscheidet. Der dritte Wert, den die Sekunde annehmen kann,  $\frac{16}{15} = \frac{10}{9} \cdot \frac{24}{25}$ , ist der große halbe Ton. Da nun der kleine ganze Ton  $\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24}$ , so kann man denselben in zwei Intervalle teilen, den großen halben Ton  $\frac{16}{15}$  und den kleinen halben Ton  $\frac{25}{24}$ . Letzterer ist das kleinste in der Musik gebräuchliche Intervall.

Wie die Sekunden groß und klein sein können, so auch die Terzen; die großen entsprechen dem Verhältnis  $\frac{5}{4}$ , die kleinen dem um einen kleinen halben Ton  $\frac{3}{2}$  kleinern Verhältnis  $\frac{6}{5}$ . Außerdem tritt von  $d$  zu  $f$  eine noch um ein Komma kleinere Terz auf.

Auch bei den Quartan unterscheiden wir drei Werte, die reinen Quartan  $\frac{4}{3}$ , die übermäßige Quart  $f—h$ , welche um einen kleinen halben Ton und ein Komma größer ist als die reinen Quartan, und schließlich die falsche Quarte  $a$  zu  $d$ , welche gegenüber den reinen Quartan um ein Komma zu groß ist.

Ähnlich wie die Quartan verhalten sich die Quinten, sie sind rein  $f$ , oder vermindert  $h$  nach  $f_1$  um einen kleinen halben Ton und ein Komma

1) Chladni, Akustik. p. 13 ff.



Wert der musikalischen Intervalle.

Sekunden		Terzen		Quarten		Quinten		Sexten		Septimen	
$\frac{d}{c} \frac{2}{n}$		$\frac{e}{c} \frac{3}{4}$		$\frac{f}{c} \frac{4}{3}$		$\frac{g}{c} \frac{5}{2}$		$\frac{a}{c} \frac{6}{5}$		$\frac{h}{c} \frac{7}{4}$	
$\frac{e}{d} \frac{10}{9} = \frac{2 \cdot 50}{n \cdot 51}$		$\frac{f}{d} \frac{6 \cdot 50}{5 \cdot 51} = \frac{5 \cdot 50 \cdot 24}{4 \cdot 51 \cdot 25}$		$\frac{g}{d} \frac{4}{3}$		$\frac{a}{d} \frac{3 \cdot 50}{2 \cdot 51}$		$\frac{h}{a} \frac{5}{3}$		$\frac{c_1}{d} \frac{16}{9} = \frac{15 \cdot 20 \cdot 24}{n \cdot 51 \cdot 25}$	
$\frac{f}{e} \frac{16}{15} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 24}{n \cdot 51 \cdot 25}$		$\frac{g}{e} \frac{6}{5} = \frac{5 \cdot 24}{4 \cdot 25}$		$\frac{a}{e} \frac{4}{3}$		$\frac{h}{e} \frac{3}{2}$		$\frac{c_1}{e} \frac{8}{3} = \frac{5 \cdot 24}{4 \cdot 25}$		$\frac{d_1}{e} \frac{8}{3} = \frac{15 \cdot 24}{n \cdot 25}$	
$\frac{g}{f} \frac{9}{8}$		$\frac{a}{f} \frac{5}{4}$		$\frac{h}{f} \frac{4 \cdot 25 \cdot 51}{3 \cdot 24 \cdot 50}$		$\frac{c_1}{f} \frac{2}{3}$		$\frac{d_1}{f} \frac{27}{16} = \frac{5 \cdot 24 \cdot 51}{3 \cdot 25 \cdot 50}$		$\frac{c_1}{f} \frac{15}{8}$	
$\frac{a}{g} \frac{10}{9} = \frac{2 \cdot 50}{n \cdot 51}$		$\frac{h}{g} \frac{6}{4}$		$\frac{c_1}{g} \frac{4}{3}$		$\frac{d_1}{g} \frac{5}{2}$		$\frac{c_1}{g} \frac{5}{2}$		$\frac{f_1}{g} \frac{16}{9} = \frac{15 \cdot 20 \cdot 24}{n \cdot 51 \cdot 25}$	
$\frac{h}{a} \frac{9}{8}$		$\frac{c_1}{a} \frac{6}{5} = \frac{5 \cdot 24}{4 \cdot 25}$		$\frac{d_1}{a} \frac{4 \cdot 51}{3 \cdot 24 \cdot 50}$		$\frac{c_1}{a} \frac{3}{2}$		$\frac{f_1}{a} \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 24 \cdot 51}{2 \cdot 25 \cdot 50}$		$\frac{g_1}{a} \frac{3}{2} = \frac{15 \cdot 24}{n \cdot 25}$	
$\frac{c_1}{h} \frac{16}{15} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 24}{n \cdot 51 \cdot 25}$		$\frac{d_1}{h} \frac{6}{5} = \frac{5 \cdot 24}{4 \cdot 25}$		$\frac{c_1}{h} \frac{4}{3}$		$\frac{f_1}{h} \frac{3 \cdot 24 \cdot 51}{2 \cdot 25 \cdot 50}$		$\frac{g_1}{h} \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 24 \cdot 51}{2 \cdot 25 \cdot 50}$		$\frac{d_1}{h} \frac{16}{9} = \frac{15 \cdot 20 \cdot 24}{n \cdot 51 \cdot 25}$	

kleiner als die reinen Quinten, oder schließlich falsch von  $d$  nach  $a$  um ein Komma kleiner als die reinen Quinten. •

Bei den Sexten unterscheiden wir große  $\frac{5}{3}$  und kleine  $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}$ , um einen kleinen halben Ton kleiner als die großen, und außerdem finden wir eine falsche Sexte, die um ein Komma größer ist als die große Sexte.

Unter den Septimen finden wir zwei große, deren Schwingungsverhältnis  $\frac{15}{8}$  ist, zwei kleine, welche von den großen sich um einen kleinen halben Ton unterscheiden,  $\frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$  und drei falsche, welche noch um ein Komma kleiner sind als die kleinen Septimen.

Die Oktaven schließlich sind ihrem Wesen nach alle rein, und entsprechen dem Verhältnisse  $\frac{2}{1}$ .

Die auf diese Weise erhaltene Tonleiter heißt die diatonische Durtonleiter, sie besteht nur aus ganzen und zwei großen halben Tönen, welche zwischen der dritten und vierten und zwischen der siebenten und achten Stufe liegen. Ist der Grundton der Tonleiter  $c$ , so ist die Tonleiter jene in  $c$ -Dur.

Ebenso wie von dem Grundtone  $c$  können wir jetzt von jedem der in der  $c$ -Durtonleiter gegebenen Töne wieder die diatonische Durtonleiter bilden; wir müssen dann aber zu den bisher erhaltenen Tönen neue hinzufügen. Soll die Durtonleiter von  $d$  aus gerade so beschaffen sein wie die besprochene von  $c$  aus, so müssen die einzelnen Intervalle alle in demselben Verhältnisse stehen wie in der angegebenen Tonleiter, wir bekommen die  $d$ -Durtonleiter deshalb einfach dadurch, daß wir die für die einzelnen Intervalle der  $c$ -Tonleiter gegebenen Zahlen alle mit  $\frac{9}{8}$  multiplizieren. Die sich auf diese Weise ergebenden Zahlen für die einzelnen Töne der Tonleiter sind dann folgende:

$$\frac{9}{8}; \frac{81}{64} = \frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80}; \frac{45}{32} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}; \frac{3}{2}; \frac{27}{16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}; \frac{15}{8}; \frac{135}{64} = 2 \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}.$$

Von diesen Zahlen sind die erste, vierte und sechste schon in der  $c$ -Durtonleiter vorhanden als  $d$ ,  $g$ ,  $h$ ; die zweite und fünfte dagegen sind um ein Komma höher als die entsprechenden  $e$  und  $a$  in der Tonleiter von  $c$ , wir wollen dieselben, um diese Erhöhung anzudeuten, mit  $\bar{e}$  und  $\bar{a}$  bezeichnen. Wesentlich verschieden von den frühern Tönen sind der dritte und siebente, sie sind um einen kleinen halben Ton und ein Komma höher als die entsprechenden Töne der ersten Tonleiter  $f$  und  $c$ . Der Grund dieser Erhöhung liegt darin, daß in der Durtonleiter zwischen der zweiten und dritten Stufe sowie der sechsten und siebenten Stufe ein ganzer Ton liegen muß, dagegen zwischen der dritten und vierten, wie zwischen der siebenten und achten Stufe ein halber Ton vom Werte  $\frac{1}{2}$ . Die um einen halben Ton erhöhten Töne bezeichnet man durch Anhängung der Silbe  $is$  an den den betreffenden Ton bezeichnenden Buchstaben. Der Ton, der  $\frac{1}{2}$  Ton höher ist als  $f$ , heißt demnach  $fis$ , der um  $\frac{1}{2}$  Ton höher liegende als  $c$  heißt  $cis$ . Musikalisch werden dieselben durch ein dem betreffenden Ton vorgesetztes Doppelkreuz bezeichnet, so daß  $cis = \sharp c$  ist. Die in der  $d$ -Durtonleiter liegenden  $fis$  und  $cis$  sind nun um ein Komma mehr als einen halben Ton höher als die betreffenden Töne der Tonleiter in  $c$ , wir wollen, um das hervorzuheben, dieselben mit  $\bar{fis}$  und  $\bar{cis}$  bezeichnen. Darnach wird also die Tonleiter in  $d$

$$d \ \bar{e} \ \bar{fis} \ g \ \bar{a} \ h \ \bar{cis} \ d_1;$$

sie enthält also vier Töne, welche die Tonleiter von  $c$  nicht enthält



es kommen also  $d$ ,  $e$  und  $a$ , sowie  $cis$ ,  $fis$  und  $ais$  in zwei um ein Komma verschiedenen Werten vor. Wollte man nun in ähnlicher Weise auch von den bisher neu hinzugetretenen Tönen die Durtonleiter bilden, und beschränkte man sich dabei auf die reinen halben Töne, so würden zu den in obiger Zusammenstellung vorkommenden Tönen noch hinzukommen zunächst  $eis$  und  $dis$  und außerdem die doppelt erhöhten Töne  $cisis$  und  $cisis$ , von denen der erstere  $\frac{25}{24}$  höher ist als  $cis$ , der zweite als  $cis$ , und  $disis$ ,  $fis$ ,  $gis$ ,  $ais$ . Wir müssen also noch 9 Töne hinzufügen, so daß wir im ganzen 29 Töne erhielten.

Die so erhaltenen 29 Töne würden indes dem musikalischen Bedürfnisse noch nicht genügen; schon wenn wir die Durtonleiter von  $f$  bilden wollen, bedürfen wir eines neuen Intervalles. Wir erhalten dieselbe ganz in der bisherigen Weise, indem wir die Tonzahlen der  $c$ -Durreihe mit  $\frac{1}{2}$  multiplizieren, dieselbe wird dann

$$\frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}; 2; \frac{20}{9} = \frac{9}{4} \cdot \frac{80}{81}; \frac{10}{4}.$$

Mit Ausnahme des vierten Tones finden sich diese Töne bereits in den frühern Tonleitern, sie sind

$$f \ g \ a \ c_1 \ d_1 \ e_1;$$

der vierte ist indes nicht nur neu, sondern auch in ganz anderer Weise gebildet, nämlich durch Vertiefung eines Tones  $h = \frac{15}{8}$  um einen halben Ton und ein Komma. Die Vertiefung eines Tones um einen halben Ton wird in der Musik dadurch bezeichnet, daß man vor denselben ein  $b$  setzt, die Namen der vertieften Töne erhält man, indem man an denjenigen des Tones, zu welchem die Vertiefung gehört, die Silbe  $es$  oder den Buchstaben  $s$  hängt; nur die Vertiefung von  $h$  führt den Namen  $b$ . Das in die  $f$ -Durtonleiter eintretende  $b$  ist, wie wir sahen, um einen halben Ton und ein Komma tiefer als  $h$ , wir müssen deshalb diesen Ton als  $\underline{b}$  bezeichnen.

Ebenso wie in der Durtonleiter von  $f$  für  $h$ , so erhalten wir für alle übrigen Töne vertiefte Töne, wenn wir in ähnlicher Weise wie durch den Durdreiklang eine Tonleiter ableiten durch Anwendung des Molldreiklanks mit der kleinen Terz. Bilden wir die drei Molldreiklänge von Grundton Quint und Unterquint, so erhalten wir

- 1) aus der Unterquint  $\frac{2}{3} \dots \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}, \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1$
- 2) aus dem Grundton  $1 \dots 1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}, = 1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}$
- 3) aus der Quint  $\dots \frac{3}{2} \dots \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5}, \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, \frac{9}{4}$

oder wenn wir die Verhältnisse der Größe nach ordnen und wiederum von den nicht zwischen 1—2 fallenden Tönen die entsprechenden Oktaven nehmen

$$1, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{9}{4}, 2.$$

Von diesen Intervallen ist das siebente

$$\frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = b$$

und das sechste

$$\frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25},$$

also die um einen halben Ton vertiefte Sext, welche mit  $as$  bezeichnet wird

Nach den musikalischen Zeichen ist somit die Molltonleiter

$$c \ d \ es \ f \ g \ as \ b \ c$$

und das Verhältnis der einzelnen Töne darin

$$\frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9},$$

von der zweiten zur dritten und von der fünften zur sechsten Stufe findet sich ein halber Ton, die übrigen Intervalle sind ganze Töne.

Diese Tonleiter, welche aus dem Molldreiklange entsteht wie die Durtonleiter aus dem Durdreiklange, ist die diatonische Molltonleiter. Es ist jedoch zu bemerken, daß man die Molltonleiter häufig auch so bildet, daß man von der Oberquint den Durdreiklang nimmt, wodurch in die Tonleiter statt *b* der Ton *h* eintritt. Dann wendet man aufsteigend statt *as* auch den Ton *a* an, absteigend pflegt man dann aber doch für *h* den Ton *b* zu nehmen, so daß dann die Tonleiter wird

$$\begin{array}{l} \text{aufsteigend } c \ d \ e s \ f \ g \ a \ h \ c \\ \text{absteigend } c \ d \ e s \ f \ g \ a s \ b \ c \end{array}$$

wie wir sie oben hinschrieben.

Bilden wir nun auch hier von den verschiedenen Tönen der Molltonleiter in *c* die Molltonleitern, so erhalten wir außer den angegebenen noch weitere vertiefte Töne. Die Molltonleiter von *d* verlangt von neuen Intervallen nur *f* und *c*<sub>1</sub>, sie wird nach unserer Bezeichnung

$$d \ e \ f \ g \ a \ b \ c_1 \ d_1.$$

Die Molltonleiter von *es* wird

$$\frac{5}{3}, \frac{4}{3} \cdot \frac{11}{10}, \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25}, \frac{2}{3}, \frac{9}{8}, 2 \cdot \frac{24}{25}, \frac{7}{4} \cdot \frac{24}{25},$$

oder in Zeichen

$$es \ f \ ges \ as \ b \ ces \ des \ es;$$

es treten als neue Vertiefungen hinzu *ges*, *ces* und *des*.

Die Molltonleiter von *f* enthält folgende Töne

$$\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{16}{9}, \frac{2}{3}, \frac{32}{15}, \frac{24}{13}, \frac{8}{3};$$

$$f \ g \ as \ b \ c_1 \ des_1 \ es_1 \ f_1;$$

es tritt also hier ein gegen das *des* der *c*-Molltonleiter um ein Komma vertieftes *des* auf. In der Tonleiter von *g* tritt kein neues Intervall auf, sie ist

$$g \ a \ b \ c_1 \ d_1 \ es_1 \ f_1 \ g_1$$

und schließlich wird die Tonleiter in *as*-Moll,

$$\frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2 \cdot \frac{24}{25}, \frac{9}{4} \cdot \frac{24}{25}, \frac{10}{11}, \frac{12}{5}, \frac{4}{3} \cdot \frac{24}{25}, 3 \cdot \frac{24}{25}, \frac{16}{5};$$

$$as \ b \ ces_1 \ des_1 \ es_1 \ fes_1 \ ges_1 \ as_1$$

sie besteht also aus allen vertieften Tönen, und zwar mit Ausnahme von *des*<sub>1</sub> aus gerade um  $\frac{1}{2}$  Ton vertieften Tönen. Stellen wir die bis jetzt durch die Molltonleitern erhaltenen neuen Intervalle zusammen, so sind dieselben

$$\begin{array}{ccccccc} c & ces & des & es & f & fes & ges \ as \ b \\ & & des & & & & h, \end{array}$$

Wir erhalten also außer den sieben gerade um einen halben Ton vertieften Tönen zwei, die um einen halben Ton und ein Komma vertieft sind. Die Tonleiter in *b*-Moll würde zu diesen noch *as* hinzufügen, so daß wir auch drei Arten von vertieften halben Tönen zu unterscheiden haben, solche,

welche genau um einen halben Ton unserer Töne der *c*-Durtonleiter vertieft sind, und solche, welche ein Komma mehr oder ein Komma weniger vertieft sind. Eine weitere Fortsetzung in der Bildung dieser Tonleiter würde uns nun, wenn wir uns auch hier auf die genau um  $\frac{1}{2}$  Ton vertieften Töne beschränken, zu den oben hingeschriebenen Tönen noch liefern  $\overline{ces}$ ,  $\overline{es}$ ,  $\overline{fes}$ , und außerdem die doppelt vertieften Töne  $ceses = \frac{24}{25} \cdot \frac{24}{25} \cdot c$ ,  $deses$  und  $\underline{deses}$ ,  $eses$ ,  $geses$ ,  $ases$ ,  $bb$  und  $\underline{bb}$ , so daß wir also durch die Bildung der Molltonleitern im ganzen zu den frühern noch 23 neue Intervalle hinzubekämen. Unser Tonsystem oder die vollständige Tonleiter einer Oktave würde somit aus 52 Tönen, oder wenn wir die Oktave als Schlußton hinzunehmen, aus 53 Tönen bestehen. Das Tonsystem vom tiefsten zum höchsten in den gewählten Zeichen würde sein:

$\overline{c}$   $\overline{cis}$   $\overline{cisis}$   $\overline{es}$   $\overline{e}$   $\overline{eis}$   $\overline{fes}$   
*c cis cisis deses des d dis disis eses es e eis fes*  
 $\underline{deses}$   $\underline{des}$   $\underline{d}$   $\underline{dis}$   
 $\overline{f}$   $\overline{fis}$   $\overline{fisis}$   $\overline{as}$   $\overline{a}$   $\overline{ais}$   
*f fis fisis geses ges g gis gisis ases as a ais aisis*  
 $\overline{ces}_1$   
*bb b h his ceses<sub>1</sub> ces<sub>1</sub> c<sub>1</sub>*  
 *$\underline{bb}$   $\underline{b}$ .*

Die Schwingungszahlen der Hauptreihe, jedoch ohne die doppelt vertieften und erhöhten Töne, gibt folgende Zusammenstellung:

<i>c</i>	...	1	...	Prim
# <i>c</i> = <i>cis</i>	$\frac{25}{24}$	...	...	übermäßige Prim
<i>b d</i> = <i>des</i>	$\frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{27}{25}$	...	...	kleine Sekunde
<i>d</i>	$\frac{9}{8}$	...	...	große Sekunde
# <i>d</i> = <i>dis</i>	$\frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{64}$	...	...	übermäßige Sekunde
<i>b e</i> = <i>es</i>	$\frac{6}{5}$	...	...	kleine Terz
<i>e</i>	$\frac{5}{4}$	...	...	große Terz
# <i>e</i> = <i>eis</i>	$\frac{5}{4} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{96}$	...	...	übermäßige Terz
<i>b f</i> = <i>fes</i>	$\frac{4}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{96}{75} = \frac{32}{25}$	...	...	verminderte Quarte
<i>f</i>	$\frac{4}{3}$	...	...	reine Quarte
# <i>f</i> = <i>fis</i>	$\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{100}{72} = \frac{25}{18}$	...	...	übermäßige Quarte
<i>b g</i> = <i>ges</i>	$\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{72}{50} = \frac{36}{25}$	...	...	verminderte Quinte
<i>g</i>	$\frac{3}{2}$	...	...	reine Quinte
# <i>g</i> = <i>gis</i>	$\frac{3}{2} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{48} = \frac{25}{16}$	...	...	übermäßige Quinte
<i>b a</i> = <i>as</i>	$\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{120}{75} = \frac{8}{5}$	...	...	kleine Sexte
<i>a</i>	$\frac{5}{3}$	...	...	große Sexte
# <i>a</i> = <i>ais</i>	$\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{72}$	...	...	übermäßige Sexte
<i>b h</i> = <i>b</i>	$\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{360}{200} = \frac{9}{5}$	...	...	kleine Septime
<i>h</i>	$\frac{15}{8}$	...	...	große Septime
# <i>h</i> = <i>his</i>	$\frac{15}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{375}{192} = \frac{125}{64}$	...	...	übermäßige Septime
<i>b c</i> = <i>ces</i>	$2 \cdot \frac{24}{25} = \frac{48}{25}$	...	...	verminderte Oktave
<i>c<sub>1</sub></i>	2	...	...	reine Oktave.

Die doppelt erhöhten oder doppelt vertieften Töne erhält man aus der Tabelle, indem man die entsprechenden einfach erhöhten oder vertieften Töne mit  $\frac{25}{24}$  bzw.  $\frac{24}{25}$  multipliziert, die Töne der obern Reihe durch Multiplikation der Töne der Hauptreihe mit  $\frac{51}{50}$ , die Töne der untern Reihe durch Multiplikation mit  $\frac{50}{51}$ .<sup>1)</sup>

## § 162.

**Die musikalische Temperatur.** Die in dem vorigen Paragraphen rechnete Tonleiter würde wegen ihrer zu großen Reichhaltigkeit im Brauche äußerst unbequem, ja sie würde in der Musik geradezu unbrauchbar sein, da die vielen kleinen Intervalle auf den verschiedensten Instrumenten durchaus nicht darzustellen wären. Zudem würde das Beibehalten aller jener Intervalle auch überflüssig sein, da selbst musikalisch bildete Ohren kleine Unreinheiten eines Intervalls in einem Akkorde nicht wahrzunehmen imstande sind. Unsere jetzige Musik vereinfacht daher das Tonsystem sehr bedeutend, anstatt 52 Töne wendet sie in der Tonleiter nur 12 Töne an. Zunächst läßt sie auf allen Instrumenten mit festen Tönen alle doppelt erhöhten und doppelt vertieften Töne fort und ersetzt durch die nächstliegenden ganzen Töne; so setzt sie

$$cisis = d, deses = c, disis = e, eses = d \text{ usw.}$$

Der Fehler, welcher dadurch begangen wird, ist zwischen  $c$  und  $d$ , und  $g$ ,  $a$  und  $h = \frac{124}{125} \cdot \frac{51}{50}$ , indem

$$\frac{d}{cisis} = \frac{deses}{c} = \frac{g}{fis} \dots = \frac{124}{125} \cdot \frac{51}{50}$$

zwischen  $d$  und  $c$ , sowie zwischen  $g$  und  $a$  beträgt er  $\frac{124}{125}$ .

Ferner verzichtet die Musik nicht nur auf die verschieden erhöhten  $des$  und  $fis$  usw., sondern sie unterscheidet in der praktischen Ausübung auch nicht die einander nahe liegenden halben erhöhten und vertieften Töne, wie  $cis$  und  $des$ ,  $dis$  und  $es$ . Die zwischen diesen Tönen vorhandenen Intervalle sind

$$\frac{des}{cis} = \frac{27}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{51}{50} \cdot \frac{124}{125}$$

$$\frac{es}{dis} = \frac{64}{75} = \frac{124}{125}$$

$$\frac{fes}{e} = \frac{32}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{124}{125}$$

$$\frac{f}{cis} = \frac{4}{5} \cdot \frac{96}{125} = \frac{124}{125}$$

$$\frac{ges}{fis} = \frac{b}{ais} = \frac{51}{50} \cdot \frac{124}{125}$$

$$\frac{ces}{h} = \frac{c}{his} = \frac{124}{125}$$

1) Über die Berechnung der Tonleiter sehe man auch: *Helmholtz*, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 418 ff. *G. Schubring*: Schlußsch, Zeitschrift für Mathematik u. Physik. Supplementheft 1868. Gegenüber der Berechnung der Tonleiter aus den einfachen konsonierenden Akkorden hat man gezeigt (*Cornu* und *Mercadier*, *Comptes rendus*. 68 p. 301 u. 424 1869; p. 1168. 1870; 72. p. 178. 1871; 76. p. 431. 1872), daß im melodischen Gange die Terz und die von ihr abgeleiteten Intervalle anders und zwar höher genommen werden als in der harmonischen Musik. Bei dem Fortschreiten in der Melodie soll die große Terz um ein Komma höher genommen werden, so daß also die melodische Tonleiter eine andere wäre als die harmonische, in der Musik mit zwei verschiedene Tonleitern nebeneinander beständen.



Die hierdurch begangenen Fehler, wenn man die Töne als gleich setzt, also als *des* den Ton *cis* usw. gebraucht, würden also ebenso groß sein, wie die durch Vernachlässigung der doppelt erhöhten oder vertieften. Würde man nun aber die eine Reihe der Töne, etwa die erhöhten, rein erhalten, so würden die Unreinheiten für die andere Reihe so stark werden, daß dieselbe ganz unbrauchbar würde; um das zu vermeiden, läßt man keinen der Töne rein, sondern setzt anstatt des reinen *cis* oder *des* einen zwischen beiden liegenden Ton, dessen Wert wir sofort ableiten werden.

Schließlich unterscheidet man auch nicht die um ein Komma verschiedenen Töne *c* und  $\bar{c}$  usf., sondern behält nur die Töne *c, d, e* usw. bei, so daß damit das Tonsystem auf 12 Töne reduziert wird, welche alle die von uns abgeleiteten 52 repräsentieren.

Damit ist nun aber auch eine Temperatur der Töne der *c*-Durtonleiter notwendig, da sonst die Unreinheit der doppelt erhöhten und vertieften Töne so groß wäre, daß man alle sie enthaltenden Tonarten absolut nicht gebrauchen könnte.

Will man nur diese 12 Töne beibehalten, so ist die Temperatur der Haupttöne der Tonleiter noch aus einem andern Grunde erforderlich. Es ist nämlich in der Musik notwendig, von einem Tone zu irgend einem andern auf verschiedenen Wegen, das heißt durch Fortschreiten nach verschiedenen Intervallen zu gelangen. So gelangt man, wenn man von irgend einem Grundtone nach Oktaven fortschreitet, immer zu den höheren Oktaven.

$$\begin{array}{cccccccc} c & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128. \end{array}$$

So soll man aber auch durch 12 reine Quinten von *c* aus zu einer höhern Oktave gelangen

$$c \ g \ d_1 \ a_1 \ e_2 \ h_2 \ fis_3 \ cis_4 \ gis_4 \ dis_5 \ ais_5 \ f_6 \ c_7$$

und das *c*, zu welchem man gelangt, muß das durch Oktaven erreichte *c*<sub>7</sub> sein.

Berechnet man nun aber *c*<sub>7</sub> durch 12 reine Quinten, so findet man den Wert

$$c_7 = \frac{531441}{4096},$$

während nach Oktaven

$$c_7 = \frac{524288}{4096} = 128$$

ist. Man findet also beim Fortschreiten nach Quinten *c*<sub>7</sub> im Verhältnis von

$$\frac{531441}{524288} = \frac{129,7}{128},$$

oder nahezu im Verhältnis von  $\frac{65}{64}$  zu hoch.

Gleiches zeigt sich bei andern Fortschreitungen, und zwar in noch erhöhtem Maße; so sollte ein Fortschreiten durch drei große Terzen

$$c \ e \ gis \ c_1$$

die nächst höhere Oktave liefern; diese Fortschreitung ergibt indessen

$$1 \ \frac{5}{4} \ \frac{25}{16} \ \frac{125}{64},$$

anstatt  $c_1 = \frac{125}{64}$  erhalten wir demnach einen um das Komma  $\frac{125}{128}$  zu niedrigen Ton.

Schreiten wir demnach nach reinen Intervallen fort, so verlieren die höheren Töne ihre Reinheit gegen den Grundton, man gelangt niemals zu einer reinen Oktave, will man aber die Intervalle gegen den Grundton festhalten, so werden die einzelnen Intervalle unrein. Dasselbe ist bei auf- und absteigender Bewegung und Benutzung verschiedener Intervalle der Fall. So gibt Chladni in seiner Akustik folgendes Beispiel. Bei der Tonfolge

$$g \ c \ f \ d \ g \ c$$

geht man zunächst eine reine Quint abwärts, dann eine Quart aufwärts, eine kleine Terz abwärts, eine Quarto aufwärts und schließlich eine Quinte abwärts. Das Verhältnis der Töne zum Grundton  $c$  ist

$$\frac{3}{2}; 1; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; 1.$$

Gehen wir dagegen nach reinen Intervallen, so werden die entsprechenden Zahlen

$$\frac{3}{2}; 1; \frac{4}{3}; \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}; \frac{10}{9}; \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{27}; \frac{40}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{81}.$$

Wir gelangen also weder zu dem reinen  $g$  zurück, von dem wir ausgingen, noch zum Grundtone. Eine weitere Fortsetzung solcher Fortschreitungen nach reinen Intervallen würde die nachkommenden immer weiter von den reinen Tönen entfernen. Deshalb und besonders weil die Fortschreitungen nach verschiedenen Intervallen ganz verschiedene Abweichungen von den reinen Tonverhältnissen, so z. B. die reinen Quinten zu hohe, die reinen Terzen zu tiefe Töne geben, können in der Musik, wenn man das Tonsystem auf 12 Töne beschränkt, die reinen Intervalle gar nicht angewandt werden, selbst wenn man auf allen Instrumenten die Töne alle ganz rein hervorbringen könnte. Man muß daher alle Töne modifizieren, oder wie es in der Musik heißt, temperieren.

Die Temperatur kann nun nach verschiedenen Prinzipien hergestellt werden; man nimmt entweder einige Intervalle rein und verteilt die andern Intervalle, so daß man dadurch bei den verschiedenen Fortschreitungen immer zu denselben Tönen kommt. So sind z. B. in der Kirnbergerschen Temperatur neun Quinten ganz rein, drei dagegen  $fis - cis$ ,  $d - a$ ,  $a - e$  unrein, und zwar ist der Fehler, der beim Fortschreiten durch 12 Quinten entsteht, auf diese drei Quinten verteilt.

Indes sind die sogenannten ungleichschwebenden Temperaturen zu verwerfen, da dadurch auf Kosten einiger Intervalle die andern um so unreiner werden.

Die in der Musik gebräuchliche Temperatur verändert alle Intervalle außer den Oktaven; diese müssen rein sein, da die Oktaven dem Einklange am nächsten stehen, deshalb ebenso, wie eine Unreinheit des Einklanges, auch die der Oktaven am leichtesten gehört wird und am störendsten ist. Die zwölf innerhalb einer Oktave liegenden Töne werden dann alle als gleichweit voneinander abstehend betrachtet, so daß das Tonverhältnis zweier aufeinander folgender Töne konstant oder

$$\frac{cu}{c} = \frac{d}{cis} = \frac{dis}{d} = \frac{e}{dis} = \frac{f}{e} \dots = \frac{c_1}{h} = r$$

gesetzt wird.

Dieses Intervall  $i$  wird dann als halber Ton betrachtet, dessen Wert sich daraus ergibt, daß

$cis = i \cdot c, \quad d = i \cdot cis = i^2 \cdot c \dots c_1 = i \cdot h = i^{12} \cdot c.$

Setzen wir nun  $c = 1$ , so wird

$c_1 = 2 = i^{12}$   
 $i = \sqrt[12]{2} = 1,059\,46.$

Nach der gleichschwebenden Temperatur erhalten wir darnach statt der reinen Schwingungsverhältnisse folgende, zusammengestellt mit den reinen Schwingungsverhältnissen und dem Fehler der temperierten, gegen die reinen Töne. Letztere sind in Form von Dezimalbrüchen gegeben, deren Zähler jedesmal die temperierte, deren Nenner die reine Schwingungszahl ist. Ist demnach in der Rubrik Fehler des temperierten Tones die Zahl größer als 1, so ist der temperierte Ton zu hoch, ist die Zahl ein echter Bruch, so ist der temperierte Ton zu tief.

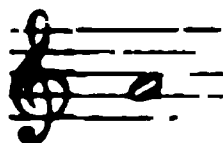
Name des Tones	Reines Schwingungsverhältnis	Temperiertes Schwingungsverhältnis	Fehler des temperierten Tones
<i>c</i> . . . .	1 = 1	1	1
<i>cis</i> . . .	$\frac{25}{24} = 1,041\,66$	. . . . 1,059 46	1,017 08
<i>des</i> . . .	$\frac{27}{25} = 1,080\,00$		0,980 98
<i>d</i> . . . .	$\frac{8}{7} = 1,125\,00$	. . . . 1,122 46	0,997 74
<i>dis</i> . . .	$\frac{51}{43} = 1,171\,87$	. . . . 1,189 21	1,014 79
<i>es</i> . . . .	$\frac{6}{5} = 1,200,00$		0,991 01
<i>e</i> . . . .	$\frac{5}{4} = 1,250\,00$	. . . . 1,259 92	1,010 26
<i>fes</i> . . .	$\frac{32}{25} = 1,280\,00$		0,984 33
<i>eis</i> . . .	$\frac{125}{96} = 1,302\,08$	. . . . 1,334 84	1,025 16
<i>f</i> . . . .	$\frac{4}{3} = 1,333\,33$		1,001 13
<i>fis</i> . . .	$\frac{25}{18} = 1,388\,89$	. . . . 1,414 21	1,018 23
<i>ges</i> . . .	$\frac{36}{25} = 1,440\,00$		0,982 09
<i>g</i> . . . .	$\frac{3}{2} = 1,500\,00$	. . . . 1,498 31	0,998 88
<i>gis</i> . . .	$\frac{25}{16} = 1,562\,50$	. . . . 1,587 40	1,015 93
<i>as</i> . . . .	$\frac{8}{5} = 1,600\,00$		0,992 13
<i>a</i> . . . .	$\frac{5}{3} = 1,666\,66$	. . . . 1,681 79	1,009 07
<i>ais</i> . . .	$\frac{125}{72} = 1,736\,11$	. . . . 1,781 80	1,026 31
<i>b</i> . . . .	$\frac{9}{5} = 1,800\,00$		0,989 89
<i>h</i> . . . .	$\frac{15}{8} = 1,875\,00$	. . . . 1,887 75	1,006 80
<i>ces</i> . . .	$\frac{49}{25} = 1,920\,00$		0,983 20
<i>his</i> . . .	$\frac{125}{64} = 1,953\,13$	. . . . 2,000 00	1,024 07
<i>c<sub>1</sub></i> . . . .	$\frac{2}{1} = 2,000\,00$		1

Wie man sieht, weichen die temperierten Verhältnisse von den reinen stellenweise nicht unbedeutend ab; in demselben und zum Teil noch höherem Maße weichen dieselben von den reinen doppelt erhöhten und doppelt vertieften ab, an deren Stelle die temperierten Töne gesetzt werden. So wird das temperierte *d* für *eses* eingesetzt, obwohl die Schwingungszahl des temperierten *d* nur 0,973 96 des reinen *eses* beträgt. Wenn nun auch

das Ohr in Akkorden sehr kleine Unreinheiten nicht mehr wahrnehmen kann, so sind die oben berechneten doch zu groß, als daß nicht der Wohlklang der Akkorde dadurch wesentlich beeinträchtigt werden sollte. Deshalb ist es durchaus wünschenswert, daß an Stelle der gleichschwebenden Temperatur eine andere eingeführt werden könne, welche diese Unreinheiten nicht zeigt. Die Möglichkeit dazu ist aber nur gegeben, wenn man das Ton-system erweitert, und statt 12 eine größere Zahl von Tönen beibehält. Es hat das eigentlich nur Schwierigkeit für die Instrumente mit festen Tönen, da z. B. an den Streichinstrumenten die verschiedenen Töne doch verschieden gegriffen werden, *c* anders als *dis* usf. Für ein Instrument mit festen Tönen hat Helmholtz<sup>1)</sup> und später Appunn<sup>2)</sup> eine Tonreihe gegeben und praktisch ausgeführt, welche fast den reinen Tönen gleichkommt; die Tonreihe von Helmholtz hat 30 Töne, die von Appunn 36, der Wohlklang der Akkorde soll auf diesen Instrumenten, wie zu erwarten stand, viel höher sein, als auf den temperierten. Ob in der Instrumentalmusik eine ähnliche Tonreihe möglich ist, müssen die Musiker entscheiden.

## § 163.

**Absolute Schwingungszahl der Töne.** Bisher haben wir das Verhältnis der Töne zueinander ins Auge gefaßt. Da wir vorhin sahen, daß das Verhältnis der musikalischen Töne ganz dasselbe ist für die hohen und tiefen Regionen, so ist es natürlich einerlei, von welchem Tone man ausgeht, welche Schwingungszahl man als diejenige des Grundtones annimmt. Um indes die verschiedenen Instrumente miteinander stimmen zu können und überhaupt durch die oben erwähnten Zeichen bestimmte Töne zu bezeichnen, hat man für einen bestimmten Ton, der ungefähr in der Mitte der in der Musik gebräuchlichen Töne liegt, eine bestimmte Höhe angenommen. Es ist der als eingestrichenes *c* bezeichnete Ton



Von diesem Ton aus werden die übrigen Töne bestimmt. Der um eine Sext tiefere Ton ist das eingestrichene *c*. Die in der Musik meist gebrauchten Töne liegen teils höher, teils tiefer als dieses *c*, und zwar steigt die Musik drei Oktaven hinab und vier hinauf. Die unterhalb dieses *c* liegende Oktave heißt die kleine Oktave, die in ihr liegenden Töne werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet; die nächst tiefere, mit den großen Buchstaben bezeichnete, ist die große Oktave und unter dieser die Kontraoktave, welche man durch große Buchstaben mit einem kleinen Querstrich darunter bezeichnet. Die höhern Oktaven werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet und zur Angabe ihrer Höhe mit kleinen Querstrichen darüber versehen. Die auf die kleine Oktave folgende ist die eingestrichene, die nächsthöhere die zweigestrichene usf. Wir wollen indes unsere bisherige Bezeichnungsweise beibehalten und die

1) Helmholtz, Tonempfindungen. p. 483 ff.

2) Appunn, die Beschreibung des Appunnischen Harmoniums gibt Schubring in Schönmilchs Zeitschrift für Mathematik. Suppl.-Heft 1864. p. 124 ff.

eingestrichene Oktave durch eine kleine 1, die zweigestrichene durch eine kleine 2 usw. unten rechts an den den Ton angegebenden Buchstaben bezeichnen. Die in der Musik angewandten Töne liegen, nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, zwischen den Oktaven

$$\underline{C} \ C \ c \ \bar{c} \ c \ c \ c \ c$$

Nur wenige Instrumente gehen über diese sieben Oktaven hinaus.

Um den Ton des eingestrichenen  $a_1$ , nach welchem die Stimmung geregelt wird, zu bestimmen und zu fixieren, hat man die Stimmgabel konstruiert. Dieselbe besteht aus einem gabelförmig gebogenen Stahlstabe, an welchem unten an der Biegung ein Stäbchen angebracht ist (Fig. 290).

Fig. 290.



Fig. 291



Die Gabel wird dadurch zum Tönen gebracht, daß man sie mit einem der Zinken an einen festen Körper anschlägt, sie schwingt dann so, wie Fig. 291 anzeigt, mit zwei Schwingungsknoten in der Nähe der Biegung. Die beiden Zinken schwingen zugleich nach innen und die Biegung nach unten, dann die Zinken nach außen und die Biegung nach oben hin. Die Töne der Stimmgabel allein sind sehr schwach; um sie zu verstärken, setzt man sie auf einen Tisch, der dann, wie wir später sehen werden, durch Resonanz den Ton verstärkt. Größere Stimmgabeln, welche nicht  $a_1$ , sondern  $c$  oder  $c$  geben, sind meist auf besonderen Resonanzkästchen befestigt, in denen die Luftsäule für sich schwingend denselben Ton gibt wie die Gabel und deshalb durch ihre Schwingungen den Ton ganz bedeutend verstärkt. Man streicht solche Gabeln mit einem Baßbogen an, den man parallel der Schwingungsebene an den Zinken der Gabel vorüberführt.

Messungen der Schwingungszahl des durch die  $a_1$ -Stimmgabel bestimmten Tones haben nun ergeben, daß dieser Ton keineswegs die gleiche Schwingungszahl hat. Fischer fand im Jahre 1822, daß die Schwingungszahl des Tones  $a_1$  im Orchester des Berliner Theaters 437 war; diejenige des Tones  $a_1$  des Orchesters der großen Oper in Paris

431, vom Théâtre Feydeau — 428 und des Théâtre Italien — 424 Schwingungen in der Sekunde.<sup>1)</sup>

Scheibler<sup>2)</sup> fand 1833 den Ton von fünf Pariser  $a_1$ -Gabeln von 426,7 bis 440,7, von einer Gabel des Berliner Orchesters 441,62 und von sechs Gabeln des Wiener Orchesters zwischen 433,66 und 444,87 Schwingungen.

Scheibler machte darauf 1834 auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Stuttgart den Vorschlag, den Ton  $a_1$  zu 440 Schwingungen festzusetzen, indes ist die Stimmung der Orchester darnach nicht normiert worden und sie blieb nach wie vor schwankend. Nachdem im Jahre 1859 in Frankreich, das über eine Anzahl staatlicher Orchester auch außerhalb des Militärs verfügt, bestimmt war, daß der Ton  $a_1$  zu 435 Schwingungen gesetzt werden solle, hat sich diese Stimmung nach und nach Bahn gebrochen, bis endlich im Jahre 1886 ein internationaler Kongreß zu Wien diese Stimmung für die meisten europäischen Länder als Normalstimmung angenommen hat.

Der Ton  $a_1 = 435$  Schwingungen wird durch Normalgabeln, deren erste wohl von R. König in Paris verfertigt wurden, festgehalten. Dabei ist zu beachten, daß die Schwingungszahl einer Stimmgabel einigermaßen von der Temperatur der Gabel abhängig ist. Nach den Versuchen von Mercadier<sup>3)</sup>, Kayser<sup>4)</sup> und R. König<sup>5)</sup> ist die Änderung der Temperaturänderung proportional, aber für Stimmgabeln verschiedener Dimensionen etwas verschieden, nach R. König nehmen seine Stimmgabeln pro Grad um etwa  $\frac{1}{9000}$  ihrer Schwingungszahl ab. Kayser fand bei seinen Versuchen einen etwas kleineren Wert. Die Beobachtungen wurden mit Hilfe der Schwingungskurven angestellt, indem eine Gabel auf konstanter Temperatur gehalten und die zweite allmählich erwärmt wurde. Bei der Ausgangstemperatur wurden die Gabeln genau gleichgestimmt, so daß die Schwingungskurve fest stand; wenn die zweite Gabel erwärmt wurde, so beobachtete man die Zeit, während welcher die Schwingungskurven alle nacheinander durchliefen, also die erwärmte Gabel eine Schwingung weniger machte.

N. Pierpaoli<sup>6)</sup> hat die Temperaturkoeffizienten von Normalgabeln im Juli 1892 festgestellt und dann 1901 nach derselben Methode wieder geprüft und dabei gefunden, daß alle etwas zugenommen hatten.

Eine eingehendere Untersuchung stellte E. C. Woodruff<sup>7)</sup> über diesen Gegenstand an. Gleichzeitig verfolgte er den Temperaturkoeffizienten von 0 bis 200° C., die Änderung des Elastizitätskoeffizienten für Stahl und den Einfluß der Temperatur auf die Dämpfung der Gabelschwingungen. Der Temperaturkoeffizient der Anzahl der Schwingungen verlief nicht linear und ist unabhängig von den Dimensionen der Gabel. Er ist nur abhängig

1. Fischer, in den Denkschriften der Berliner Akademie für 1824.

2. Nach der Angabe von Röber, Doves Repertorium 3. 1839.

3. Mercadier, D'Almeida Journal de phys 3 p. 201. 1876.

4. F. Kayser, Wiedem Ann. 8 p. 444 1879.

5. R. König, Wiedem. Ann 9. p. 394. 1880. Auf Königs Methode der genauen Bestimmung der absoluten Schwingungszahl von Stimmgabeln kommen in § 182 nochmals zurück.

6. N. Pierpaoli, Atti R. dei Lincei (5.) Memorie 3. p. 187. 1901.

7. E. C. Woodruff, Phys. Rev 16. p. 325. 1903.



von der Änderung des Elastizitätskoeffizienten mit der Temperatur. Der Elastizitätskoeffizient hat zwischen  $100^{\circ}$  und  $200^{\circ}$  weder Maximum noch Minimum, sondern verläuft annähernd linear. Die Dämpfung der Gabel ist stark beeinflusst von der Temperatur. Das Dekrement hat ein Maximum bei  $80^{\circ}$  und Minima bei  $20^{\circ}$  und  $140^{\circ}$  C.

Als Normalgabel wurde in Wien diejenige angenommen, welche bei  $20^{\circ}$  C. 435 Schwingungen macht.

Gehen wir von dieser Schwingungszahl aus, so wird darnach

$$c_1 = \frac{a_1}{1,681\,79} = \frac{435}{1,681\,79} = 258,65.$$

Die Schwingungszahlen der vorhin angegebenen Töne werden darnach folgende

$$\begin{array}{ll} \underline{C} = c_{-2} = 32,33 & c_2 = 517,30 \\ \underline{C} = c_{-1} = 64,66 & c_3 = 1034,60 \\ c = 129,32 & c_4 = 2069,20 \\ c_1 = 258,65 & c_5 = 4138,40 \end{array}$$

wodurch man leicht imstande sein wird, die Schwingungszahlen aller übrigen in der Musik gebräuchlichen Töne zu berechnen.

Es möge hier noch erwähnt werden, daß in physikalischen Instituten häufig Stimmgabelsätze (König) benutzt werden, die als Basis nicht 435 Schwingungen für  $a_1$  haben, sondern  $c_1$  mit 256 statt 258,65. Dadurch sind die Schwingungszahlen der verschiedenen Oktaven von  $c_1$  Potenzen von 2, was auch das Rechnen beim Experimentieren erleichtert.

Die oben angegebenen Töne sind indes nicht die überhaupt hörbaren Töne, sowohl Töne unterhalb  $c_{-2}$ , als oberhalb  $c_5$  sind noch hörbar. In den größern Orgeln findet sich noch eine ganze Oktave tieferer Töne bis zum  $c_{-3}$ , dem Subkontra C, welches 16 Schwingungen in der Sekunde vollführt, und Savart behauptete nach seinen Versuchen<sup>1)</sup>, daß bei hinreichender Stärke Töne selbst bei 7—8 Schwingungen in der Sekunde hörbar seien. Savart ließ einen Eisenstab um eine horizontale Achse sich drehen und stellte ihn so auf, daß er bei jeder Umdrehung durch einen Spalt eines Brettes schlug und dabei die Ränder berührte. Jeder Durchtritt gab einen heftigen Schlag und war die Umdrehungsgeschwindigkeit so groß, daß der Eisenstab in der Sekunde 7—8mal die Spalte passierte, so hörte man einen sehr tiefen und lauten Ton. Savart glaubte, daß dieser Ton Folge der acht Stöße des Eisenstabes in der Brettspalte sei.

Schon Despretz<sup>2)</sup> indessen widersprach dem und bemerkte dagegen, daß, wenn Savarts Schluß richtig sei, die doppelte Umdrehungsgeschwindigkeit oder die Anwendung zweier Spalten auch die höhere Oktave des zuerst gehörten Tones hätte erzeugen müssen. Der Versuch ergibt aber einen von dem vorigen nur wenig verschiedenen Ton, so daß der Ton sich nicht aus den einzelnen Schlägen zusammengesetzt haben kann.

Helmholtz<sup>3)</sup> wies nach, daß die Methode von Savart zur Untersuchung dieser Frage ganz ungeeignet sei, da die Dauer jedes einzelnen

1) Savart, Annales de chim. et de phys. 47. 1831. Poggend. Ann. 20. 1830.

2) Despretz, Comptes rendus de l'Académ. de France. 20. 1845. Poggend. Ann. 65. 1838.

3) Helmholtz, Tonempfindungen. p. 266 ff.



Stoßes gegen die Zwischenzeit zweier Stöße, also die Schwingungsdauer der durch sie erzeugten Schwingungen zu kurz sei. Es müssen deshalb die Obertöne sehr stark entwickelt sein, so daß die tiefsten gehörten Töne nichts als Obertöne sind. Er hat deshalb die Frage nach den tiefsten Tönen wieder aufgenommen und gelangt zu einem wesentlich andern Resultat; er findet, daß die Tonempfindung erst beginnt bei etwa 30 Schwingungen und daß erst bei etwa 40 Schwingungen der Ton eine bestimmte musikalische Höhe hat. Helmholtz schloß dieses besonders aus einem Versuch mit einer in der Mitte belasteten Saite, welche infolge der Belastung fast nur die langsamsten Schwingungen, bei denen die Saite der ganzen Länge nach schwingt, vollführt. Die Saite wurde auf einem Resonanzboden ausgespannt, der nur eine Öffnung hatte, und diese konnte mit dem Gehörgange verbunden werden, so daß die Luft des Resonanzkastens nur in das Ohr hin entweichen konnte. Die Töne einer Saite von gewöhnlicher Höhe sind unter diesen Umständen von unerträglicher Stärke. Dagegen war die Tonempfindung, als die Saite 37 Schwingungen machte, nur mehr schwach, und hatte auch diese etwas Knarrendes, was darauf schließen läßt, daß das Ohr anfang, die einzelnen Stöße zu fühlen. Bei 31 Schwingungen war kaum noch etwas zu hören.

Später hat Helmholtz<sup>1)</sup> dasselbe mit zwei von König hergestellten Stimmgabeln gezeigt, deren Stimmung durch an den Zinken verschiebbare Gewichte geändert werden konnte. Die Zahl der jeder Lage des Gewichts entsprechenden Schwingungen ist auf einer an den Zinken angebrachten Skala angegeben; die eine Gabel gibt in der Sekunde je nach der Lage des Gewichtes 25--35, die andere 35--61 Schwingungen. Die Gewichte haben die Form von Platten. Bringt man das Ohr ganz nahe an diese Platten, so hört man die tiefen Töne sehr gut. Bei 30 Schwingungen hört man dann noch deutlich einen schwachen dröhnenden Ton, bei 28 kaum noch eine Spur, obgleich man leicht Oszillationen von 9<sup>mm</sup> Amplitude in dieser Weise ganz dicht vor dem Ohr erzeugen kann.

Preyer<sup>2)</sup> glaubt indes die untere Grenze der Hörbarkeit doch noch erheblich tiefer setzen zu können. Er nahm mit solchen Stimmgabeln noch 24 Schwingungen als Ton wahr und glaubt mit schwingenden belasteten Zungen noch 15 Schwingungen als Ton empfunden zu haben. Gegen die letztern Versuche von Preyer wendet aber Helmholtz<sup>3)</sup> ein, daß solche belastete Zungen bei jeder ihrer Schwingungen dem Befestigungspunkte zwei longitudinale Stöße erteilen und zwar jedesmal, wenn sie mit dem Maximum der Geschwindigkeit die Gleichgewichtslage passieren; er sieht es deshalb noch nicht als bewiesen an, daß unser Ohr erheblich unter der Zahl 30 liegende Schwingungen als Ton empfinden kann.

Appunn<sup>4)</sup> gelangt neuerdings zu dem Resultate, daß die Grenze der Hörbarkeit bei 9—12 Schwingungen läge. Er benutzte zu seinen Versuchen eine 1<sup>mm</sup> dicke, 12<sup>mm</sup> breite und 420<sup>mm</sup> lange Metalllamelle, an

1) Helmholtz, Tonempfindungen. 3. Ausg. p. 279.

2) Preyer, Physiologische Abhandlungen I. Reihe. Heft 1 p. 1.

3) Helmholtz, Tonempfindungen 4. Ausg. p. 296.

4) Appunn, Beiblätter zu den Annalen der Physik. 14 p. 362. 1892. Die Originalarbeit, Ber. der Wetterauischen Gesellschaft 1889 p. 37, ist mir nicht bekannt.

deren freiem Ende eine Metallscheibe von 40<sup>mm</sup> Durchmesser befestigt war. Auf der Metalllamelle war eine Teilung angebracht von 4—24, so daß, wenn die Lamelle an einem dieser Teilstriche eingeklemmt wurde, die Zahl an demselben die Schwingungszahl der Lamelle angab. Nach Angabe von Appunn soll der Stab keine Obertöne geben. Ließ man den Stab von den langsamsten Schwingungen aus nach und nach rascher schwingen, so hörte Appunn den ersten Ton bei 11—12 Schwingungen, ging man von raschern zu langsamern, so hörte man noch einen Ton bei 9—10 Schwingungen.

Das Resultat steht im direkten Widerspruch mit dem der letzten Helmholtzschen Versuche, deren Anordnung im Wesen sich von der Appunnschen nicht unterscheidet. Wenn Appunns schwingender Stab in der Tat keine Obertöne gab, kann man die Resultate nur unter der Annahme vereinigen, daß die Grenze der Hörbarkeit ebenso nach unten eine für verschiedene Ohren verschiedene sei, wie es für die obere Grenze nachweisbar der Fall ist.

Appunn jun. hat auch zur Ermittlung der untern Grenze für die Wahrnehmung von Tönen Stimmgabeln aus gabelförmig gebogenen Stahl-drähten konstruiert, die unten mit Messingplatten beschwert waren. Dieselben sind von Hermann<sup>1)</sup> untersucht; die Schwingungszahlen lagen zwischen 12 und 56 ganzen Schwingungen.

Nach oben hin ist die Reihe der hörbaren Töne weniger begrenzt, indes findet sich hier, daß verschiedene Personen für solche Töne verschieden empfindlich sind, und selbst eine Person mit dem einen Ohr oft höhere Töne wahrnehmen kann als mit dem andern. So gibt Brewster an, daß er das Heimchenzirpen nur mit einem Ohre hörte, während für gewöhnliche Töne beide Ohren gleich empfindlich waren.<sup>2)</sup>

Sind die Töne hinreichend stark, so können noch sehr hohe Töne gehört werden; so brachte Savart<sup>3)</sup> mit seinem gezahnten Rade noch deutlich das  $f_{18}$  mit 24000 Schwingungen hervor, und Despretz<sup>4)</sup> fand, daß mittels Stimmgabeln, welche auf Resonanzkasten standen, noch das  $d_7$  mit über 36000 Schwingungen hörbar war.

Edelmann<sup>5)</sup> machte auch Studien über die Erzeugung und Grenze der Hörbarkeit höchster Töne. Er stellte mit einer neu konstruierten Galtonpfeife mit verstellbarem Stempel fest, daß bei manchen Personen die obere Grenze noch oberhalb 50000 Schwingungen liegt. Die Pfeife liefert Schwingungszahlen bis 170000 (ca.  $f_{10}$ ). Die einwandsfreie Bestimmung der Schwingungszahlen ganz hoher Töne bot Schwierigkeiten und die nach subjektiven und objektiven Methoden angestellten Beobachtungen lieferten wesentlich verschiedene Resultate. An dieser Streitfrage beteiligten sich besonders A. Appunn<sup>6)</sup>, F. A. Schultze<sup>7)</sup>, A. Schwendt<sup>8)</sup>,

1) *L. Hermann*, Schriften d. phys.-ökon. Ges. Königsberg. 36. 16. 1895.

2) *Brewster*, Philosophical Magazin. 25. 1806.

3) *Savart*, Annales de chim. et de phys. 44. 1830.

4) *Despretz*, a. a. O.

5) *M. Th. Edelmann*, Ann. d. Phys. 2. p. 469. 1900.

6) *A. Appunn*, Wiedem. Ann. 67. p. 217 u. p. 222. 1899.

7) *F. A. Schultze*, Wiedem. Ann. 68. p. 199 u. p. 869. 1899.

8) *A. Schwendt*, Arch. f. ges. Physiol. 75. p. 346. 1899 u. 76. p. 189. 1900.  
Verh. d. naturf. Ges. zu Basel. 12. (2.) p. 149. 1900.

R. König<sup>1)</sup>, F. Melde<sup>2)</sup>, Zickgraf<sup>3)</sup>, C. Stumpf und M. Meyer<sup>4)</sup>, M. Th. Edelmann<sup>5)</sup>. Als aber die rein objektive Methode der Kundtschen Staubfiguren, die im § 174 beschrieben ist, von Schwendt und König mit Erfolg angewandt wurde, war die Frage damit entschieden.

## § 164.

**Analyse des Klanges.** Wir haben bereits im § 157 darauf hingewiesen, daß Töne gleicher Höhe sich durch Verschiedenheit ihrer Klangfarbe unterscheiden, und bemerkt, daß die Verschiedenheit des Klanges ihren Grund darin habe, daß die Form der Schwingungen bei gleicher Periode eine verschiedene sei; eine Verschiedenheit, welche darauf beruht, daß die Schwingungen zusammengesetzt periodische sind, daß innerhalb der durch den Grundton angegebenen Periode die Luftteilchen gleichzeitig nach andern höhern Tönen angehörigen Perioden schwingen. Bei der Besprechung der zusammengesetzten Schwingungen (§ 148) sahen wir schon, daß bei den Schwingungen der meisten Körper nicht einfache Schwingungen, welche durch die Gleichung

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt sind, sich finden, sondern daß zu diesen stets solche hinzutreten, deren Schwingungsdauern Vielfache der ersten sind, daß also die Schwingungen im allgemeinen durch die Gleichung

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T} + b \sin 4\pi \frac{t}{T} + c \sin 6\pi \frac{t}{T} + \dots p \sin n\pi \frac{t}{T}$$

gegeben sind. Bei den verschieden schwingenden Körpern können die Verhältnisse zwischen den Amplituden der einzelnen Schwingungen, sowie die Anzahl der Glieder dieser Reihe je nach Art und Stelle der Erregung sehr verschieden sein.

Wie wir nun § 159 sahen, stellen die einzelnen Glieder der zuletzt hingeschriebenen Reihe die harmonischen Obertöne des durch das erste Glied dargestellten Tones vor, also wenn wir den letztern mit  $c$  bezeichnen, die Reihe

$$c, c_1, g_1, c_2, e_2, g_2, \text{Ton } \tau, c_3, d_3, \dots$$

Ist demnach die vorhin ausgesprochene Annahme über die Ursache der Klangverschiedenheit die richtige, so würde das bedeuten, daß die verschiedenen Klänge nicht einfache Töne, sondern Akkorde sind, welche von der Reihe der harmonischen Töne gebildet werden, und daß ihre Verschiedenheit darin beruht, daß in diesen Akkorden mehr oder weniger Töne der Reihe vorhanden sind, und daß die Stärke der einzelnen Töne eine verschiedene ist.

1) R. König, Wiedem. Ann. 69. p. 626 u. 721. 1899.

2) F. Melde, Ber. d. Marb. Ges. z. Beförderung d. ges. Naturwissensch 4. p. 75. 1899.

3) A. Zickgraf, Inaug.-Diss. Marburg 1899.

4) C. Stumpf und M. Meyer, Wied. Ann. 61. p. 760. 1897

5) M. Th. Edelmann, Ann. d. Phys. 2. p. 469. 1900

Ohm<sup>1)</sup> war der erste, der den Satz aufstellte, daß das Ohr die Fähigkeit habe, jede in einer zusammengesetzten vorhandene einfache Schwingung als Ton gesondert wahrzunehmen, ohne jedoch daran den Schluß zu knüpfen, daß in der Wahrnehmung der verschiedenen Obertöne der Grund der Klangverschiedenheit liege. Seebeck<sup>2)</sup> nahm dem gegenüber an, daß in einer zusammengesetzt periodischen Schwingung die einzelnen Töne nicht zu unterscheiden wären, daß aber in der durch das Hinzutreten der weiteren Schwingungen bedingten Veränderung des Schwingungsgesetzes eine Ursache der Klangverschiedenheit der Töne gleicher Höhe zu suchen sei. Erst Helmholtz<sup>3)</sup> war es, der den Nachweis lieferte, daß in einem Klange, dessen schwingende Bewegung durch obige Gleichung dargestellt ist, alle die Töne, wie sie das Gesetz von Ohm verlangt, wirklich vorhanden und dem Ohre wahrnehmbar sind, und daß die Verschiedenheit des Klanges wesentlich von den vorhandenen Obertönen bedingt ist.

Zum Nachweis der objektiven Existenz der Partialtöne benutzte Helmholtz das Phänomen des Mittönens, dessen Theorie wir im nächsten Kapitel etwas ausführlicher besprechen werden. Die Erscheinung besteht darin, daß wenn in der Nähe eines Körpers, welcher Schwingungen einer ganz bestimmten Periode vollführt, das heißt also einen einfachen Ton bestimmter Höhe geben kann, Schwingungen dieser Periode erzeugt werden, der Körper dadurch mit in Schwingungen gerät, welche man entweder direkt oder dadurch wahrnehmbar machen kann, daß man den erregenden Ton aufhören läßt, wodurch der Ton des mitschwingenden Körpers allein hörbar bleibt. Spannt man z. B. auf einem Monochord zwei Saiten genau im Einklang, und bringt die eine zum Tönen, so tönt auch die andere, oder bringt man von zwei ganz genau gleichen Stimmgabeln, wie Fig. 290, die eine zum Tönen, so wird auch die andere in Schwingung versetzt. Dieses Mittönen tritt aber nur ein, wenn die Schwingungen des mittönenden Körpers genau dieselbe Dauer haben, wie die Schwingungen des ursprünglich tönenden Körpers, schon bei geringem Unterschiede der Schwingungen tritt dasselbe nicht ein. Wenn man deshalb bei Erzeugung eines Klanges einen bestimmten Körper zum Mittönen bringt, dessen Schwingungszahl jener des in dem Klange vorhandenen Grundtones nicht entspricht, so kann man daraus mit Sicherheit schließen, daß neben dem Grundtone der dem mittönenden Körper entsprechende Ton in dem Klange vorhanden ist.

Ein sehr bequemes Mittel, um das Mittönen zu zeigen, sind Membranen, welche wie Fig. 292 als Boden auf einer Flasche ausgespannt sind. Der Hals der Flasche bei *a* ist offen, die Membran *b* vertritt die Stelle des Bodens; man nimmt am besten eine nasse Schweinsblase, die gleichmäßig aufgespannt wird, und die man trocknen läßt. Bei *c* wird mit Wachs ein Kokonfaden befestigt, der an seinem unteren Ende ein Siegellackkügelchen trägt, das gerade vor der Mitte der Membran hängt. Wenn die Membran in Schwingungen gerät, so macht das Pendelchen die heftigsten Sprünge. Wenn die Spannung der Membran und die Größe der Flasche

1) Ohm, Poggend. Ann. 59. 1843 und 62. 1844.

2) Seebeck, Poggend. Ann. 60. 1843 und 63. 1844. Doves Repertorium 8. 1849.

3) Helmholtz, Tonempfindungen. Abschnitt II, III, IV, V, VI.

richtig getroffen sind, so gibt die Membran fast nur ihren Grundton an, bei welchem sie als Ganzes schwingt, die Obertöne treten nur schwach hervor. Um dieselben zu erkennen, muß man die Flasche vertikal stellen, und die Membran zur Beobachtung der Klangfiguren mit Sand bestreuen. Die möglichen Schwingungsformen der Membran mit den dazu gehörigen Schwingungszahlen zeigt folgende kleine Tabelle:

Die Membran schwingt	Schwingungs- zahl
ohne Knotenlinie . . . .	1
mit einem Kreise . . . .	2,296
mit zwei Kreisen . . . .	3,599
mit einem Durchmesser	1,590
mit einem Durchmesser und einem Kreise . .	2,920
mit zwei Durchmessern.	2,140

Fig. 292.



Bezeichnen wir den Grundton der Membran mit  $c$ , so gibt dieselbe als Obertöne  $d_1 +$ ,  $b_1 +$ ,  $a_2$ ,  $g_1 -$ ,  $c_2$ , die Zeichen  $+$  und  $-$  bei den Tönen sollen anzeigen, daß der Ton der Membran etwas höher oder etwas tiefer ist als der hingeschriebene.

Die mitzuschwingenden Membranen haben den Vorzug, daß sie die in einer Klangmasse vorhandenen Einzeltöne ganz ohne Mithilfe des Ohres zeigen, sie haben indes den Nachteil, daß sie für schwächere Töne nicht sehr empfindlich sind. In der Beziehung werden sie weit übertroffen von den von Helmholtz angegebenen Resonatoren. Es sind das Hohlkugeln oder Röhren von Glas oder Messing (Fig. 293 a und b) mit zwei Öffnungen. Die eine Öffnung  $a$  hat scharf abgeschnittene Ränder, die andere  $b$  ist trichterförmig und so geformt, daß man sie in das Ohr einsetzen kann. Man umgibt zu dem Ende die Öffnung  $b$  mit geschmolzenem Siegellack, und wenn dasselbe soweit erkaltet ist, daß man es mit den Fingern ungestraft berühren kann, aber doch noch weich ist, drückt man die Öffnung in den Gehörgang. Das Siegellack formt sich nach der innern Oberfläche des letztern, und wenn man später den Resonator an das Ohr setzt, so schließt er leicht und vollständig dicht.

Fig. 293 a.



Fig. 293 b.



Ein solcher in das Ohr gesetzter Resonator gibt einen bestimmten Grundton und außerdem mehrere sehr viel höher liegende Obertöne. Wird der Grundton desselben außerhalb angegeben, so wird die Luft des Reso-



nators sehr kräftig zum Mittönen gebracht, und der Ton dringt unmittelbar und deshalb sehr kräftig ins Ohr.

Verstopft man das eine Ohr und setzt an das andere den Resonator, so hört man die meisten in der Umgebung angegebenen Töne sehr gedämpft, wird dagegen der Ton des Resonators angegeben, so schmettert derselbe mit gewaltiger Stärke in das Ohr hinein.

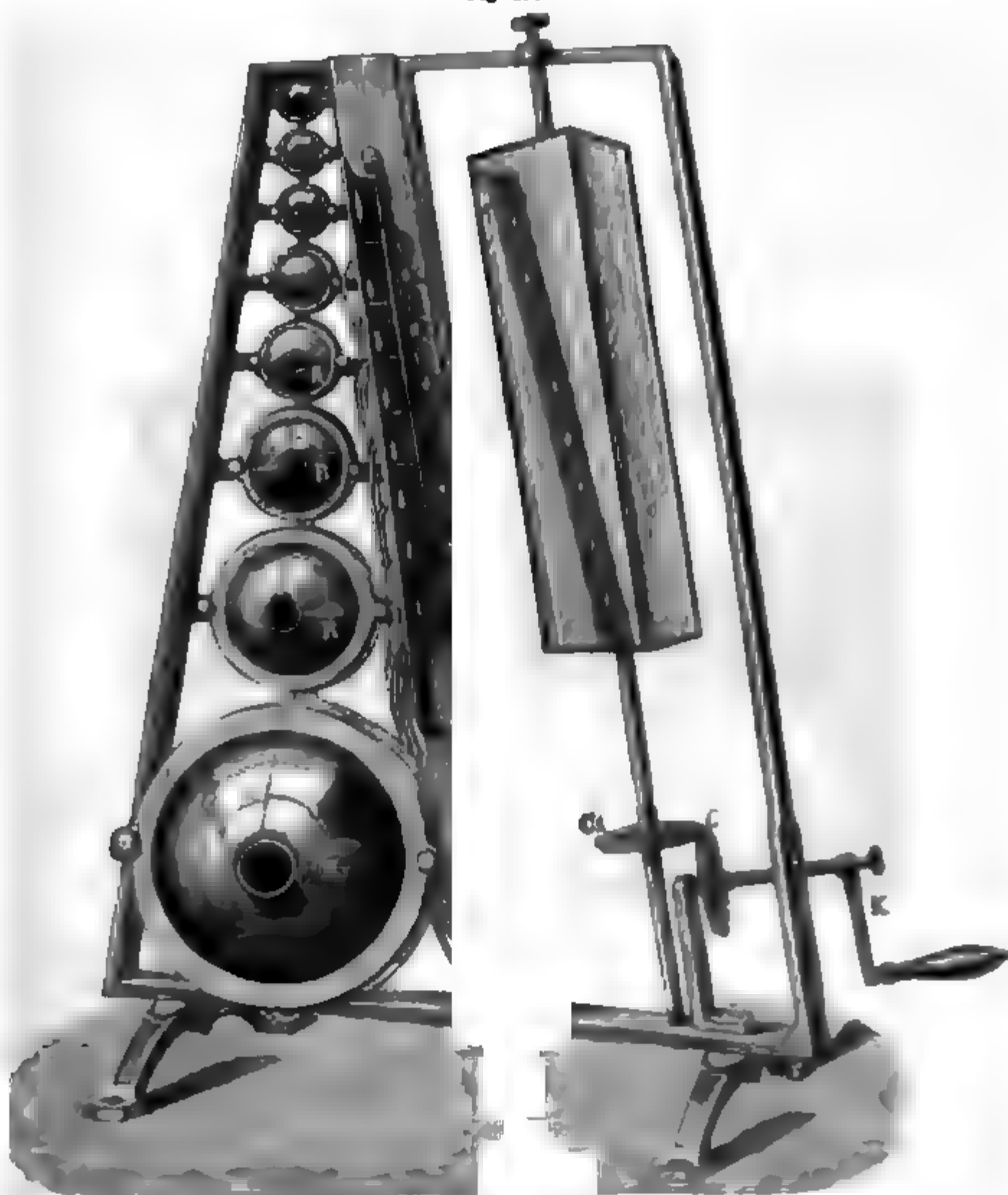
Eine abgestimmte Reihe solcher Resonatoren, wie man sie von König in Paris beziehen konnte, die harmonische Reihe der Töne von  $c_1$  an enthaltend, ist deshalb ein vortreffliches Mittel, um die in einer Klangmasse enthaltenen Töne zu bestimmen. Es ist dabei zu bemerken, daß das Auftreten des Tones im Resonator ganz ebenso die objektive Existenz des Tones außerhalb des Resonators beweist, als die mitschwingende Membran. Denn der Ton tritt in dem Resonator nur hervor, wenn derselbe von Schwingungen getroffen wird, welche mit denen, welche die Luftmasse des Resonators annehmen kann, isochron sind; wird deshalb der Resonator zum Tönen gebracht, so beweist das, daß in den zusammengesetzten Schwingungen, welche ihn zum Tönen bringen, die dem Resonator entsprechende einfache Schwingung vorhanden ist und als solche aus den zusammengesetzten abgetrennt werden kann.

Den Vorzug der Membranen, die Zusammensetzung der Klänge unabhängig vom Ohr zu zeigen, mit der Empfindlichkeit der Resonatoren verbindet ein von R. König in Paris konstruierter Apparat. Eine Reihe von abgestimmten Resonatoren, 8 oder 10 von  $c$  an sind auf einem Stativ übereinander befestigt  $R, R$  (Fig. 294). Das Ende der Resonatoren, welches sonst ins Ohr gesteckt wird, ist durch einen Kautschukschlauch mit einer Reihe kleiner Kapseln  $kk$  in Verbindung. Mit Ausnahme der Eintrittsstelle des Kautschukschlauches sind die Kapseln rings geschlossen, und zwar an den Seitenwänden und hinten, wo der Schlauch eintritt, fest vorn, der Mündung des Schlauches gegenüber durch eine sehr feine elastische Membran. Wird durch einen außen angegebenen Ton die Luftmasse des Resonators in Schwingung versetzt, so pflanzt sich die Bewegung bis in die Kapsel fort, und die die Kapsel vorn abschließende Membran wird gerade so in Schwingungen versetzt, wie das Trommelfell, wenn man den Resonator in den Gehörgang einschiebt. Um diese Schwingungen sichtbar zu machen, wendet König ein äußerst sinnreiches Mittel an: vor der Membran wird eine zweite Kapsel angebracht, so daß die Membran mit der Hinterwand der vorderen Kapsel bildet. Durch ein seitliches Ansatzrohr läßt man in die vordere Kapsel Leuchtgas eintreten, welches durch die (Fig. 294) neben den Resonatoren sichtbaren Brenner, die aus vier kleinen kreisförmigen, auf der oberen Seite dünner Zylinder angebrachten Öffnungen bestehen, entweicht.

Angezündet gibt dieser Gasstrom eine kleine spitze leuchtende, rot brennende Flamme. Sobald aber der mit dieser Flamme in Verbindung stehende Resonator durch einen Ton in Schwingungen versetzt wird, langt auch die Flamme in isochrone Vibrationen, indem sie abwechselnd größer und kleiner wird. Denn indem die Membran durch die Schwingungen der Luft im Resonator abwechselnd etwas in die das Gas haltende Kapsel hineingedrückt, abwechselnd aus ihr zurückgezogen wird, wird der Druck des Gases in der Kapsel abwechselnd etwas vergrößert, abwechselnd etwas

verkleinert. Dem vergrößerten Druck entspricht ein verstärktes, dem verminderten ein geschwächtes Ausströmen des Gases und ersterem eine Vergrößerung, letzterem eine Verkleinerung der Flamme. Diese Vibrationen der Flamme erfolgen indes mit einer solchen Geschwindigkeit, daß sie bei direkter Betrachtung der Flamme nicht sichtbar sind.

Fig. 234



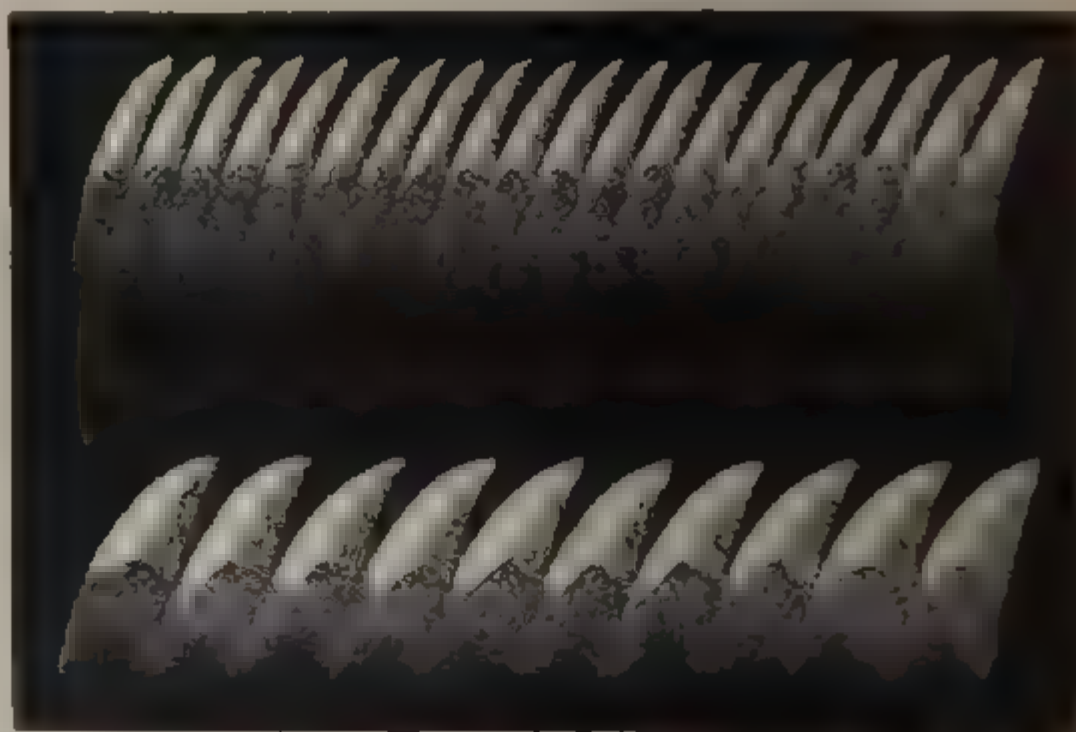
Um sie sichtbar zu machen, benutzt König die schon mehrfach erwähnte Eigentümlichkeit unseres Auges, daß Lichteindrücke eine gewisse Zeit dauern und die aus dem Reflexionsgesetze sich ergebende Erscheinung, daß das Spiegelbild einer Flamme je nach der Stellung eines Spiegels an



verschiedenen Orten erscheint. Das an der Seite der Flamme sich befindende Parallelepiped ist auf seinen vier Seitenflächen mit Spiegeln belegt, so daß, wenn es in der Stellung ist, welche die Figur zeigt, die Spiegelbilder der Flammen, wie es in der Figur angedeutet ist, sichtbar sind. Durch zwei mittels der Kurbel *K* gedrehte konische Zahnräder *C* und *C*<sub>1</sub> kann das spiegelnde Parallelepiped in Rotation versetzt werden. Dreht man den Spiegel langsam, während die Flamme ohne Vibration brennt, so sieht man die Flamme nach und nach an verschiedenen Stellen nebeneinander, dreht man ihn rasch, so sieht man alle diese Bilder einer Flamme gleichzeitig, und infolgedessen sieht man sie als ein horizontales Lichtband, gerade wie man eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle als leuchtenden Kreis sieht.

Anders jedoch, wenn die Flamme vibriert, wenn die leuchtende Spitze der Flamme immer nur einen Moment sichtbar ist; sie gibt dann im Spiegel nur jedesmal ein Bild, wenn sie aufzuckt, diese Bilder fallen aber, da der Spiegel zwischen dem jedesmaligen Aufzucken gedreht ist, nebeneinander,

Fig. 295



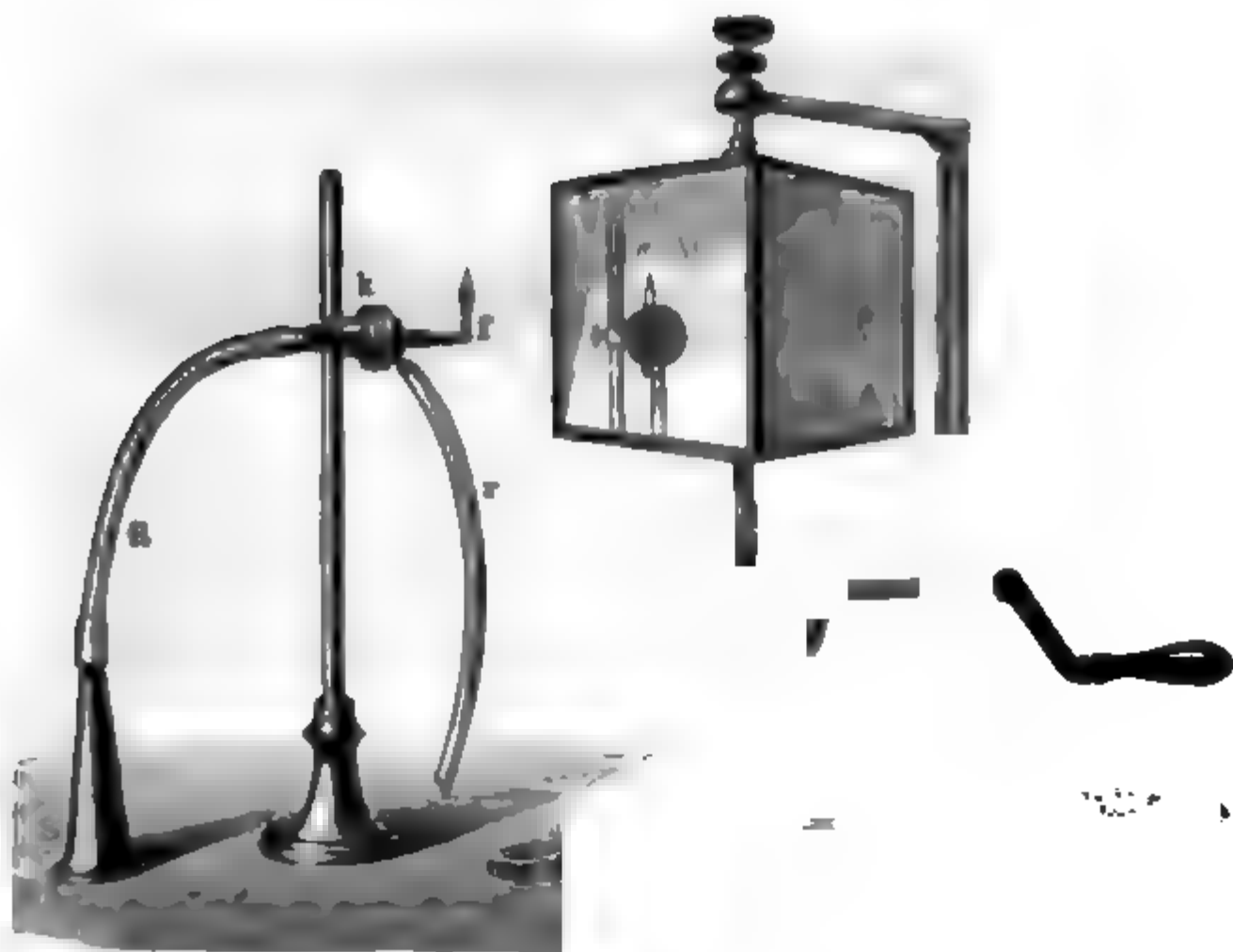
und man sieht im Spiegel eine Reihe von Flammenbildern nebeneinander, wie es Fig. 295 zeigt.

Der Abstand der einzelnen Flammenbilder hängt ab von der Schnelligkeit, mit der die Vibrationen erfolgen, und der Schnelligkeit der Rotation des Spiegels, oder wenn die Schnelligkeit der Rotation des Spiegels gegeben ist, nur von der Schnelligkeit, mit der sich die Vibrationen tigen. Spiegeln sich z. B. in einem Spiegel zwei Flammen, von denen die eine doppelt so rasch vibriert als die andere, so sieht man auch von der ersten doppelt so viele Bilder als von der letztern. So zeigt Fig. 295 die Erscheinung in dem rotierenden Spiegel, wenn man gleichzeitig *c* und *c*<sub>1</sub> entzündet, die untere Flamme gibt die halbe Anzahl Bilder als die darüber liegende, da die Luft im untern Resonator nur halb so viel Schwingungen macht als im darüberliegenden.

Die Anwendung des Apparates ergibt sich darnach von selbst; man setzt den zu untersuchenden Klang auf den Grundton  $c$  an und setzt den Spiegel in Rotation. Alle die in dem Klange enthaltenen Obertöne bringen die Luft der ihnen entsprechenden Resonatoren in Vibration, welche sich den zugehörigen Flammen mittheilt. Man sieht die entsprechenden Flammen rotierenden Spiegel als einzelne Bilder, ähnlich wie Fig. 295, während die Flammen, deren Resonatoren nicht mitschwingen, im Spiegel als kontinuierliche Lichtbänder erscheinen.

Die Membranen in den Kapseln für die manometrischen Flammen werden einer solchen Feinheit genommen, daß sie jeder Schwingung, die in der

Fig. 295.

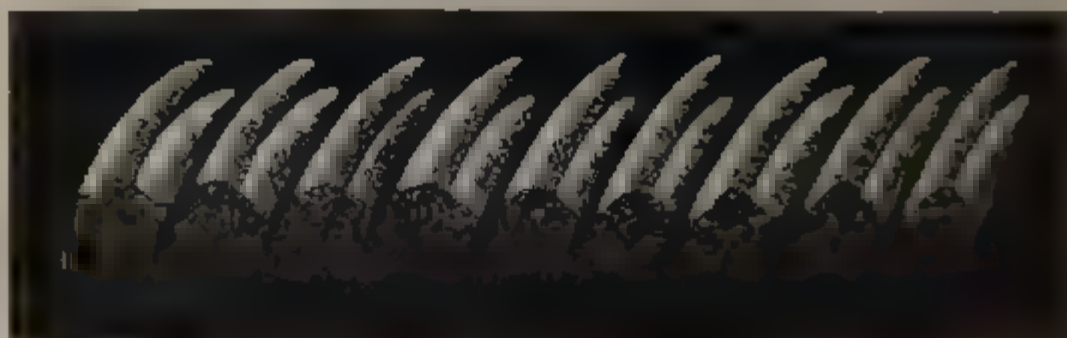


umgebenden Luft vorhanden ist, folgen und sie durch die Bewegung der Flamme angeben. Es ist deshalb, wie König<sup>1)</sup> gezeigt hat, möglich, durch eine Flamme die Klänge in ihre Partialtöne zu zerlegen. Einen dazu geeigneten Apparat zeigt Fig. 296. An einem Stativ ist eine Kapsel  $k$  der vorhin beschriebenen Art befestigt, in die vordere Hälfte derselben, welche von der hintern durch die feine Membran getrennt ist, tritt durch  $r$  das Leuchtgas ein, welches durch den nach oben gebogenen Schenkel  $f$  entweicht und dort angezündet wird. In der hintern Hälfte der Kapsel mündet das Kautschukrohr  $h$ , welches an seinem Ende mit einem

1) König, Poggend. Ann. 122. p. 866. 1864. Eine etwas andere Form der Resonanzkapseln, welche für manche Zwecke vorzuziehen ist, beschreibt P. Fischer, Schr. für den physikalischen u. chemischen Unterricht. 3. p. 63. 1890.

Schalltrichter *S* versehen ist. Jeder einfache Ton versetzt die Flamme in Schwingungen, wenn er mit hinreichender Stärke in den Trichter und durch diesen in die Kapsel eindringt; betrachtet man die Flamme um rotirenden Spiegel, so erhält man ein Bild, wie Fig. 295a und b. Dringen dagegen gleichzeitig mehrere Töne in das Rohr, so wird die Flamme von jedem Tone in Schwingung versetzt, und die Flammenbilder werden andere. Treten z. B. Grundton und Oktave in die Kapsel, so zeigt der Spiegel das Bild Fig. 297. Dasselbe besteht aus einer hohen Flamme, die schmäler ist, als wenn der Grundton allein tönt, und einer kleinen Flamme, welche regelmäßig abwechseln. Die Entstehung dieses Bildes ergibt sich leicht aus der

Fig. 297



Überlegung, daß jede Bewegung der Membran gegen die vordere Hälfte der Kapsel die Flamme aufflackern machen muß. Wenn man gleichzeitig Grundton und Oktave und Duodezime in die Kapsel eindringen läßt, so erhält man das Bild Fig. 298. Zwischen die Flammenbilder Fig. 297 tritt jedesmal noch eine kleinere Flamme. Das Flammenbild Fig. 297 bildet sich z. B. wenn man das obere Ende einer offenen Orgelpfeife nahe an der Öffnung des Schalltrichters *S* hält und nicht zu stark in die Pfeife bläst, wenn man dagegen stärker in die Pfeife hinein bläst, wodurch neben dem Grundton und der Oktave die Duodezime deutlich hörbar wird, so erhält man das Bild Fig. 298.

Fig. 298



Hat man auf diese Weise die Flammenbilder der Klänge einmal studiert, so erkennt man leicht, wie man dieses Mittel zur Analyse eines Klanges benutzen kann; man hat das durch ihn erzeugte Flammenbild mit dem entsprechend zusammengesetzte einfache Töne zu vergleichen, um zu erkennen, welche Töne den Klang zusammensetzen.

Schließlich kann man auch die auf einem Monochord oder auf einem Klavier oder überhaupt auf einem Resonanzboden ausgespannten Saiten benutzen, um die in einem Klange vorhandenen Einzeltöne zu bestimmen.

die Saiten sehr leicht und stark mittönen. Da indes die Saiten nicht nur durch ihren Grundton, sondern auch durch jeden ihrer harmonischen Obertöne in Schwingung versetzt werden, so läßt sich mit Hilfe derselben nicht direkt über die einzelnen Töne entscheiden, welche in der ganzen Klangmasse vorhanden sind.

Mit Hilfe des einen oder des andern Verfahrens kann man zunächst leicht den Nachweis führen, daß in einer zusammengesetzten Schwingung die einfachen Schwingungen als solche angenommen werden müssen, daß also die einzelnen Partialtöne eine objektive Existenz haben, indem sie das Mittönen bewirken, also ihre Schwingungen an andere Körper abgeben. Daß in der Tat alle Töne, die in einem Klange vorhanden sind, in dieser Weise existieren, kann man mit Hilfe von gezupften Saiten zeigen. Wie wir im § 148 bemerkten, treten in gezupften oder geschlagenen Saiten sehr verschiedene Schwingungen auf, je nach der Stelle, die gezupft oder geschlagen wird. Alle die Schwingungszahlen fehlen, welche an der geschlagenen Stelle einen Knotenpunkt haben, alle übrigen treten auf. Wird eine Saite in der Mitte geschlagen, so fehlen die Töne 2, 4, 8 usw. Die Töne 3, 5, 7 usw. und ihre Vielfachen treten auf, das heißt die zusammengesetzten Schwingungen der Saite kann man als aus diesen Schwingungen zusammengesetzt betrachten. Daß in der Tat diese zusammengesetzten Schwingungen bei ihrer Ausbreitung in der Luft sich wirklich in die in ihnen vorhandenen einfachen Schwingungen zerlegen, das beweisen die Versuche über das Mittönen, denn die denselben entsprechenden Membranen oder Resonatoren werden in Schwingung versetzt.

Wie zuerst Brandt<sup>1)</sup> und dann im Verlaufe seiner Untersuchung Helmholtz<sup>2)</sup> nachgewiesen haben, nimmt das einigermaßen geübte Ohr bei dahin gerichteter Aufmerksamkeit diese einzelnen Töne in einer Klangmasse auch ohne Hilfe der Resonatoren wahr, so daß damit das Ohmsche Gesetz vollständig bewiesen ist. Ist man in solchen Versuchen nicht geübt, so kann man, wie Helmholtz angibt, das Ohr zunächst mit Resonatoren unterstützen.

Man schlage z. B. eine Saite, die  $c$  gibt, außerhalb der Mitte, etwa in  $\frac{1}{3}$  der Saitenlänge, so liefert dieselbe außer dem Grundton  $c$  auch  $c_1$ ,  $c_2$  usw. Nimmt man den Ton  $c_1$  nicht sofort wahr, so halte man einen auf  $c_1$  abgestimmten Resonator an das Ohr, und man hört den Ton sehr laut. Ist so das Ohr auf diesen Ton aufmerksam geworden, so hört es denselben auch nach Entfernung des Resonators, allerdings schwächer aber unzweifelhaft deutlich.

Da das Ohr in einer zusammengesetzten Schwingung in der Tat die einzelnen Töne wahrnimmt, so wird der Schluß berechtigt sein, daß es in der Tat die verschiedenen und verschieden starken Obertöne, die den Grundton begleiten, sind, welche die Klangfarbe eines Tones ausmachen. Die von den musikalischen Instrumenten gelieferten Klänge sind deshalb keine einfachen Töne, diese können keine verschiedene Klangfarbe haben, sondern Zusammenklänge verschiedener Töne. Helmholtz bezeichnete dieselben daher auch nicht als Töne, sondern als Klänge, indem er das Wort

1) Brandt, Poggend. Ann. 112. p 324. 1861

2) Helmholtz, Tonempfindungen. Abschnitt IV.



Ton für die durch einfache Schwingungen bewirkte Empfindung wählt. Die Töne unterscheiden sich demnach nur durch ihre Höhe, die Klänge, deren Höhe durch die des Grundtones bezeichnet wird, durch die von ihrer Zusammensetzung abhängige Klangfarbe.

Daß dieser Schluß über das Wesentliche der musikalischen Klangfarbe berechtigt ist, hat Helmholtz<sup>1)</sup> schließlich dadurch nachgewiesen, daß er aus einfachen Tönen die Klänge zusammensetzte, nachdem er vorher die in denselben vorhandenen Teiltöne erkannt hatte. Wir werden auf die wichtigsten Versuche, die künstliche Zusammensetzung der Vokale, in einem spätern Paragraphen zu sprechen kommen, hier erwähnen wir nur einen dahin zielenden Versuch. Bläst man eine Glasflasche an, welche in der Weise wie Fig. 299 eingerichtet ist, welche also mit einem Anblaserohr,

Fig. 299.



am besten aus Guttapercha, dessen am Halse der Flasche liegende Mündung abgeplattet ist, versehen ist, indem man das Rohr mit einem Blasebalge in Verbindung setzt, so erhält man einen fast einfachen Ton, der in seinem Klange einem dumpfen *U* sehr ähnlich ist.

Stimmt man nun zwei solcher Flaschen so ab, daß die eine genau die Oktave der andern gibt, so liefern sie zusammen angeblasen einen Klang, dessen Höhe der des Grundtones entspricht, dessen Farbe aber derjenigen des Vokales *O* gleich ist. Läßt man nun abwechselnd bald die eine, bald beide Flaschen tönen, so kann man in dem Zusammenklange

zunächst die einzelnen Töne leicht unterscheiden, sehr bald aber bei dauerndem Zusammenklange verschmelzen sie sich zu dem Klange *O*. Wenn man erst den höhern Ton angegeben hat, dann den tiefern hinzukommen läßt, hört man anfangs den höhern Ton noch in seiner ganzen Stärke wahr, daneben klingt der tiefe in seiner natürlichen Klangfarbe wie ein *U*. Allmählich aber, wie sich die Erinnerung des isoliert gehörten Tones verliert, wird jener immer undeutlicher und dabei auch schwächer, während der tiefe Ton scheinbar stärker wird und wie *O* lautet.

Gerade diese Verschmelzung eines Obertones mit einem Grundton unter Änderung der Klangfarbe beweist, daß der Klang wesentlich durch die Obertöne bedingt ist.

Wie wir in § 133 nachwiesen, hängt das Gesetz der Schwingungszahl in einer schwingenden Punktreihe nicht allein ab von der Periode der Terschwingungen, sondern auch von der Phase, mit welcher die Schwingungen

1) Helmholtz, Tonempfindungen. p. 109 ff

[illegible]

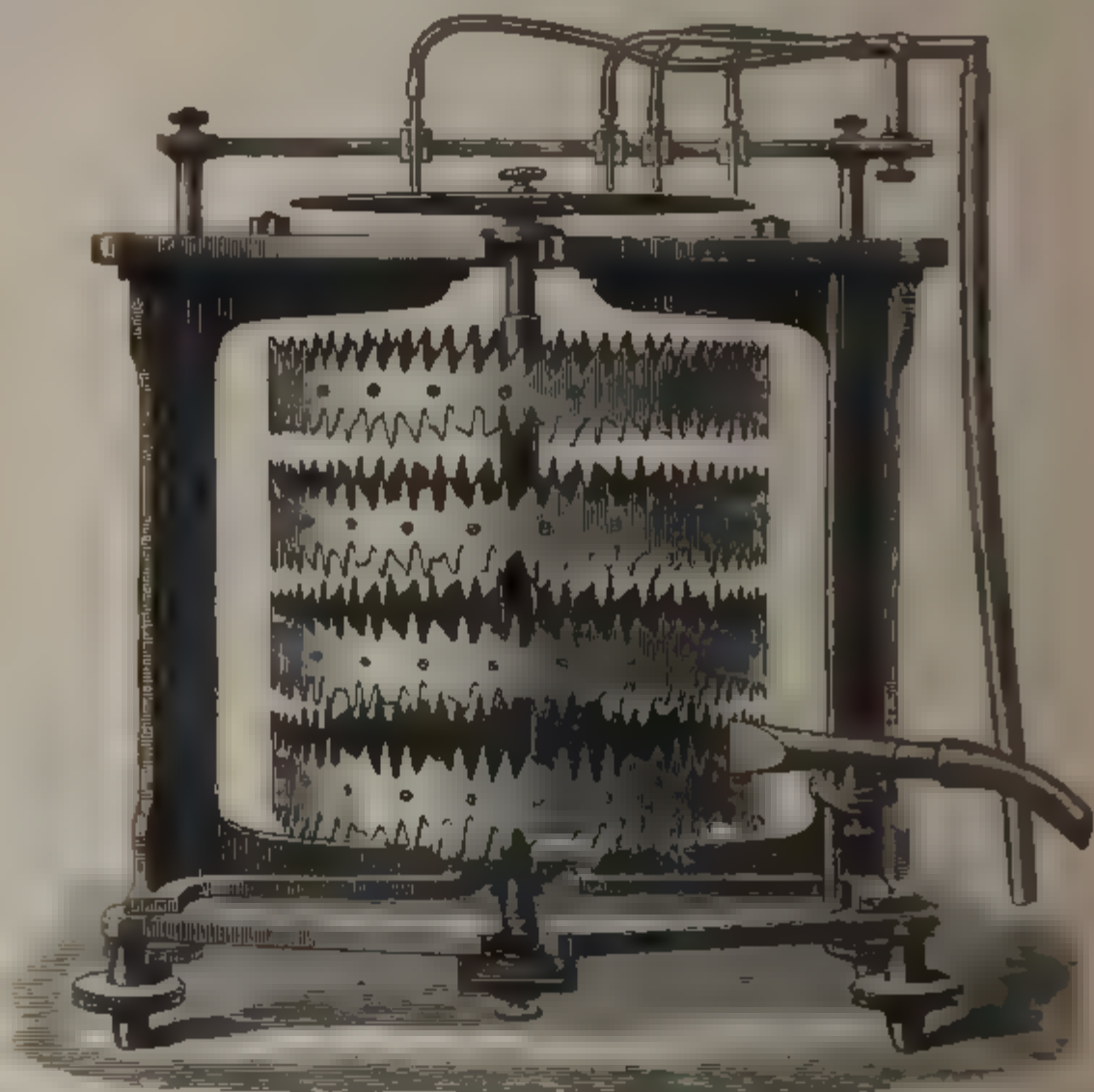
The following information was obtained from the records of the [redacted] Department of the [redacted] Government:

[The remainder of the page contains extremely faint, illegible text, likely representing a list or detailed report.]

Form der Wellenlinie, also nach der Zusammensetzung der Einzelschwingungen, aus denen die Wellenlinie gebildet ist, erheblich verschieden

Die Form der Wellenlinie ändert sich nach § 133 bei gleichen Einzelschwingungen je nach der Phase, mit der die Einzelschwingungen zusammenkommen. König schnitt Wellenlinien, welche aus den Einzelschwingungen der ersten acht harmonischen Obertöne oder der ersten vier ungeradzahligen, alle mit gleicher Amplitude genommen, zusammengesetzt waren. Für jede dieser Zusammensetzungen stellte er vier Wellenlinien her: bei der ersten fielen die Anfangspunkte aller Wellen zusammen, bei der zweiten das erste

Fig. 300.



Viertel, bei der dritten die Mitte aller Wellen und bei der vierten das dritte Viertel der Schwingungen

Bei dem Zusammenklange der ersten acht harmonischen Töne ist der Unterschied in der Intensität und der Farbe der entstehenden Klänge in diesen vier Fällen ein sehr beträchtlicher. Die ganze Klangmasse ist am lautesten und schärfsten bei der Phasendifferenz  $\frac{1}{4}$ , wie König die erste Wellenlinie bezeichnet, am schwächsten und sanftesten bei der Phasendifferenz  $\frac{3}{4}$ , zwischen beiden stehen die Phasendifferenzen Null und  $\frac{1}{2}$ .

Ähnlich war es in allen Fällen.

Zur Bildung eines Klanges ist es nach König nicht erforderlich, daß die harmonischen Obertöne ganz rein sind, sondern auch verstimmte Obertöne



töne, besonders in den höhern Lagen, setzen sich zu einem deutlichen Klange zusammen, am besten, wenn auch die tiefern Obertöne vorhanden sind und wenn die Stärke der Obertöne mit der Höhe in annähernd regelmäßiger Weise abnimmt. Befindet sich in der Reihe der Obertöne eine erhebliche Lücke, so daß ein tiefer Grundton nur von hohen Obertönen begleitet wird, so entsteht in unserm Ohr nicht die Empfindung eines Klanges, sondern man hört die höhern Töne neben und gesondert von dem tiefen.

Die Angabe Königs, daß auch unreine Obertöne sich mit dem Grundtone zu einem bestimmten Klange mischen, ist nicht vereinbar mit dem von ihm behaupteten Einfluß der Phasendifferenz auf den Klang, da bei unreinen Obertönen die Phasendifferenzen rasch wechseln, diese somit auch einen rasch wechselnden Klang geben müßten. Das ist bei den Klängen, deren Eigentümlichkeit König gerade durch die Unreinheit der höhern Töne erklärt, indes nicht der Fall.

## § 165.

**Klänge durch Schwingungen fester Körper.** Wir sahen im zweiten Kapitel des vorigen Abschnittes, daß die festen Körper in drei verschiedene Schwingungsarten versetzt werden können, in longitudinale, transversale und drehende. Alle diese Schwingungen bringen Töne, oder vielmehr, da sie in den seltensten Fällen einfache sind, Klänge hervor, indem durch sie die umgebende Luft in Schwingungen versetzt und durch diese der Ton bis zu unserm Ohre fortgepflanzt wird.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl eines longitudinal schwingenden Stabes fanden wir

$$N = \frac{A}{L} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

wenn  $A$  eine von der Befestigungsweise und der Art des Streichens abhängige Konstante,  $L$  die Länge,  $E$  der Elastizitätskoeffizient des Materials in absolutem Maße und  $s$  die Dichtigkeit des Stabes ist. Vom Querschnitt ist die Schwingungszahl unabhängig.

Letzteres kann man leicht bestätigen, indem man zwei Stäbe gleicher Länge, gleichen Materials, etwa von Stahl, aber verschiedener Dicke herstellt. Faßt man dieselben in der Mitte und streicht sie mit einem mit etwas Kolophonium bestrichenen Lederlappen, so geben beide Stäbe Klänge genau gleicher Höhe. Um zu zeigen, daß die Schwingungszahl der Länge des Stabes umgekehrt proportional ist, hat man zu den beiden vorigen einen Stab halber Länge zu verfertigen, derselbe gibt in gleicher Weise gestrichen oder an einem Ende mit einem Hammer geschlagen genau die höhere Oktave.

Schon aus Chladni's Versuchen<sup>1)</sup> ergibt sich die Abhängigkeit von Elastizität und Dichtigkeit der Theorie entsprechend. Indem er den Ton  $c$ , nach der damaligen Stimmung zu 4086 Schwingungen bestimmte, fand er für drei Stäbe, Silber, Kupfer, Eisen, wenn sie an beiden Enden frei waren, und eine Länge von 2 Rhein. Fuß, 62,7<sup>cm</sup>, besaßen, die Töne

1) Chladni, Akustik. p 108.

Silber	$d_4$	— 2274	Schwingungen berechnet	2097
Kupfer	$g_4$	— 3065	"	2979
Eisen	$cis_5$	— 4296	"	4107,

die als berechnet angegebenen Werte sind mit den Wertheimschen Werten der Elastitätskoeffizienten für gezogene Metalle (§ 49) und den Dichten  $s = 10,47$  für Silber,  $8,78$  für Kupfer und  $7,74$  für Eisen berechnet. Die Abweichung der beobachteten und berechneten Werte ist durch die Unsicherheit in den Werten der Elastizitätskoeffizienten und auch der Tonhöhen in den hohen Lagen hinreichend erklärt. Die im § 49 als aus Longitudinalschwingungen erhalten angegebenen Werte sind von Wertheim aus den Tonhöhen abgeleitet worden.

Für die verschiedenen Befestigungsweisen fand Chladni ganz der Theorie entsprechende Tonfolgen; der an einem Ende feste Stab gab entsprechend der Gleichung

$$N = \frac{2n-1}{4l} \sqrt{\frac{E}{s}}$$

die ungeradzahligen Töne 1, 3, 5, 7, 9; der an beiden Enden freie oder feste Stab gab entsprechend der Gleichung

$$N = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{s}}$$

als Grundton die nächsthöhere Oktave des an einem Ende festen Stabes und weiter dessen harmonische Obertöne, 2, 3, 4.

Die Klänge longitudinal schwingender Stäbe werden in der Musik nicht gebraucht.

Für die Schwingungszahl transversal schwingender gespannter Saiten erhielten wir (§ 143) allgemein, mit Beibehaltung der frühern Zeichen, den Ausdruck

$$N = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{gP}{qs}}.$$

Es folgt daraus, die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von Saiten gleicher Länge ändert sich der Quadratwurzel der Spannung proportional und bei gleicher Spannung umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Gewichte der Längeneinheit der Saite. Die Erfahrung bestätigt dieses vollkommen, und in der praktischen Akustik werden gerade diese Sätze zur Regelung der Tonhöhe bei den Saiteninstrumenten angewandt.

So sind bei allen Streichinstrumenten die Saiten, welche die tiefen Töne geben sollen, dicker und weniger straff gespannt, und meist sind die tiefen Saiten, um ihr Gewicht zu vergrößern, mit einem feinen Draht umwickelt. Bei allen diesen Instrumenten wird die Stimmung nur durch die Spannung der Saiten erhalten, welche an dem einen Ende befestigt sind und mit ihrem andern Ende in einem drehbaren Wirbel eingesteckt sind durch dessen Drehung man die Spannung ändern kann. Gleiches ist bei den Klavieren der Fall, wo außerdem die Saiten noch eine verschiedene Länge haben. Bei den Streichinstrumenten werden die verschiedenen Töne ebenfalls durch Verkürzung der Saiten hervorgebracht, indem der Spieler die Saite an den betreffenden Punkten auf das Griffbrett niederdrückt.

Nach unserer Gleichung für die Schwingungszahl gespannter Saiten ist die Tonhöhe bei einer und derselben Saite der Länge des schwingenden Teiles umgekehrt proportional und die Saite zerlegt sich, wenn sie nicht ihrer ganzen Länge nach schwingt, in  $n$  schwingende Teile. Die Versuche von Chladni<sup>1)</sup> und G. Weber<sup>2)</sup> geben die Tonreihe einer gespannten Saite genau der Theorie gemäß, wobei Weber bis zur Teilung der Saite in  $\frac{1}{22}$  ging.

Weil man vielfach die Tonreihe nach den Saitenlängen des Monochords bestimmt, findet man häufig die Töne anstatt durch die Schwingungszahlen durch die Länge der Saite für den entsprechenden Ton bestimmt, man nennt die Terz anstatt  $\frac{1}{3}$  dann  $\frac{2}{3}$ , die Quart  $\frac{3}{4}$ , die Quint  $\frac{4}{5}$  usf.

Die Klänge der Saiteninstrumente können nach den Untersuchungen des § 148 äußerst verschieden sein, da je nach der Art der Erregung der Saiten die Zahl und Stärke der zu dem Grundton hinzutretenden Obertöne sehr verschieden sein kann; auf dieser Verschiedenheit beruht die vielfache Anwendung der Saiteninstrumente in der Musik. Die Saiteninstrumente können wir in drei Gruppen teilen, in solche, deren Töne durch Zupfen der Saiten erregt werden, Guitarre, Zither, Harfe, solche, deren Töne durch Schlagen erregt werden, das Klavier, und solche, deren Klänge durch das Streichen mit dem Bogen erregt werden, die sämtlichen Streichinstrumente. Für die wichtigsten derselben hat von Helmholtz<sup>3)</sup> die Klänge ausführlich untersucht; wir begnügen uns hier damit, als Ergänzung zu den Untersuchungen des § 148, die von Helmholtz für das Klavier und die Violine erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Wir erwähnten § 148 schon, daß die Stärke und Anzahl der in den zusammengesetzten vorhandenen Einzelschwingungen, also der im Saitenklänge vorhandenen Obertöne wesentlich abhängen von der Art und der Stelle der Erregung und der Dicke, Steifigkeit und Elastizität der Saite.

Was zunächst die Art des Anschlages betrifft, so ergibt sich aus von Helmholtz' Untersuchungen, daß die Zahl und Stärke der höhern Obertöne desto bedeutender wird, je mehr und schärfere Diskontinuitäten die Art der Bewegung bewirkt. Wird die Saite gezupft, so entfernt der Finger, ehe er sie losläßt, die Saite in ihrer ganzen Länge aus der Gleichgewichtslage; es entsteht eine Diskontinuität nur dadurch, daß die Saite an der Stelle, wo sie gezupft wird, eine mehr oder weniger scharfe Ecke bildet, schärfer wenn sie wie bei der Zither mit einem Stift, als wenn sie wie bei der Guitarre und Harfe mit dem weichen runden Finger gerissen wird. Deshalb gibt die erste Art des Reißens auch einen schärfern Klang mit einer größern Menge klimpernder hoher Obertöne, als im letztern; die Intensität des Grundtones ist aber immer größer als die jedes Obertones.

Wird die Saite mit einem scharfkantigen harten Hammer geschlagen, der sofort wieder abspringt, so wird nur der von dem Schlage getroffene Punkt sofort in Bewegung gesetzt. Unmittelbar nach dem Schlage ist der übrige Teil der Saite noch in Ruhe, er gerät erst in Bewegung, indem die durch den Schlag erregte Welle auf der Saite hin und her läuft. Die Beschränkung der ursprünglichen Bewegung auf nur einen Punkt gibt der

1) Chladni, Akustik. p. 67

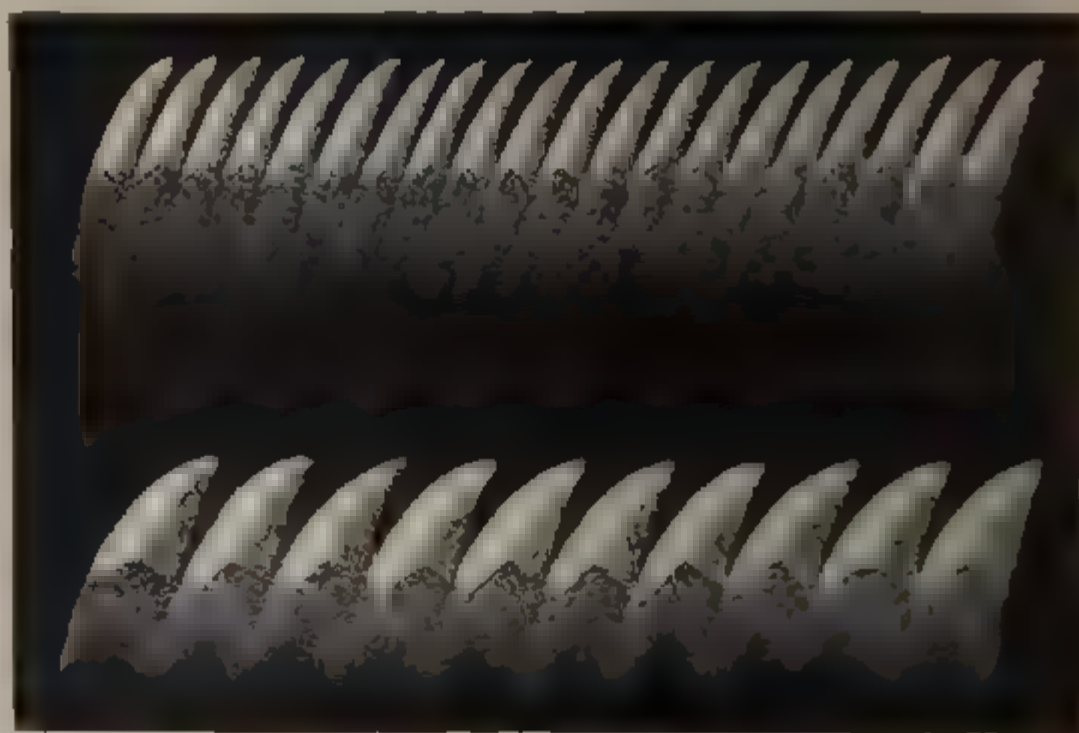
2) Binasil, Akustik. p. 110.

3) von Helmholtz, Tonempfindungen p. 128 ff. 336.

verschiedenen Orten erscheint. Das an der Seite der Flamme sich befindende Parallelepiped ist auf seinen vier Seitenflächen mit Spiegeln belegt, so daß, wenn es in der Stellung ist, welche die Figur zeigt, die Spiegelbilder der Flammen, wie es in der Figur angedeutet ist, sichtbar sind. Durch zwei mittels der Kurbel  $K$  gedrehte konische Zahnräder  $C$  und  $C_1$  kann das spiegelnde Parallelepiped in Rotation versetzt werden. Dreht man den Spiegel langsam, während die Flamme ohne Vibration brennt, so sieht man die Flamme nach und nach an verschiedenen Stellen nebeneinander, dreht man ihn rasch, so sieht man alle diese Bilder einer Flamme gleichzeitig, und infolgedessen sieht man sie als ein horizontales Lichtband, gerade wie man eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle als leuchtenden Kreis sieht.

Anders jedoch, wenn die Flamme vibriert, wenn die leuchtende Spitze der Flamme immer nur einen Moment sichtbar ist; sie gibt dann im Spiegel nur jedesmal ein Bild, wenn sie aufzuckt, diese Bilder fallen aber, da der Spiegel zwischen dem jedesmaligen Aufzucken gedreht ist, nebeneinander,

Fig. 295



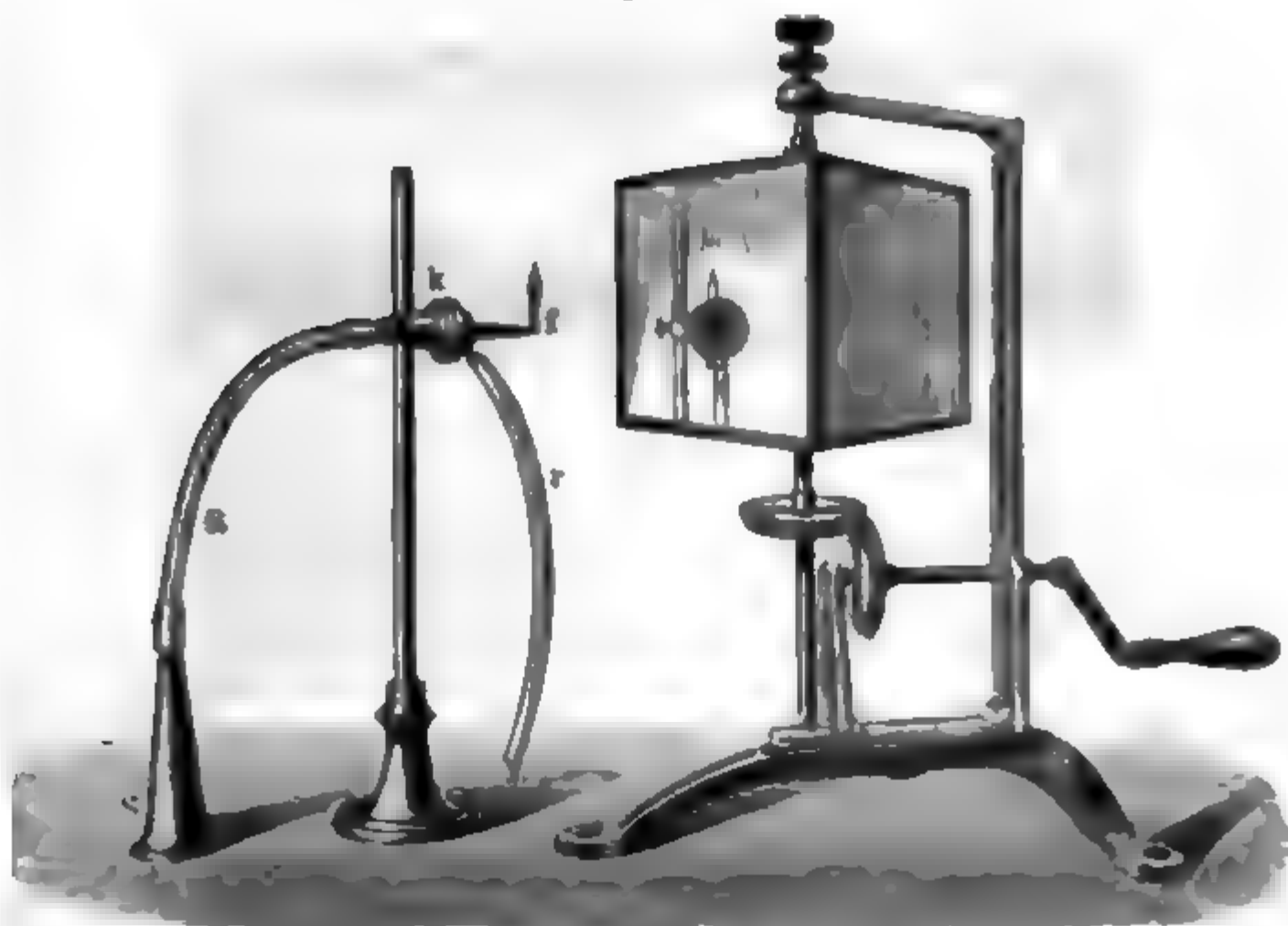
und man sieht im Spiegel eine Reihe von Flammenbildern nebeneinander, wie es Fig. 295 zeigt.

Der Abstand der einzelnen Flammenbilder hängt ab von der Schnelligkeit, mit der die Vibrationen erfolgen, und der Schnelligkeit der Rotation des Spiegels, oder wenn die Schnelligkeit der Rotation des Spiegels gegeben ist, nur von der Schnelligkeit, mit der sich die Vibrationen folgen. Spiegeln sich z. B. in einem Spiegel zwei Flammen, von denen die eine doppelt so rasch vibriert als die andere, so sieht man auch von der ersten doppelt so viele Bilder als von der letztern. So zeigt Fig. 295 die Erscheinung in dem rotierenden Spiegel, wenn man gleichzeitig  $c$  und  $c_1$  erklingen läßt, die untere Flamme gibt die halbe Anzahl Bilder als die darüber liegende, da die Luft im untern Resonator nur halb so viel Schwingungen macht als im darüberliegenden.

Die Anwendung des Apparates ergibt sich darnach von selbst; man gibt den zu untersuchenden Klang auf den Grundton  $c$  an und setzt den Spiegel in Rotation. Alle die in dem Klange enthaltenen Obertöne bringen die Luft der ihnen entsprechenden Resonatoren in Vibration, welche sich den zugehörigen Flammen mitteilt. Man sieht die entsprechenden Flammen im rotierenden Spiegel als einzelne Bilder, ähnlich wie Fig. 295, während die Flammen, deren Resonatoren nicht miltönen, im Spiegel als kontinuierliche Lichtbänder erscheinen.

Die Membranen in den Kapseln für die manometrischen Flammen werden von einer solchen Feinheit genommen, daß sie jeder Schwingung, die in der

Fig. 296.



sie umgebenden Luft vorhanden ist, folgen und sie durch die Bewegung der Flamme angeben. Es ist deshalb, wie König<sup>1)</sup> gezeigt hat, möglich, auch durch eine Flamme die Klänge in ihre Partialtöne zu zerlegen. Einen kleinen dazu geeigneten Apparat zeigt Fig. 296. An einem Stativ ist eine Kapsel  $k$  der vorhin beschriebenen Art befestigt, in die vordere Hälfte derselben, welche von der hintern durch die feine Membran getrennt ist, tritt durch  $r$  das Leuchtgas ein, welches durch den nach oben gebogenen Brenner  $f$  entweicht und dort angezündet wird. In der hintern Hälfte der Kapsel mündet das Kautschukrohr  $h$ , welches an seinem Ende mit einem

1) König, Poggend. Ann. 122. p. 666 1864. Eine etwas andere Form der Flammenkapseln, welche für manche Zwecke vorzuziehen ist, beschreibt P. Fischer, Zeitschr. für den physikalischen u. chemischen Unterricht. 3. p. 63. 1890.



Schalltrichter *S* versehen ist. Jeder einfache Ton versetzt die Flamme in Schwingungen, wenn er mit hinreichender Stärke in den Trichter und durch diesen in die Kapsel eindringt; betrachtet man die Flamme im rotierenden Spiegel, so erhält man ein Bild, wie Fig 295a und b. Dringen dagegen gleichzeitig mehrere Töne in das Rohr, so wird die Flamme von jedem Tone in Schwingung versetzt, und die Flammenbilder werden andere. Treten z. B. Grundton und Oktave in die Kapsel, so zeigt der Spiegel das Bild Fig 297. Dasselbe besteht aus einer hohen Flamme, die schmäler ist, als wenn der Grundton allein tönt, und einer kleinen Flamme, welche regelmäßig abwechseln. Die Entstehung dieses Bildes ergibt sich leicht aus der

Fig 297



Überlegung, daß jede Bewegung der Membran gegen die vordere Hälfte der Kapsel die Flamme aufflackern machen muß. Wenn man gleichzeitig Grundton und Oktave und Duodezime in die Kapsel eindringen läßt, so erhält man das Bild Fig 298. Zwischen die Flammenbilder Fig 297 tritt jedesmal noch eine kleinere Flamme. Das Flammenbild Fig 297 bildet sich z. B., wenn man das obere Ende einer offenen Orgelpfeife nahe an die Öffnung des Schalltrichters *N* hält und nicht zu stark in die Pfeife bläst; wenn man dagegen stärker in die Pfeife hinein bläst, wodurch neben dem Grundton und der Oktave die Duodezime deutlich hörbar wird, so erhält man das Bild Fig 298.

Fig 298



Hat man auf diese Weise die Flammenbilder der Klänge einmal studiert, so erkennt man leicht, wie man dieses Mittel zur Analyse eines Klanges benutzen kann; man hat das durch ihn erzeugte Flammenbild mit dem dem passend zusammengesetzte einfache Töne zu vergleichen, um zu erkennen, welche Töne den Klang zusammensetzen.

Schließlich kann man auch die auf einem Monochord oder auf einem Klavier oder überhaupt auf einem Resonanzboden ausgespannten Saiten benutzen, um die in einem Klange vorhandenen Einzeltöne zu bestimmen.

die Saiten sehr leicht und stark mittönen. Da indes die Saiten nicht nur durch ihren Grundton, sondern auch durch jeden ihrer harmonischen Obertöne in Schwingung versetzt werden, so läßt sich mit Hilfe derselben nicht direkt über die einzelnen Töne entscheiden, welche in der ganzen Klangmasse vorhanden sind.

Mit Hilfe des einen oder des andern Verfahrens kann man zunächst leicht den Nachweis führen, daß in einer zusammengesetzten Schwingung die einfachen Schwingungen als solche angenommen werden müssen, daß also die einzelnen Partialtöne eine objektive Existenz haben, indem sie das Mittönen bewirken, also ihre Schwingungen an andere Körper abgeben. Daß in der Tat alle Töne, die in einem Klange vorhanden sind, in dieser Weise existieren, kann man mit Hilfe von gezupften Saiten zeigen. Wie wir im § 148 bemerkten, treten in gezupften oder geschlagenen Saiten sehr verschiedene Schwingungen auf, je nach der Stelle, die gezupft oder geschlagen wird. Alle die Schwingungszahlen fehlen, welche an der geschlagenen Stelle einen Knotenpunkt haben, alle übrigen treten auf. Wird eine Saite in der Mitte geschlagen, so fehlen die Töne 2, 4, 8 usw. Die Töne 3, 5, 7 usw. und ihre Vielfachen treten auf, das heißt die zusammengesetzten Schwingungen der Saite kann man als aus diesen Schwingungen zusammengesetzt betrachten. Daß in der Tat diese zusammengesetzten Schwingungen bei ihrer Ausbreitung in der Luft sich wirklich in die in ihnen vorhandenen einfachen Schwingungen zerlegen, das beweisen die Versuche über das Mittönen, denn die denselben entsprechenden Membranen oder Resonatoren werden in Schwingung versetzt.

Wie zuerst Brandt<sup>1)</sup> und dann im Verlaufe seiner Untersuchung Helmholtz<sup>2)</sup> nachgewiesen haben, nimmt das einigermaßen geübte Ohr bei dahin gerichteter Aufmerksamkeit diese einzelnen Töne in einer Klangmasse auch ohne Hilfe der Resonatoren wahr, so daß damit das Ohmsche Gesetz vollständig bewiesen ist. Ist man in solchen Versuchen nicht geübt, so kann man, wie Helmholtz angibt, das Ohr zunächst mit Resonatoren unterstützen.

Man schlage z. B. eine Saite, die  $c$  gibt, außerhalb der Mitte, etwa in  $\frac{1}{4}$  der Saitenlänge, so liefert dieselbe außer dem Grundton  $c$  auch  $c_1$ ,  $c_2$  usw. Nimmt man den Ton  $c_1$  nicht sofort wahr, so halte man einen auf  $c_1$  abgestimmten Resonator an das Ohr, und man hört den Ton sehr laut. Ist so das Ohr auf diesen Ton aufmerksam geworden, so hört es denselben auch nach Entfernung des Resonators, allerdings schwächer aber unzweifelhaft deutlich.

Da das Ohr in einer zusammengesetzten Schwingung in der Tat die einzelnen Töne wahrnimmt, so wird der Schluß berechtigt sein, daß es in der Tat die verschiedenen und verschieden starken Obertöne, die den Grundton begleiten, sind, welche die Klangfarbe eines Tones ausmachen. Die von den musikalischen Instrumenten gelieferten Klänge sind deshalb keine einfachen Töne, diese können keine verschiedene Klangfarbe haben, sondern Zusammenklänge verschiedener Töne. Helmholtz bezeichnete dieselben daher auch nicht als Töne, sondern als Klänge, indem er das Wort

1) Brandt, Poggend. Ann. 112. p. 324. 1861

2) Helmholtz, Tonempfindungen. Abschnitt IV.



Ton für die durch einfache Schwingungen bewirkte Empfindung wählt. Die Töne unterscheiden sich demnach nur durch ihre Höhe, die Klänge, deren Höhe durch die des Grundtones bezeichnet wird, durch die von ihrer Zusammensetzung abhängige Klangfarbe.

Daß dieser Schluß über das Wesentliche der musikalischen Klangfarbe berechtigt ist, hat Helmholtz<sup>1)</sup> schließlich dadurch nachgewiesen, daß er aus einfachen Tönen die Klänge zusammensetzte, nachdem er vorher die in denselben vorhandenen Teiltöne erkannt hatte. Wir werden auf die wichtigsten Versuche, die künstliche Zusammensetzung der Vokale, in einem spätern Paragraphen zu sprechen kommen, hier erwähnen wir nur einen dahin zielenden Versuch. Bläst man eine Glasflasche an, welche in der Weise wie Fig. 299 eingerichtet ist, welche also mit einem Anblaserohr,

Fig. 299



am besten aus Guttapercha, dessen am Halse der Flasche liegende Mündung abgeplattet ist, versehen ist, indem man das Rohr mit einem Blasebalg in Verbindung setzt, so erhält man einen fast einfachen Ton, der in seinem Klange einem dumpfen *U* sehr ähnlich ist.

Stimmt man nun zwei solcher Flaschen so ab, daß die eine genau die Oktave der andern gibt, so liefern sie zusammen angeblasen einen Klang, dessen Höhe der des Grundtones entspricht, dessen Farbe aber derjenigen des Vokales *O* gleich ist. Läßt man nun abwechselnd bald die eine, bald beide Flaschen tönen, so kann man in dem Zusammenklange

zunächst die einzelnen Töne leicht unterscheiden, sehr bald aber bei dauermendem Zusammenklange verschmelzen sie sich zu dem Klange *O*. Wenn man erst den höhern Ton angegeben hat, dann den tiefern hinzukommen läßt, hört man anfangs den höhern Ton noch in seiner ganzen Stärke weiter, daneben klingt der tiefe in seiner natürlichen Klangfarbe wie ein *U*. Allmählich aber, wie sich die Erinnerung des isoliert gehörten Tones verliert, wird jener immer undeutlicher und dabei auch schwächer, während der tiefe Ton scheinbar stärker wird und wie *O* lautet.

Gerade diese Verschmelzung eines Obertones mit einem Grundton unter Änderung der Klangfarbe beweist, daß der Klang wesentlich durch die Obertöne bedingt ist.

Wie wir in § 133 nachwiesen, hängt das Gesetz der Schwingungszahl in einer schwingenden Punktreihe nicht allein ab von der Periode der Teilschwingungen, sondern auch von der Phase, mit welcher die Schwingungen

1) Helmholtz, Tonempfindungen p 109 ff

zusammentreten, es wäre deshalb auch möglich, daß die Phase der komponierenden Teiltöne auf die Farbe eines Klanges von Einfluß ist. Helmholtz<sup>1)</sup> gelangte zu dem Resultate, daß das nicht der Fall ist. Er benutzte dazu die Zusammensetzung von Klängen mit Hilfe von Stimmgabeltönen. Zwei im Verhältnis von Grundton und Oktave stehende Stimmgabeln geben zusammen zum Tönen gebracht und durch Resonanzröhren verstärkt (siehe § 172) einen dem *O* sehr ähnlichen Klang. Verstimmt man die eine Stimmgabel nur sehr wenig, so kommen die einzelnen Stöße nach und nach in immer anderer Phase zusammen, wie wir bereits § 147 sahen. Die Klangfarbe ändert sich indes damit durchaus nicht. Helmholtz schloß daraus, daß die Klangfarbe des musikalischen Teils eines Klanges nur abhängt von der Zahl und Stärke der Partialtöne, nicht von den Phasenunterschieden derselben. Wir sagen ausdrücklich des musikalischen Teiles des Klanges, denn außerdem wird die Klangfarbe mit bestimmt durch die bei der Klangerzeugung eintretenden Geräusche, auf welche wir noch hinweisen werden.

R. König<sup>2)</sup> kommt bei seinen Versuchen in Betreff des Einflusses der Phase auf die Klangfarbe zu andern Resultaten wie Helmholtz, er findet, daß Änderung der Phase der mitklingenden Töne die Klangfarbe ändert. König benutzte zu seinen Versuchen über den Einfluß der Phase auf die Klangfarbe vorzugsweise die von ihm konstruierte Wellensirene<sup>3)</sup>. Die Einrichtung derselben ist folgende. Wie wir § 133 und 148 sahen, gibt uns die Form der fortschreitenden Welle innerhalb einer Wellenlänge die Verschiebungen der einzelnen Punkte nebeneinander, welche jeder einzelne Punkt nacheinander innerhalb einer Schwingung der größten Periode erhält. König schneidet nun die Form der zusammengesetzten Wellen in den Rand einer kreisförmigen Scheibe oder in den Rand eines Metallstreifens, der zu einem Hohlzylinder gebogen wird, wie Fig. 300 zeigt. Die Scheibe kann horizontal auf einer Zentrifugalmaschine befestigt, und um eine durch ihren Mittelpunkt gehende zu ihrer Ebene senkrechte Achse, oder der zum Hohlzylinder gebogene Streifen um die Achse des Hohlzylinders in eine passend schnelle Rotation versetzt werden. Auf den Rand der Scheibe wird ein Luftstrom aus einer Windlade geführt, welcher aus einer recht schmalen Luftspalte, welche bei der Scheibe radial, bei dem Zylinder, wie die Figur zeigt, parallel der Zylinderachse gestellt ist, gegen den Rand der Scheibe strömt. Die Länge der Spalte ist gleich dem Unterschiede des höchsten und tiefsten Punktes der Wellenlinie. Ist die höchste Stelle der Wellenlinie vor der Luftspalte, so ist dieselbe geschlossen, ist der tiefste Punkt vor derselben, so ist die Luftspalte ganz offen. Wird die in den Rand des Streifens geschnittene Wellenlinie an dem Luftspalt vorüber geführt, so wird die Luftspalte genau der Form der Wellenlinie entsprechend mehr oder weniger geöffnet, die durch den Rand tretenden Luftstöße werden also genau nach den Perioden der Wellenlinien gestärkt und geschwächt; die Luft erhält also bei dem Durchtreten durch den Rand genau die periodischen Bewegungen, welche in der Wellenlinie des Randes vorhanden sind.

In der Tat sind die auf diese Weise erzeugten Klänge je nach der

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 190 ff.

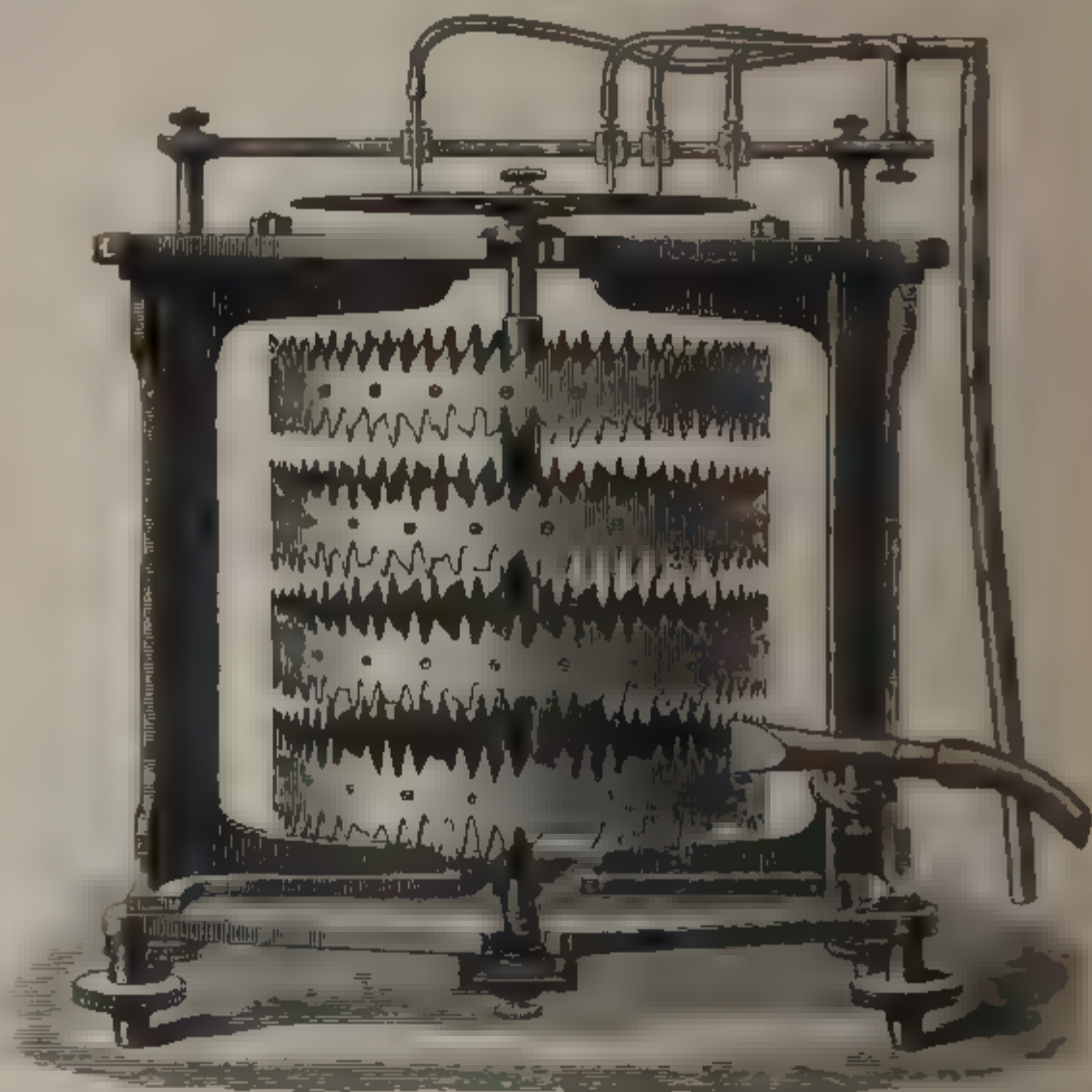
2) *König*, Wiedem. Ann. 14 p. 369. 1881; 39. p. 403. 1890.

3) *König*, Wiedem. Ann. 12 p. 335. 1881.

Form der Wellenlinie, also nach der Zusammensetzung der Einzelschwingungen, aus denen die Wellenlinie gebildet ist, erheblich verschieden

Die Form der Wellenlinie ändert sich nach § 133 bei gleichen Einzelschwingungen je nach der Phase, mit der die Einzelschwingungen zusammenkommen. König schnitt Wellenlinien, welche aus den Einzelschwingungen der ersten acht harmonischen Obertöne oder der ersten vier ungeradzahligen, alle mit gleicher Amplitude genommen, zusammengesetzt waren. Für jede dieser Zusammensetzungen stellte er vier Wellenlinien her; bei der ersten fielen die Anfangspunkte aller Wellen zusammen, bei der zweiten das erste

Fig. 300.



Viertel, bei der dritten die Mitte aller Wellen und bei der vierten das dritte Viertel der Schwingungen

Bei dem Zusammenklange der ersten acht harmonischen Töne ist der Unterschied in der Intensität und der Farbe der entstehenden Klänge in diesen vier Fällen ein sehr beträchtlicher. Die ganze Klangmasse ist am lautesten und schärfsten bei der Phasendifferenz  $\frac{1}{4}$ , wie König die zweite Wellenlinie bezeichnet, am schwächsten und sanftesten bei der Phasendifferenz  $\frac{3}{4}$ , zwischen beiden stehen die Phasendifferenzen Null und  $\frac{1}{2}$ .

Ähnlich war es in allen Fällen.

Zur Bildung eines Klanges ist es nach König nicht erforderlich, daß die harmonischen Obertöne ganz rein sind, sondern auch verstimmte über

töne, besonders in den höhern Lagen, setzen sich zu einem deutlichen Klange zusammen, am besten, wenn auch die tiefern Obertöne vorhanden sind und wenn die Stärke der Obertöne mit der Höhe in annähernd regelmäßiger Weise abnimmt. Befindet sich in der Reihe der Obertöne eine erhebliche Lücke, so daß ein tiefer Grundton nur von hohen Obertönen begleitet wird, so entsteht in unserm Ohr nicht die Empfindung eines Klanges, sondern man hört die höhern Töne neben und gesondert von dem tiefen.

Die Angabe Königs, daß auch unreine Obertöne sich mit dem Grundtone zu einem bestimmten Klange mischen, ist nicht vereinbar mit dem von ihm behaupteten Einfluß der Phasendifferenz auf den Klang, da bei unreinen Obertönen die Phasendifferenzen rasch wechseln, diese somit auch einen rasch wechselnden Klang geben müßten. Das ist bei den Klängen, deren Eigentümlichkeit König gerade durch die Unreinheit der höhern Töne erklärt, indes nicht der Fall.

## § 165.

**Klänge durch Schwingungen fester Körper.** Wir sahen im zweiten Kapitel des vorigen Abschnittes, daß die festen Körper in drei verschiedene Schwingungsarten versetzt werden können, in longitudinale, transversale und drehende. Alle diese Schwingungen bringen Töne, oder vielmehr, da sie in den seltensten Fällen einfache sind, Klänge hervor, indem durch sie die umgebende Luft in Schwingungen versetzt und durch diese der Ton bis zu unserm Ohre fortgepflanzt wird.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl eines longitudinal schwingenden Stabes fanden wir

$$N = \frac{A}{L} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

wenn  $A$  eine von der Befestigungsweise und der Art des Streichens abhängige Konstante,  $L$  die Länge,  $E$  der Elastizitätskoeffizient des Materials in absolutem Maße und  $s$  die Dichtigkeit des Stabes ist. Vom Querschnitt ist die Schwingungszahl unabhängig.

Letzteres kann man leicht bestätigen, indem man zwei Stäbe gleicher Länge, gleichen Materials, etwa von Stahl, aber verschiedener Dicke herstellt. Faßt man dieselben in der Mitte und streicht sie mit einem mit etwas Kolophonium bestrichenen Lederlappen, so geben beide Stäbe Klänge genau gleicher Höhe. Um zu zeigen, daß die Schwingungszahl der Länge des Stabes umgekehrt proportional ist, hat man zu den beiden vorigen einen Stab halber Länge zu verfertigen, derselbe gibt in gleicher Weise gestrichen oder an einem Ende mit einem Hammer geschlagen genau die höhere Oktave.

Schon aus Chladnis Versuchen<sup>1)</sup> ergibt sich die Abhängigkeit von Elastizität und Dichtigkeit der Theorie entsprechend. Indem er den Ton  $c$ , nach der damaligen Stimmung zu 4086 Schwingungen bestimmte, fand er für drei Stäbe, Silber, Kupfer, Eisen, wenn sie an beiden Enden frei waren, und eine Länge von 2 Rhein. Fuß, 62,7<sup>cm</sup>, besaßen, die Töne

1) Chladni, Akustik. p 108.



Silber	$d_4$	— 2274	Schwingungen berechnet	2097
Kupfer	$g_4$	— 3065	"	2979
Eisen	$cis_5$	— 4296	"	4107,

die als berechnet angegebenen Werte sind mit den Wertheimschen Werten der Elastitätskoeffizienten für gezogene Metalle (§ 49) und den Dichten  $s = 10,47$  für Silber,  $8,78$  für Kupfer und  $7,74$  für Eisen berechnet. Die Abweichung der beobachteten und berechneten Werte ist durch die Unsicherheit in den Werten der Elastizitätskoeffizienten und auch der Tonhöhen in den hohen Lagen hinreichend erklärt. Die im § 49 als aus Longitudinalschwingungen erhalten angegebenen Werte sind von Wertheim aus den Tonhöhen abgeleitet worden.

Für die verschiedenen Befestigungsweisen fand Chladni ganz der Theorie entsprechende Tonfolgen; der an einem Ende feste Stab gab entsprechend der Gleichung

$$N = \frac{2n-1}{4l} \sqrt{\frac{E}{s}}$$

die ungeradzahligen Töne 1, 3, 5, 7, 9; der an beiden Enden freie oder feste Stab gab entsprechend der Gleichung

$$N = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{s}}$$

als Grundton die nächsthöhere Oktave des an einem Ende festen Stabes und weiter dessen harmonische Obertöne, 2, 3, 4.

Die Klänge longitudinal schwingender Stäbe werden in der Musik nicht gebraucht.

Für die Schwingungszahl transversal schwingender gespannter Saiten erhielten wir (§ 143) allgemein, mit Beibehaltung der frühern Zeichen, den Ausdruck

$$N = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{gP}{qs}}.$$

Es folgt daraus, die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von Saiten gleicher Länge ändert sich der Quadratwurzel der Spannung proportional und bei gleicher Spannung umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Gewichte der Längeneinheit der Saite. Die Erfahrung bestätigt dieses vollkommen, und in der praktischen Akustik werden gerade diese Sätze zur Regelung der Tonhöhe bei den Saiteninstrumenten angewandt.

So sind bei allen Streichinstrumenten die Saiten, welche die tiefen Töne geben sollen, dicker und weniger straff gespannt, und meist sind die tiefen Saiten, um ihr Gewicht zu vergrößern, mit einem feinen Draht umwickelt. Bei allen diesen Instrumenten wird die Stimmung nur durch die Spannung der Saiten erhalten, welche an dem einen Ende befestigt sind und mit ihrem andern Ende in einem drehbaren Wirbel eingesteckt sind durch dessen Drehung man die Spannung ändern kann. Gleiches ist bei den Klavieren der Fall, wo außerdem die Saiten noch eine verschiedene Länge haben. Bei den Streichinstrumenten werden die verschiedenen Töne ebenfalls durch Verkürzung der Saiten hervorgebracht, indem der Spieler die Saite an den betreffenden Punkten auf das Griffbrett niederdrückt.

Nach unserer Gleichung für die Schwingungszahl gespannter Saiten ist die Tonhöhe bei einer und derselben Saite der Länge des schwingenden Teiles umgekehrt proportional und die Saite zerlegt sich, wenn sie nicht ihrer ganzen Länge nach schwingt, in  $n$  schwingende Teile. Die Versuche von Chladni<sup>1)</sup> und G. Weber<sup>2)</sup> geben die Tonreihe einer gespannten Saite genau der Theorie gemäß, wobei Weber bis zur Teilung der Saite in  $\frac{1}{22}$  ging.

Weil man vielfach die Tonreihe nach den Saitenlängen des Monochords bestimmt, findet man häufig die Töne anstatt durch die Schwingungszahlen durch die Länge der Saite für den entsprechenden Ton bestimmt, man nennt die Terz anstatt  $\frac{1}{3}$  dann  $\frac{2}{3}$ , die Quart  $\frac{1}{2}$ , die Quint  $\frac{2}{3}$  usf.

Die Klänge der Saiteninstrumente können nach den Untersuchungen des § 148 äußerst verschieden sein, da je nach der Art der Erregung der Saiten die Zahl und Stärke der zu dem Grundton hinzutretenden Obertöne sehr verschieden sein kann; auf dieser Verschiedenheit beruht die vielfache Anwendung der Saiteninstrumente in der Musik. Die Saiteninstrumente können wir in drei Gruppen teilen, in solche, deren Töne durch Zupfen der Saiten erregt werden, Gitarre, Zither, Harfe, solche, deren Töne durch Schlagen erregt werden, das Klavier, und solche, deren Klänge durch das Streichen mit dem Bogen erregt werden, die sämtlichen Streichinstrumente. Für die wichtigsten derselben hat von Helmholtz<sup>3)</sup> die Klänge ausführlich untersucht; wir begnügen uns hier damit, als Ergänzung zu den Untersuchungen des § 148, die von Helmholtz für das Klavier und die Violine erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Wir erwähnten § 148 schon, daß die Stärke und Anzahl der in den zusammengesetzten vorhandenen Einzelschwingungen, also der im Saitenklänge vorhandenen Obertöne wesentlich abhängen von der Art und der Stelle der Erregung und der Dicke, Steifigkeit und Elastizität der Saite.

Was zunächst die Art des Anschlages betrifft, so ergibt sich aus von Helmholtz' Untersuchungen, daß die Zahl und Stärke der höhern Obertöne desto bedeutender wird, je mehr und schärfere Diskontinuitäten die Art der Bewegung bewirkt. Wird die Saite gezupft, so entfernt der Finger, ehe er sie losläßt, die Saite in ihrer ganzen Länge aus der Gleichgewichtslage; es entsteht eine Diskontinuität nur dadurch, daß die Saite an der Stelle, wo sie gezupft wird, eine mehr oder weniger scharfe Ecke bildet, schärfer wenn sie wie bei der Zither mit einem Stift, als wenn sie wie bei der Gitarre und Harfe mit dem weichen runden Finger gerissen wird. Deshalb gibt die erste Art des Reißens auch einen schärfern Klang mit einer größern Menge klimpernder hoher Obertöne, als im letztern: die Intensität des Grundtones ist aber immer größer als die jedes Obertones.

Wird die Saite mit einem scharfkantigen harten Hammer geschlagen, der sofort wieder abspringt, so wird nur der von dem Schlage getroffene Punkt sofort in Bewegung gesetzt. Unmittelbar nach dem Schlage ist der übrige Teil der Saite noch in Ruhe, er gerät erst in Bewegung, indem die durch den Schlag erregte Welle auf der Saite hin und her läuft. Die Beschränkung der ursprünglichen Bewegung auf nur einen Punkt gibt der

1) Chladni, Akustik. p. 67

2) Bindert, Akustik. p. 110.

3) von Helmholtz, Tonempfindungen p. 128 ff. 336.

Saite die schärfste Diskontinuität, und deshalb viele und hohe Obertöne, deren Intensität zum Teil die des Grundtones übertrifft.

Ist der schlagende Hammer weich und elastisch, so hat die Bewegung Zeit, auf der Saite sich auszubreiten, ehe der Hammer wieder zurückspringt, und zugleich wird durch den Anschlag eines solchen Hammers der geschlagene Teil der Saite nicht ruckweise in Bewegung gesetzt, sondern seine Geschwindigkeit wächst allmählich und stetig mit dem Drucke des Hammers. Die Diskontinuität der Bewegung ist deshalb viel kleiner, und dem entsprechend ist die Stärke der Obertöne gegen jene des Grundtones viel geringer.

Mit scharfem Metall gerissen oder geschlagen ist deshalb der Klang der Saite schärfer und leerer, indem die mit Leerheit bezeichnete Eigentümlichkeit des Klanges eben in der verhältnismäßigen Stärke der Obertöne gegen den Grundton begründet ist. Ist der Grundton kräftig gegen die Obertöne und sind besonders die höhern unpaarigen Töne schwach, so ist der Klang voll und harmonisch.

Bei den Klavieren wird, um dies zu erreichen, der Hammer mit einer dicken Lage stark gepreßten und dadurch elastisch gewordenen Filzes bedeckt und gleichzeitig werden die für die tiefern Töne bestimmten Hämmer schwerer gemacht als die für die höhern Oktaven, damit erstere länger an der Saite haften als letztere. Denn einmal ist das längere Haften des Hammers in den tiefern Lagen zur relativen Verstärkung des Grundtones deshalb notwendig, weil die Schwingungsdauer desselben größer ist als in der höhern, dann aber auch, weil bei der stärkern Spannung der Saiten in den höhern Lagen die höhern Obertöne sich doch nicht so stark ausbilden.

Um bei den Klavieren die Klänge nicht allein voll, sondern auch weich zu machen, ist die Anschlagstelle der Saite  $\frac{1}{7}$  bis  $\frac{1}{5}$  von dem einen Ende. Damit fallen die Töne 7 und 9, die ersten, welche nicht in den Dreiklang hineingehören, und welche mit den andern keine konsonierenden Intervalle haben, aus der Reihe der Obertöne fort. Es treten nur die ersten sechs Töne auf, der fünfte und sechste indes schon sehr schwach.

Folgende kleine Tabelle gibt die Intensität der Partialtöne, von Helmholtz berechnet, wenn in  $\frac{1}{7}$  der Saitenlänge der Ton in der über jeder Spalte angegebenen Weise erregt wird.

Tabelle der Intensität der Partialtöne bei Saiten.

Ordnungs- zahl des Partialtones	Anschlag durch Reißen	Anschlag durch einen elastischen Hammer, dessen Berührung dauert in Bruchteilen der Schwingungsdauer des Grundtones			Anschlag mit einem ganz harten Hammer
		$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{14}$	
1	100	100	100	100	100
2	81,2	99,7	189,4	249	324,7
3	56,1	8,9	100,9	242,9	504,9
4	31,6	2,3	17,3	118,9	504,9
5	13,0	1,2	0,0	26,1	324,7
6	2,8	0,01	0,5	1,3	100,0
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0



Für das Klavier gelten die drei mittleren Spalten, und von Helmholtz fand, daß die mit  $\frac{3}{4}$  überschriebene Spalte in der Gegend des  $c_2$  und noch höher hinauf gilt, daß indes in den viel höhern Lagen die Obertöne noch schwächer werden. In der eingestrichenen Oktave etwa gilt die Spalte  $\frac{3}{10}$ , in dieser ist also der erste Oberton schon stärker als der Grundton; in den tiefern Lagen, der kleinen, großen und der Kontraoktave gilt die mit  $\frac{3}{14}$  überschriebene Spalte. Die Intensitätsverhältnisse können indes, je nach der Güte und richtigen Stellung der Hämmer beträchtlich schwanken.

Daß in den höhern Lagen die Obertöne so sehr weit zurücktreten, das hat seinen Grund in der stärkern Spannung und der Steifigkeit der Klaviersaiten, denn bei steifen Saiten von einiger Dicke treten dieselben nur sehr schwach mehr hervor, da diese Saiten sich nicht so leicht in so viele Unterabteilungen zerlegen, wie sie zu den hohen Obertönen erforderlich sind.

Daß der Klang der gestrichenen Saiten ein ganz anderer sein muß als jener der geschlagenen, ergibt sich aus den ausführlichen Besprechungen der Schwingungsform der Saiten, § 148, unmittelbar. Wie wir sahen, ist die Bewegung der Saite eine solche mit gleichförmiger Geschwindigkeit, sowohl wenn sie dem streichenden Bogen folgt, als wenn sie von ihm losgelassen zurückgeht. Die Theorie von Fourier ergibt, daß diese Schwingungsform der Saite stattfindet, wenn in ihr die ganze Reihe der Obertöne vorhanden ist, und wenn die Schwingungsamplituden der Obertöne dem Quadrate ihrer Ordnungszahl entsprechend abnehmen. In dem Klange der gestrichenen Saiten ist demnach der Grundton stärker als jeder der Obertöne, und die Obertöne nehmen mit steigender Höhe an Stärke ab; deshalb ist der Klang der Streichinstrumente auch ein viel vollerer als der des Klaviers. Gleichzeitig ist in der gleichen Tonlage die Stärke der höhern Obertöne, bei den meisten Tönen der Violine schon von dem dritten an, beim Violoncell vom fünften an relativ größer als bei dem Klavier, und deshalb ist der vollere Ton gleichzeitig der schärfere.

Wenn der Bogen nur eine unendlich kleine Breite hätte, so würde die Saite beim Anstreichen alle Töne geben mit Ausnahme derjenigen, welche an der Streichstelle einen Knotenpunkt haben, da der Bogen eine gewisse Breite hat, so läßt sich die Zahl der voll auftretenden Obertöne nicht so unmittelbar angeben. Nach Ritz<sup>1)</sup> erhält man auf der freien Saite, wenn man an der gewöhnlichen Streichstelle in  $\frac{1}{10}$  der Saitenlänge streicht, die ersten sieben Töne. Will man noch den achten Oberton erzielen, so muß man etwas näher am Steg, etwa in  $\frac{1}{11}$  der Saitenlänge streichen; streicht man noch näher am Steg, so verliert der Grundton an Stärke und der Klang wird schärfer, umgekehrt wird der Klang ärmer an Obertönen und damit sanfter, wenn man den Bogen dem Griffbrett nähert.

Wird die Saite durch den Fingerdruck verkürzt, so entstehen bei gleicher Höhe des Klanges weniger Obertöne, gleich hohe Klänge auf verschiedenen Saiten gespielt haben demnach eine verschiedene Zusammensetzung, der auf der höhern, also noch längern Saite angestrichene Klang ist der reichere.

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 142 u. 373.

2) *Ritz*, Untersuchungen über die Zusammensetzung der Klänge der Streichinstrumente. München 1883. Beiblätter zu den Annalen d. Physik 9 p. 91 1883.

Auf den Klang der Streichinstrumente hat die Art des Streichens einen großen Einfluß; jede Störung in der Bogenführung hat eine Diskontinuität in den Schwingungen und damit ein kratzendes Geräusch zur Folge; deshalb hängt bei keinem Instrument die Fülle und Reinheit des Klanges so sehr von der Geschicklichkeit des Spielers ab, als gerade bei den Streichinstrumenten.

Alle Saiteninstrumente bedürfen, um einen lauten und schönen Klang zu geben, eines Resonanzbodens, von dessen Güte hängt daher der Klang der Saiteninstrumente wesentlich ab, ein Umstand, auf den wir im nächsten Kapitel zurückkommen.

Für die transversalen Schwingungen elastischer Stäbe erhielten wir § 144 den Ausdruck

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Die Schwingungszahlen verhalten sich demnach bei zylindrischen Stäben direkt wie die Radien und umgekehrt wie die Quadrate der Längen; bei Stäben von rechteckigem Querschnitt tritt an die Stelle von  $r$  die durch  $\sqrt{3}$  dividierte Dicke der Stäbe parallel der Schwingungsrichtung, die Breite der Stäbe hat auf die Schwingungszahl keinen Einfluß.

Die Versuche von Savart über die absoluten Schwingungszahlen haben wir bereits § 144 angegeben, die Schwingungszahlen wurden durch die Höhen der gehörten Töne bestimmt.

Chladni<sup>1)</sup> hat die Tonhöhen der verschiedenen Töne bestimmt, wenn ein Stab in den verschiedenen Befestigungsweisen benutzt wurde, welche wir § 144 kennen lernten. Die Resultate Chladnis, welche vor Entwicklung der Theorie der schwingenden Stäbe erhalten wurden, entsprechen der Theorie so genau, wie es bei der Schwierigkeit die Töne in den höhern Lagen genau zu bestimmen nur möglich ist.

Wir geben die Resultate Chladnis in folgender Zusammenstellung, indem wir den tiefsten Ton, den der Stab gibt, wenn er am einen Ende fest, am andern frei ist, als Kontra- $c = c_-$ , setzen, zusammengestellt mit der Schwingungszahl der einzelnen Befestigungsweisen nach § 144.

1. Ein Ende des Stabes ist fest, das andere frei; Chladni gibt folgende Töne an:

	$c_-$	$gis$	$d_2$	$d_2 -$	$b_2$	$f_4 +$
Schwingungszahl	1	6,25	18	36 —	57,6	85,3 +
nach der Theorie	1	6,26	17,54	34,38	56,84	84,91.

2. Beide Enden des Stabes sind frei oder ganz fest; Chladni fand

	$gis$	$d_2$	$d_2 -$	$b_2$	$f_4 +$
Schwingungszahl	6,25	18	36 —	57,6	85,3 +
nach der Theorie	6,26	17,54	34,38	56,84	84,91.

3. Das eine Ende des Stabes ist aufgelegt, das andere Ende ganz frei oder fest.

	Beobachtet	$d$	$b_1$	$b_2 -$	$gis_2$	$dis_2$
Schwingungszahl		4,5	14,9	30 —	50	76,8
nach der Theorie		4,38	14,21	29,50	50,7	74,22.

1) Chladni, Akustik. p. 98.

## 4. Beide Enden des Stabes sind aufgelegt.

Beobachtet	$f_{is-}$	$f_{is}$	$g_{is}$	$f_{is}$	$d_s$
Schwingungszahl	2,84	11,36	25,00	45,44	72
nach der Theorie	2,807	11,23	25,26	44,91	70,57.

Die Klänge elastischer Stäbe werden selten in der Musik angewandt; es gibt außer den später zu betrachtenden Zungenpfeifen nur einige wenige in der Orchestermusik nicht gebräuchliche Instrumente, deren Töne durch transversale Schwingungen elastischer Stäbe erzeugt werden. Die Unbrauchbarkeit dieser Klänge für die Bildung harmonischer Klänge ergibt sich daraus, daß die Obertöne fast sämtlich nicht der harmonischen Reihe des Grundtones angehören, sie müssen deshalb die Akkorde, in denen sie gebraucht werden, dissonierend machen.

Angewandt werden die Schwingungen an einem Ende fester, am andern freier Stäbe in der Eisenvioline, welche aus eisernen Stiften besteht, die in einem halbkreisförmigen Steg auf einem Resonanzboden eingeschlagen sind und mit dem Violinbogen gestrichen werden. An beiden Enden freie Stäbe läßt man in der Strohfidel schwingen. Dieselbe besteht aus Stäben oder schmalen Streifen von Holz, Glas oder Stahl, die an ihren beiden Schwingungsknoten, welche bei dem tiefsten Tone auftreten, auf zusammengedrehtes Stroh oder andere weiche Unterlagen gelegt und mittels zweier Klöppel angeschlagen werden. Man erhält in beiden Fällen wesentlich nur den tiefsten Ton. In der Mozartschen Oper „Die Zauberflöte“ wird gewöhnlich eine Strohfidel als Glockenspiel des Papageno angewandt.<sup>1)</sup>

Die wichtigste Verwendung finden die Schwingungen von Stäben in den Stimmgabeln. Die Stimmgabel schwingt mit jeder Zinke wie ein an seinem einen Ende fester, an seinem andern Ende freier Stab. Bei nicht zu kurzen Zinken kann man nach den Untersuchungen von Mercadier<sup>2)</sup> und einer von Rüber<sup>3)</sup> zu denselben gemachten Bemerkung die Schwingungszahlen der Stimmgabeln nach der Gleichung für die Schwingungen der an einem Ende festen, am andern Ende freien schwingenden Stäbe berechnen, wenn als Länge der Zinken die Projektion derselben auf die Achse der Gabel, die Verlängerung des Stiles genommen wird. Nach der Formel von Seebeck ist in dem Falle die Schwingungszahl

$$N = \frac{(0,59686)^2 \pi}{4 \cdot \sqrt{3}} \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{s}},$$

wenn  $h$  die Dicke der Gabel parallel der Schwingungsrichtung bedeutet und  $E$  und  $s$  im absoluten Maßsystem gegeben sind. Setzt man nach Wertheim

$$\sqrt{\frac{E}{s}} = 498500 \text{ cm},$$

so wird, wenn die Dimensionen der Gabel in Zentimetern gegeben sind,

$$N = 80528 \frac{h}{l^2}.$$

1) Chladni, Akustik. p. 98.

2) Mercadier, Comptes Rendus. 79. p. 1001 u. 1079 1874.

3) Rüber in dem Referate über die Arbeit von Mercadier in Fortschritte der Physik im Jahr 1874. p. 387.

Ganz genaue Werte kann man hier nicht erwarten, da die Elastizität und Dichtigkeit des zu den Gabeln verwandten Stahls nicht immer die gleichen sind.

Die Stimmgabeln geben in der Nähe der Enden der Zinken angestrichen wesentlich nur den Grundton, sie sind deshalb sehr geeignet, einfache Töne zu erzeugen; Helmholtz hat dieselben, verbunden mit einem Resonator, deshalb vorzugsweise zu diesem Zwecke verwandt, besonders weil man in dieser Weise am leichtesten alle Nebengeräusche vermeidet.

Die Töne schwingender Platten und Glocken finden in der Musik ebenfalls nur wenig Anwendung; die Töne schwingender Platten werden neuerdings in der Militärmusik gebraucht, indem eine Anzahl kleiner Stahlplatten auf einem Gestell in ihrer Mitte befestigt, mit einem elastischen Hammer geschlagen werden. Die Töne gespannter Membranen finden Anwendung bei den Trommeln und Pauken. Die Membranen werden auf größere Hohlräume gespannt, wie bei der Pauke über dem Kessel, teils um den Ton lauter zu machen, teils um das Auftreten der unharmonischen Obertöne zu verhindern. Damit erhält der Paukenklang das Dampfe eines einfachen Tones.

Die Töne von Platten hat Chladni<sup>1)</sup> sehr ausführlich untersucht, er fand, daß jedem andern Tone eine andere Teilungsart der Platte entspricht, nicht aber jeder andern Teilungsart auch ein anderer Ton; oder zwei verschiedene Töne geben nie dieselbe Klangfigur, einem Tone können aber mehrere Klangfiguren entsprechen.

Speziellere Resultate hier anzugeben ist nicht erforderlich, da wir bereits § 145 für kreisförmige Platten die Schwingungszahlen angegeben und mit der Theorie von Kirchhoff verglichen haben; die Schwingungszahlen sind aus Chladnis und Strehlkes Beobachtungen der Töne, die bei den verschiedenen Klangfiguren entstehen, abgeleitet. So fand Chladni z. B. bei der Figur mit zwei Durchmessern den tiefsten Ton, trat ein Kreis hinzu so stieg der Ton auf die Quint der zweiten Oktave mit der Schwingungszahl 6, bei zwei Kreisen auf das *b* der folgenden Oktave mit der Schwingungszahl 14,4 usf.

Bei quadratischen Scheiben sind die Töne andere; Chladni gibt ebenfalls eine vollständige Tabelle derselben. Der tiefste Ton entspricht dem auf den Quadratseiten senkrechten Kreuz, das diagonale Kreuz gibt dessen Quint usf.

Melde<sup>2)</sup> konstruierte quadratische Platten, die in der Mitte auf einem Stiel befestigt waren, als Ersatz für Stimmgabeln mit hohen Schwingungszahlen. Sind die Töne so hoch, daß sie nicht mehr gehört werden, so kann man mit Sandfiguren stets ohne Schwierigkeit das Schwingen beweisen. Am besten werden solche Platten durch Bestreichen mit einem feuchten Glasstabe nach der Antolikschen<sup>3)</sup> Methode zum Schwingen gebracht.

Die Töne drehender Schwingungen werden akustisch nie verwendet, ihre Verwendung zur Bestimmung des Wertes von  $\mu$  haben wir schon § 146 erwähnt; die Bestimmung der Schwingungszahl der drehenden Schwingungen

1) Chladni, Akustik. p. 98.

2) Melde, Wied. Ann. 66. p. 767. 1898.

3) Man sehe Melde, Wied. Ann. 51. p. 682. 1894.

geschah durch Vergleichung des Torsionstones mit dem Longitudinalton; Chladni schätzte den Torsionston eine Quinte, Savart eine Sexte tiefer, Wertheim bestimmte ihn eine kleine Sexte tiefer, also zwischen Chladni und Savart.

## § 166.

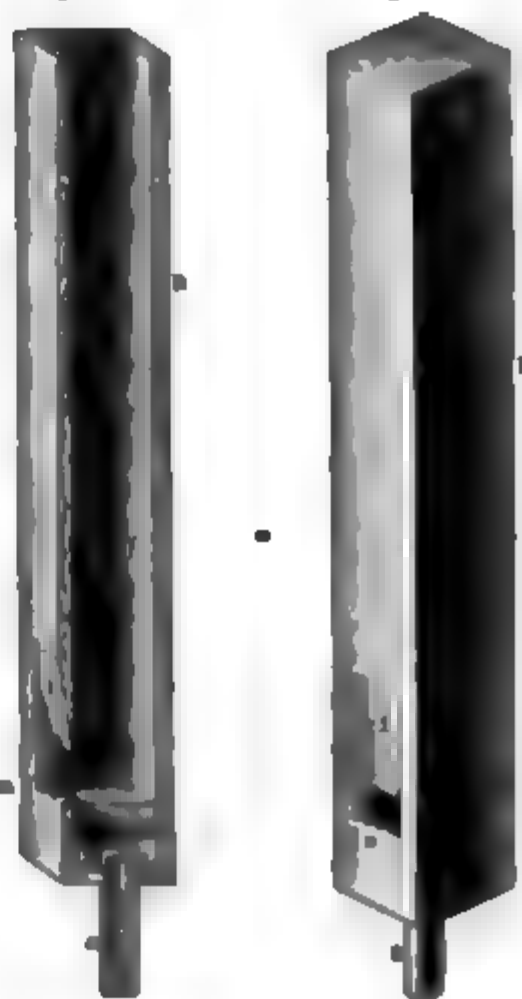
**Töne durch Schwingungen luftförmiger Körper.** Eine Art Ton-erzeugung durch Schwingungen luftförmiger oder flüssiger Körper haben wir bei Betrachtung der Sirene kennen gelernt. Von viel höherer Bedeutung sind aber die Töne, welche durch stehende Schwingungen von Luftsäulen erregt werden. Die größte Zahl der Blasinstrumente und die meisten Register der Orgel erzeugen ihre Töne auf diese Weise. Als Typus der Blasinstrumente können wir die Orgelpfeifen betrachten und an diesen die Bildung und die Reihe der Töne untersuchen.

Die Orgelpfeifen zerfallen in zwei Klassen, die Labialpfeifen und die Zungenpfeifen. In ersteren wird die schwingende Bewegung nur durch einen Luftstrom bewirkt ohne Zuhilfenahme eines festen Körpers, der Ton ist daher nur von der schwingenden Luftsäule abhängig; letztere sind eine Kombination elastischer Streifen und schwingender Luftsäulen, ihr Ton wird durch beide Schwingungsarten bedingt; wir werden sie demnächst besonders betrachten.

Die Labialpfeifen (Fig 301 und 302) bestehen aus einem Fuße *a*, welcher auf die Mündung eines Windkastens gesetzt wird und durch welchen der Luftstrom in den Raum *b* unter der Bodenplatte der Röhre eintritt. Die Bodenplatte läßt an der Seitenwand einen Spalt, durch welchen der Luftstrom austritt, um sich an der obern Lippe *l*, welche die in der Seitenwand gelassene Mundspalte *m* nach oben begrenzt, zu teilen. Durch den teilweise in die Röhre dringenden Luftstrom wird die in der Röhre zunächst über der Mundspalte befindliche Luft nach oben getrieben, und verdichtet. Diese Verdichtung bewirkt, daß die Luft nicht mehr in die Röhre eindringt, sondern nur vorbeistreicht, dadurch dehnt sich die vorher verdichtete Luft wieder aus und kehrt nach unten zurück, worauf dann neue Luft in die Röhre dringt und eine neue Verdichtung veranlaßt. Die Luft erhält also zunächst an der Mundspalte eine hin und her gehende Bewegung. Diese pflanzt sich in der Luftsäule der Röhre fort und wird an der obern Grenze reflektiert. Durch diese in entgegengesetzter Richtung in der Röhre sich fortpflanzenden Bewegungen wird die Luftsäule der Röhre in stehende Schwingungen versetzt und gibt einen Ton, der ver-

Fig. 301

Fig. 302



schieden ist nach der Länge der Röhre und nach der Art des Verschlusses an der obern Grenze.<sup>1)</sup>

Die Schwingungen der Luft in der Röhre  $R$  sind longitudinale Schwingungen; ist die Pfeife gedeckt (Fig. 302), so tritt an der obern Grenze eine Reflexion derselben mit Änderung des Vorzeichens ein, der ankommende Wellenberg wird als Wellental reflektiert und das dem ankommenden Berge folgende Wellental als Wellenberg. Gerade wie bei den longitudinal schwingenden, an einem Ende festen, am andern Ende freien Stäben wird daher die ganze Luftsäule zugleich hin und her schwingen können, wenn die Impulse an der Lippe sich so folgen oder die Schwingungsdauer  $T$  so ist, daß der Wellenberg bis zur Wand sich fortgepflanzt hat, während die Luftschicht bei  $l \frac{1}{4}$  Schwingung zurückgelegt hat. Es entsteht dann nach § 150 eine stehende Welle, deren Länge gleich ist dem Doppelten der Röhrenlänge. Da die stehende Welle halb so lang ist als eine gleichzeitig schwingende fortschreitende Welle, so ist die Länge der Pfeife gleich einem Viertel der gleichzeitig schwingenden fortschreitenden Welle. Bezeichnen wir daher die Länge der Röhre mit  $l$ , so wird die Schwingungsdauer dieser Welle

$$T = 4l \sqrt{\frac{d}{e}},$$

oder wenn wir nach § 149 die Werte für  $d$  und  $e$  einführen,

$$T = 4l \sqrt{\frac{s}{H\sigma gk}},$$

worin  $H$  die Höhe des Barometers in Zentimetern,  $\sigma$  die Dichtigkeit des Quecksilbers,  $s$  die dem Drucke  $H\sigma g$  entsprechende Dichtigkeit der Luft und  $k = 1,405$  den konstanten Koeffizienten bedeutet, mit dem wir den Quotienten  $\frac{e}{d}$  multiplizieren mußten, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung zu erhalten.

Für die Schwingungszahl erhalten wir demnach

$$N = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{H\sigma g}{s}} k = \frac{c}{4l}.$$

Daß der Schwingungsvorgang in einer gedeckten Pfeife der hier geschilderte ist, hat Raps<sup>2)</sup> in sehr eleganter Weise durch manometrische Beobachtungen der Druckschwankungen im Knoten, also in der Nähe des geschlossenen Endes der Pfeife gezeigt.

Die Druckschwankungen in den Knoten zu messen, das heißt den Maximal- und Minimaldruck anzugeben, hat zuerst Kundt<sup>3)</sup> versucht. So lange die Luft gegen den Deckel der Pfeife hin schwingt, tritt am Deckel

1) Über die Erregung der Schwingungen in Orgelpfeifen sehe man *Sourct*, Poggend. Ann. 158. 1876; *Strouhal*, Wiedem. Ann. 5. 1878; *Brockmann*, Wiedem. Ann. 31. p. 78. 1888; *V. Hensen*, Ann. d. Phys. 2. p. 719. 1900 u. 4. p. 41. 1901; *Wilh. Friedrich*, Dissert. Rostock 1901 u. Ann. d. Phys. 7. p. 97. 1902.

2) *Raps*, Wiedem. Ann. 36. p. 273. 1889.

3) *Kundt*, Poggend. Ann. 134. p. 563. 1868. Nach einer optischen in der Lehre vom Licht zu besprechenden Methode haben *Töpler* und *Bohrmann*, Poggend. Ann. 141. p. 321. 1870, ebenfalls die Schwankungen der Dichtigkeit in Orgelpfeifen gemessen.



eine Verdichtung der Luft ein, welche ihr Maximum erreicht, wenn die Luftteilchen ihre Bewegung umkehren. Von da ab verdünnt sich die Luft und zwar so lange als die schwingenden Luftteilchen sich von dem Deckel entfernen. Die Verdünnung erreicht ihren höchsten Grad, wenn die Luftteilchen wieder den Sinn ihrer Bewegung ändern.

Kundt brachte an den Enden einer gedeckten Pfeife zwei sehr sorgfältig gearbeitete Blasenventile an, von denen sich das eine nur nach außen, das andere nur nach dem Innern der Pfeife öffnen konnte. Die Ventile bestehen aus einer 1<sup>mm</sup> breiten und passend langen in ein Metallblech eingeschnittenen Spalte, über welche eine 4<sup>mm</sup> breite, möglichst dünne, leicht bewegliche Membran gespannt ist, die an beiden Enden auf der Platte festgeklebt ist. Die Membran hebt sich, dem stärkern Drucke folgend, nach der Seite des geringern Drucks hin. Um ein solches Ventil etwa an eine gedeckte Orgelpfeife anzubringen, kann man direkt den Deckel der Pfeife benutzen. Man versieht das Ende einer etwa gläsernen Orgelpfeife mit einer oben abgeschliffenen Metallfassung, welche auf der äußern Seite eine Schraube eingeschnitten hat. Auf den Rand der Fassung legt man die Ventilplatte und auf diese eine mit einem schmalen vorstehenden Rande versehene Messingplatte, in welche ein Wassermanometer eingekittet ist. Mit einer in die Schraube der Fassung passenden Überwurfschraube werden die Platten luftdicht aneinander geschraubt. Ist das Ventil so gelegt, daß seine Membran von der Pfeife aus nach außen gerichtet ist, so öffnet es sich, wenn der Druck in der Pfeife größer ist als außen. Das Wassermanometer wird also so lange steigen, bis der Druck oberhalb des Ventils gleich ist dem Maximaldruck in der Pfeife. Wird die Ventilplatte umgelegt, so daß die Membran im Innern der Pfeife ist, so öffnet sich das Ventil, so lange der Druck im Innern der Pfeife kleiner ist, als außerhalb; auf der dem Ventil zugekehrten Seite des Manometers wird demnach die Luft verdünnt, das Manometer steigt nach Innen und die Differenz der Wassersäulen in den beiden Schenkeln des Manometers gibt den Überschuß des äußern Luftdruckes über die Verdünnung in den Knoten der schwingenden Luftsäule. Kundt konnte auf diese Weise erkennen, daß die Druckschwankungen in Knoten 20–25<sup>cm</sup> Wasser, also  $\frac{1}{50} - \frac{1}{40}$  Atmosphären war.

Raps hat das Ventil in anderer Weise hergestellt und so angeordnet, daß er die Druckänderung in den Knoten in allen ihren Phasen verfolgen und aufzeichnen konnte. Das Ventil bestand aus zwei sorgfältig polierten Platten von glashartem Stahl, von denen die eine fest vor der Durchbohrung der Wand der Pfeife, in welcher die Schwingungen beobachtet werden sollten, angebracht war. Beide Platten hatten in der Mitte Spalten eingefraist von 0,75<sup>mm</sup> Breite und 1<sup>mm</sup> Länge. Die zweite Platte war an einer Stimmgabel befestigt, so daß ihre Ebene der Schwingungsebene der Gabel parallel war. Die beiden Platten konnten einander so gegenübergestellt und genähert werden, daß die bewegliche Platte als Schieber an der festen auf- und niederging und daß die beiden Platten einen luftdichten Verschuß der Orgelpfeife bildeten, außer in der kleinen Zeit, während welcher bei Schwingungen der Stimmgabel der Spalt der beweglichen Platte an dem ihm parallel stehenden Spalte der festen Platte vorüber passierte. Zur vollständigen Abdichtung der Pfeife wurde zwischen die beiden Platten ein Tropfen Steinöl gebracht.



Von der Rückseite der an der Stimmgabel befestigten Platte führte eine zunächst mit der Stimmgabel bis in der Nähe deren Stiel festverbundene Röhre zu den manometrischen Apparaten, einem Wassermanometer oder einem Membranmanometer. Letzteres bestand aus einer über einen kleinen Hohlraum, welcher mit dem Ventil in Verbindung stand, gespannten feinen Membran, auf deren Mitte ein Metallplättchen aufgeklebt war. Auf diesem Plättchen stand eine feine Stahlspitze, welche an einem Hebel angesetzt war, der seine Drehungsachse in der Schneide eines Stahlprismas hatte, das in einem passenden neben der Membran befestigten Lager lag. Wenn der Druck in dem Hohlraum unter der Membran zunimmt, so wird der Stiel gehoben und der Hebel in dem einen Sinne gedreht, sinkt der Druck, so dreht sich der Hebel im entgegengesetzten Sinne. Die Größe der Drehung wurde durch Spiegelablesung bestimmt, indem an dem Stahlprisma ein kleiner Spiegel angebracht war, so daß die Spiegelebene vertikal und parallel der Achse der Drehung war. Ebenso aber konnte auch die Bewegung der Membran aufgezeichnet werden, indem an der Achse ein leichter aus gespaltenem Riet verfertigter langer Hebel befestigt wurde, dessen Spitze die Bewegung der Membran auf einer berußten rotierenden Trommel aufzeichnete. Zu dem Zwecke war auf die Trommel berußtes photographisches Papier gespannt, durch Einwirkung des Lichtes auf diejenigen Stellen, an denen der Schreibstift den Ruß weggenommen hatte, wurden die von denselben gezogenen Linien fixiert.

Welcher Druck einer bestimmten Hebung der Membran entsprach, wurde empirisch durch Vergleichung mit dem Wassermanometer festgestellt.

Auf die Details des äußerst delikaten, mit großem Geschick hergestellten Apparates können wir hier nicht eingehen, wir verweisen deswegen auf die Abhandlung von Raps.

Die etwas regulierbare Stimmgabel, welche den Schieber bewegte, machte halb so viel Schwingungen als die Luft der Pfeife, und der Schieber war so gestellt, daß in der Gleichgewichtslage die Spalte sich deckte. War die Gabel in Schwingung, so gingen demnach die Spalte jedesmal aneinander vorüber, wenn die Luft der Pfeife wieder eine ganze Schwingung gemacht hatte. Die Öffnung des Ventils dauerte so lange, als der bewegliche Schieber zwei Spaltbreiten durchließ; bei den großen Amplituden, welche Raps der Stimmgabel gab, war die Dauer der Öffnung  $\frac{1}{2}$  der Dauer der Luftschwingung.

Nehmen wir zunächst an, die Schwingungen der Stimmgabel seien genau halb so zahlreich wie die Schwingungen in der Pfeife, und die Spalte deckten sich genau in dem Momente, in welchem im Knoten das Maximum der Dichte ist; es wird dann jedesmal, wenn die Luft im Knoten das Maximum der Dichte hat, der Knoten mit dem Manometer in Verbindung gesetzt, das Manometer zeigt das Maximum der Dichte an. Während gegen die Spalte jedesmal aneinander vorüber gehen, wenn im Knoten das Minimum der Dichte ist, so würde aus dem Manometer Luft in die Pfeife entweichen, das Manometer zeigte das Minimum der Dichte.

Gibt man dagegen der Stimmgabel eine Schwingungszahl, welche klein wenig größer ist als die halbe Schwingungszahl der Pfeife, so gehen wir wieder davon aus, daß bei dem ersten Öffnen der Spalte das Manometer gerade der Maximaldruck entsteht, so werden die Spalte

zweiten mal geöffnet, wenn im Knoten die Dichtigkeit schon ein wenig abgenommen hat, der Druck im Manometer wird diese kleinere Dichtigkeit zeigen; bei der dritten Öffnung der Spalte ist die Dichtigkeit wieder etwas kleiner usf. bis zu dem Augenblicke, wo die Gabel ein Viertel ihrer Schwingung zurückgeblieben ist, die Öffnung der Spalte gerade eintritt, wenn im Knoten das Minimum der Dichte ist. Bleibt von da ab die Stimmgabel immer im selben Takte zurück, so öffnen sich die Spalte wieder bei wachsender Dichte, und ist die Gabel eine halbe Gabelschwingung gegen die Schwingungen der Pfeife zurück, so öffnen sich die Spalte, wenn in dem Knoten das Maximum der Dichte ist. Kurz man sieht, daß innerhalb der Zeit, in welcher die Gabel um eine halbe ihrer Schwingungen gegen die Schwingungen der Pfeife zurückbleibt, in dem Manometer alle die Dichtigkeiten nach und nach auftreten, die sich im Knoten der Pfeife bei jeder Schwingung der Luft wiederholen. Innerhalb dieser Zeit schreibt also der Hebel des Membranmanometers eine Welle, welche genau die Dichtigkeitschwankungen im Knoten darstellt; die Länge der Welle hängt bei gegebener Geschwindigkeit der beruhten Walze nur von der Zeit ab, in welcher die Anzahl der halben Schwingungen der Gabel um eine größer ist als die Anzahl der ganzen Schwingungen in der Pfeife. Die Form der Welle gibt genau das Schwingungsgesetz der Luft in der Pfeife. Das Maximum der Dichte tritt ein, wenn in dem nächsten Bauche die Luft den größten Abstand von der Gleichgewichtslage gegen den Knoten hin erreicht hat; schwingt die Luft zurück, so nimmt die Dichtigkeit im Knoten genau in dem Maße ab, wie die Luftteilchen gegen die Gleichgewichtslage zurück und darüber hinaus zu der andern äußersten Lage hinüber gehen, so daß das Minimum im Knoten nach einer halben Schwingung der Luft dem Maximum folgt, ebenso geht im Laufe einer halben Schwingung das Minimum wieder in das Maximum über.

In dieser Weise fand Raps zunächst, daß in einer gedeckten Pfeife von 360<sup>mm</sup> Länge und 45 · 65 mm<sup>2</sup> Querschnitt, in welcher die Mundöffnung 22<sup>mm</sup> Höhe hatte, welche einen Ton von 184 Schwingungen gab, die Druckunterschiede im Knoten wesentlich von der Stärke des Anblasestroms abhängig sind. Als der Druck der Luft in der Windlade um 41<sup>mm</sup> Wasserhöhe mehr als der der Atmosphäre betrug, zeigte sich im Knoten bei dem Maximum ein um 40<sup>mm</sup> höherer, bei dem Minimum ein um 39,75<sup>mm</sup> geringerer Druck als der Druck der Atmosphäre. Als der Druck des Anblasestromes auf 308<sup>mm</sup> gesteigert wurde, war im Knoten der Druck im Maximum 182,4<sup>mm</sup> Wasserdruck größer, im Minimum 177,3<sup>mm</sup> kleiner als der der Atmosphäre. Da der Druck der Atmosphäre im Millimeter Wasser gleich 10333<sup>mm</sup> beträgt, so war die Druckdifferenz im ersten Falle

$$\frac{79,75}{10333} = 0,00771 \text{ Atm.}, \text{ im zweiten Falle } \frac{39,7}{10333} = 0,00384 \text{ Atm}$$

Die dieser Druckdifferenz entsprechende Dichtigkeitsdifferenz, die Dichte der Luft unter dem Drucke der Atmosphäre gleich eins gesetzt, erhalten wir, indem wir die Druckdifferenz durch den Faktor  $k = 1,405$  dividieren, da nach dem frühern wegen der mit der Verdichtung stattfindenden Erwärmung und der Abkühlung bei der Verdünnung die Druckdifferenz größer ist, als sie der Dichtigkeitsdifferenz entspricht.

Die Dichtigkeitsdifferenz wird demnach im ersten Falle 0,00547, im zweiten Falle 0,02469, das heißt im ersten Falle ist das Maximum der Dichte 1,002735 und das Minimum 0,997265, im zweiten Falle sind die Werte 1,012345 und 0,987655.

Diese Zahlen genügen, um die Bewegung in der Pfeife vollständig darzustellen. Rechnen wir die Abstände  $x$  vom Knoten aus, so ist die Bewegung einer vom Knoten aus um  $x$  entfernten Luftschicht gegeben durch

$$y = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wenn  $a$  die Amplitude,  $\lambda$  die Länge einer ganzen Welle und  $T$  die Schwingungsdauer ist.

Die Zunahme bzw. Abnahme der Dichtigkeit an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  infolge der schwingenden Bewegung erhalten wir durch folgende Erwägung. Ist  $dx$  der Abstand zweier Luftschichten in der Gleichgewichtslage, und ist  $y$  die Verschiebung der Luftschicht an der betrachteten Stelle.  $y + dy$  die Verschiebung der folgenden Schicht, so ist der Abstand der beiden Schichten gleich  $dx + dy$ . Der Abstand der beiden Schichten ist also im Verhältnis von  $dx + dy$  zu  $dx$  größer geworden; in diesem Verhältnisse hat somit die Dichtigkeit abgenommen, oder sie ist, wenn wir die Dichte im Ruhezustande gleich eins setzen,

$$\frac{dx}{dx + dy} = \frac{1}{1 + \frac{dy}{dx}} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

geworden. Dieselbe wird demnach

$$1 - \frac{dy}{dx} = 1 - a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Im Knoten ist  $x = 0$ ; im Knoten war der Unterschied im Maximum oder Minimum also zur Zeit  $t = \frac{T}{4}$  oder  $t = 3 \frac{T}{4}$  im ersten Falle gegen die normale Dichte 0,002735, wir erhalten demnach

$$0,002735 = a \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Nehmen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich 340000<sup>mm</sup>, so ist die Wellenlänge für 184 Schwingungen in der Sekunde rund 1850<sup>mm</sup>. somit wird

$$a = 0,805^{\text{mm}}.$$

Da  $a$  nach der Gleichung für  $y$  die Amplitude im Schwingungsmaximum bedeutet, so würde die Amplitude der Luftteilchen dort 0,805<sup>mm</sup> oder die ganze Bahn der Luftteilchen 1,61<sup>mm</sup> sein. Im zweiten Falle ergibt sich der Wert  $a = 3,632$ , so daß für diesen die Bahn der Luftteilchen 7,264<sup>mm</sup> an der Stelle des Maximums wäre.

Indem Raps weiter die aufgezeichneten Schwingungen genau untersuchte, konnte er an den Wellen bei nicht zu starkem Anblasestrom erkennen, daß sie genau der Sinussoide entsprachen, daß somit der Überschub der Dichtigkeit im Knoten über die normale durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{2\pi}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt wurde, also genau der Theorie entsprach.

Da das Labialende der Röhre die Stelle ist, wo die Bewegung erzeugt wird, so kann, da an dem gedeckten Ende immer ein Schwingungsknoten entstehen muß, in der Röhre keine stehende Schwingung bestehen, deren Länge gleich ist der Länge der Röhre, indem dann in jedem Augenblicke die reflektierte Bewegung die neu erregte vernichten würde. Lassen wir durch stärkeres Blasen in dem Fuße der Röhre die Impulse bei  $m$  rascher aufeinander folgen, so wird keine stehende Schwingung entstehen können, wenn sich die Bewegung bis zur obern Wand fortgepflanzt hat, während die erste Schicht eine halbe Schwingung zurückgelegt hat, wenn sich also zugleich von der Wand und von dem Labium Wellentäler und Wellenberge in der Röhre fortpflanzen, da dann eine stehende Welle sich bilden würde von der Länge der Röhre, an dem Labium somit ein Schwingungsknoten, ein Ort immerwährender Ruhe entstünde.

Folgen sich aber die Impulse so rasch aufeinander, daß die schwingende Bewegung erst dann den Boden der Röhre erreicht hat, wenn die erste Schicht  $\frac{1}{2}$  ihrer Schwingung zurückgelegt hat, so daß also zugleich von der festen Wand ein Wellenberg, von dem Labium die zweite Hälfte eines Wellentals sich fortpflanzt, so bilden sich stehende Wellen, deren Länge  $\frac{3}{4}$  von der Röhrenlänge betragen, in der Röhre bildet sich  $\frac{1}{4}$  der Länge vom Labium entfernt ein Schwingungsknoten und an dem Labium befindet sich die Mitte einer stehenden Welle, ein Schwingungsmaximum. Die Schwingungsdauer dieser Welle wird

$$T = \frac{4}{3} l \cdot \frac{1}{c}$$

und die Schwingungszahl

$$N = 3 \frac{c}{4l}.$$

Weiter können Schwingungen in der Röhre stehende werden, deren Wellenlänge  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{6}{7}$ ,  $\frac{8}{9}$  von der Länge der Röhre beträgt, aus denen also durch die Interferenz der eintretenden und der reflektierten Bewegung stehende Wellen von der Länge

$$\frac{2}{3} l, \frac{2}{7} l, \frac{2}{9} l \dots$$

entstehen. Die Schwingungszahlen dieser Wellen sind

$$N = 5 \frac{c}{4l}, 7 \frac{c}{4l}, 9 \frac{c}{4l}.$$

oder allgemein, es können sich in der Röhre stehende Wellen bilden mit der Schwingungszahl

$$N = (2n - 1) \cdot \frac{c}{4l},$$

worin  $n$  jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann.

Ist somit der Grundton der Röhre  $c_{-1}$ , so sind die Töne, welche wir mit dieser Röhre erhalten können,

$$\begin{array}{ccccc} c_{-1} & g & c_1 & b_1 & d_2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9. \end{array}$$

Man kann sich leicht von der annähernden Richtigkeit dieser Folgerungen überzeugen. Denn bläst man eine gedeckte Pfeife nur schwach an, so erhält man den tiefsten Ton, den sie geben kann, bläst man stärker, so erhält man nahe die Quint der nächsthöheren Oktave, weiter nahe die Terz der folgenden Oktave usf., wie es die Entwicklung der Schwingungsgesetze verlangt.

Die Grundtöne, welche verschieden lange Pfeifen geben, hängen von der Länge der Pfeife ab, und zwar sind nach den obigen Rechnungen sowohl, wie nach der Erfahrung die Schwingungszahlen der Länge der Pfeife umgekehrt proportional. Man kann daher leicht durch Herstellen einer Pfeifenreihe von verschiedener Länge sich die ganze Tonleiter mit allen ihren Tönen verschaffen.

Indes findet man, daß in diesem Falle sich die Töne nicht genau umgekehrt, wie die Längen der Pfeifen verhalten, daß je nach der Gestalt und Größe des Mundlochs und des Querschnittes der Pfeife die Töne mehr oder weniger von der Theorie abweichen. Noch deutlicher tritt das hervor, wenn man den Ton theoretisch berechnet, den die Pfeife bei gegebener Länge geben soll. Nach § 149 ist

$$\sqrt{\frac{H\sigma g}{s}} k = 331\,80^{\text{cm}} = 331,8^{\text{m}},$$

vorausgesetzt, daß die Luft eine Temperatur von  $0^{\circ}$  hat. Für die Temperatur von  $20^{\circ}$  wird der Wert  $343,74^{\text{m}}$ . Wir wollen annehmen, wir beobachten in einem Raum von  $20^{\circ}\text{C}$ .

Ist daher die Länge der Röhre in Metern angegeben  $= l$ , so soll der Ton der Röhre eine Schwingungszahl haben

$$N = \frac{343,74}{4l}.$$

Der Versuch gibt aber stets einen etwas tiefern Ton, dessen Schwingungszahl

$$N = \frac{343,74}{4(l+x)}.$$

Liscovius<sup>1)</sup> hat nachgewiesen, daß unter übrigens gleichen Umständen die Vertiefung des Tones mit der Weite der Röhre zunimmt, und Wertheim<sup>2)</sup> hat gefunden, daß die Größe  $x$  bei gleichgearbeitetem Mundstücke dem Durchmesser der Pfeife proportional, bei gleichem Mundstück und gleichem Durchmesser aber von der Länge der Pfeife unabhängig sei. Der Einfluß auf die Tonhöhe ist daher um so größer, je kleiner  $l$  ist. Ferner ist von wesentlichem Einflusse Form und Größe des Mundstückes.

Diese Angaben über die Umstände, welche die Größe  $x$  beeinflussen, geben uns Aufschluß über die Ursache der Abweichung der beobachteten Töne von der Theorie.

Die theoretische Entwicklung setzt nämlich voraus, daß die ganze untere Schicht zugleich in Vibrationen gerate, und sich die Schwingungen einfach von Schicht zu Schicht fortpflanzen, ferner daß die Pfeife an ihrem

1) *Liscovius*, Poggend. Ann. 58. 1843 u. 60. 1843.

2) *Wertheim*, Ann. de chim. et de phys. 23. (3.) 1848. Poggend. Ann. 77. 1842.

untern Ende ganz offen sei. Beides ist nicht der Fall, da der Luftstrom zunächst nur die in der Nähe der Lippe liegenden Teile der nächsten Schicht nach oben hin treibt, und dann erst die entfernteren in Schwingung versetzt, und da andererseits die Mundspalte die Pfeife unten nur teilweise öffnet. Durch letzteren Umstand treten auch am Boden der Pfeife partielle Reflexionen ein, welche bewirken, daß sich nicht gerade am Boden der Pfeife das Schwingungsmaximum bildet und daß deshalb der erste Knoten nicht genau um  $\frac{1}{4}L$ , wenn wir mit  $L$  die Wellenlänge der schwingenden Bewegung bezeichnen, von der Mundspalte entfernt ist, sondern um etwas weniger, oder mit anderen Worten, daß die beim Grundton sich bildende Welle nicht genau gleich dem Vierfachen der Pfeifenlänge ist, sondern etwas länger.

Experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Auffassung lassen sich in mancher Weise geben, zunächst durch Anwendung einer gedeckten Pfeife, welche an Stelle des festen Deckels einen verschiebbaren Stempel hat. Bringt man bei einer solchen Pfeife von der Länge  $l$  etwa den vierten Ton, welcher der Schwingungszahl

$$N = 7 \frac{c}{4(l+x)}$$

entspricht, hervor, so zerfällt die Luftsäule theoretisch in 3 halbe und  $\frac{1}{4}$  Welle, das heißt es bilden sich drei und eine halbe stehende Welle aus. Schiebt man nun den Stempel um zwei Siebentel der Länge  $l+x$ , also um eine stehende Welle näher zur Mundöffnung, so erhält man eine Pfeife, für welche der dritte Ton genau die gleiche Höhe hat, wie für die Pfeife in ihrer ursprünglichen Länge der vierte Ton; verkürzt man die Pfeife nochmals um  $\frac{2}{7}(l+x)$ , so ist der zweite Ton dieser Pfeife, und verkürzt man nochmals um  $\frac{2}{7}(l+x)$ , so ist der Grundton der so verkürzten Pfeife dem frühern Tone gleich. Der Versuch ergibt das in der Tat, ein Beweis, daß die Wellenlänge des Grundtones mehr als das vierfache der Pfeifenlänge ist, daß sich aber die Obertöne in der Pfeife in der normalen Wellenlänge bilden. Die Störung findet also in der Tat nur am Mundstücke statt.<sup>1)</sup>

Dulong<sup>2)</sup> wandte dieses Verfahren an, um die Größe  $x$  experimentell zu bestimmen: er erzeugte in einer mit Stempel versehenen Pfeife den vierten Ton und schob den Stempel so weit herunter, daß der dritte Ton der verkürzten Pfeife dem vorher gehörten genau gleich wurde; er erhielt in dieser Verschiebung den Wert  $l+x$ , also die Länge der diesen Ton erzeugenden Welle. Dulong benutzte diese Versuche um die Größe  $c$ , die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles zu messen

Wertheim<sup>3)</sup> wandte zur Messung von  $x$  ein anderes Verfahren an. Er nahm zylindrische Pfeifen, die aus mehreren Stücken zusammengesetzt waren, welche mittelst Schrauben aneinander befestigt werden konnten

1) Hopkins, Transactions of the Cambridge philosophical Society 5 1835 Poggend Ann 44 p. 246 u. 603 1838.

2) Dulong, Ann de chim. et de phys 41. 1829 Poggend Ann. 16 p 438 1829

3) Wertheim, Ann de chim et de phys 23. 3 p 434 Poggend. Ann 77 p 427 u 544 1849



(Fig. 303). Der Deckel *k* war mit einem gleichen Schraubengewinde versehen, um jedes Stück der Pfeife gedeckt machen zu können. Auf diese Weise stellte Wertheim Pfeifen her, welche bei genau gleicher Weite und demselben Mundstück verschiedene Längen hatten.

Fig. 303.



Wurde die Pfeife bei einer Länge  $L_1$  zum Tönen gebracht, so hatte der erste Ton die Schwingungszahl

$$N_1 = \frac{c}{4(L_1 + x)};$$

wurde durch Ansatz eines Stückes ihr die Länge  $L_2$  gegeben, so wurde die Schwingungszahl nach Wertheims Annahme

$$N_2 = \frac{c}{4(L_2 + x)}$$

und aus beiden Beobachtungen erhielt man

$$x = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2}.$$

Wir geben in folgender Tabelle einige der von Wertheim beobachteten Werte von  $x$ , welche die Größe der Berichtigung, ihre Unabhängigkeit von der Länge und die Abhängigkeit von dem Durchmesser der Pfeife zeigen. Die Temperatur der Pfeifen war  $11^0,5$  C.

Material der Pfeife	Durchmesser	Länge	Werte von $x$
Zylindrische Pfeifen von:			
Messing . . . . .	10 mm	288 mm	17,0 mm
" . . . . .	20	281	28,5
Glas . . . . .	20	256	32,0
Blei . . . . .	20	62	30,7
" . . . . .	20	120	27,1
" . . . . .	24	107	34,8
Messing . . . . .	40	298	60,0
Blei . . . . .	42	120	68,1
Zink . . . . .	50	668	66,1

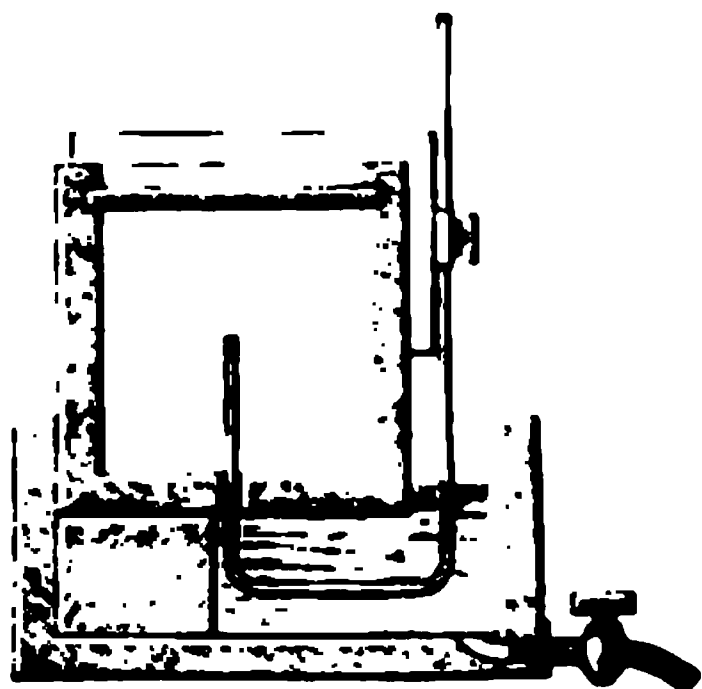
R. König<sup>1)</sup> hat durch direktes Aufsuchen der einzelnen Knoten und Bäuche in einer Pfeife die einzelnen Wellenlängen und die Verkürzung des ersten Viertels am Mundstück gemessen. Er benutzte dazu eine große Orgelpfeife von 2,33<sup>m</sup> Länge und quadratischem Querschnitte, die Seite des Quadrats hatte eine Länge von 12<sup>cm</sup>; die Pfeife ist offen, wird sie durch Aufsetzen eines Deckels zur gedeckten gemacht, so hat sie 2,28<sup>m</sup> Länge. Die Pfeife hat auf der Hinterwand, gegenüber der das Labium enthaltenden Wand, ihrer ganzen Länge nach einen Schlitz von 1<sup>cm</sup> Breite.

1) R. König, Wiedem. Ann. 18. p. 569. 1881.



sie liegt horizontal in einem Trog auf zwei Füßen, welche mit Stellschrauben versehen sind zur genauen Horizontallegung der Pfeife. In den Trog wird Wasser gegossen so hoch, daß der Schlitz in der Pfeife dadurch abgeschlossen wird; damit das Holz der Pfeife nicht quillt, ist es, soweit es mit dem Wasser in Berührung kommt, sorgfältig gefirnißt. Neben und unter der Pfeife ist in dem Troge soviel Raum, daß ein dünnes zweimal rechtwinklig gebogenes Messingrohr, wie Fig. 304 zeigt, durch den Schlitz in die Pfeife geschoben werden kann. Dasselbe ist an einem Gestelle befestigt, das aus zwei rechtwinklig zusammengesetzten mit Leder überzogenen Brettchen besteht, und auf der Vorderwand der Pfeife geräuschlos ihrer ganzen Länge hin gleiten kann. Die Vorderwand besteht aus Glas, neben welchem auf dem als Rahmen des Glases dienenden Holze eine Teilung angebracht ist, deren Nullpunkt an der Kernspalte der Pfeife liegt, so daß man die Entfernung der Messingröhre von dem Boden der Pfeife unmittelbar ablesen kann. Die Oberlippe der Pfeife ist verstellbar, so daß man ihr die Stellung geben kann, bei welcher ein bestimmter Oberton der Pfeife am besten herauskommt.

Fig 304



Zur Untersuchung des Schwingungszustandes der Pfeife kann zuerst das Ohr selbst dienen. Verbindet man das äußere Ende der 5<sup>mm</sup> weiten bis in die Mitte der Pfeife reichenden Messingröhre durch einen Kautschukschlauch mit dem Ohr und gleitet die Pfeife mit der Messingröhre entlang, während sie mit einem ihrer Obertöne tönt, so hört man den Ton, wenn das Ende der Messingröhre in den Knotenstellen ist, mächtig anschwellen, wenn das Ende der Röhre dagegen in den Schwingungsbäuchen ist, wird der Ton sehr schwach. Am genauesten kann man mit dem Ohr die Stelle der Schwingungsbäuche erkennen, denn gleitet man mit der Suchröhre, wie König passend die Messingröhre nennt, über die Bauchstellen hin und her, so kann man das plötzliche Auftreten der Verstärkung bei dem Passieren der Bauchstelle als einen Glockenton erkennen. Die Mitte zwischen den beiden Stellen ist die Stelle des Bauches. Man erkennt leicht den Grund dieses Verhaltens. Genau in der Stelle des Bauches geht die Luft nur hin und her, es finden dort weder Verdichtungen der Luft noch Verdünnungen statt, es kann sich deshalb die Bewegung der Luft der Leitung in der Messing- und Kautschukröhre bis zum Ohr nicht mitteilen. So wie man über den Bauch nach der einen oder andern Seite hin geht, kommt man an Orte, wo die Luft abwechselnd verlichtet oder verflünnert wird, deshalb gehen die Schwingungen in das Messingrohr über und werden zum Ohre fortgeleitet. Der eigentliche Bauch liegt in der Mitte der beiden Stellen, wo der Ton wieder hörbar wird.

Verbindet man die Messingröhre anstatt mit dem Ohre mit einer Königschen Flammenkapsel, so kann man ebenso die Lage der Bäuche bestimmen, in den Bäuchen tritt kein Flackern der Flammen ein. Die

Knoten selbst ließen sich mit einer eigentümlich konstruierten, in die Pfeife einzuführenden Kapsel beobachten, wegen deren wir auf die Abhandlung selbst verweisen.

In dieser Weise konnte König direkt zeigen, daß die Wellen in der Pfeife mit Ausnahme der letzten an der Lippe sämtlich gleich lang waren. So erhielt er z. B. für den Ton

$$N = 15 \frac{c}{4(l + x)}$$

für den Abstand des ersten Bauches von dem die Kernspalte enthaltenden Boden der Pfeife 18<sup>cm</sup>, für die folgenden Bäuche fand er die Abstände vom Boden der Pfeife in Zentimetern

	51,0	83,2	115,0	148,0	180,5	212,5
Differenz	32,2	31,8	33,0	32,5	32,0	

im Mittel 32,4. Der Abstand des ersten Bauches war somit 32,4 — 18 = 14,4<sup>cm</sup> kleiner als der Abstand der übrigen Bäuche voneinander, oder die an der Öffnung entstehende halbe stehende Welle, Wertheims Korrektion *x*, war um 14,4<sup>cm</sup> zu kurz.

Der Abstand des ersten Knotens von dem Boden der Pfeife würde hiernach 18 — 16,1<sup>cm</sup> = 1,9<sup>cm</sup> sein, es würde demnach der Knoten noch innerhalb der Mundöffnung der Pfeife liegen, deren Breite, Abstand der Oberlippe von der Kernspalte, König zu 16<sup>cm</sup> angibt, ein Beweis, wie unregelmäßig die Bewegung an der Erzeugungsstelle der Schwingungen ist.

Der letzte Bauch sollte 16,2<sup>cm</sup> von dem obern geschlossenen Ende der Pfeife entfernt sein; da die Länge der Pfeife 228<sup>cm</sup>, der Abstand des letzten Bauches von dem Boden der Pfeife 212,5<sup>cm</sup> beträgt, so ist der letzte Bauch nur 15,5<sup>cm</sup> von dem Ende, so daß hiernach an das gedeckte Ende nicht unmittelbar ein Knoten fiele, sondern am Ende noch etwas Bewegung wäre.

Das gleiche ergaben alle Beobachtungen Königs, wie folgende Tabelle zeigt. Unter *A* steht die Ordnung des Tones, unter *B* in Cm. Wasser der Druck der Luft in der Windlade bei dem Anblasen, unter *C* die Breite der Mundspalte, unter *D* die gemessene halbe Wellenlänge im Mittel von Bauch zu Bauch, unter *E* die Verkürzung der ersten halben Wellenlänge, unter *F* die Verkürzung des Viertels am gedeckten Ende.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>E : D</i>
V	5 <sup>cm</sup>	28 <sup>cm</sup>	103,5 <sup>cm</sup>	27,0 <sup>cm</sup>	3,7 <sup>cm</sup>	0,26
VII	6	22	70,7	19,1	0,35	0,27
IX	7	18	54,9	18,2	0,95	0,33
XI	8	16	44,9	17,4	1,9	0,39
XV	9	16	32,4	14,4	0,7	0,44
XVII	11	15	28,2	11,2	0,6	0,40.

Die Spalte *E* zeigt, daß der absolute Wert der Berichtigung mit der Höhe der Obertöne kleiner wird, die letzte Spalte läßt aber erkennen, daß die Berichtigung in Bruchteilen der Wellenlänge erheblich wächst. Nach den Untersuchungen von Wertheim wäre diese Zunahme indes der Verminderung des Querschnittes der Mundöffnung zuzuschreiben, da die Mundöffnung zur Herstellung der höhern Töne erheblich verkleinert werden mußte.

Außerdem ist auch der verschiedene Druck, also die verschiedene Stärke des Anblasestromes von Einfluß. Wertheim<sup>1)</sup> hat die Abhängigkeit der Berichtigung von dem Verhältnis des Querschnittes der Mundspalte zu demjenigen der Pfeife genauer zu bestimmen gesucht; er konnte den Zusammenhang annähernd durch eine empirische Formel darstellen von der Form

$$x = a(B + D) \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{s}{S}} + \sqrt[3]{\frac{S}{s}} \right),$$

worin  $B$  die Breite,  $D$  die Tiefe der Pfeife,  $s$  den Querschnitt der Mundöffnung,  $S$  den der Pfeife bedeutet. Bei zylindrischen Pfeifen tritt an die Stelle von  $B + D$  der Wert  $2\sqrt[3]{S}$ . Der Koeffizient  $a$  ist eine Konstante, welche mit dem Material der Pfeife sich etwas ändert, sein Wert ist für Metall oder Glas 0,210, für Holz 0,240.

Den Einfluß der Form und Größe der Mundöffnung benutzt man bei den Orgeln dazu, den Ton der Pfeifen etwas zu stimmen, wenn die Pfeife nahezu den richtigen Ton gibt. Zu dem Ende sind neben der Mundöffnung an den Seiten zwei verschiebbare Lappen angesetzt, welche gestatten, die Öffnung etwas breiter oder schmaler zu machen, und so die Tonhöhe zu verändern.

Die Töne einer offenen Pfeife sind andere als die einer gedeckten von gleicher Länge. Wir erwähnten bereits § 150, daß eine offene Pfeife sich wie ein an beiden Enden freier Stab verhalten muß, daß eine am obern Ende ankommende schwingende Bewegung ohne Änderung der Phase reflektiert wird, weil außerhalb der Pfeife die Luft nach allen Seiten sich bewegen kann, also freier beweglich ist als im Innern der Pfeife. Bei einer offenen Pfeife müssen also an beiden Enden Schwingungsmaxima sein, und der Grundton der Pfeife ist der, für welchen die Luftsäule der Pfeife eine halbe Wellenlänge bildet, so daß in der Mitte der Pfeife ein Knoten ist. Die in der Pfeife möglichen Schwingungen sind weiter alle jene, welche irgend ein Vielfaches der langsamsten Schwingung bilden, die also gegeben sind durch

$$N = n \frac{c}{2l}.$$

wenn  $l$  die Länge der offenen Pfeife ist. Der Grundton der offenen Pfeife ist somit die höhere Oktave des Tones, welchen eine gedeckte Pfeife gleicher Länge gibt; der zweite Ton,  $n = 2$ , ist die höhere Oktave des Grundtones, die beiden Enden der Pfeife sind Schwingungsmaxima, im Innern sind zwei Knoten, jeder  $\frac{1}{2}$  der Pfeifenlänge vom Ende; die Reihe der Töne überhaupt ist

$$\begin{array}{cccccc} 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. \dots \\ c & c_1 & g_1 & c_2 & c_3 & g_2 \dots \end{array}$$

wenn wir den tiefsten Ton der Pfeife mit  $c$  bezeichnen; der tiefste Ton der gedeckten Pfeife gleicher Länge wäre in dem Falle  $c_1$ , der zweite  $g_1$ , der dritte  $c_1$  usf.

1. Wertheim, Ann. de chim. et de phys 31 (3. 1851 Krönigs Journal. 2. p 485 1851.

Für die offenen Pfeifen gilt das früher über den Einfluß des Mundlochs gesagte gerade wie für die gedeckte Pfeife, auch bei diesen ist demnach die Länge der Welle länger als das Doppelte der Röhre oder

$$N = \frac{c}{2(l+x)},$$

und zwar muß diese Größe  $x$  hier ganz dieselbe sein, wie bei der gedeckten Pfeife. Vergleicht man nun die so berichtigte Schwingungszahl  $N$  mit derjenigen  $N'$  der gedeckten Pfeife, so müßte

$$N = 2N'$$

oder der Ton der gedeckten Pfeife soll genau die tiefere Oktave des Tones der offenen Pfeife sein. Indes hört man bei einem Versuche, daß das nicht der Fall ist, daß der Ton der offenen Pfeife immer etwas tiefer ist als die höhere Oktave. So fand Wertheim bei einigen Versuchen, daß bei einer Pfeife von 24<sup>mm</sup> Durchmesser der gehörte Ton bei der offenen Pfeife sich zu dem Tone  $2N'$  verhielt wie 23 zu 24, und in einem andern Falle bei einem Durchmesser von 50<sup>mm</sup> wie 43,9:46,1, den Ton also verhältnismäßig noch tiefer.

Es muß daher bei der offenen Pfeife noch ein anderer Umstand störend einwirken, der die gehörten Töne von der Theorie abweichend macht. Wertheim sieht denselben darin, daß die Reflexion der schwingenden Bewegung nicht ganz genau in dem obern Querschnitt der Röhre stattfindet, sondern daß sich die schwingende Bewegung noch ein klein wenig über diesen Querschnitt hinaus erstreckt, die schwingende und tönende Luftsäule also etwas länger wird, als die Theorie annimmt. Daß diese kleine Verlängerung stattfindet, davon kann man sich durch den Versuch überzeugen, denn hält man ganz nahe über die Öffnung der Röhre eine feine schwach gespannte und mit Sand bestreute Membran, so sieht man an dem Hüpfen des Sandes die Ausdehnung der Bewegung über der Pfeife. Um den Ton der offenen Pfeife genau im Verhältnis zur Länge der Pfeife zu bestimmen, muß man daher für die Schwingungszahl desselben setzen

$$N = \frac{c}{2(l+x+y)}.$$

R. König hat nach dem vorhin angegebenen Verfahren in der beschriebenen Pfeife, welche als offene eine Länge von 233<sup>cm</sup> hatte, die Werte von  $x$  und  $y$  für die verschiedenen Obertöne der Pfeife direkt gemessen. Nachfolgende Tabelle gibt die von ihm erhaltenen Resultate; die Tabelle ist genau geordnet wie die vorhergehende

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
III	4	27	90	28	9
IV	6	23	65,8	24,6	5,6
V	7	20	51,3	19,8	3,6
VI	8	17	42,5	16,2	5,7
VII	9	16	36,5	15,7	6,7
VIII	10	15	31,4	14,1	4,3.

In der Tat sind die unter *E* angegebenen Werte von  $x$  für annähernd gleiche Wellenlängen ziemlich gleich, so hier für den Ton III und in der

früheren Tabelle für  $V$ ; im allgemeinen liegen die Werte für einen Ton dieser Reihe zwischen den tiefern und höhern der vorigen Reihe. Die Größe  $y$  muß man hier für alle Töne als gleich ansehen, denn mit Ausnahme des ersten Wertes schwanken sie unregelmäßig um einen mittleren Wert.

Wertheim bestimmte die Summe der beiden Berichtigungen  $x + y$  in der vorhin für die gedeckten Pfeifen beschriebenen Weise. Sind  $L_1$  und  $L_2$  zwei mit gleichem Mundstück versehene und mit gleich starkem Strome angeblasene und ihren Grundton gebende Pfeifen, so ist

$$c = 2 N_1 (L_1 + x + y) = 2 N_2 (L_2 + x + y)$$

$$x + y = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2}.$$

Auch die Werte für  $x + y$  gelang es Wertheim durch eine der früheren ganz gleich gebaute empirische Formel darzustellen, er fand

$$x + y = a_1 (B + D) \left( 2 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}} \right),$$

worin die Zeichen das gleiche bedeuten wie in der vorigen Formel und wiederum für  $B + D$  der Ausdruck  $2 \frac{1}{2} S$  gesetzt werden muß, wenn zylindrische Pfeifen genommen werden. Der Koeffizient  $a_1$  ist hier 0,187 unabhängig von dem Material der Pfeife.

Eine sehr einfache empirische Regel, welche für offene Orgelpfeifen in der Tat mit großer Annäherung die Schwingungszahl zu bestimmen gestattet, ist von dem französischen Orgelbauer Cavalier Colle aufgefunden. Für rechteckige Pfeifen hat man zur wirklichen Länge der Pfeifen die doppelte Tiefe zu addieren, um die theoretische Länge zu erhalten, d. h. die Länge  $l$ , welche nach der Gleichung

$$N = \frac{c}{2l}$$

die Schwingungszahl zu berechnen gestattet.

Eine weitere, indes nur scheinbare Abweichung der Pfeifentöne von der Theorie, die sich sowohl bei offenen als gedeckten Pfeifen zeigt, und auf welche schon Wertheim aufmerksam gemacht hat, läßt sich aus den Königschen vorhin angegebenen Beobachtungen erkennen, nämlich daß die Obertöne mit steigender Ordnungszahl relativ zu hoch werden. Berechnen wir z. B. aus den Wellenlängen der in der gedeckten Pfeife erzeugten Obertöne den Grundton der Pfeife bzw. dessen Wellenlänge, so wird diese um so kürzer, je höher der Oberton ist, von dem wir ausgehen. Für den Ton V z. B. ist die beobachtete stehende Welle gleich  $103,5^{\text{cm}}$ . Die halbe Wellenlänge des Grundtones muß den fünffachen Wert haben, ist also hier nach  $517,5^{\text{cm}}$ . Aus dem Ton VII erhalten wir so für die halbe Wellenlänge  $494,9^{\text{cm}}$ , aus dem Ton IX  $495$ , dem Ton XI  $493,9$ , dem Ton XV  $486,0$  und dem Tone XVII  $479,0$ .

Daß diese Abweichung jedoch nur eine scheinbare ist und auf die Verschiedenheit der Mundöffnungen und ganz besonders die verschiedene Stärke des Anblasens zurückzuführen ist, ergibt sich daraus, daß die Höhe des Grundtones von der Stärke des Anblasens wesentlich abhängt. Damit

die Pfeife ihren richtigen, das heißt schönen und kräftigen Ton gebe, muß der Anblasestrom eine gewisse Stärke haben. Verstärkt man von da aus den Anblasestrom mehr und mehr, so tritt ein merkliches Steigen des Tones ein, das in der Pfeife liegende Stück der Welle macht einen größern Teil der Welle aus. Bei sehr starkem Anblasen, welches zur Erzeugung der höhern Töne erforderlich ist, erhält man die Obertöne des gesteigerten Tones, daher sind die Obertöne relativ zu hoch.

Da nach den bisherigen Erfahrungen die schwingende Bewegung nicht in der geometrischen Endfläche der Pfeife endigt, so wird eine teilweise Schließung der Endfläche die Tonhöhe der Pfeife ebenfalls verändern, und zwar ist vor auszusehen, daß der Ton der Pfeife dadurch tiefer werden muß. Denn die teilweise Deckung der Pfeife hemmt die freie Bewegung der Luft, das Ende der Pfeife muß deshalb dem Knoten näher rücken. bzw. der Knoten muß dem obern Ende näher rücken, da die Bewegung im obern Querschnitt weiter vom Schwingungsmaximum entfernt ist. Die Erfahrung hat schon lange den Orgelbauern diesen Einfluß einer teilweisen Deckung der Pfeifen gezeigt; sie machen denselben nutzbar, indem sie zur Stimmung der offenen Orgelpfeifen dieselben oben gewöhnlich mit schräg stehenden Blechen versehen, welche man auf- und abbiegen kann. Biegt man die Bleche herab, so wird der Ton tiefer.

Wertheim hat auch für diesen Fall eine empirische Relation aufstellen können, welche annähernd die an der Länge der Pfeife anzubringende Korrektur zu berechnen gestattet, so daß die Schwingungszahl sich aus der Gleichung

$$N = \frac{c}{2(l + x + y)}$$

ergibt.

Haben  $B$ ,  $D$ ,  $S$  dieselbe Bedeutung wie früher und ist  $s_1$  der Querschnitt der Mundöffnung  $s_2$  derjenige der oberen Öffnung der Pfeife, so ist

$$x = a (B + D) \left( 1 - \sqrt{\frac{s_1}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_1}} \right)$$

$$y = a_1 (B + D) \left( 1 - \sqrt{\frac{s_2}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_2}} \right),$$

worin  $a_1$  wie bei offenen Pfeifen den Wert 0,187 hat.

Wegen des Grades der Übereinstimmung der Formeln mit der Erfahrung verweisen wir auf die Originalarbeit, bei großen und sehr kleinen Querschnitten  $s_2$  sind die berechneten Zahlen bis etwa 5% zu klein, bei mittleren sind sie zu groß.

Wenn die quantitativen Folgerungen unserer einfachen Theorie der schwingenden Luftsäulen in Pfeifen mit mehr oder weniger großen Korrekturen für Pfeifen, deren Länge im Verhältnis zu ihrem Querschnitte groß sind, sich anwendbar zeigen, so ist das nicht mehr der Fall, wenn die Länge der Pfeifen gegen die Querdimensionen nicht mehr groß ist, wenn die Länge der Pfeife nicht größer oder gar kleiner ist als die Breite der Röhre oder bei zylindrischen Röhren als der Durchmesser. Würde man bei solchen Röhren den Ton einfach aus der Länge berechnen, so würde man ihn oft mehr als eine Oktave höher finden, als der Versuch ihn ergibt. Für derartige als kubische bezeichnete Pfeifen läßt sich indes

wiederum die Tonhöhe nach den Wertheimschen Gleichungen annähernd berechnen, wie sich aus einer großen Anzahl von Versuchen, welche Wertheim mit Röhren der verschiedensten Form angestellt und in der schon mehrfach erwähnten Abhandlung mitgeteilt hat, erkennen läßt. Wir begnügen uns hier damit, um zu zeigen, wie weit die Versuche Wertheims mit den Formeln übereinstimmen, eine Versuchsreihe an Holzpfeifen mitzuteilen. Die Pfeifen waren Röhren von rechteckigem Querschnitt, deren Länge 35<sup>cm</sup> und deren eine Seite des Querschnittes  $D = 20^{\text{cm}}$  betrug. Parallel dieser Seite konnten in den Kasten Schieber eingesetzt werden, welche so den Querschnitt der Röhre zu ändern gestatteten, indem man die Breite  $B$  desselben verkleinerte. Die Röhre war unten ganz geschlossen, oben offen und der oben offene Querschnitt konnte durch einen parallel der Kante  $D$  beweglichen Schieber, der die ganze Breite der Röhre einnahm, mehr oder weniger verkleinert werden. Die Pfeife wurde durch ein mit einem platten Mundstück aus Messing versehenes Blaserohr, ähnlich wie Fig. 299, angeblasen.

In nachfolgender Tabelle gibt die mit  $d$  überschriebene Spalte die der Seite  $D$  parallele Ausdehnung der Öffnung, deren Breite immer gleich jener der Röhre war. Die zur Berechnung der Töne benutzte Konstante  $a$  ist  $= 0,240$ , da die Pfeife von Holz war.

Töne kubischer Pfeifen.

$d$	$s$ $S$	Breite $B = 200\text{ mm}$		Breite $B = 100\text{ mm}$		Breite $B = 50\text{ mm}$	
		Schwingungszahl		Schwingungszahl		Schwingungszahl	
		berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet
200	1,000	342,5	342,1	404,3	404,1	416,2	414,9
180	0,900	371,3	379,8	397,2	398,7	409,9	409,9
160	0,800	365,0	364,7	389,5	384,4	403,0	405,7
140	0,700	355,2	353,1	381,0	381,0	395,4	386,7
120	0,600	344,3	336,8	371,6	368,9	386,9	366,8
100	0,500	332,0	314,5	361,6	358,5	377,2	355,5
80	0,400	317,7	304,0	348,0	348,8	365,5	339,1
60	0,300	299,9	299,4	331,5	336,3	350,5	315,3
40	0,200	276,2	264,5	309,8	281,3	329,8	288,3
20	0,100	237,2	224,6	272,2	261,2	293,8	263,9
10	0,050	199,8	203,2	234,1	220,7	256,6	243,8

Für sehr kleine Mundöffnungen weichen die beobachteten und berechneten Zahlen nicht unbeträchtlich voneinander ab, für größere Mundöffnungen stimmen die Resultate ziemlich gut.

Als ein allgemeines Resultat ergibt sich aus diesen Versuchen, daß die Töne kubischer Pfeifen mit abnehmendem Volumen der Röhre höher werden, und weiter läßt sich aus den Versuchen und der Formel Wertheims der Satz ableiten, daß bei ähnlichen Formen der Pfeife und der Mundöffnung die Töne der Pfeife sich umgekehrt verhalten wie die Längen der homologen Seiten.

Es genüge an diesen kurzen Andeutungen über das Verhalten kubischer



, dem der gestrichenen Saiten ähnlichen Klang; bei weiteren offenen, den Prinzipalstimmen der Orgel, besonders den hölzernen, tritt nur Oktave noch deutlich zum Grundton, die höheren fast gar nicht, deshalb der Ton dieser Pfeifen viel dumpfer. Die gedeckten Pfeifen geben die 1, 3, 5 . . . , indes sind die Obertöne nur bei engen Pfeifen deutlich, weiten tritt fast nur der Grundton auf, woher der dumpfe Klang der gedekten Register rührt.

Der Klang in Holzpfeifen ist immer dumpfer und weicher als in Metallpfeifen, hauptsächlich, weil die rascheren Schwingungen der Obertöne dem Holz mitteilen und deshalb rasch verschwinden.

### § 167.

**Töne durch Schwingung von Flüssigkeitssäulen.** Wir haben er-  
nt, daß man durch einen Flüssigkeitsstrom, der durch die durchlöcher-  
te Oberseite einer in eine Flüssigkeit getauchten Sirene getrieben wird, einen  
erzeugen kann. Cagniard Latour und später in noch ausgezeich-  
neter Weise Wertheim ist es gelungen, in Flüssigkeiten stehende Wellen  
und dadurch Töne hervorzubringen.

Cagniard Latour<sup>1)</sup> brachte Flüssigkeitssäulen, welche in Glasröhren  
geschlossenen waren, dadurch zum Tönen, daß er die Glasröhren longitudi-  
nal rieb. Die Höhe des erzeugten Tones bewies, daß nicht die longitu-  
den Schwingungen des Glases es waren, welche gehört wurden, sondern  
der Flüssigkeitssäule. Er wies durch den Versuch nach, daß der Ton  
höhere Oktave ist, wenn die Röhre an beiden Seiten offen, die Flüssig-  
keit also an beiden Enden frei ist, von dem Tone, den eine Flüssigkeits-  
säule gibt, welche in einer an einem Ende geschlossenen Röhre schwingt,  
wenn eines Ende also an einer festen Wand anliegt. Die Töne einer an  
beiden Enden freien Flüssigkeitssäule konnten nicht dadurch erhalten werden,  
daß man eine an beiden Enden offene Röhre einfach in Wasser tauchte  
und longitudinal rieb, sondern wurden dadurch erzeugt, daß man ein Rohr  
U-förmig, gleichschenkelig bog und dann longitudinal rieb. Wurde das  
eine Ende des Hebers zugeschmolzen und derselbe bis zur gleichen Höhe  
mit Wasser gefüllt, als der offene, so war der Ton eine Oktave tiefer als  
dem offenen Heber.

Auch gelang es Cagniard Latour eine Pfeife unter Wasser zum  
Tönen zu bringen. Dies gelang aber in viel vollkommenerer Weise Wert-  
heim, der in einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre durch einen Flüssig-  
keitsstrom den Grundton und die harmonischen Töne erzeugte.<sup>2)</sup>

Der Apparat, welchen Wertheim zu seinen Versuchen mit Wasser  
benutzte, ist Fig. 305 abgebildet.

Die offene Orgelpfeife *bb* liegt horizontal auf den Stützen *a* in dem  
mit Wasser gefüllten Wasserbehälter *A*. Der Fuß der Pfeife ist in *c* ange-  
bracht an eine in der Wand befestigte Mutter, welche der Pumpe gegen-  
sitzt. Eine Ventilpumpe *B*, welche durch den davor befindlichen Hebel

1) Cagniard Latour, Annales de chim et de phys 36 1834.

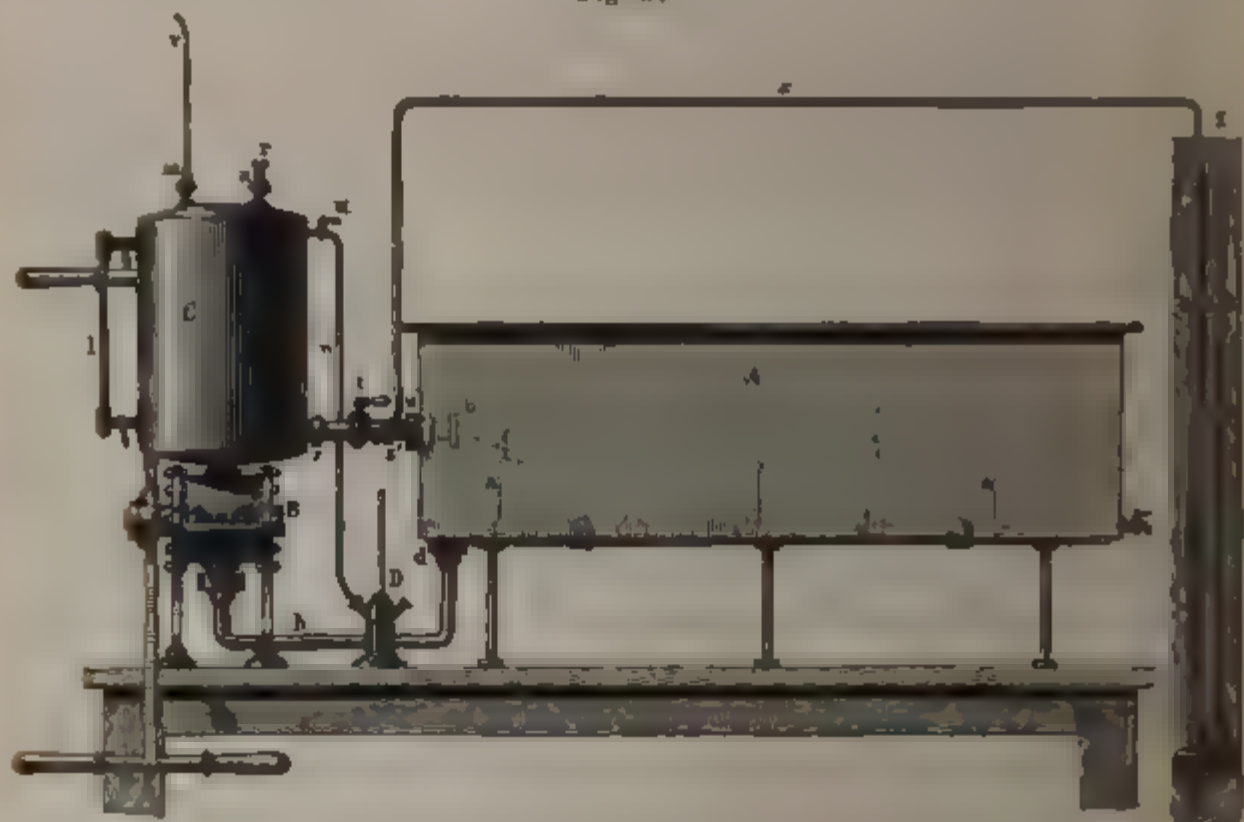
2) Wertheim, Ann. de chim et de phys. 23 (3) 1848. Poggend. Ann. 77 1849.

getrieben wird, saugt die Flüssigkeit durch das weite Rohr *h* aus dem Behälter und pumpt sie in das davorstehende Reservoir *C*.

Das Innere des Reservoirs *C* steht durch den Hahn *m* und das Rohr *r* mit großen Gefäßen voll komprimierter Luft in Verbindung. Durch den Druck dieser Luft bei geöffnetem Hahn *m* wird das im Behälter *C* angesammelte Wasser durch den Hahn *t* und das Rohr *ss'* in die unter Wasser befindliche Pfeife getrieben. Mittels des Hahnes *t* ist man imstande, den Zufluß des Wassers beliebig zu regulieren.

Auf dem Behälter *C* befindet sich noch ein zweiter Hahn *n*, der geöffnet die komprimierte Luft des Behälters in die Atmosphäre entweichen läßt, und auf den man bei *r* eine Sirene aufstellen kann, um die absolute Schwingungszahl des in der Wasserpfeife gehörten Tones, also die Tonhöhe,

Fig. 305



zu bestimmen. Außerdem dient dieser Hahn dazu, Versuche mit gewöhnlichen Orgelpfeifen in Luft anzustellen.

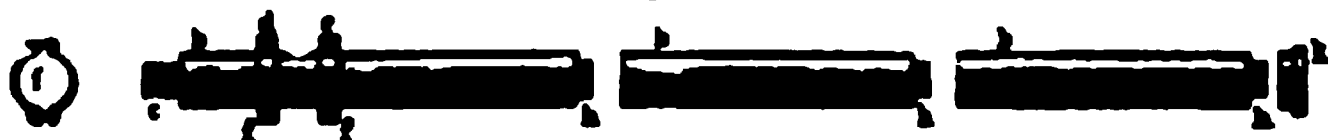
Um den Druck zu messen, unter welchem das Wasser in die Pfeife eintritt, kommuniziert die Röhre *ss'* durch den Hahn *u* und die Rohrleitung *x* mit dem Manometer *E* und außerdem die Luft im Gefaße *C* durch den Hahn *n* und die Röhre *ur* mit dem Manometer *D*.

Ist nun der Apparat eingerichtet, so beginnt man die Versuche damit, daß man bei geschlossenen Hähnen *m*, *n*, *t*, mittels der Pumpe *H* Wasser aus dem Behälter *A* in den Behälter *C* pumpt. Ist die Wassermasse hinreichend, so setzt man den Behälter *C* durch Öffnen des Hahnes *m* mit den mit komprimierter Luft gefüllten Behältern in Verbindung. Der Druck dieser Luft ist es dann, der bei geöffnetem Hahne *t* das Wasser in die Orgelpfeife treibt und ferneres Pumpen während des Versuches dient dazu, das Wasser in *C* auf konstantem Niveau zu erhalten.

Damit die Versuche gelingen, muß auf die Konstruktion der Orgelpfeifen besondere Aufmerksamkeit verwandt werden.

Wertheim wandte dazu die aus mehreren Stücken zusammengesetzte Pfeife (Fig. 306) an. Das erste Stück besteht aus der Schraube  $c$ , passend für die Mutter bei  $c$  im Behälter  $A$  (Fig. 305) geschnitten, in deren Innern ein feines Drahtnetz angebracht ist, um zu verhindern, daß allenfalls feste im Wasser schwebende Körperteilchen in die Pfeife eintreten können, ferner

Fig. 306.



aus dem Mundstücke  $d$  und der Röhre  $b$ , an deren Ende sich der Schraubengang  $h$  befindet, um daran die folgenden Röhrenstücke  $b$  oder den Deckel  $k$  anzuschrauben. Die beiden Labien des Mundlochs bestehen aus den Platten  $d$  und  $c$ , welche mit den Klammern  $f$  befestigt werden.

Man kann die Platten, welche die Labien bilden, nicht sogleich durch Löten unveränderlich fest mit der Pfeife verbinden, da die Stellung der Labien von wesentlichem Einfluß auf die Leichtigkeit ist, mit der die Pfeife anspricht, und man deshalb durch den Versuch erst die Lage ermitteln muß, bei der die Pfeife in den Flüssigkeiten tönt. Für Flüssigkeiten muß im allgemeinen der Aufschnitt weniger breit und lang sein als für Luft, das Licht, die Mündung des Fußes in der Pfeife größer und der Strom etwas mehr gegen das Innere der Pfeife gerichtet sein.

Mit diesem Apparate ist es Wertheim gelungen, Orgelpfeifen unter Wasser mittels eines Wasserstromes zum Tönen zu bringen, und er fand, wie es nach § 150 zu erwarten ist, daß die Töne derselben Reihe folgen wie bei Pfeifen, welche mit Luft angeblasen werden. Bei offenen Pfeifen, nur diese gaben ein gutes Resultat, waren die Töne

$$\begin{array}{ccccccccc} c_{-1} & c & g & c_1 & c_1 & g_1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Die Schwingungszahlen allgemein

$$N = n \frac{c}{2l},$$

wenn  $l$  die Länge der Pfeife bedeutet. Oder vielmehr genauer

$$N = \frac{c}{2(l + x + y)},$$

das heißt, es mußten dieselben Berichtigungen angebracht werden, wie bei den in Luft angeblasenen Pfeifen.

Für  $c$  erhielten wir § 149 in Wasser

$$c = 141800 \text{ cm} = 1418 \text{ m}.$$

Die Schwingungszahl  $N$  des Grundtones einer offenen Pfeife von der Länge  $l$  sollte demnach sein

$$N = \frac{1418}{2l}.$$

Die Versuche von Wertheim gaben indes einen viel kleinern Wert, die Töne waren tiefer, als sie hiernach sein sollten und zwar so, daß die

beobachtete Schwingungszahl  $N'$  war

$$N' = \sqrt{\frac{2}{3}} N.$$

Wir werden auf diese Abweichung im nächsten Kapitel zurückkommen, hier genüge die Bemerkung, daß nach der Ansicht von Wertheim die Größe  $c$ , welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in dem Wasser bedeutet, hier einen andern Wert hat als den von uns berechneten, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine andere ist in Flüssigkeitssäulen, wie in Orgelpfeifen, als in einer unbegrenzten Flüssigkeit und zwar, daß die Geschwindigkeit  $c'$  in Flüssigkeitssäulen gleich ist

$$c' = \sqrt{\frac{2}{3}} c$$

### § 168.

**Von den Zungenpfeifen.** Die gewöhnlichen Zungenpfeifen unterscheiden sich von den Labialpfeifen dadurch, daß die Schwingungen nicht

durch einen sich teilenden Luftstrom, sondern ähnlich wie bei der Sirene durch einen intermittierenden Luftstrom erzeugt werden. Die Zungenpfeife Fig. 307 und 308, besteht aus dem Mundstück oder Rohrwerk  $abcd$ , welches in dem Fuße der Pfeife  $F$  sich befindet und welches, wie Fig. 307 zeigt, in die Mündung der meist kegelförmig nach oben sich erweiternden Röhre  $B$  hineingesteckt ist.

Das Rohrwerk besteht aus einem Halbzylinder von starkem Messingblech, der an einer Basis bei  $a$  geschlossen, oben jedoch offen ist (Fig. 307). Die Schnittfläche des Messinghalbzylinders ist durch eine ebene Metallplatte bedeckt, welche jedoch nur ungefähr auf  $\frac{1}{4}$  der Länge der Röhre fest und da ab frei beweglich ist und als schwingende Zunge die Öffnung des Zylinders beim Hin- und Herschwingen öffnen und verschließen kann. Das Rohrwerk der zweiten Art (Fig. 308) hat an Stelle des Messingzylinders eine viereckige, unten geschlossene Halbröhre, deren eine Seitenwand durch eine Metallplatte gebildet ist, die in der Mitte einen spaltförmigen Ausschnitt hat. Eine an dem oberen, schmaleren Ende des Spaltes befestigte Metallzunge kann durch den Spalt hin und her schwingen. Die Rohrwerke der zweiten Art mit durchschlagender Zunge geben einen weniger rauhen Ton als die Rohrwerke der ersten Art.

Fig. 307



Fig. 308



röhre, deren eine Seitenwand durch eine Metallplatte gebildet ist, die in der Mitte einen spaltförmigen Ausschnitt hat. Eine an dem oberen, schmaleren Ende des Spaltes befestigte Metallzunge kann durch den Spalt hin und her schwingen. Die Rohrwerke der zweiten Art mit durchschlagender Zunge geben einen weniger rauhen Ton als die Rohrwerke der ersten Art.

mit aufschlagender Zunge, müssen so gearbeitet sein, daß die Zunge beim Eintreten in den Messingzylinder das Rohr vollkommen verschließt, ohne die Ränder der viereckigen Öffnung zu berühren. Im ruhenden Zustande ist die Zunge so gebogen, daß sie etwas von den Rändern der Öffnung absteht, so daß die Luft des Fußes  $F$  mit derjenigen im Innern des Messingrohres und des Schallbeckers der Röhre  $R$  kommuniziert. Der Fuß  $F$  ist rings, außer an der Durchtrittsstelle des Rohres  $r$ , welches den Luftstrom aus dem Windkasten eintreten läßt, geschlossen. Die Röhre  $R$  ist oben stets offen, damit die durch das Rohrwerk eintretende Luft entweichen kann.

Um die Zungenpfeife zum Tönen zu bringen, setzt man das Rohr  $r$  auf den Kanal einer Windlade und läßt Luft einblasen. Die in den Fuß der Pfeife eintretende Luft dringt dann zunächst durch die von der Zunge gelassene Spalte in die Pfeife ein; allein da nicht schnell genug alle Luft durch diese Spalte dringen kann, verdichtet sich dieselbe im Fuß und treibt die Zunge in die Röhre hinein, so daß auf einen Augenblick die Röhre ganz geschlossen ist und keine Luft aus dem Fuße mehr in die Röhre dringen kann. Durch das erste Eindringen der Luft in die Röhre gerät die Luft in derselben in Schwingung, und die Zunge dringt dann so weit in die Röhre ein, bis ihre eigene Elastizität und der von der schwingenden Bewegung der Luft in der Röhre sie treffende Impuls sie zurücktreibt, so daß sie die Öffnung von neuem frei läßt. Darauf wird dann neuerdings die Zunge an oder in die Röhre und wieder zurückgetrieben und das Spiel wiederholt sich so lange, als der Luftstrom anhält.

Durch diese Vorrichtungen entstehen also Schwingungen der Luft in der Röhre, Schwingungen der Zunge und ebenso ein intermittierender Luftstrom gerade wie bei der Sirene, indem bei jeder Öffnung des Rohres ein Luftstrom in die Pfeife dringt, bei jedem Schlusse desselben der Strom unterbrochen wird.

Nach den Versuchen von Wilhelm Weber<sup>1)</sup> sind es nun weder die Schwingungen der Platte, welche den lauten und starken Ton der Zungenpfeife geben, noch die Schwingungen der Luftsäule, sondern die Stöße des intermittierenden Luftstromes wie bei der Sirene, der bei jeder Öffnung der Zunge in das Rohr eintritt, bei jedem Verschließen des Rohres durch die Zunge unterbrochen wird. Die Zahl der Luftstöße und somit die Tonhöhe aber hängt in der Pfeife nur von den Schwingungen der Zunge ab, wie in der Sirene von der Geschwindigkeit der Scheibe, indem die Schwingungen der Zunge es sind, welche das Rohr abwechselnd öffnen und schließen.

Die Schwingungen der Platte werden aber außer durch die Elastizität derselben wesentlich mit bestimmt durch die stehenden Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife  $R$ , durch den abwechselnd zu- und abnehmenden Druck der dort schwingenden Luft.

Daß diese Anschauung von der Tonbildung in der Zungenpfeife die richtige ist, begründet Weber durch folgende Versuche. Würde der Ton in der Zungenpfeife nicht von den Stößen der Luft, sondern von den Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife oder den vereinten Schwingungen der Luft und der Zunge erzeugt, so müßte der Ton aufhören, wenn man

1. W. Weber, Poggend Ann. 16. 1839.



die Röhre *R* fortnahme; man weiß aber, daß das nicht der Fall ist. Bläst man das Rohrwerk allein an, wie es z. B. in der Mundharmonika immer geschieht, so ist der Ton der Höhe nach fast ganz derselbe, seinem Klang nach völlig derselbe, als wenn eine kurze Luftsäule mit schwingt.

Daß der Ton nicht von den Schwingungen der Platte herrührt, ergab sich daraus, daß wenn die Platte mit dem Violonbogen gestrichen wurde, also ohne die Luftstöße in Schwingungen versetzt wurde, ein nur ganz schwacher und in unmittelbarer Nähe hörbarer Ton entstand, der keinesfalls mit dem vollen und starken Ton der Zungenpfeife vergleichbar war. Selbst als er die Zunge vor einer Röhre in Schwingung versetzte, in der die stehenden Schwingungen der Luft denselben Ton gaben wie die Zunge, fand Weber den Ton nur matt und viel schwächer.

Also nur durch den intermittierenden Luftstrom, durch die von diesem wie bei der Sirene erzeugten und durch die umgebende Luft fortgepflanzten Stöße entsteht jener laute und volle Ton, welcher bei dem Anblasen der Zungenpfeife gehört wird.

Da indes ein Stoß nur beim Öffnen des Rohres entsteht, so sind die Stöße mit den Schwingungen der Zunge gleichzeitig und man kann aus der Höhe des gehörten Tones auf die Schwingungszahl der Zunge schließen und diese mit den Schwingungen vergleichen, welche die für sich schwingende Platte vollführen würde. Eine solche Vergleichung beweist dann den zweiten Satz von Weber, daß die Schwingungen der Zunge bedingt werden durch die eigene Elastizität der Zunge und durch die in der Röhre auftretenden stehenden Schwingungen der Luftsäule. Die Tonhöhe und somit die Schwingungszahl der Platte wird nämlich eine andere, wenn verschieden lange Röhren mit der Zunge zur Pfeife verbunden sind.

Um die Änderungen der Tonhöhe zu erkennen, ist es notwendig zu beachten, daß die Pfeife auf doppelte Weise zum Tönen gebracht werden kann, durch Blasen von unten, so daß also in dem Fuß *F* der Pfeife die Luft dichter ist als im Innern der Pfeife, und durch Saugen von unten oder Blasen von oben, so daß die Luft außerhalb der Röhre im Fuße *F* der Pfeife dünner ist als innerhalb.

Der Vergleich der Töne der Zungenpfeife mit dem Tone der isoliert schwingenden Zunge ergibt nun folgendes:

Ist die Pfeife so lang, daß die in ihr erregten stehenden Schwingungen genau den Ton der isoliert schwingenden Zunge geben, so wird durch den Ansatz der Pfeife an das Rohrwerk der Ton seiner Höhe nach nicht wesentlich anders als der Ton der isoliert schwingenden Zunge. Es ist das sowohl der Fall, wenn der Grundton der Röhre, als wenn einer ihrer harmonischen Obertöne mit dem Tone der Zunge übereinstimmt. Ist also die Länge der Röhre, deren Grundton mit dem Tone der Zunge gleiche Höhe hat, so hat es der zweite Ton der Röhre  $2l$ , der dritte derjenigen von der Länge  $3l$  usf. Alle diese Röhren, deren Länge  $l$  oder irgend ein Vielfaches von  $l$  ist, ändern mit dem Rohrwerke zur Zungenpfeife verbunden die Höhe des Tones, den die Zunge für sich geben würde, nicht ab, die Schwingungen der Zunge erfolgen also unter vereinigter Wirkung der Elastizität der Zunge und der wechselnden Drucke der Luft gerade so, als bewegte sie sich infolge ihrer eigenen Elastizität. Das ist sowohl der Fall, wenn die Pfeife durch Blasen, als wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Hat die Röhre aber irgend eine andere Länge als  $l$ ,  $2l$ ,  $3l$  . . . , so wird die Tonhöhe der Zunge geändert, sie wird tiefer, die Schwingungszahl kleiner, die Schwingungsdauer größer, wenn die Pfeife durch Blasen zum Tönen gebracht wird, sie wird höher, die Schwingungszahl größer, die Dauer kleiner, wenn die Röhre durch Saugen zum Ansprechen gebracht wird.

Setzt man eine kurze Röhre an die Zunge, so wird beim Anblasen von unten der Ton nur unmerklich tiefer, wenn man die Röhre bis zu  $\frac{1}{2}l$  verlängert, bei weiterm Verlängern wird er merklich tiefer, bis die Länge der Röhre  $\frac{1}{2}l$  ist, bei noch weiterm Verlängern sinkt der Ton immer rascher bis  $\frac{1}{3}l$ , fast ebenso rasch als die Länge der Röhre zunimmt, und zwischen  $\frac{1}{3}l$  und  $l$  sinkt die Tonhöhe der Verlängerung proportional. Ist die Länge der Röhre nahe  $l$ , so ist der Ton fast eine Oktave tiefer als der Ton der für sich schwingenden Zunge.

So fand Weber bei einer Zunge, welche denselben Ton gab als eine Pfeife von 195,3 Pariser Linien oder 44,1<sup>cm</sup>, nämlich das eingestrichene  $g$ , folgende Tonreihe, als die Zunge mit Röhren von den daneben angegebenen Längen zur Pfeife verbunden angeblasen wurde:

Länge der Röhre	Ton	Länge der Röhre	Ton
4,06 <sup>cm</sup> < $\frac{1}{2}l$	$g_1$	25,25 <sup>cm</sup> > $\frac{1}{2}l$	$d_1$
5,63 „ „	$g_1$	29,09 „ „	$c_1$
9,24 „ „	$g_1$	33,15 „ > $\frac{1}{2}l$	$dis$
12,85 „ > $\frac{1}{2}l$	$fis_1$	36,94 „ „	$gis$
18,72 „ „	$f_1$	39,43 „ „	$g$
21,20 „ „	$c_1$		

Bei weiterer Verlängerung sprang der Ton zum eingestrichenen  $g$  zurück, so daß bei der Länge  $l$  der Ton der Pfeife wieder das eingestrichene  $g_1$  war.

Wurde das Rohr über  $l$  hinaus verlängert, so war zwischen  $l$  und  $2l$  der Gang des Tones derselbe, nur reichte die Vertiefung viel weniger weit. Die größte Vertiefung nahe bei  $2l$  betrug eine Quarte.

Bei einer Länge von etwas über  $2l$  wurde zuweilen noch  $cis_1$  erhalten, sonst sprang der Ton bei  $2l$  wieder zu  $g_1$  zurück. Wurde die Röhre von  $2l$  auf  $3l$  verlängert, so sank der Ton wieder anfangs langsamer, dann rascher bis zur tiefen Terz, in den Weberschen Versuchen bis zum eingestrichenen  $c_1$ .

Man erkennt darin ein bestimmtes Gesetz, nach welchem die Tonhöhe durch den Ansatz der Röhren sich ändert. Jedesmal, nachdem die Röhre um  $l$  verlängert ist, springt der Ton zurück, vor dem ersten Sprunge war er um eine Oktave,  $1:2$ , vor dem zweiten um eine Quart,  $3:4$ , vor dem dritten um eine Terz,  $4:5$ , vertieft; vor den folgenden Sprüngen würde er demnach so vertieft sein, daß die Töne vor und nach dem Sprunge sich verhielten wie  $7:8$ , dann wie  $9:10$  usw. Für einige weitere Sprünge bestätigen die Versuche von Weber das Gesetz.

Weber folgert aus diesen Erscheinungen, daß wirklich die Luft in den Zungenpfeifen in stehende Schwingungen gerät. Denn zunächst tritt es hervor, daß jedesmal dann, wenn die Röhre die Länge  $l$  oder ein Vielfaches von  $l$  besitzt, die Schwingungen der Röhre also mit denen der Zunge zusammenfallen, der Ton wieder seine ursprüngliche Höhe erhält. Ähn-



liches ist auch bei den übrigen Tönen der Fall, auch dort bilden sich in der Röhre schwingende Abteilungen und jedesmal, wenn die Röhre um eine schwingende Abteilung größer geworden ist, wird der Ton der Zungenpfeife auch wieder derselbe, und zwar ist die Länge dieser schwingenden Abteilungen gleich der Länge der in stehenden Schwingungen befindlichen Luftsäule, welche dieselbe Schwingungszahl haben würde.

Setzen wir nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  bei der Temperatur des Laboratoriums rund  $342^m$ , so ist die Länge der stehenden Welle für den Ton  $g_1$ , der von Weber zu 388 Schwingungen bestimmt wurde, nach der Gleichung

$$N = \frac{c}{2l}; \quad l = \frac{c}{2N}$$

$$l = 45,4^{\text{cm}}.$$

Für die tiefern Töne bestimmte Weber ebenfalls die Schwingungszahlen und die zugehörigen Röhrenlängen. So fand er, daß ein Ton von 365 Schwingungen auftrat bei einer Länge der Röhre von  $19,69^{\text{cm}}$ , weiter bei  $66,07$  und  $113,65^{\text{cm}}$ , also wenn die Länge der Röhre um  $46,38$  und um  $2,47^{\text{cm}}$  zugenommen hatte. Die Länge der stehenden Welle des Tones von 365 Schwingungen ist  $l = 47^{\text{cm}}$ .

Man sieht also, wie die Luftsäule der Röhre in gleichzeitige Schwingungen mit denen der Zunge versetzt wird, indem jedesmal, wenn die Länge der Röhre um die Länge einer mit dem Tone gleichen stehenden Welle vergrößert wird, derselbe Ton wiederkehrt.

Der Vorgang der Bewegungen in den Zungenpfeifen wird durch diese Erfahrungen so festgestellt, wie wir ihn vorhin aussprachen. Der Ton rührt her von dem intermittierenden Luftstrome, der durch das abwechselnde Öffnen und Schließen der Zunge hervorgebracht wird. Die Schwingungen der Zunge werden aber bedingt durch die Elastizität der Zunge und die mit den Schwingungen der Zunge isochronen und synchronen Schwingungen der Luftsäule in den Pfeifen. Diese ändern die Schwingungsdauer der Zunge ab und bewirken, daß dieselbe entweder langsamer schwingt, wenn die Pfeife angeblasen wird, oder rascher als die Zunge allein, wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Um diese Wechselwirkung der schwingenden Luftsäule und der schwingenden Platte zu verstehen, denken wir uns mit W. Weber<sup>1)</sup> eine Zungenpfeife, wo die Zunge in einer zur Längsachse der Röhre senkrechten Platte

Fig. 309.



besteht. Sei  $ad$  (Fig. 309) eine an beiden Seiten offene Röhre, deren Luftsäule in stehende Schwingungen versetzt ist, so daß bei  $\alpha, \beta, \gamma$  Schwingungsknoten und bei  $a, b, c, d$  Schwingungsmaxima sich befinden; bei  $\alpha$  sei in derselben eine Zunge, welche, wie in den Zungenpfeifen, genau dieselben Bewegungen besitzt, wie eine an dieser Stelle befindliche Luftsäule, wenn wir eine einfache offene Röhre hätten. Eine solche Platte wird die

1) W. Weber, Poggend. Ann. 17. 1829.

Schwingungen der Luft durchaus nicht stören, wenn sie unserer Annahme gemäß wegen ihrer eigenen Elastizität und wegen des sie gerade so wie eine dort befindliche Luftschicht treffenden Druckes der mitschwingenden Luft genau dieselbe Bewegung besitzt, als eine dort befindliche Luftschicht. Wenn aber eine solche Platte sich in  $m$  befindet, so kann die Luft sowohl in dem Röhrenstücke  $md$  gerade so schwingen als vorher, wenn das Röhrenstück  $ma$  ganz fortgenommen ist und die Platte  $m$  die Rolle einer Zunge in der Zungenpfeife spielt, als auch in der Röhre  $ma$ , wenn das Stück  $md$  ganz fortgenommen wird. Diese beiden Zungenpfeifen werden dann genau denselben Ton geben, da die Schwingungen in beiden gleich sind, obwohl sie verschiedene Längen haben; die Pfeife  $ma$  aber nur, wenn sie von innen, die Pfeife  $md$ , wenn sie von außen angeblasen wird.

In den Schwingungsknoten der stehenden Schwingungen ist die Luft immerfort in Ruhe, in den Längen  $\alpha\beta\dots$  hat die Luft eine hin und her gehende Bewegung, so daß sie z. B. zugleich von  $\alpha$  und  $\gamma$  sich nach  $\beta$  und in der folgenden Zeit von  $\beta$  nach  $\alpha$  und  $\gamma$  hin bewegt. Dabei haben die Teilchen  $a, b, c, d$  die schnellste Bewegung und die größten Exkursionen, in  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  dagegen treten abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen der Luft ein.

Wenn wir statt der ganzen Röhre  $ad$  nur das mit der Zunge  $m$  verschlossene Stück  $md$  nehmen, so muß, wenn die Bewegung genau so bleiben soll wie vorher, durch Anbringen der Zunge also keine Änderung stattfinden soll, die Zunge  $m$  nach außen schwingen, wenn die Luftteilchen zwischen  $m$  und  $\gamma$  nach außen schwingen, wenn also bei nicht vorhandener Zunge bei  $\beta$  eine Verdichtung einträte; dagegen nach innen, das heißt, sie muß die Röhre verschließen, wenn die Luft zwischen  $m$  und  $\gamma$  nach innen schwingt, also bei  $\gamma$  eine Verdichtung eintreten würde.

Wenn wir dagegen das mit der Zunge  $m$  verschlossene Röhrenstück  $ma$  nehmen, so bewegt sich dort die Zunge nach außen, das heißt, sie öffnet die Röhre, wenn bei  $\beta$  und auf der Strecke  $\beta\gamma$  eine Verdünnung eintritt, indem auch dann die Schwingungen der Platte mit denen der durch sie ersetzten Luftschicht gleich sein müssen. Im ersten Falle öffnet sich daher die Zunge, wenn vor ihr bei  $\beta$  und in ihrer ganzen Umgebung, da auch die Strecke  $\alpha\beta$  dann verdichtet wird, eine Verdichtung eintritt; im zweiten Falle aber, wenn die Luftschwingungen verdünnend sind, wenn bei  $m$  eine Verdünnung der Luft eintritt.

Wenn wir eine Zungenpfeife anblasen, das heißt die Luft in dem Behälter des Fußes  $F$  verdichten, so folgt aus dem Vorigen, daß die Pfeife sich verhalten muß wie die Röhre  $md$ , daß die Röhre sich öffnen muß, wenn die Schwingungen der Luft in der Nähe der Platte verdichtend sind; denn wenn die Schwingungen in der Pfeife  $md$  ganz dieselben sein sollen wie in der offenen Pfeife  $ad$ , so muß die die Zunge umgebende Luft sich gerade so verhalten, wie die an ihrer Stelle befindliche Luft in der offenen Pfeife.

Blasen wir aber die Pfeife von innen an oder bringen wir sie durch Saugen zum Tönen, das heißt machen wir die Luft im Behälter des Fußes dünner als im Innern der Pfeife, so muß die Öffnung der Pfeife mit einer verdünnenden Schwingung der Luftsäule zusammenfallen, die Luft muß, wie bei dem mit der Zunge verbundenen Röhrenstücke  $ma$ , in der Umgebung

der Zunge dünner werden, sie muß sich von dem Schwingungsknoten  $\beta$  fortbewegen, wenn die Zunge die Röhre öffnet. Denn auch hier wieder muß die Luft in der Umgebung der Zunge sich gerade so verhalten, wie in unserer Pfeife  $ad$ , wenn die Zunge  $m$  die Pfeife  $ma$  abschließen und die Bewegung doch die frühere bleiben soll.

Es folgt also daraus, daß, wenn eine Zungenpfeife durch Blasen zum Ansprechen gebracht wird, im Innern der Pfeife der Zunge ein Schwingungsmaximum zunächst liegt, wenn aber durch Saugen, ein Schwingungsknoten der Zunge zunächst liegt.

Diese Folgerung hat Weber durch folgende beiden Erfahrungssätze bestätigt.

1) Bei einer angeblasenen Pfeife besteht die Luftsäule der Pfeife aus einer beliebigen Anzahl stehender Wellen plus einem Reste, der größer als Null, aber kleiner als eine halbe stehende Welle ist.

2) Bei einer durch Saugen zum Tönen gebrachten Zungenpfeife besteht die schwingende Luftsäule aus einer beliebigen Anzahl ganzer stehender Wellen plus einem Reste, der größer als eine halbe, aber kleiner als eine ganz stehende Welle ist.

Da nun immer an dem obern offenen Ende der Pfeife bei  $a$  oder  $d$  ein Schwingungsmaximum sich befindet, so folgt aus diesen beiden Sätzen die vorige Folgerung, bei einer angeblasenen Pfeife befindet sich zunächst bei der Zunge ein Schwingungsmaximum, bei einer durch Saugen zum Tönen gebrachten ein Schwingungsknoten.

Einen Zahlenbeleg für den ersten Erfahrungssatz haben wir bereits oben mitgeteilt.

Die Zungenpfeife gab beim Anblasen einen Ton von 365 Schwingungen bei einer Pfeifenlänge

$$l = 19,7 \text{ cm} = 0 \cdot 47,0 + 19,7$$

$$l = 66,1 \text{ „} = 1 \cdot 47,0 + 19,1$$

$$l = 113,7 \text{ „} = 2 \cdot 47,0 + 19,7.$$

Jedesmal bleibt ein Rest, der kleiner ist als  $23,5 \text{ cm}$  der Länge einer halben stehenden Welle.

Aus dieser Art, wie die Schwingungen der Luft mit denen der Platte zusammentreffen, folgt nun auch, daß die Schwingungen der Zunge beim Anblasen langsamer, der Ton also tiefer, beim Ansaugen aber rascher, der Ton der Pfeife also höher werden muß.

Beim Anblasen ist nämlich, wenn die Zunge gegen das Innere der Pfeife schwingt, die Endabteilung der schwingenden Luft in jenem Rest verdünnt; sie beschleunigt daher die Zunge nach dem Innern der Pfeife, während die eigene Elastizität der Zunge derselben, da sie nach innen zu von ihrer Gleichgewichtslage sich entfernt hat, eine Beschleunigung nach außen erteilt. Die Verdünnung der Luft in der Röhre hält folglich einem Teile der Elastizität der Zunge das Gleichgewicht. Während die Zunge nach außen schwingt, ist die Endabteilung der Luft verdichtet; sie beschleunigt daher die Zunge nach außen, während die Elastizität der Zunge die Platte wieder nach der entgegengesetzten Richtung beschleunigt; also auch hier wieder wirkt der Luftdruck der Elastizität der Platte entgegen.

Da also der Einfluß der schwingenden Luftsäule der Elastizität der Platte entgegenwirkt, so schwingt die Platte langsamer, gerade so, als wenn ihre Elastizität vermindert wäre. Der Ton der Zungenpfeife ist daher stets tiefer als der der isoliert schwingenden Zunge und kann höchstens, wenn die Zunge sich gerade an der Stelle des Schwingungsmaximums befindet, wo die Luft eine hin und her gehende Bewegung ohne Verdichtung oder Verdünnung besitzt, die Tonhöhe der isoliert schwingenden Platte erhalten.

Wird die Pfeife durch Saugen zum Ansprechen gebracht, so müssen, wie man durch ganz ebensolche Überlegungen direkt erkennt, die Schwingungen der Zunge rascher, der Ton höher sein als der der isoliert schwingenden Zunge. Die Grenze ist wieder die Tonhöhe der Zunge, wenn sie gerade an der Stelle eines Schwingungsmaximums sich befindet.

Je näher die Zunge einem Schwingungsknoten rückt, um so größer ist der Einfluß der Luft, da die Verdichtungen und Verdünnungen an der Platte immer größer werden. Wenn man nun die Länge der Röhre vergrößert, so rückt dadurch in beiden Fällen die Platte dem Schwingungsknoten näher, der Ton muß sich beim Anblasen von unten daher vertiefen, bis die Pfeife sich soweit verlängert hat, daß sie wieder ein Vielfaches der Wellenlänge des ursprünglichen Tones ist; dann teilt sie sich wieder in schwingende, dem Tone der Zunge entsprechende Abteilungen und an der Zunge bildet sich wieder ein Schwingungsmaximum.

Wir müssen uns begnügen, soweit die Änderung der Tonhöhe nachgewiesen zu haben; die Größe derselben, wie sie sich aus Webers Versuchen ergibt, läßt sich ohne die vollständige Theorie von Weber, die uns hier zu weit führen würde, nicht ableiten.

### § 169.

#### **Weiche Zungen; chemische Harmonika; empfindliche Flammen.**

Während bei den bisher besprochenen Zungen durch den Einfluß der in der Röhre schwingenden Luftsäule der Ton der freien Zunge nur mehr oder weniger modifiziert wird, hängt bei einer andern Gattung von Zungen der Ton lediglich von den Schwingungen der mit Hilfe der Zungen bewegten Luftsäule ab, bei den sogenannten weichen Zungen. Weiche Zungen sind die aus elastischen Rohrplatten geschnitzten Zungen der Holzblasinstrumente, Klarinette, Oboe und Fagott, sowie die zur Tonerzeugung der Blechblasinstrumente benutzten menschlichen Lippen. Die Klarinette hat eine breite Zunge, welche im Mundstücke derselben ähnlich befestigt ist wie die Zungen in den Rohrwerken der Zungenpfeifen; Oboe und Fagott haben zwei Zungen, welche am Ende des Mundstücks einander gegenüber gestellt und nur durch einen schmalen Spalt voneinander getrennt sind. Bläst man hinein, so wird der Spalt durch den Druck der im Munde zusammengepreßten Luft abwechselnd geschlossen, abwechselnd durch die Elastizität der Zungen geöffnet, und dieser intermittierende Luftstrom erzeugt die Schwingungen in den mit den Zungen verbundenen Röhren, die wir dann als Ton wahrnehmen.

Bei den Blechblasinstrumenten wird die schwingende Bewegung der Luft an dem Mundstücke durch rasch folgendes abwechselndes Schließen und Öffnen der Lippen erzeugt. Das Mundstück hat dort eine trichterförmige

Gestalt (Fig. 310). Die Lippen des Bläfers liegen in der obern Höhlung und sind im Ruhezustande geschlossen. Durch den Druck der in der Mundhöhle angesammelten Luft werden sie geöffnet, und der Luftstrom dringt in das Instrument. Ist eine geringe Menge Luft aus dem Munde entwichen, so schließen sich die Lippen wieder, da die Spannung der Luft

Fig. 310.



kleiner geworden ist. Da dann die Luft keinen Ausweg hat, öffnet ihr Druck die Lippen wieder, und so erneuert sich das Spiel der Lippen immerfort. Der intermittierende Luftstrom erzeugt in dem Rohre stehende Schwingungen, und diese sind es, die wir als Ton wahrnehmen.

Damit nun aber diese stehenden Schwingungen existieren können, müssen die Stöße bei den Holz- und Blechblasinstrumenten in derselben Periode erfolgen, es müssen also die Zungen mit denselben isochron schwingen. Die Schwingungen der weichen Zungen hängen nun nach der von Helmholtz<sup>1)</sup> entwickelten Theorie derselben nicht wesentlich von der Elastizität der Zungen ab, sondern von der in der Röhre schwingenden Luft, sie schwingen mit der Luftsäule isochron, wenn der durch die in der Tiefe des Rohres vorhandenen Luftwellen bewirkte Wechsel des Luftdruckes hinreichend ist, um die Zungen in eine schwingende Bewegung zu versetzen. In einer schwingenden Luftsäule ist aber der Druckwechsel am größten in den Schwingungsknoten, wie an dem geschlossenen Ende einer gedeckten Pfeife; deshalb gibt eine solche mit einer weichen Zunge versehene Röhre diejenigen Töne, welche die Röhre geben würde, wenn sie an der Stelle der Zunge geschlossen und unten angeblasen würde.

Befindet sich deshalb die Zunge, wie bei der Klarinette, an dem einen Ende eines zylindrischen engen Rohres, so sind die Töne der Grundton der Röhre, die Quint seiner Oktave, die Terz der folgenden Oktave u.s. w. bei einer gedeckten Pfeife derselben Länge. Man kann alle die Töne erzeugen, indem man das Rohr in verschiedener Stärke anbläst.

Ist das Rohr kegelförmig, so ist die Reihe der Töne eine andere. Für an beiden Seiten offene konische Röhren, oder für solche, welche vollständige Kegel und an der Spitze geschlossen sind, ergibt sich sowohl aus den Versuchen Zamminer's<sup>2)</sup> als aus der Theorie von Helmholtz<sup>3)</sup>, daß die in ihnen möglichen Töne genau übereinstimmen mit denen einer deren Länge genau gleichen offenen zylindrischen Röhre. Ist dagegen das Rohr ein abgestumpfter Kegel, und die schmalere Fläche verschlossen, so stimmt die Reihe der Töne weder mit der einer offenen noch mit der einer gedeckten Pfeife überein, sie nähert sich derjenigen einer offenen Pfeife um so mehr, je kleiner das Stück ist, welches an einem vollständigen Kegel fehlt. Die Tonreihe läßt sich dann nur durch eine transzendente Gleichung berechnen. Ganz ebenso verhält es sich mit den kegelförmigen Röhren, die mit Zungen versehen sind, also mit Oboe und den Blechblasinstrumenten. Setzt man die Länge des Rohres  $l$  und die an derselben anzubringende Korrektur für das untere offene Ende  $a$ , so erhält man die Schwingungszahlen  $n$  aus der Gleichung

1) Helmholtz, Poggend Ann 114 1861

2) Zamminer, Poggend Ann 97 1858

3) Helmholtz, Poggend Ann 114. 1861 Tonempfindungen p 890



$$\operatorname{tang} \frac{2\pi(l+a)}{c} = - \frac{2\pi r}{c}$$

worin  $r$  der Abstand der Zunge von der ideellen Spitze des Kegels und  $c$  die Geschwindigkeit des Schalles bedeutet.<sup>1)</sup> Um die entstehenden Töne zu übersehen, geben wir im Folgenden die Reihenfolge, welche Helmholtz für eine konische Röhre von Zink beobachtet und berechnet hat, deren Länge 122,7 oder mit der Korrektur 124,77<sup>cm</sup> war, deren untere Öffnung 5,5, deren obere 0,7<sup>cm</sup> war, für welche also  $r$ , der Abstand des obern Endes von der ideellen Spitze des Kegels 18<sup>cm</sup>,2 war.

Die Tabelle gibt die Wellenlängen, also die Werte  $\frac{c}{n}$  und daneben die Länge der offenen oder gedeckten Pfeife, in welchen der betreffende Ton als Grund- oder Oberton bestehen kann.

Ton		Wellenlänge	Länge der entsprechenden Pfeife	
			offen	gedeckt
1	<i>H</i> — . . . . .	283,61	141,80	70,90
2	<i>h</i> — . . . . .	139,83	139,84	104,88
3	<i>dis</i> <sub>1</sub> . . . . .	91,81	137,71	114,76
4	<i>h</i> <sub>1</sub> + . . . . .	67,94	135,88	118,89
5	<i>dis</i> <sub>2</sub> . . . . .	58,76	134,39	120,95
6	<i>g</i> <sub>1</sub> . . . . .	44,40	133,21	122,11
7	<i>h</i> <sub>2</sub> . . . . .	37,79	132,26	122,82
8	<i>c</i> <sub>1</sub> . . . . .	32,87	131,50	123,28
9	<i>dis</i> <sub>3</sub> . . . . .	29,22	131,47	124,17

Die in den beiden letzten Spalten gemachten Angaben sind so zu verstehen, daß die in einer Horizontalreihe angegebenen Pfeifenlängen den in derselben Reihe stehenden Ton als den sovielten Oberton hat, als dieser Ton der Oberton der Zungenpfeife ist. Eine offene Pfeife z. B., deren Länge 134,39<sup>cm</sup> ist, gibt als fünften Ton dasselbe *dis*<sub>2</sub>, welches als fünfter Ton in der Zungenpfeife entsteht, und ebenso würde es der fünfte Ton einer gedeckten Pfeife von 120,95<sup>cm</sup> Länge sein, also neunmal soviel Schwingungen haben, wie der Grundton einer solchen Pfeife.

Man sieht, es würden bei dieser Röhre die ersten Töne, wenn man die Reihe als diejenige einer offenen Pfeife betrachten wollte, gegen die spätern viel zu tief sein, erst die letzten würde man als die einer offenen Pfeife betrachten können, deren Länge größer ist als die Länge der konischen Röhre und kleiner als die des ganzen Kegels. Andererseits kann man die Töne als jene einer gedeckten Pfeife auffassen, deren Länge gleich jener der konischen Röhre ist.

Je kleiner übrigens der Wert von  $r$  ist, das heißt je näher sich die Zunge der Spitze des Kegels befindet, um so näher rückt die Reihe der Töne denen einer offenen Pfeife, welche sie auch nach der Gleichung für  $r = 0$  erreicht, denn die Werte, für welche

$$\operatorname{tang} \frac{2\pi(l+a)}{c} = 0$$

1) *Helmholts*, *Poggend Ann.* 114 p. 326. 1855.

sind

$$\frac{2n}{c}(l + a) = 1, 2, 3 \dots p,$$

also die Reihe der natürlichen Zahlen. Ist  $r$  klein, so kann man die Tonreihe als jene einer offenen Pfeife betrachten, deren erste Töne gegen die folgenden etwas zu tief sind.

Als eine besondere Art weicher Zungen kann man die Flammen betrachten, welche die chemische Harmonika zum Tönen bringen. Wenn man in ein an beiden Enden offenes Rohr, ein Metall- oder Glasrohr von beliebiger Länge und etwa 2—4<sup>cm</sup>, bei langen Röhren auch größerem, Durchmesser von unten her eine Gasflamme einführt, so gibt die Röhre, wenn die Flamme passend weit in die Röhre eingeschoben ist und eine passende Größe hat, einen kräftigen Ton, der an Höhe gleich ist dem Grundtone, den die Röhre als offene Pfeife gibt. Es wird also die Luft der Pfeife durch die hineingeschobene Flamme zum Schwingen gebracht. Daß die Höhe des Tones in der Tat nur von der Länge der Pfeife abhängt, hat Tyndall<sup>1)</sup> durch einen sehr hübschen Versuch gezeigt. Man steckt auf das Rohr einen Zylinder aus Pappendeckel, der sich mit sanfter Reibung auf dem Rohr verschieben läßt, zunächst so, daß der obere Rand des Zylinders mit dem oberen Rande des Rohres zusammenfällt. Läßt man die Röhre tönen, und zieht den Pappeylinder hinauf, so daß die Röhre verlängert wird, so wird der Ton tiefer, und zwar nach dem Gesetze der Längen der offenen Pfeifen. Man kann sich deshalb leicht eine Reihe von Röhren herstellen, welche etwa die Töne der Tonleiter geben.

Die Entstehung des Tones ist auf das bei jeder durch ausströmendes Gas gespeisten Flamme vorhandene Flackern zurückzuführen; durch ein solches zunächst ganz unregelmäßiges Flackern gerät die Luft der Röhre, bzw. da die Röhre als Zugröhre wirkt, der aufsteigende Luftstrom in eine schwingende Bewegung, diese wird von den Grenzen der Röhre reflektiert und veranlaßt stehende Schwingungen, denen sich die Flamme, wenn sie von passender Größe ist, sofort anpaßt und zwar so, daß sie gerade so vibriert, wie die Flamme einer Königschen Flammenkapsel. Die Flamme bietet im rotierenden Spiegel ganz dasselbe Bild.

Da größere Flammen sich den raschern Schwingungen nicht so leicht anpassen, so müssen die Flammen in längern Röhren größer, in kürzen kleiner sein. Hat man in einer Röhre die Flamme passend gestellt, so daß sie den Grundton der Röhre gibt, und man verkleinert sie, so hört die Röhre zunächst auf zu tönen, verkleinert man die Flamme weiter und weiter, so gibt sie bei passender Verkleinerung wieder einen Ton, der aber jetzt der erste Oberton der Röhre ist. Tyndall nahm zwei Glasröhren, die eine von 230<sup>cm</sup>, die andere von 115<sup>cm</sup> Länge. Er brachte die erste, indem er die Flamme einführte, zum Tönen; indem er dann die lange Röhre mit der kürzern vertauschte und diese über die Flamme schob, tonte sie zunächst nicht; Verkleinerung der Flamme brachte die kürzere Röhre zum

1) Tyndall, Der Schall, deutsche Übersetzung. Braunschweig 1869. p. 263. Die Tonerzeugung in der chemischen Harmonika wurde zuerst mit Wasserstoff-  
flammen von Higgins (nach Tyndall l. c. p. 268 im Jahre 1777) beobachtet; ~~Man~~  
gibt schon in seiner Akustik das wesentliche der ganzen Erscheinung



Tönen. Als er nun die längere Röhre wieder über die Flamme schob, tönte auch diese wieder, gab aber ihren ersten Oberton, die Oktave, welche von gleicher Höhe ist, wie der Ton der halb so langen Röhre.

Insoweit sind also die Flammen selbständiger als die weichen Zungen, sie passen sich nicht jeder Schwingung an und können deshalb nicht jeden Ton unterhalten. Eben deshalb ist auch der Ton der Röhre in geringerem Grade von der Größe der Flamme abhängig wie die Töne der offenen Pfeife von der Stärke des Anblasestromes. Stimmt man zwei Röhren ganz gleich und vergrößert darauf eine der beiden Flammen, so hört man sofort die Verstimmung des Tones, er wird etwas tiefer.

Ebenso wie durch das Flackern der Flamme die Schwingungen der Luft in den Röhren erregt werden, so werden, wie Graf Schaffgotsch<sup>1)</sup> zuerst beobachtet hat, auch die Flammen durch die Schwingungen der Luft zum Flackern gebracht. Bringt man eine Flamme in ein an beiden Enden offenes Rohr, die das Rohr nicht zum Tönen bringt, und gibt außerhalb den Grundton oder ersten Oberton des Rohres an, so kommt die Flamme zum Flackern. Ist die Flamme so gestellt, daß es nur mehr einer geringen Veränderung derselben bedarf, damit sie das Rohr zum Tönen bringe und man gibt außen den Ton der Röhre an, so gelangt die Flamme zum Singen.

Auch außerhalb einer solchen Röhre können frei brennende Flammen empfindlich sein, wie zuerst Leconte an einer in einem Konzertsaal brennenden Flamme beobachtet hat.<sup>2)</sup> Es war zufällig, wie Leconte nachher feststellte, eine Flamme so reguliert, daß sie fast das für Gasflammen bei zu hohem Druck charakteristische Rauschen zeigte. Die Flamme geriet besonders durch die starken Töne des Violoncells in lebhafte Schwingungen.

Das Verhalten und die Darstellung solcher im Freien brennender empfindlicher Flammen ist besonders von Barret und Tyndall<sup>3)</sup> untersucht worden. Als wesentliche Bedingung der Empfindlichkeit ergab sich ein derartig hoher Druck des Gases, daß die Flamme fast zum Rauschen kommt, und weiter, daß nicht unmittelbar vor dem Brenner ein Hahn mit zu enger Öffnung ist. Wenn man in dieser Weise eine Flamme eines Fischschwanz- oder Fledermausbrenners hergerichtet hat, so fahren aus ihr, wenn die richtigen Töne angegeben werden, sieben Zacken hervor. Am auffallendsten werden die Erscheinungen, wenn man aus einem passenden Einlochbrenner, etwa einer Glasröhre, die zu einer passenden Öffnung ausgezogen und abgeschnitten ist, aus einem unter passend hohem Druck stehenden Gasometer gespeiste lange Flammen hervortreten läßt. Man kann hierdurch viele Zentimeter lange Flammen erhalten. Ist der Druck so reguliert, daß die Flamme gerade noch nicht zum Flackern kommt, so reagiert sie auf hohe Töne so, daß sie bei jedem passenden Tone zusammenschrumpft und ins Flackern gerät; bei dem Tönen kleiner Glocken, bei dem Klirren eines Schlüsselbundes gerät sie in ein lebhaftes Hüpfen.

Ebenso wie Flammen sind unter denselben Bedingungen auch nicht

1. Graf Schaffgotsch, Poggend. Ann. 101 p. 471. 1857.

2. Leconte, Philosoph. Mag. 15. 4 p. 235. 1858.

3. Die Resultate der Untersuchungen von Barret und Tyndall sind ausführlich in Tyndall's Buch „Der Schall“ mitgeteilt.

brennende Gasströme empfindlich, wie man erkennt, wenn man die Ströme etwa mit Rauch sichtbar macht.

Nach Tyndall flackert eine solche Flamme, wenn das Gas infolge der Reibung in Schwingung gerät; wenn man nun den Druck des Gases so reguliert, daß eine kleine Vermehrung des Druckes die Flamme zum Flackern bringen würde, und erzeugt in der Nähe eine Schwingung, welche der der flackernden Flamme entspricht, so teilt sich die Schwingung der Flamme mit, und sie kommt infolge der Schwingung gerade so zum Flackern wie durch die kleine Vermehrung des Druckes. Auch hier zeigt sich wieder, daß die Gasströme nur auf Schwingungen bestimmter Perioden reagieren.

Bouty<sup>1)</sup> stellte fest, indem er Gase aus verschiedenen Öffnungen ausströmen ließ, daß kreisrunde Öffnungen die größte Empfindlichkeit liefern. Benutzt er reinen Wasserstoff, so wird die Flamme ganz unempfindlich, mischt er hingegen ein schwereres Gas, z. B. Kohlensäure bei, so reagiert die Flamme viel besser. Ein Gemisch von Wasserstoff und Acetylen hat den Vorteil, eine helle und zugleich sehr empfindliche Flamme zu erzeugen.

Diese empfindlichen Flammen sind ein vorzügliches Reagens auf bei ihnen ankommende Schallschwingungen; wir werden sie noch als solche verwerten.

Zu erwähnen an dieser Stelle ist auch noch die „sprechende Bogenlampe“ von Th. Simon<sup>2)</sup>. Sie beruht kurz auf folgendem Prinzip: Über den Stromkreis (Gleichstrom) einer Bogenlampe lagert man die Stromschwankungen eines Mikrophons, die durch irgend welche Schallschwingungen hervorgebracht sind. Die Übertragung geschieht z. B. mit einer Induktionsspule, bei der die eine Windungslage von dem Lampenstrom, die andere von dem Mikrophonstrom durchflossen wird. In betreff der elektrischen Einrichtung sei auf den dritten Band verwiesen.

Die Stromschwankungen erzeugen im Flammenbogen gewisse Änderungen, die sich nach außen wieder als Schallwellen zu erkennen geben. Auf die möglichen und wahrscheinlichen Änderungen im Bogen selbst kann hier nicht eingegangen werden. Bei Anwendung guter Mikrophone können die Töne des Bogens sehr laut werden. Wird also in das Mikrophon hineingesprochen, so gibt die Bogenlampe das Gespräch wieder laut von sich.

## § 170.

**Die Blasinstrumente.** Die sämtlichen Blasinstrumente lassen sich als Anwendungen der Labialpfeifen und Zungenpfeifen betrachten. Die Orgelpfeifen sind Labialpfeifen und Zungenpfeifen in der von uns betrachteten Form; das Flageolet, die Flöten sind Labialpfeifen, die Harmonika und das Äolodikon Zungen ohne Pfeifen, die Klarinetten, Bassethörner, Oboen, Fagotte sind Zungenpfeifen mit weichen Zungen, Klarinette und Bassethorn mit zylindrischem, Oboe und Fagott mit kegelförmigem Ansatz.

1) *E. Bouty*, Journ. de phys. 5. (3.) p. 404. 1896. C. R. 122. p. 372. 1896.

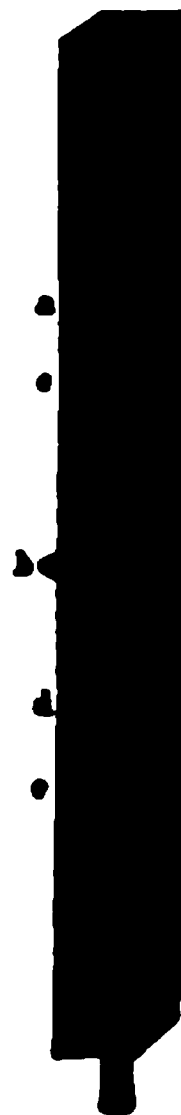
2) *Th. Simon*, Wied. Ann. 64. p. 233. 1898. Phys. Z. S. 2. p. 253. 1901. Ferner Literatur über diesen Gegenstand: *O. Hartmann*, Elektrot. Z. S. 20. p. 369. 1899; *E. Rhumer*, Phys. Z. S. 2. p. 325. 1901; *D. Mechan.* 9. p. 77 und 217. 1901.

rohr, bei denen die Zungen der Spitze des Kegels sehr nahe liegen: die Erzeugung des Tones ist darnach bei allen diesen Instrumenten nach dem Vorigen gegeben.

Wir haben nur einiges hinzuzusetzen, um die Mittel zu verstehen, durch welche man auf diesen Instrumenten anstatt des Grundtones und seiner harmonischen Obertöne eine ausgedehnte Reihe von Tönen erzeugt.

Wenn man in die Wand einer Pfeife, Fig. 311, an irgend einer Stelle ein Loch einbohrt, so kann an dieser Stelle die Luft auch nach andern Richtungen, als nach der Längsachse der Röhre bei einer ankommenden Bewegung entweichen; es tritt demnach auch dort eine Reflexion ein, wie an dem Ende einer offenen Pfeife; es muß bei stehenden Schwingungen dort sich ein Schwingungsmaximum bilden. Blasen wir eine offene Pfeife so an, daß sie ihren zweiten Ton gibt, also mit zwei Knoten, jeder  $\frac{1}{2}$  vom Ende der Röhren und einem Schwingungsmaximum in der Mitte, so wird es demnach keine Änderung in dem Tone der Pfeife machen, wenn wir in der Mitte der Wand eine Öffnung herstellen, da sich dort schon ein Schwingungsmaximum befindet. Durch die Öffnung in der Wand wird die Pfeife gewissermaßen halbiert und der Ton wird der Grundton dieser halb so langen Pfeife. Öffnen wir dagegen die Pfeife bei *a* oder an der Stelle des untern Schwingungsknotens bei *c*, Fig. 311, so muß jetzt an diesen Stellen ein Schwingungsmaximum entstehen und der Ton springt in die höhere Oktave über, die Luftsäule zerlegt sich in sechs schwingende Abteilungen, deren Knoten  $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$  der Länge der Röhre von dem Boden der Pfeife entfernt sind.

Fig. 311.



Ebenso würde eine Änderung des Tones entstehen müssen, wenn wir an irgend einer andern Stelle der Wand außer bei *b* eine Öffnung anbringen, da stets an dieser Stelle ein Schwingungsmaximum eintreten muß, die Länge der schwingenden Abteilungen also geändert wird. Je nach der Stelle der Öffnung wird dann der Ton ein anderer.

Ganz dasselbe ist der Fall, wenn wir durch verändertes Anblasen einen der andern Töne der Pfeife hervorbringen; auch dann wird eine angebrachte Öffnung im allgemeinen den Ton ändern und durch eine Öffnung an einer bestimmten Stelle können wir einen bestimmten Ton hervorrufen. Diesen Kunstgriff wendet man bei den meisten Blasinstrumenten an, um eine bestimmte Tonreihe zu erhalten, sowohl bei den Flöten als den Zungeninstrumenten, den Klarinetten usw.

Haben wir z. B. eine Flöte, deren Rohr als Grundton den Ton  $d_1$  angibt und versehen wir dieselbe in passenden Abständen mit sechs Öffnungen von ihrem Ende zur Mundöffnung hin, so wird die Flöte beim Verschlusse aller der Löcher den Ton  $d_1$  geben; öffnen wir sie nun nach und nach, so werden wir dadurch die Reihe der Töne  $c_1, f_1, g_1, a_1, h_1, c_2$  erhalten können.

Um z. B. den Ton  $a_1$  zu erhalten, bedarf es nicht einmal einer Öffnung der weiter von dem Mundloch entfernten Löcher, bleiben die drei letzten Löcher geschlossen und wir öffnen nur das dritte Loch, von der Mundöffnung an gerechnet, so muß schon der Ton  $a_1$  entstehen.

Durch verstärktes Anblasen erhalten wir bei geschlossenen Löchern den zweiten Ton der Röhre  $d_2$ , und bei reihenweiser Öffnung erhalten wir die Oktaven der vorigen Töne  $e_2$ ,  $f_2$  usw. Werden noch weitere Öffnungen oder Klappen zwischen den vorigen angebracht, um die erhöhten oder vertieften Töne  $dis$ ,  $fis$  . . zu erzeugen, so sind wir imstande, mit diesem Instrumente die Töne der chromatischen Tonleiter durch die zwei Oktaven  $d_1$  bis  $d_3$  und andere höhere Töne zu erzeugen.

Bei den Blechblasinstrumenten, Trompete, Horn, Posaune, hat man diese Hilfsmittel der Tonerhöhung nicht, sie sind deshalb auf ihre natürlichen Töne beschränkt. Da diese Instrumente aus langen kegelförmigen Röhren bestehen, bei welchen das Mundstück der Spitze des Kegels ziemlich nahe liegt, so ist die Tonreihe dieser Instrumente sehr nahe derjenigen einer offenen Pfeife gleich. Um die verschiedenen hohen Töne hervorzu- bringen, hat der Bläser hier nur das Mittel, die Stärke des Luftstromes und damit die Schnelligkeit, mit denen die Öffnungen des Mundes sich folgen, zu ändern. Je stärker der Luftdruck ist, um so rascher folgen sich die einzelnen Stöße, ein um so höherer Ton tritt aus dem Instrumente hervor. Die Kunst des Bläfers ist es, die betreffenden Drucke für die einzelnen Töne im Gefühl zu haben und hervorzubringen.

Um eine große Anzahl von Tönen auf diesen Instrumenten zu haben, macht man sie sehr lang und gibt ihnen nur eine kleine Weite, da die Erfahrung gelehrt hat, daß die engen Röhren leichter ansprechen. Das Horn hat nach Zamminer eine Länge von 27 Fuß, sein Grundton ist daher  $es_{-2}$ , und die Reihe der Töne ist

1 $es_{-2}$	7 $des_1 -$	13 $h_1 +$	19 $fis_2 +$
2 $es_{-1}$	8 $es_1$	14 $c_2 +$	20 $g_2$
3 $b_{-1}$	9 $f_1$	15 $d_2$	21 $gis_2 -$
4 $es$	10 $g_1$	16 $es_2$	22 $as_2 +$
5 $g$	11 $as_1 +$	17 $e_2$	23 $a_2 +$
6 $b$	12 $b_1$	18 $f_2$	24 $b_2$

Die ersten beiden Töne werden nicht gebraucht, in den höhern Lagen sieht man, liegen die Töne ziemlich nahe beisammen, sie sind indes zum Teil höher als die hingeschriebenen. Um diese Töne brauchbar zu machen wendet man dieselbe Art des Stimmens an, wie bei den offenen Pfeifen: man macht die Instrumente zu teilweis gedeckten, indem der Spieler die geballte Faust in die trichterförmige Erweiterung bringt. Bei den Posaunen helfen die Auszüge des Rohres nach, die gleichzeitig den Zweck haben, die Instrumente in verschiedenen Tonarten brauchen zu können. Bei den Hörnern erreicht man letzteres durch Einschieben von Röhrenstücken in die Windungen.

In neuerer Zeit hat man auch an den Blechinstrumenten Klappen zur Veränderung der Tonhöhe angebracht, der Klang solcher Instrumente hat indes eine viel geringere Fülle.

Die Klänge der Zungeninstrumente sind viel schärfer als jene der Labialpfeifen und Streichinstrumente, da in ihnen wegen der scharfen Diskontinuität bei der Tonerzeugung, der einzelnen durch den Schluß der Zungen unterbrochenen Stöße, viel mehr und höhere Obertöne vorhanden sind. Die schärfsten Klänge haben die Blechblasinstrumente, da in diesen

die schnellern Schwingungen der hohen Töne nicht so rasch vernichtet werden.<sup>1)</sup> Darin beruht im wesentlichen die Klangverschiedenheit zwischen den Blechinstrumenten und den theoretisch ähnlich gebauten Holzblasinstrumenten wie Oboe und Fagott. Der Unterschied letzterer gegen die Klarinette beruht in der Verschiedenheit der Obertöne, die Klarinette hat nur die ungeradzahligen, Oboe und Fagott haben auch die geradzahligen.

## § 171.

**Die menschliche Stimme.** Das menschliche Stimmorgan ist nach den Untersuchungen von Johannes Müller<sup>2)</sup> als eine Zungenpfeife anzusehen, da der Vorgang, mittels dessen wir die Töne erzeugen, sowie die Mittel, um ihre Höhe zu ändern, wesentlich mit denen der Zungenpfeifen übereinstimmen.

Das Stimmorgan des Menschen befindet sich im Kehlkopf *k* an dem oberen Ende des die Lungen mit der Mund- und Nasenhöhle *M* und *N* in Verbindung setzenden Luftweges, der Luftröhre *L* (Fig. 312 und Fig. 313).

Der Kehlkopf ist aus einer Anzahl fester Knorpel gebildet, zwischen denen die Stimmbänder ausgespannt sind. Die feste Basis des Kehlkopfes ist der Ringknorpel, *cartilago cricoides*, ein fester Ring, der das obere Ende der Luftröhre umschließt, *a* Fig. 312 im Durchschnitt, und Fig. 313 von der Seite gesehen, und welcher hinten höher ist als vorn. Auf diesem ruht als größere, aber nach hinten offene Umhüllung des Kehlkopfes der Schildknorpel, *cartilago thyreoides*, *b* Fig. 312 und Fig. 313, bestehend aus zwei Platten, die mit ihren vorderen Rändern in einer nach vorn am Halse hervorspringenden Kante fest verwachsen zusammenstoßen, wie Fig. 312 bei *b* im Durchschnitt, Fig. 313 bei *b* von der Seite und Fig. 314 von oben gesehen zeigt.

Der Schildknorpel ist um eine Achse drehbar, *d* Fig. 313 und 314, die sich an einem Fortsatze befindet, welcher von der untern Ecke des hintern freien Randes der Schildknorpelplatte an jeder Seite ausgeht, und welcher andererseits im Ringknorpel befestigt ist. Die Richtung der Achse, um welche sich der Schildknorpel drehen kann, ist Fig. 314 durch die Linie *ce* angedeutet; die Bewegung, welche er also annehmen kann, ist nach vorn und herab gerichtet und nach hinten und hinauf. Der Kante des Schildknorpels, in welcher die beiden Platten zusammenstoßen, gegenüber, stehen auf dem erhöhten hintern Rande des Ringknorpels, dicht nebeneinander, die beiden Gießbeckenknorpel, *cartilagine arytaenoides*, *c* Fig. 313 von der Seite und 314 von oben gesehen. Ihre Basis steht mit dem Ringknorpel durch ein Gelenk in Verbindung, das ihnen gestattet, sich erstens vor- und rückwärts zu bewegen, also sich dem Schildknorpel zu nähern und von ihm zu entfernen, zweitens nach rechts oder links zu bewegen, also einander zu nähern oder voneinander zu entfernen.

Von der Basis jedes der Gießbeckenknorpel springt eine Ecke nach

1. König meint, daß die Schärfe des Klanges der Blechblasinstrumente auch daher rühre, daß die Obertöne, wie er bei seiner Pfeife gefunden hatte, § 166, nicht ganz rein seien. Die Ansicht ist nach den Bemerkungen des § 166 wohl nicht richtig.

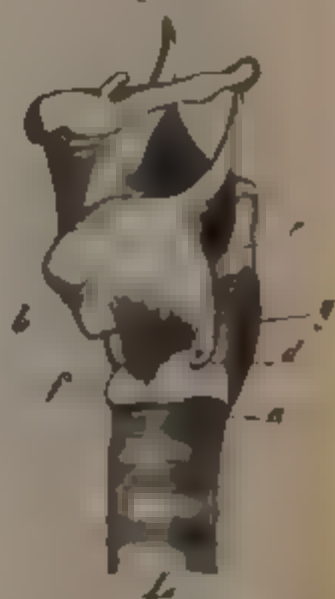
2. Johannes Müller, Handb. d. Physiologie des Menschen 2 p. 179 ff.

vorn vor, der *processus vocalis*. Zwischen diesen beiden Ecken und der einspringenden Kante, in welcher die beiden Platten des Schildknorpels zusammenstoßen, sind die Stimmbänder *l* (Fig. 312, 314, 315) ausgespannt. Dieselben sperren die Luftröhre bis auf eine schmale Ritze, die Stimmritze, welche in der Ansicht von oben (Fig. 314) dunkel gehalten ist, ab. Nur noch eine kleine Öffnung befindet sich als Verlängerung der Stimmritze zwischen den Rändern der Gießbeckenknorpel, die sogenannte Atemritze. Für gewöhnlich sind wahrscheinlich die Stimmbänder ganz zusammengelegt und die Stimmritze geschlossen, so daß der Luftweg nur durch die Atemritze geöffnet ist.

Fig. 312



Fig. 313



Die Stimmbänder sind die Zungen des mit der Zungenpfeife zu vergleichenden Stimmapparates, über ihnen befindet sich als Ansatzröhre die Fortsetzung des Luftweges. Zunächst über den Stimmbändern befindet sich eine nach oben von zwei parallel mit den Stimmbändern verlaufenden Schleimhautfalten, den falschen Stimmbändern *m* (Fig. 315), verschlossene Höhlung, der *ventriculus Morgagni* *n* (Fig. 312 und Fig. 313). Die falschen Stimmbänder verbinden die Gießbeckenknorpel mit dem Kehlkopf, der epiglottis; und über ihnen endet sich der Luftweg in den Schlund, der aus der Mundhöhle und Nasenhöhle ausläuft.

Das Stimmorgan vervollständigen die Muskeln, welche durch Bewegung des Schildknorpels und der Gießbeckenknorpel die Stimmbänder schließen



oder öffnen, spannen oder erschlaffen. Die Stimmbänder werden gespannt durch den *Musculus cricothyreoideus f* (Fig. 313), welcher den Schildknorpel nach vorn, und den *cricoarytaenoides posterior g* (Fig. 313 und Fig. 314), der den Gießbeckenknorpel nach hinten herunter zieht. Die Stimmbänder werden erschlafft durch den *musculus thyroarytaenoides i* (Fig. 314), welcher den Schildknorpel und Gießbeckenknorpel gegen einander und den *musculus cricoarytaenoides anterior h* (Fig. 314), welcher den Gießbeckenknorpel nach vorn zieht.

Die Stimmritze wird geschlossen durch die *musculi arytaenoides k* (Fig. 314), welche an beiden Gießbeckenknorpeln inserieren und dieselben gegeneinander ziehen, sie wird geöffnet durch die beiden *musculi cricoarytaenoides g* und *h* (Fig. 314), welche, indem sie zusammenwirken, die Gießbeckenknorpel seitwärts herabziehen.

Durch Versuche an aufgeschnittenen Kehlköpfen sowohl, als an lebenden Menschen, welche eine Lufröhrenfistel besaßen und durch Beobachtungen mit dem Kehlkopfspiegel ist es erwiesen, daß zur Tonbildung die Atem-

Fig. 314

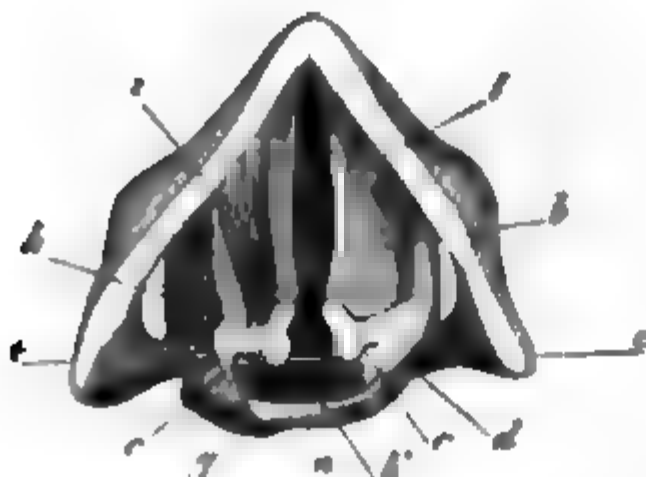
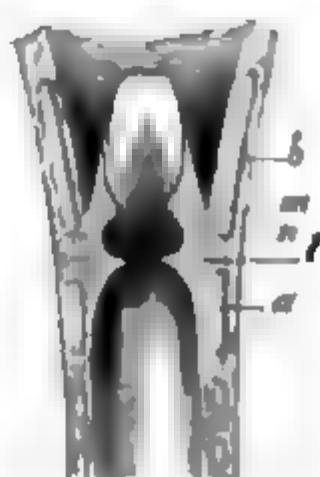


Fig. 315



ritze vollständig geschlossen und ebenso die Ränder der Stimmbänder fast vollständig aneinander gelegt werden. Zugleich müssen die Stimmbänder durch die betreffenden Muskeln in einem gewissen Grade gespannt sein.

Der aus den Lungen dringende kräftige Luftstrom öffnet die Stimmritze, deren Bänder dann gerade so wie die Zunge der Zungenpfeife in Schwingungen geraten. Diese Schwingungen sieht Johannes Müller als das Tongebende an, nicht die durch das abwechselnde Schließen oder mehr oder weniger Öffnen derselben entstehenden Luftstöße. Die Gründe, welche ihn bestimmen, von der Weberschen Ansicht der Tonbildung bei den Zungenpfeifen abzugehen<sup>1)</sup>, sind indes nach Serbeck's Kritik derselben<sup>2)</sup> nicht beweisend.

Was indes als das eigentlich Tonbildende anzusehen sei, ist im Effect ziemlich einerlei, da so wie so die Tonhöhe nach beiden Ansichten von der Schwingungszahl der Bänder abhängt, indem jeder ganzen Schwingung derselben auch ein Stoß der austretenden Luft entspricht.

Bei der menschlichen Stimme haben wir einen doppelten Apparat zu

<sup>1)</sup> J. Müller, a. a. O. p. 175.

<sup>2)</sup> A. Serbeck, in *Dover's Repertorium* 6 1842.



unterscheiden, den tongebenden, der die Höhe der Töne bestimmt, und den Sprechapparat, der sie zu artikulierten Lauten macht.

Die höheren Teile der Luftwege, der ventriculus Morgagni und der Schlund dienen in bezug auf die Töne der menschlichen Stimme nur wie ein Schallbecher bei der Zungenpfeife, sie dienen, indem die in ihnen enthaltene Luftsäule und die umgebenden Weichteile mitschwingen, nur zur Verstärkung des Tones. Müller zeigte das an ausgeschnittenen Kehlköpfen. Beim Anblasen von unten gaben die unteren Stimmbänder bei enger Stimmritze einen vollen und reinen Ton, der den Tönen der menschlichen Stimme nahe kam, und die sich von den Tönen, welche man bei Anwesenheit des ventriculus Morgagni, der oberen Stimmbänder und der Epiglottis erhielt, nur durch geringere Stärke unterscheiden.

Die Tonhöhe hängt nur von der Spannung der Stimmbänder ab und von ihrer Länge, nicht aber davon, ob die Stimmritze etwas mehr oder weniger geöffnet ist, jedoch spricht der Ton leichter an bei enger Stimmritze,

Die menschliche Stimme hat überhaupt einen Umfang von nicht ganz vier Oktaven, die sich aber niemals in einem Individuum vereinigt finden, sie reicht vom sogenannten großen *E*, also dem Tone  $c_{-1}$ , bis zum dreigestrichenen *C*. Man unterscheidet Männer- und Frauenstimmen, und bei erstern Baß und Tenor, bei letztern Alt und Sopran.

Der Umfang der Stimmen ist in der Regel

Baß . . . . .	$e_{-1}$	—	$f_1$
Tenor . . . . .	$c$	—	$h_1$ oder $c_2$
Alt . . . . .	$f$	—	$f_2$
Sopran . . . . .	$c_1$	—	$c_3$ .

Die Stimmapparate unterscheiden sich bei diesen Stimmen durch die Länge der Stimmbänder. Bei den Männern springt die Kante des Schildknorpels viel weiter vor als bei den Frauen, und von den Männern besitzen die Bassisten die größten Kehlköpfe. Einige wenige Messungen von Johannes Müller haben als mittlere Länge der männlichen Stimmbänder 18 und der weiblichen Stimmbänder etwas über 12<sup>mm</sup>, also ein Verhältnis von 3:2 ergeben.

An einem und demselben Individuum werden die verschiedenen Töne durch verschiedene Spannung der Stimmbänder hervorgebracht. An ausgeschnittenen Kehlköpfen hat Müller durch Steigerung der Spannung von etwa 8<sup>g</sup> bis zu 560<sup>g</sup> den Ton um mehr als zwei Oktaven erhöht, nämlich bei einem männlichen Kehlkopf von *ais* bis *dis*<sub>3</sub>. Die verstärkte Spannung, die wir bei den hohen Tönen durch die rasche Ermüdung der Stimme fühlen, ist indes nicht das Einzige, welches die Höhe des Tones bestimmt. Versuche von Müller und die bekannte Erfahrung, daß wir die höchsten Töne nur im Forte, die tiefsten nur im Piano singen können, beweisen, daß die Tonhöhe auch durch die Stärke des Luftstromes verändert wird.

Beobachtungen von Garcia mit dem Kehlkopfspiegel haben ferner gezeigt, daß bei verschieden hohen Tönen auch die Länge der schwingenden Teile sich ändert. Bei einem Tenoristen fand er, daß bei *d*, *e*, *f* die Band- und Knorpelränder der Glottis ihrer ganzen Länge nach schwingen, bei  $c_1$ ,  $d_1$  beginnen die hintern Enden der processus vocales sich aneinander

zu legen und bei  $f_1$  und  $g_1$  haben sich die processus vocales ihrer ganzen Länge nach aneinander gelegt, es schwingen nur noch die Bänder allein.<sup>1)</sup>

Man sieht, alle diese Erfahrungssätze über die verschiedene Tonhöhe stimmen mit den Schwingungsgesetzen elastischer Streifen überein, verstärkte Spannung und Verkürzung der schwingenden Teile vergrößern ihre Schwingungszahl und somit die Tonhöhe, die Tonbildung des menschlichen Stimmorgans stimmt demnach mit derjenigen der Zungenpfeifen überein.

Wegen der weiteren Erfahrungen über die menschliche Stimme, besonders über die verschiedenen Register, die Brust- und Fistelstimme müssen wir auf die Lehrbücher der Physiologie verweisen, da sie in physikalisch-akustischer Beziehung nichts Neues darbieten.

### § 172.

**Die menschliche Sprache.** Wenn die Endigungen des Luftweges, der Schlund und die Mundhöhle, auf die Tonhöhe keinen Einfluß haben, so sind sie das allein Bedingende bei der Artikulation, bei der Modifikation der Töne zu Lauten; es ist die Aufgabe der Physik, das Wesen der Laute akustisch zu definieren, und die der Physiologie, zu zeigen, wie durch geänderte Stellung der Sprachwerkzeuge diese Klangverschiedenheiten zustande kommen.

Daß die verschiedenen Vokaltöne nichts sind als Klangverschiedenheiten, und daß sie somit den verschiedenen den Grundton begleitenden Obertönen zuzuschreiben sind, hat zuerst Wheatstone<sup>2)</sup> behauptet, der volle Nachweis ist indes erst Helmholtz<sup>3)</sup> gelungen, indem er einmal mit Hilfe der Resonatoren die die verschiedenen Vokalklänge zusammensetzenden Partialtöne bestimmte, und ganz besonders, indem es ihm gelungen ist, mit Hilfe einfacher Töne die Vokalklänge zusammenzusetzen.

Das Mittel, um die einfachen Töne zu erzeugen, lieferten ihm Stimmgabeln, welche in der Weise wie Fig. 316 es zeigt, vor Resonanzröhren aufgestellt waren. Die Stimmgabel *a* (Fig. 316) ist mit ihrem Stiel in das Fußbrett *dd* eingeschraubt, welches auf untergeklebten Stücken von Gummischläuchen ruht, damit die Schwingungen der Gabel nicht direkt auf den Tisch übertragen werden. Die oberen Enden der Stimmgabelzinken befinden sich zwischen den Schenkeln des Elektromagnetes *bb*, gerade den Polflächen desselben gegenüber gestellt. Die Schwingungen der Gabel werden durch intermittierende elektrische Ströme erregt, welche den Elektromagnet während jeder Schwingung der Gabel, und zwar in dem Momente, in welchem die Zinken der Gabel sich voneinander zu entfernen beginnen, magnetisch machen. Um den elektrischen Strom genau in dieser Weise zu unterbrechen, wandte Helmholtz als Stromunterbrecher ebenfalls

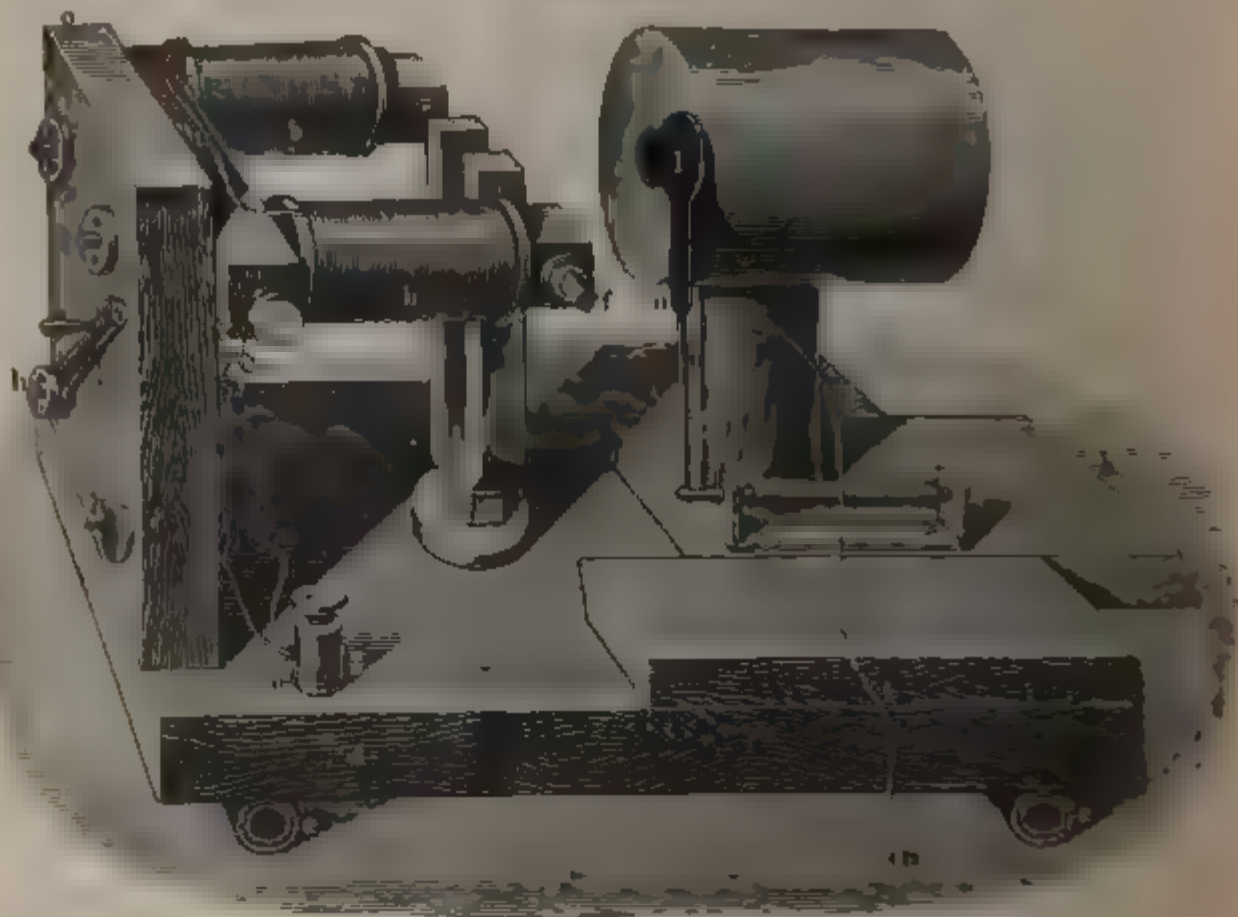
1 *Ludwig*, Lehrbuch der Physiologie des Menschen 1 p. 572. In Müllers Handbuch sind dessen sämtliche Versuche und ältere Erfahrungen, in Ludwigs Lehrbuch auch die neuern über die menschliche Stimme zusammengestellt.

2 *Wheatstone* in seiner Kritik über Versuche von Willis, der zuerst mit Zungenpfeifen die Vokale künstlich zu bilden versuchte Poggend Ann 24 1832, London und Westminster Review 1837 Oktober.

3 *Helmholtz*, Tonempfindungen p. 163 ff. und p. 184 ff.

eine Stimmgabel an, in der Weise wie Fig 317 angeordnet. Der von der galvanischen Batterie gelieferte Strom tritt in die Messingsaule *a*, welche oben ein zur Hälfte mit Quecksilber, zur Hälfte mit Alkohol gefülltes Näßchen *d* trägt. In das Quecksilber dieses Näßchens taucht ein Platindraht *c*, der an der oberen Zinke der Stimmgabel befestigt ist, so eben hinein, so daß der Strom aus dem Quecksilber in die Stimmgabel tritt und durch diese bis zur Klemme *e* geleitet wird. Von der Klemme *e* tritt der Strom dann in die den Elektromagnet umgebenden Drähte und von diesen aus weiter in die Drahtleitung, welche die Elektromagnete der tönenden Stimmgabel enthält. Dadurch, daß der Strom den Draht des Elektromag-

Fig. 316



nets *bb* (Fig. 317) durchläuft, wird der Magnet erregt, und mit ihm die Magnete der tönenden Stimmgabeln. Der Magnet *bb* zieht dann die Zinke der Stimmgabeln an, damit den Draht *c* aus dem Quecksilber empor zu unterbrechen an dieser Stelle den Stromkreis und damit den Strom selbst aber verlieren auch die Magnete ihren Magnetismus, und die Zinken der Gabeln schwingen mit der durch ihre Dimensionen bedingten Geschwindigkeit gegen ihre Gleichgewichtslage hin und darüber hinaus. Der Draht taucht infolgedessen wieder in das Quecksilber, der Strom wird neuerdings geschlossen und das Spiel wiederholt sich in der angegebenen Weise.

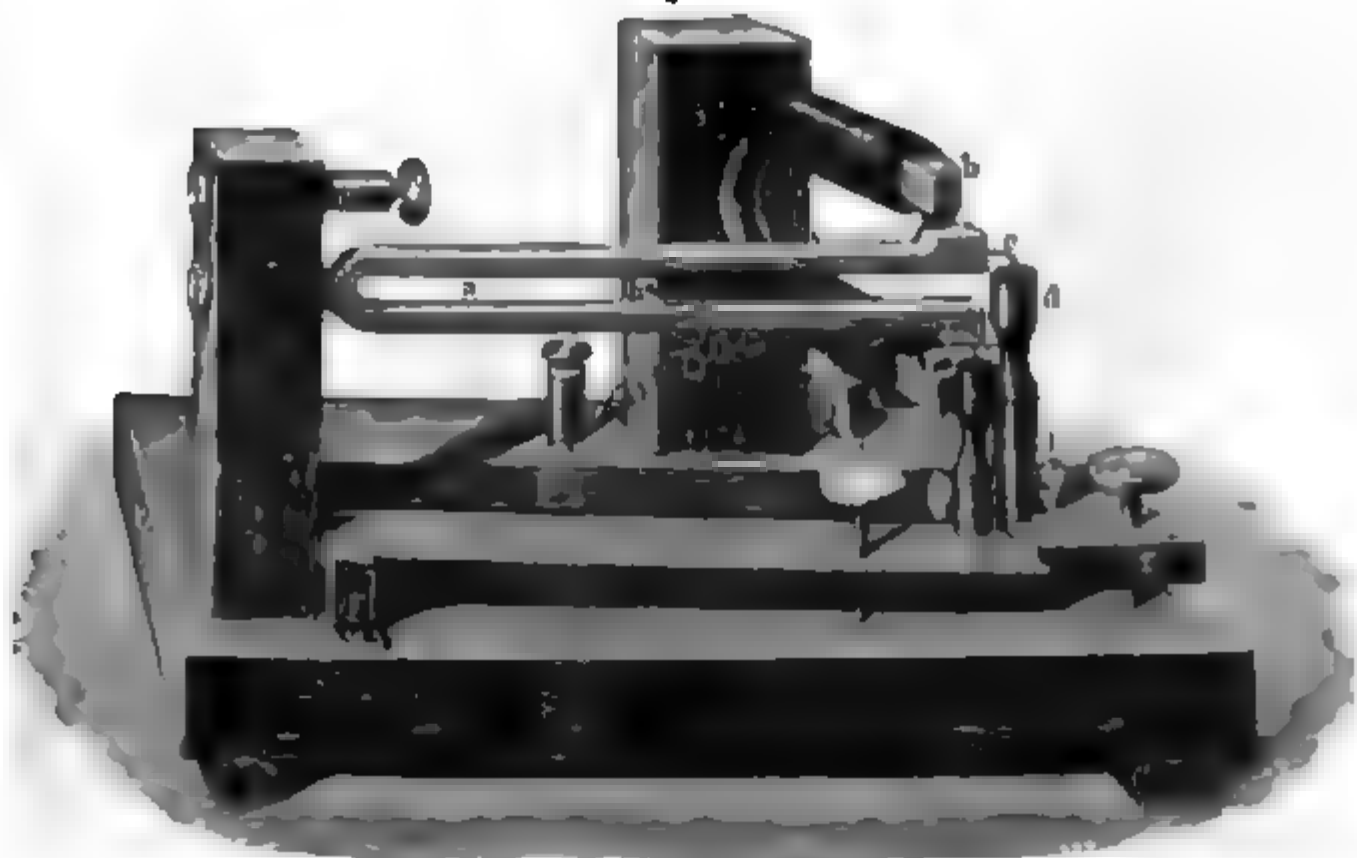
Ist die Unterbrechungsgabel mit der Gabel (Fig. 316) genau so, so wird die Gabel *a* jedesmal, wenn die Zinken durch die Gleichgewichtslage nach außen sich bewegen, eine kurze Zeit vom Magnete abgezogen, sie erhält also bei jeder Schwingung einen neuen Antrieb, und die Bewegung dauert ungeschwächt fort, so lange der Unterbrechungsgabeln in Tätigkeit bleibt. Dasselbe ist aber auch der Fall, wenn die Gabel

(Fig. 316) genau 2, 3,  $n$ mal öfter schwingt als die Unterbrechungsgabel, nur daß diese Gabeln dann erst nach je 2, 3,  $\dots n$  Schwingungen einen neuen Anstoß erhalten.

Um diesen genauen Isochronismus der Gabeln herzustellen, ist auf der Gabel *a* (Fig. 317) ein kleiner Schieber *b* angebracht, durch dessen Stellung man die Schwingungsdauer der Gabel etwas verändern kann; wird der Schieber dem Ende der Gabel näher gebracht, so wird dadurch das Trägheitsmoment der schwingenden Masse etwas vergrößert, und die Schwingungen werden langsamer.

Die auf diese Weise erregten Schwingungen der Gabel *a* (Fig. 316) geben keinen hörbaren Ton, wie ja überhaupt eine in freier Luft schwingende

Fig. 17



Gabel nur gehört werden kann, wenn man sie unmittelbar vor das Ohr hält. Um den Ton hörbar zu machen, ist vor der Gabel eine Resonanzröhre angebracht, eine gebohrte Pfeife, welche in der Mitte des der Gabel zugewandten Bodens eine kreisförmige in der Höhe der Zinkenenden befindliche, mit dem Deckel *c* verschließbare Öffnung hat. Beendet sich die Röhre mit geöffnetem Deckel nahe vor der Gabel, so wird sie, wenn ihr Grundton mit dem der Gabel übereinstimmt, wie eine Pfeife zum Tonen gebracht und der Ton der Gabel tritt ohne Oberton deutlich hervor. Um die Röhre passend zu stimmen, sind die Dimensionen derselben und der Öffnung nach den Sätzen des § 166 passend zu wählen. Um den Ton der Gabel stärker und schwächer machen zu können, ist die Röhre auf einem Schlitten *k* befestigt, so daß man die Röhre der Gabel näher oder entfernter stellen kann. Andererseits kann man den Ton auch dadurch schwächen, daß man durch teilweise Bedeckung der Öffnung die Röhre etwas verstimmt, wodurch der Ton der Röhre beträchtlich geschwächt wird.

Zu seinen ersten Versuchen wählte Helmholtz acht Gabeln der be-

schriebenen Art an, die tiefste gab den Ton  $b_{-1}$ , die übrigen gaben die sieben ersten Obertöne,  $b$ ,  $f_1$ ,  $b_1$ ,  $d_2$ ,  $f_2$ ,  $as_2$  und  $b_2$ , später ließ er zu diesen noch  $d_3$ ,  $f_3$ ,  $as_3$  und  $b_4$  hinzutreten und benutzte dann als Grundton den der zweiten Gabel,  $b$ .

Ist der Apparat in Gang gebracht mit geschlossenen Resonanzröhren, so hört man zunächst nur ein leises Summen. Öffnet man dann die Röhre mit dem Ton  $b_{-1}$ , so hört man ein dumpfes  $U$ , viel dumpfer als das  $U$  der menschlichen Sprache. Der Klang wird dem gesungenen  $U$  ähnlicher, wenn man schwach den zweiten und dritten Ton  $b$  und  $f_1$  mittönen läßt.

Der Vokal  $O$  entstand, wenn bei etwas gedämpftem  $b_{-1}$  der erste Oberton  $b$  sehr stark und schwächer  $b_1$ ,  $f_1$  und  $d_2$  angegeben wurden.

Ein nach  $O$  gezogenes  $A$ , das schwedische  $A$  entstand, als die Töne  $d_2$ ,  $f_2$ ,  $as_2$  und  $b_2$ , also die Töne 5—8 möglichst stark genommen wurden, die tieferen dagegen geschwächt waren.

$A$ ,  $\ddot{A}$  und  $E$  gelang es Helmholtz mit den zwölf Gabeln vom  $b$  an herzustellen. Dann gibt  $b$  allein  $U$ , dasselbe stark von  $b_1$ , schwächer von  $f_2$  begleitet  $O$ .  $A$  erhält man, wenn man zu  $b$  zunächst  $b_1$  und  $f_2$  mäßig stark, dagegen  $b_2$  und  $d_3$  als charakteristische Töne kräftig tönen läßt. Um  $A$  in  $\ddot{A}$  überzuführen, muß man  $b_1$  und  $f_2$ , die Nachbarn des tiefern charakteristischen Tones  $d_2$  etwas verstärken,  $b_2$  dämpfen, dagegen  $d_3$  und  $f_3$  möglichst stark hervortreten lassen. Für  $E$  muß man die beiden tiefsten Töne der Reihe  $b$  und  $b_1$  mäßig stark halten als Nachbarn des tiefern Verstärkungstones  $f_1$ , und die höchsten  $f_3$ ,  $as_3$ ,  $b_3$  möglichst heraustreten lassen.

$I$  und  $U$  herzustellen, gelang nicht, da die diese Vokale charakterisierenden sehr hohen Obertöne sich nicht mit Gabeln herstellen ließen.

Daß die zur künstlichen Darstellung benutzten Bestandteile der Vokale mit Hilfe der Resonatoren in den gesungenen und gesprochenen Vokalen beobachtet wurden, ja daß man gerade durch derartige Beobachtungen die Bestandteile kennen lernte, braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden. Es mag nur in bezug auf die Analyse der Vokale bemerkt werden, daß die in § 164 beschriebenen Flammenapparate von König für dieselbe vorzugsweise geeignet sind. Eine interessante Anwendung hat König von dem Fig. 296 angegebenen Apparate gemacht. Da die verschiedenen Vokale durch Kombination der verschiedenen Partialtöne charakterisiert sind, so liefert natürlich jeder Vokal ein eigentümliches Flammenbild, welches bei der geringsten Änderung des Vokalklages sich ebenfalls ändert. König hat nun durch solche Flammenbilder nicht nur die einzelnen Vokale, sondern auch die verschiedenen Nüancen derselben gezeichnet, wenn man die Vokale in verschiedener Tonlage singt, so daß man mit Hilfe der Bilder genauer als auf irgend einem andern Wege jede Vokalnüance bezeichnen kann.<sup>1)</sup> Fig. 318 und Fig. 319 zeigen die Bilder für

1) König, Poggend. Ann. 146. 1871. Tafel III des Bandes gibt die Flammenbilder der 5 Vokale  $U$ ,  $O$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $I$ , für jeden Ton der beiden, der Baßstimme entsprechenden Oktaven  $c_{-1}$  bis  $c_1$ . Für  $E$  und  $I$  sind die Bilder, wie das König auch hervorhebt, wenig charakteristisch. Die Bilder sind indes nur individuelle, bei einer andern Stimme fallen sie anders aus, da nicht bei allen Individuen die verschiedenen Obertöne in derselben Weise verstärkt werden (Helmholtz, Tonempfindungen. III. Ausgabe. p. 163). So entsprechen die nebenstehend gezeichneten Bilder wenig der Königschen Zeichnung.

die Vokale *I* und *O*, wie ich sie erhielt, jeden auf *c* gesungen und mit möglichster Sorgfalt im reinen Vokalklang gehalten; besonders bei *O* gibt die geringste Nuancierung ein anderes Bild.

Ehe wir zur Besprechung der Bildung der Vokale in der menschlichen Sprache übergehen, wird es gut sein, darauf hinzuweisen, daß gerade mit Hilfe dieses Stimmgabelapparates von Helmholtz der bereits § 164 erwähnte Nachweis geliefert wurde, daß die Phase der komponierenden Teiltöne auf den Klang ohne Einfluß ist. Wir erwähnten schon, daß man die Schwächung eines Stimmgabeltones durch weitere Entfernung der Resonanzröhre oder durch teilweises Schließen des Deckels erhalten kann; letzteres Mittel bewirkt eine kleine Verstimmung des Tones und bewirkt dadurch, daß die Schwingungen etwas rascher oder langsamer werden, somit daß die Stöße einer verstimmten Gabel mit den andern nach und nach in immer

Fig. 318



Fig. 319



anderer Periode zusammentreffen. Wurde nun ein Vokalklang deutlich erhalten, dadurch daß der Ton einer Gabel durch Verschiebung der Resonanzröhre geschwächt wurde, so erhielt man genau denselben Klang, wenn der Ton durch Schließung des Deckels geschwächt wurde; da aber im letzten Falle die Phase der komponierenden Töne eine relativ immer andere wurde, so folgt aus diesem Versuche, daß die Phase auf die Klangfarbe von keinem Einflusse ist.

Die Möglichkeit einer so reichhaltigen Klangbildung durch die menschliche Stimme ist durch die Form unseres Sprachorganes gegeben. Wir haben vorhin unser Sprachorgan als eine Zungenpfeife mit weichen Zungen bezeichnet. Von den gewöhnlichen Zungenpfeifen dieser Art unterscheidet es sich aber wesentlich dadurch, daß die Pfeife, das Schallrohr nicht eine unveränderliche Gestalt hat, sondern durch unsern Willen willkürlich geändert werden kann. Das Schallrohr der menschlichen Stimme sind die höheren Teile der Luftwege über dem Kehlkopf und ganz besonders die Rachenhöhle und Mundhöhle. Durch die Beweglichkeit der weichen Teile



in den Umgebungen dieser Höhlen, den weichen Gaumen, die Zunge und die Lippen können wir diesen Höhlen die verschiedensten Gestalten geben, und es ist nach den Bemerkungen über die Tonbildung bei den weichen Zungen klar, daß es wesentlich von der Form der Rachen- und Mundhöhle abhängig ist, welche von den harmonischen Obertönen eines von der Stimme gebildeten Grundtones verstärkt werden, welche nicht. Denn wie wir am Schluß des § 170 erwähnten, sind in jedem durch Zungen gebildeten Klange die Obertöne in großer Zahl vorhanden, alle, die deshalb bei einer bestimmten Stellung der Mundhöhle infolge der Resonanz verstärkt werden, finden sich in dem Klange, welcher dieser Stellung der Mundhöhle entspricht. Es sind das vorzugsweise die Töne, welche die Mundhöhle in der bestimmten Form als einfache Pfeife angeblasen geben würde. Welche Töne das sind, bestimmte Helmholtz<sup>1)</sup> im allgemeinen dadurch, daß er vor die Mundöffnung Stimmgabeln hielt und den Ton aufsuchte, der bei einer bestimmten Vokalstellung des Mundes die stärkste Resonanz gab.

Daß in der Tat die der Mundhöhle gegebene Form für die Bildung der Vokale von wesentlichem Einfluß ist, hat man schon früher erkannt<sup>2)</sup>, indem schon der ältere Du Bois Reymond die Vokale in drei Reihen ordnete, je nach der Stellung des Mundes. Die drei Reihen sind

	e	_____	i
	:		:
a —	ö	_____	ü
	:		:
	o	-----	u

Der Vokal *A* ist der gemeinsame Ausgangspunkt für alle drei Reihen. Bei seiner Bildung nimmt die Mundhöhle eine ziemlich gleichförmig trichterartig erweiterte Stellung an. Bei *O* und *U* wird die Mundhöhle vorn mit den Lippen verengert, so daß sie bei *U* am engsten ist, während sie in der Mitte durch Herabziehen der Zunge erweitert wird. Sie nimmt also die Gestalt einer Flasche ohne Hals an, deren Öffnung vorn der Mund ist. Der Ton einer solchen Flasche ist um so tiefer, je enger die Öffnung ist, und dem entsprechend fand Helmholtz, daß bei der *U*-Stellung des Mundes der Eigenton der Mundhöhle  $f$  ist<sup>3)</sup>, und zwar ziemlich gleichmäßig bei männlichen und weiblichen Mundhöhlen, bei welchen letzteren das, was der Höhlung an Geräumigkeit abgeht, durch engern Verschluß ersetzt wird. Der Eigenton der Mundhöhle bei *O* ist  $b_1$ . Geht man vom *O* allmählich durch *Oa* und *Ao* zum *A*, so wird der Mund offener, und der Ton der Mundhöhle steigt um eine Oktave bis  $b_2$ .<sup>4)</sup>

Beim Übergang vom *A* durch *Ä* in *E* und *I* wird die Gestalt der

1) Helmholtz, Tonempfindungen. p. 166 ff.

2) Du Bois Reymond, Norddeutsche Zeitschrift von De la Motte Fouqué 1817. Helmholtz a. a. O. p. 167.

3) Donders gibt die höhere Oktave  $f_1$ , welche auch Auerbach, Wiedem. Ann. 3. 1878, durch Perkussion der Mundhöhle findet. Wie mir vor einigen Jahren Weinhold zeigte, kann man die Mundhöhle durch einen kräftigen Luftstrom, den man an dem in der *U*-Stellung befindlichen Munde wie am Mundloch einer Flöte vorüber führt, tönend anblasen, man erhält dann bei richtiger Stellung stets einen nahe dem  $f_1$  liegenden Ton.

4) Auerbach a. a. O. gibt  $f_2$ .



Mundhöhle eine ganz andere. Die Lippen werden dabei zurückgezogen und geöffnet, die Zunge gehoben, so daß zwischen Zunge und hartem Gaumen ein enger Kanal bleibt, während der Raum unmittelbar über dem Kehlkopf durch Herabdrücken der Zungenwurzel erweitert wird. Die Mundhöhle bekommt also die Gestalt einer Flasche mit engem Halse, den Bauch der Flasche bildet der Schlund, den Hals der enge Kanal zwischen Zunge und Gaumen, der Hals ist am engsten bei *I*, seine Länge von dem hintern Ende der Flasche bis zum hintern Rande des Gaumens fand Helmholtz sich 6<sup>cm</sup>.

Derartige Flaschen haben zwei Grundtöne, den des Bauches für sich und den des Halses, den man, besonders wenn er gegen den Bauch sehr gerichtet ist, als eine beiderseits offene Röhre ansehen kann. Dem entsprechend hat die Mundhöhle bei *A*, *E* und *I* zwei Eigentöne, bei *A* die Töne  $d_2$  und  $g_3$  bis  $as_3$ , bei *E* die Töne  $f_1$ <sup>1)</sup> und  $b_3$  und bei *I* als tiefsten Ton etwa wie bei *I* und als Ton des Halses  $d_4$ .

Die Vokale *O* und *U* unterscheiden sich von *E* und *I* dadurch, daß ihnen auch die Lippen röhrenähnlich geformt werden, so daß diese eine Fortsetzung des engen Kanales bei *E* und *I* bilden. Für diese Vokale herrscht deshalb nur der Ton des Halses, er wird tiefer als bei *E* und *I* und er wird  $cs_3$  und  $g_3$  bis  $as_3$  wie bei *A*. Die tiefern Eigentöne bleiben (s. 2).

Wie oben erwähnt wurde, sind es nun gerade die Obertöne des Klanges, welche mit den Eigentönen des Mundes zusammenfallen oder doch ihnen sehr nahe genug sind, welche vorzugsweise verstärkt werden, während die andern abgeschwächt werden, und eine Vergleichung der zuletzt gemachten Angaben mit den bei der künstlichen Bildung der Vokale angegebenen charakteristischen Tönen der einzelnen Vokale wird die Übereinstimmung beider und damit erkennen lassen, daß das Wesen der Vokalbildung in dem durch die Form der Mundhöhle bewirkten Auftreten der verschiedenen Obertöne besteht. Es wird oben jedesmal, auf welchen Grundton wir einen Vokal bilden, immer derjenige Oberton des Grundtones am meisten verstärkt, der dem Eigentone der Mundhöhle am nächsten kommt. Die Vokalklänge unterscheiden sich von den Klängen der übrigen musikalischen Instrumente gerade dadurch, daß die Stärke ihrer Obertöne nicht von der Ordnungszahl derselben, sondern von deren absoluter Tonhöhe abhängt. Wird z. B. der Vokal *A*, dessen charakteristischer Ton  $b_2$  ist, auf die Note  $cs_{-1}$  gesungen, so ist der verstärkte Ton der 12. Ton des Klanges, wird derselbe Vokal auf  $b_1$  gesungen, so ist der verstärkte Ton der zweite des Klanges. Hier rührt es denn auch, daß der reine Vokalklang, besonders für die tieferen Vokale, deren charakteristischer Ton tiefer liegt, am besten bei gewissen Grundtönen herauskommt, bei denen nämlich, bei welchen ein Oberton genau mit dem charakteristischen Ton zusammenfällt.<sup>3)</sup>

1. Nach Auerbach  $g_1$  bis  $a_1$ .

2. Nach Auerbach  $a_1$  und  $f_1$ .

3. Wie es möglich ist, daß die Eigentöne der Mundhöhle auch durch solche Obertöne verstärkt werden können, zu deren harmonischer Reihe der Eigentöne nicht gehört, werden wir im § 178 zeigen, wodurch der hauptsächlichste Einwand von Helmholtz gegen die Helmholtzsche Vokaltheorie Poggend Ann 134 1873. beseitigt wird. Genaueres über die Zusammensetzung der Vokale, die Intensitätsverhältnisse der Partialtöne und die Abhängigkeit derselben von der Ton-

Eine etwas andere Theorie der Zusammensetzung der Vokale hat Grassmann<sup>1)</sup> bereits 1854 gegeben und 1877 erneuert mitgeteilt. Grassmann glaubt, daß die zu dem Grundtone, auf welchen ein Vokal angegeben ist, mitklingenden Töne stets nur Obertöne des Grundtones sind, und daß der Vokalcharakter durch die Höhe und die Anzahl der Obertöne, welche mitklingen, bedingt sei. Daß die Mundhöhle nicht bei einem bestimmten Vokal einen bestimmten Eigenton habe, schließt Grassmann zunächst daraus, daß man eine ganze Reihe von Pfeiftönen, ja innerhalb einer gewissen Grenze jeden beliebigen Pfeifton hervorbringen kann. Hält man nun die zu einem bestimmten Pfeiftone erforderliche Mund- und Lippenstellung fest und bringt eine Stimmgabel von der Höhe des Pfeiftones vor die Mundhöhle, so erhält man die Verstärkung des Tones der Stimmgabel, wie wenn man die Gabel über einen Resonator hält. Bei den Vokalen *u* — *ü* — *i* entspricht die Mundstellung stets einem gewissen Pfeiftone, und es wird derjenige Oberton verstärkt, welcher der Form des Mundes entspricht. Gibt man den Vokal *u* auf klein *c* an und gibt dem Munde die Pfeifstellung für *c*<sub>1</sub>, so hört man deutlich *c*<sub>1</sub>, gibt man aber dem Munde die Stellung, als wenn man *g*<sub>1</sub> pfeifen wollte; so hört man *g*<sub>1</sub> mit: alle übrigen Obertöne werden so gut wie vollständig ausgelöscht. Der Vokal *u* wäre darnach durch das Mitklingen eines seiner Obertöne charakterisiert, der aber nicht höher als *c*<sub>3</sub> sein kann. Gibt man dem Mund eine Stellung, die einen höhern Pfeifton gibt als *c*<sub>3</sub>, so kann man kein *u* mehr angeben, es erklingt der Vokal *ü*. Gibt man den Vokal *ü* an, so erklingt ein höher als *c*<sub>3</sub> liegender Oberton, der nach Grassmann zwischen *c*<sub>3</sub> und *c*<sub>4</sub> liegt. Der Vokal *ü* wäre also auch durch nur einen Oberton charakterisiert, der aber erheblich höher liegt als der für *u* charakteristische Oberton. Gleiches gilt nach Grassmann für *i*, dessen charakteristischer Oberton noch höher liegt als für *ü*.

Es würde demnach eine ganze Reihe von Mundstellungen geben, die dem *u* oder *ü* und *i* entsprächen; es würde *u* aber nur in einer solchen Mundstellung hervorgebracht werden können, welche einen tiefer als *c*<sub>3</sub> liegenden Ton als stärksten den Grundton begleitenden harmonischen Oberton zum mitklingen bringt. Ebenso bei *ü* und *i*. Bei *a* nimmt, wie schon erwähnt, der Mund die Trichterform an; es werden deshalb alle den Grundton begleitenden in den Stimmbändern erzeugten Obertöne bis zum achten oder selbst zehnten gleichmäßig entwickelt und begleiten den Grundton mit erheblicher Stärke.

Die Vokale *o* — *ö* — *e* sieht Grassmann als Zwischenvokale, *o* zwischen *a* und *u*, *ö* zwischen *a* und *ü*, *e* zwischen *a* und *i* an. So sagt er, es sei *o* gleich *U* + *A*, das heißt die Obertöne des *O* liegen von dem charakteristischen Obertone des *U* halb so weit entfernt als die Obertöne von *A*. Gibt man *O* auf *c* an, so würde für *U* der charakteristische Ton *c*<sub>1</sub>, für *A* würden die Obertöne von *c*<sub>1</sub> bis *c*<sub>3</sub> mittönen, für *O* sind es *c*<sub>1</sub>, *g*<sub>1</sub>, *c*<sub>2</sub>. Die höhern Obertöne des *A* fallen fort.

höhe, auf welcher die Vokale angegeben werden, sehe man in der interessanten Abhandlung von F. Auerbach, Poggend. Ann. Erg.-Bd. VIII. 1878 und Wiedem Ann. 3. 4. 1878.

1) Grassmann, Programm des Stettiner Gymnasiums für 1854: Wiedem Ann. 1. p. 606. 1877.

Mit der Frage, ob die Vokale nach der Helmholtzschen oder nach Grassmannschen Theorie aufzufassen seien, hat sich besonders *von Lahr*<sup>1)</sup> beschäftigt. *Lahr* untersuchte zunächst die Resonanz der Mundhöhle, und zwar vorzugsweise für den Vokal *u*, da für diesen nach Helmholtz die Mundhöhle den Ton *f* (oder *f*<sub>1</sub>) am stärksten mittönen soll, während es nach Grassmann immer nur ein Oberton sein soll, der tönt, von *Lahr* fand das letztere bestätigt; gab er den Vokal *u* auf *b* und behielt die Mundstellung genau bei, so gab die auf *b*<sub>1</sub> gestimmte Stimmgabel vor der Mundöffnung einen ebenso starken Ton, als wenn man den Mund in die *O*-Stellung bringt, für welche nach Helmholtz das *b*<sub>1</sub> der stärkste Ton sein soll. Wurde der Vokal *u* auf *b*<sub>1</sub> angegeben, so gab die höhere Oktave *b*<sub>2</sub> ebenfalls eine ebenso starke Resonanz als in der *O*-Stellung. Dabei bemerkt *von Lahr*, daß der Klang der Mundhöhlenresonanz je nach der Vokalstellung für eine und dieselbe Stimmgabel sehr verschieden sei, so zwar, daß der Charakter des Vokals, für welchen der Ton gestellt war, deutlich wahrnehmbar wurde.

Auch durch die Zusammensetzung der Vokale aus Stimmgabeltönen erhält *von Lahr* eine Bestätigung der Grassmannschen Theorie zu erwarten; er meint, daß man den Grundton nur von einem Oberton, der nicht zu hoch begleitet den Grundton als *u*, den von einem der höhern Obertöne begleitet den Grundton als *ü* und von noch höhern als *i* wahrnehme. Dem stimme ich nach meinen Erfahrungen nicht bei; wie schon Helmholtz hervorhebt, macht der einfache Ton entschieden den Eindruck des *u*, wenn er nicht zu hoch ist; läßt man ihn kräftig von seiner Oktave begleitet, so geht er zum *O* hinüber, ebenso auch mit dem zweiten Oberton. Jedesmal deutlich wird, wenn man den Oberton zum Schweigen bringt, so macht der einfache Ton in hohen Lagen etwa schon bei *c*<sub>3</sub> den Eindruck des *ü* und noch höhern, etwa beim *c*<sub>4</sub>, entschieden den Eindruck des *i*. Streicht man einen Stahlstab von 1<sup>m</sup> Länge, den man in der Mitte festhält, so bekommt man etwa *c*<sub>4</sub>, der Longitudinalton klingt entschieden als *i*.

Dagegen spricht die Untersuchung der Vokalklänge mit dem Phonographen, auf welche wir § 178 zurückkommen werden, entschieden für die Grassmannsche Theorie. Wir werden sehen, wie man mit Hilfe derselben die Intensität der Obertöne bestimmen kann, und bemerken hier nur, daß *von Lahr* für *u* auf *f*<sub>1</sub> gesungen (etwa 350 Schwingungen) nur den ersten Oberton, für *ü* nur den zweiten *c*<sub>3</sub> oder fünften *c*<sub>4</sub> stark fand, daß dagegen für *i* die ersten acht Obertöne sehr stark waren.

Ich möchte aus alledem schließen, daß der Vokalcharakter nicht enger begrenzt ist, als man wohl eine Zeit lang anzunehmen geneigt war, daß jeder Vokalklang auf mehrfache Weise zustande kommen kann, und daß unser Ohr sofort eine verschiedene Nuance erkennt, wie ja auch schon von Helmholtz hervorhob, daß bei verschiedenen Individuen die Obertöne für denselben Vokal verschieden stark sind, was ja auch durch die Verschiedenheit der Flammenbilder eines und desselben Vokals für verschiedene Individuen bewiesen wird.

Zur Bildung der menschlichen Sprache gehört außer jener der Vokale auch die der Konsonanten, diese sind keine Selbstlauter, es sind nur Ton-

1) *von Lahr*, Wiedem. Ann. 27. p. 94. 1886

hemmungen oder Verzögerungen, welche durch das Anfangen oder Abschließen eines Vokallautes oder höchstens als Geräusche wahrnehmbar sind.

Nach Brücke<sup>1)</sup> teilt man die Konsonanten je nach dem Orte des Verschlusses im Munde in drei Gruppen, an deren Spitze die drei Mutae *p*, *t*, *k* stehen.

Die erste Gruppe bilden *p*, *b*, *f*, *v*, *w*, *m*; den Verschluß bilden entweder die beiden Lippen oder eine der Zahnreihen mit den Lippen. *P* entsteht durch ein plötzliches Öffnen der vorher fest verschlossenen Lippen, während ein Luftstrom aus dem Kehlkopf gegen die Mundöffnung dringt, *b* entsteht gerade so, nur sind die Lippen etwas weniger gespannt und das Öffnen geschieht etwas weniger energisch. *F* wird gebildet, indem wir die untere Lippe an die oberen Schneidezähne legen und einen Luftstrom hindurchsenden, desgleichen *v*, ein mildes *f*, und *w*, bei dem zugleich eine Hemmung des Luftstroms, ein dichter Verschluß stattfindet, welcher das *w* dem *b* nähert.

Das *m* entsteht schließlich, indem man die Lippen wie zu *b* stellt und die Luft mit tönender Stimme zur Nase hinausströmen läßt.

Die zweite Gruppe umfaßt *t*, *d*, die verschiedenen *s*, *l*, und *n*. Für diese bildet die Zunge den Verschluß, indem sie sich entweder an die oberen Schneidezähne oder an den vordern Teil des harten Gaumens anlegt. *T* wird gebildet durch Anstemmen der Zunge an die Schneidezähne und plötzliche Fortnahme derselben, *d* verhält sich zum *t*, wie *b* zum *p*.

Das harte *s*, *sz*, *ss* bildet sich, wenn bei der dem *t* zugehörigen Zungenstellung eine kleine Spalte geöffnet und durch diese Luft ausgestoßen wird, durch schwächeres Anstemmen entsteht das weiche *s*. Das *l* entsteht, wenn man den Verschluß der Zunge vorn wie bei *d* läßt, dagegen hinten neben den Backzähnen beiderseitig eine kleine Öffnung läßt, durch welche die Luft hindurchstreicht. Wird ferner die Zunge wie bei *t* gestellt und läßt man die Luft durch die Nase entweichen, so entsteht *n*.

In die dritte Gruppe gehören die Gaumenlaute *k*, *g*, *ch*, *j* und das Gaumen-*n* (vor *g* in *ng*). *K* entsteht wie *t* und *p*, nur daß der Verschluß hier von dem hintern Teile der Zunge und dem Gaumen gebildet wird. *G* entsteht aus *k* wie *b* und *d* aus *p* und *t*, *ch* wie *s* und *f*, nur daß auch hier zwischen dem tiefern Teile der Zunge und dem Gaumen die enge Öffnung bleibt, zwischen der der Luftstrom hindurchgeht.

*J* bildet sich, indem die Zunge mehr nach der Mitte hin sanft gegen den Gaumen angelegt und Luft durchgehaucht wird, und schließlich das Gaumen-*n*, indem die Zunge wie beim *ch* nur fester gegen den Gaumen gelegt wird und die Luft bei tönender Stimmritze durch die Nase entweicht.

Der noch übrig bleibende Konsonant *r* kann labial, lingual und guttural sein; er entsteht, indem wir einen der leichtschwingenden Mundteile mittels des Luftstromes in schwingende Bewegung versetzen, deren einzelne Stöße so langsam aufeinander folgen, daß wir die einzelnen Stöße gewahrt wahrnehmen; diese Schwingungen können die Lippen, die Zungenspitze wenn sie wie zum *t* gestellt ist, und das Zäpfchen vollführen.

1) *Ludwig*, Lehrbuch der Physiologie. p. 589. Man sehe auch *Grassmann*, Wiedem. Ann. 1. p. 619 ff. 1877.

## Zweites Kapitel.

## Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

## § 173.

**Ausbreitung des Schalles in der Luft.** Wir sahen in § 156, daß es zur Wahrnehmung des Schalles erforderlich sei, daß die Schwingungen des festen Körpers oder die andern tonerzeugenden Schwingungen auf ein elastisches Medium übertragen und zu unserem Ohre fortgepflanzt werden. Da in einem jeden solchen Mittel die Schallschwingungen longitudinale werden, wie alle unsere Entwicklungen über den Schall zeigen, oder da es die longitudinalen Schwingungen der elastischen Medien sind, welche wir durch die gegen unser Gehörorgan ausgeübten Stöße als Schall wahrnehmen, so müssen die Gesetze der Ausbreitung des Schalles mit den Gesetzen der Verbreitung longitudinaler Wellen übereinstimmen, welche wir im vorigen Abschnitte entwickelt haben.

Zunächst folgt aus dem Früheren, daß der Schall sich von einem erregenden Mittelpunkte aus in kugelförmigen Wellen nach allen Richtungen ausbreiten muß.

Mit dem Abstände von der Quelle des Schalles muß dann die Intensität desselben abnehmen; und zwar nach einem bestimmten Gesetze. Die schwingende Bewegung, welche von einem Mittelpunkte ausgeht, teilt sich immer größern und größern Kugelwellen mit, und nach der Zeit  $t$  sind alle Luftteilchen auf einer Kugelschale in Bewegung, deren Radius  $r$  gleich  $ct$  ist. Das Maximum der Geschwindigkeit, welches diese Teilchen beim Verlassen ihrer Gleichgewichtslage besitzen, sei gleich  $v$ . Die Masse der zugleich bewegten Teilchen ist proportional der Größe der Fläche, auf der alle Teilchen zugleich bewegt werden oder proportional der Oberfläche der Kugel  $4\pi r^2$ .

Nach der Zeit  $t'$  werden ebenso alle Teilchen auf einer Kugelfläche vom Radius  $r' = ct'$  eine Geschwindigkeit  $v'$  erhalten und die Masse der zugleich bewegten Teilchen ist  $4\pi r'^2$ .

Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie muß, wenn, was bei einfacher Verbreitung des Schalles in der Luft der Fall ist, keine Arbeit nach außen abgegeben wird, die kinetische Energie der gleichzeitig bewegten Luftteilchen konstant bleiben. Da für die kinetische Energie der schwingenden Bewegung die Geschwindigkeit, mit welcher das schwingende die Gleichgewichtslage passiert, das Maß ist, so muß die Gleichung bestehen

$$4\pi r^2 v^2 = 4\pi r'^2 v'^2$$

oder

$$r^2 v^2 = r'^2 v'^2$$

$$v : v' = r' : r.$$

Die Geschwindigkeit, welche den einzelnen schwingenden Teilchen in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkte der Schwingung erteilt wird, ist dem Abstände der Teilchen vom Mittelpunkte der Schwingung umgekehrt

proportional. Nennen wir demnach die Geschwindigkeit im Abstände 1,  $v$ , so ist sie im Abstände  $r$  vom Mittelpunkte  $\frac{v}{r}$ .

Wir haben bereits bemerkt, daß wir die Intensität des Schalles der Stärke des Stoßes gleichsetzen, welchen unser Gehörorgan von den schwingenden Luftteilchen erhält. Die Stärke des Stoßes ist aber der lebendigen Kraft der stoßenden Teile proportional, da dieselbe durch die Größe des Weges gemessen wird, durch welchen der widerstehende Körper wirken muß, um die Geschwindigkeit des stoßenden zu vernichten. Da nun die Geschwindigkeit der schwingenden Teile abnimmt in demselben Verhältnis, wie sie weiter vom erregenden Mittelpunkte entfernt sind, und da wir den Schall bei der konstanten Größe unseres Gehörorgans immer durch den Stoß einer gleichen Menge Luftteilchen vernehmen, so folgt, daß die Intensität des Schalles abnimmt, wie die Quadrate der Entfernung von der Quelle des Schalles wachsen.

Daß der Schall schwächer wird, wenn wir uns von der Quelle desselben entfernen, ist eine bekannte Tatsache, auch daß er rascher schwächer wird, als die Entfernungen wachsen, ist bekannt.

Genaue Messungen über die Abnahme der Schallstärke mit der Entfernung, wie überhaupt über die Stärke des Schalles gibt es nicht, da es für den Schall keinen exakten Messapparat gibt und die vorhandenen Sonometer nur dazu dienen können, ein Mehr oder Minder der Schallstärke zu zeigen, nicht aber genaue Messungen anzustellen. Es liegt das im Wesen des Schalles, der eigentlich nur in einer Empfindung besteht, da er nur eine besondere Wahrnehmung einer bestimmten Bewegungsart ist, und nur insofern Schall ist, als wir diese Bewegungsart mit unserem Ohre wahrnehmen; wir können denselben daher nur nach seinem Eindrücke auf das Ohr beurteilen. Auch beim Licht ist das zwar der Fall, daß wir es nur durch die Eindrücke auf das Auge beurteilen können, dort können wir aber mehrere Lichtwirkungen gleichzeitig beurteilen, wir können sie kompensieren, indem wir Flächen zugleich von entgegengesetzten Seiten beleuchten und auf manche andere Weise vergleichen. Schalle gleicher Qualität können wir aber nur, wenn sie nacheinander wirken, miteinander vergleichen und dadurch ist jede Messung ausgeschlossen. Wir kommen bei Besprechung des Ohres auf diese Frage zurück.

Da der Schall eine Wellenbewegung ist, so muß die Geschwindigkeit seiner Verbreitung mit derjenigen der Wellenbewegung übereinkommen

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung ist in einem und demselben Mittel konstant, sie hängt nur ab von der Dichtigkeit und Elastizität des Mittels nach der Gleichung

$$c = c \sqrt{\frac{e}{d}},$$

also nicht von der Oszillationsdauer der schwingenden Bewegung oder ihrer Wellenlänge, bei transversalen Wellen vorausgesetzt, daß die Länge der Wellen gegen den Abstand der Moleküle sehr groß ist. Für die Töne der Musik, deren Wellenlänge kaum unter 4<sup>cm</sup> herabgeht, wird man letzteres annehmen dürfen, alle Töne müssen sich daher in einem und demselben Mittel mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzen. Es ist das auch eine



bekannte Erfahrung, auf der allein die Möglichkeit einer harmonischen Musik beruht. Selbst in der größten Entfernung wird die Harmonie derselben nicht gestört, ein Beweis, daß die höchsten wie die tiefsten Töne sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen.

Regnault glaubte indes aus seinen Versuchen schließen zu sollen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der tiefen und hohen Töne nicht ganz genau die gleiche sei. Bei den gleich näher zu besprechenden Versuchen über die Fortpflanzung des Schalles ließ Regnault an dem einen Ende des auf dem Boulevard St. Michel zu Paris befindlichen Wasserleitungsrohres, welches einen Durchmesser von 1<sup>m</sup>,1 und eine Länge von 1417<sup>m</sup>,95 hatte, eine Zungenpfeife tönen, deren Grundton  $c_2$  war, und welche ein kegelförmiges Ansatzrohr besaß. In dem andern Ende des Rohres waren acht Helmholtzsche Resonatoren, die  $c_2$  und seinen harmonischen Obertönen entsprachen, angebracht, welche durch Kautschukröhren mit einem größern Kasten von Holz verbunden waren, an dessen Öffnung man das Ohr anlegen konnte. Die den Resonatoren entsprechenden Töne wurden deutlich und klar gehört. Man hörte bei diesen Versuchen konstant zuerst den Grundton  $c_2$ , auf diesen folgte erst die Oktave, die Quint derselben und dann erst die höhern Partialtöne, so daß stets die tiefern vor den höhern Tönen gehört wurden. Die tiefern Töne hätten demnach eine etwas größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als die höhern, und ein Klang veränderte deshalb in großer Entfernung einigermaßen seine Farbe. Der Unterschied in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit war indes so klein, daß er sich nicht weiter messen ließ.

Dem entgegen kamen Violle und Vautier<sup>1)</sup> zu dem Resultate, bei ganz ähnlich durchgeführten Versuchen, daß ein solcher Unterschied sich nicht erkennen lasse.

In engern Röhren ist, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, ein solcher Unterschied vorhanden.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in der Luft wurde unser Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{c}{d}} = \sqrt{\frac{gH}{s}} k (1 + \alpha t)$$

somit, wenn wir  $g$  und  $H$  in Metern angeben,

$$c = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 0,76 \cdot 13,59}{0,001293}} \cdot 1,405 (1 + \alpha t) = 331^{\text{m}},8 \sqrt{1 + \alpha t}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft muß daher bei 0° gleich 331<sup>m</sup>,8 sein, oder allgemein, da  $\alpha$ , wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden, gleich 0,00367 ist,

$$c = 331^{\text{m}},8 \sqrt{1 + 0,00367 t}$$

Die Versuche, welche man angestellt hat, um die Geschwindigkeit des Schalles direkt zu messen, geben ein mit der Theorie vollkommen übereinstimmendes Resultat. Die ersten genauern Versuche waren die berühmten Versuche der Mitglieder der Pariser Akademie Cassini, Maraldi und

1. Violle und Vautier, Comptes Rendus 110. p. 236 1890.



La Caille im Jahre 1738.<sup>1)</sup> Als Stationen waren das Observatorium zu Paris, der Montmartre, Fontenay-aux-Roses und Monthlery gewählt. Die Beobachtungen wurden des Nachts angestellt und begannen auf ein vom Observatorium gegebenes Signal.

Man löste von 10 zu 10 Minuten auf einer der Stationen eine Kanone und beobachtete auf allen anderen die Zeit, welche verfloß zwischen der Wahrnehmung des Lichtblitzes beim Abfeuern der Kanone und der Ankunft des Schalles. Da der Abstand der einzelnen Stationen vorher genau gemessen war, so erhielt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch Division des Abstandes durch die beobachtete Zeit.

Diese Beobachtungen wurden längere Zeit unter sehr verschiedenen atmosphärischen Verhältnissen fortgesetzt, und man fand der Theorie gemäß:

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist unabhängig von dem Drucke der Luft.

2. Sie wächst mit der Temperatur der Luft.

3. Sie ist dieselbe in jeder Entfernung von der Schallquelle, das heißt, der Schall pflanzt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort.

4. Mit dem Winde pflanzt sich der Schall rascher fort als gegen den Wind, und zwar ist sie im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle die Differenz der Geschwindigkeiten des Schalles und des Windes.

5. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist in ruhiger trockener Luft bei 0° 1038 pariser Fuß oder 337<sup>m</sup>, oder nach der Berechnung dieser Versuche von Le Roux<sup>2)</sup> gleich 332<sup>m</sup>.

Da durch den Einfluß des Windes die Geschwindigkeit des Schalles geändert wird, so ist zur Erzielung genauerer Resultate erforderlich, daß man an beiden Enden einer Standlinie den Schall erzeuge und beobachte; in der einen Richtung wird dann der Schall so viel beschleunigt, als er in der andern verzögert wird, und das Mittel aus beiden Resultaten ergibt die vom Einfluß des Windes befreite Zahl für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in ruhiger Luft.

Mit dieser Vorsicht wurde im Jahre 1822 bei Paris zwischen Monthlery und Villejuif die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles aufs neu bestimmt.<sup>3)</sup> Es wurden an beiden Orten von 10 zu 10 Minuten Kanonen gelöst, die so gestellt waren, daß von jedem Orte die Explosion der andern Kanone gesehen wurde. Man war übereingekommen, daß die Kanonenschüsse zu Monthlery 5 Minuten früher anfangen sollten, als zu Villejuif. Die Beobachter waren zu Monthlery Humboldt, Gay-Lussac und Bouvard, zu Villejuif Arago, Mathieu und Prony. Die Kanonenschüsse von Monthlery wurden zu Villejuif alle gut gehört, zu Monthlery wurden von den 12, die gelöst wurden, nur 7 wahrgenommen. Dieser unaufgeklärte Umstand gestattete die Korrektur wegen Bewegung der Luft nicht so vollständig, als man wünschte; indes ergaben die beiderseitigen Beobachtungen nahezu übereinstimmende Resultate. Die Beobachtungen zu Villejuif nahmen im Mittel 54,84 Sekunden nach dem Lichtblitze den Schall

1) Mémoires de l'Acad. de Paris 1738 und 1739.

2) *Le Roux*, Ann. de chim. et de phys. 12. (4.) 1867.

3) Ann. de chim. et de phys. 20. p. 210. 1822. Poggend. Ann. 3. p 47.  
1825.

wahr, diejenigen zu Monthlery nach 54,43 Sekunden. Das Mittel aus beiden Zahlen ist 54,63.

Die Distanz beider Stationen bestimmte Arago zu 18622,27<sup>m</sup>, die Geschwindigkeit des Schalles ist darnach

$$c = \frac{18622,27}{54,63} = 340,8^m.$$

Die Temperatur der Luft bei diesen Beobachtungen war 16° C., die Geschwindigkeit bei 0° wird daher

$$c_0 = \frac{340,8}{\sqrt{1 + 0,00367 \cdot 16}} = 331,2.$$

Kurz nachher wurde mit noch größerer Vorsicht von den holländischen Physikern Moll, van Beek und Kuytenbrouwer<sup>1)</sup> die Geschwindigkeit des Schalles bei Amsterdam nochmals bestimmt und diese erhielten als Resultat für die Geschwindigkeit des Schalles in ruhiger und trockner Luft bei 0° C.

$$c_0 = 332,26^m$$

oder nach einer neuen Berechnung von Schröder van der Kolk<sup>2)</sup>

$$c_0 = 332,77.$$

Nach der Theorie muß die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, da sie nur von dem Quotienten der einander proportionalen Größe  $\frac{H}{\rho}$  abhängt, unabhängig sein von der Dichtigkeit der Luft, also dieselbe sein, wenn sich der Schall aufwärts in dünnere Luft oder abwärts in dichtere Luft fortpflanzt. Dies ist durch die Versuche von Bravais und Martins bei einem bedeutenden Höhenunterschiede am Faulhorn bestätigt worden<sup>3)</sup>. Die eine Station war am Faulhorn, die andere am Brienzer See, ihre schiefe Entfernung betrug 9560<sup>m</sup>, der Höhenunterschied 2079<sup>m</sup>, so daß die Neigung der vom Schall durchlaufenen Linie 12° 26' betrug. Es wurde mit Anwendung wechselseitiger Schüsse auf dem Berge von A. Bravais und Martins, am See von C. Bravais beobachtet, die beiden erstern hörten 18, der letztere 14 Schüsse im ganzen an drei Tagen. Die direkt beobachtete Geschwindigkeit des Schalles war aufwärts 337<sup>m</sup>,92, und abwärts 338<sup>m</sup>,10, also im Mittel 338<sup>m</sup>,01. Auf 0° und trockne Luft reduziert, wird daraus

$$c_0 = 332,37,$$

eine Zahl, die fast vollkommen mit der von Moll und van Beek erhaltenen übereinstimmt.

Über die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Temperatur hat vor kurzem Greeley<sup>4)</sup> bei sehr niedrigen Temperaturen, — 10,9 bis — 45,6° C. eine größere Anzahl Messungen gemacht, in-

1) Poggend Ann. 3. p. 351 469 1825. In einem Anhang zu dieser Abhandlung sind auch die sonstigen auf größere Genauigkeit Anspruch machenden Versuche zusammengestellt.

2) Schröder van der Kolk, Poggend. Ann 124. 1865

3) Bravais und Martins, Ann de chim et de phys 13 13 1845 Poggend Ann 66 p 351. 1846.

4) Greeley, Beiblätter zu den Annalen d. Physik 14. p 957 1888

dem er bei einer Standlinie von 1279<sup>m</sup>,2 beobachtete. Da bei diesen niedrigen Temperaturen die Luft ganz trocken ist, so soll man für diese Temperaturen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles Werte finden nach der Gleichung

$$c = c_0 \sqrt{1 - 0,00367 t} = c_0 (1 - 0,001835 t).$$

Greely fand fast genau diese Abnahme, er gelangt zu dem Resultate, daß für jeden Grad die Geschwindigkeit des Schalles um 0,603<sup>m</sup> abnehme. Setzt man für  $c_0$  den Wert 332,72, so ist nach der Gleichung  $332,72 - 0,603 t = 332,72 (1 - 0,00183 t)$

	für	— 10°,9	— 25,7	— 37,8	— 45,6
berechnet	$c =$	326,15	317,22	309,22	305,23
beobachtet	$c =$	326,1	317,1	309,7	305,6.

Gegen die mitgeteilte Beobachtungsmethode hat Regnault<sup>1)</sup> den Einwurf erhoben, daß dieselbe keine absolut genauen Resultate liefern könne, da es bei derselben dem Beobachter unmöglich sei, den Moment der Schallerzeugung und den der Wahrnehmung mit absoluter Genauigkeit zu bestimmen. Der Beobachter werde stets durch den aufflackernden Lichtblitz, wie durch den ankommenden Schlag überrascht, und ebenso sei es keineswegs sicher, daß bei dem Markieren des Sekundenzählers zwischen der Wahrnehmung und der dadurch hervorgebrachten Willensäußerung eine durchaus unmeßbare Zeit liege. Deshalb sei dieses Verfahren nur statthaft bei sehr großen Standlinien und deshalb sehr intensiven Schallen. Bei sehr intensiven Schallen sind aber, wie schon Schröder van der Kolk<sup>2)</sup> hervorgehoben hatte, die Voraussetzungen der Theorie, welche als Maß der Elastizität den augenblicklichen Luftdruck setzt, nicht mehr gestattet, da dann in den Verdichtungsstellen eine merkliche Verdichtung stattfindet, bei welcher die Gase dem Mariotteschen Gesetze nicht mehr folgen. Bei großen Standlinien und im freien Raume ist allerdings nach den Bemerkungen von Schröder dieser Einfluß unmerkbar, indes bleibt immer die erste Unsicherheit bestehen. Die nahe Übereinstimmung der gefundenen Werte untereinander und mit der Theorie beweist deren Richtigkeit auch nicht, da der Wert von  $k$  sich nur schwierig direkt mit Sicherheit bestimmen läßt, wir haben oben für  $k$  den aus Versuchen von Masson, Hirn und Weißbach abgeleiteten mittlern Wert eingesetzt, welcher mit dem später von Röntgen gefundenen übereinstimmt.

Regnault hat deshalb eine ausgedehnte Untersuchung über die Fortpflanzung des Schalles durchgeführt und dabei die Wasserleitungsröhren benutzt, welche in den Jahren 1862 und 1863 in Paris neu gelegt wurden: gleichzeitig suchte er auch die Fortpflanzung des Schalles in freier Luft durch Kanonenschüsse zu bestimmen.

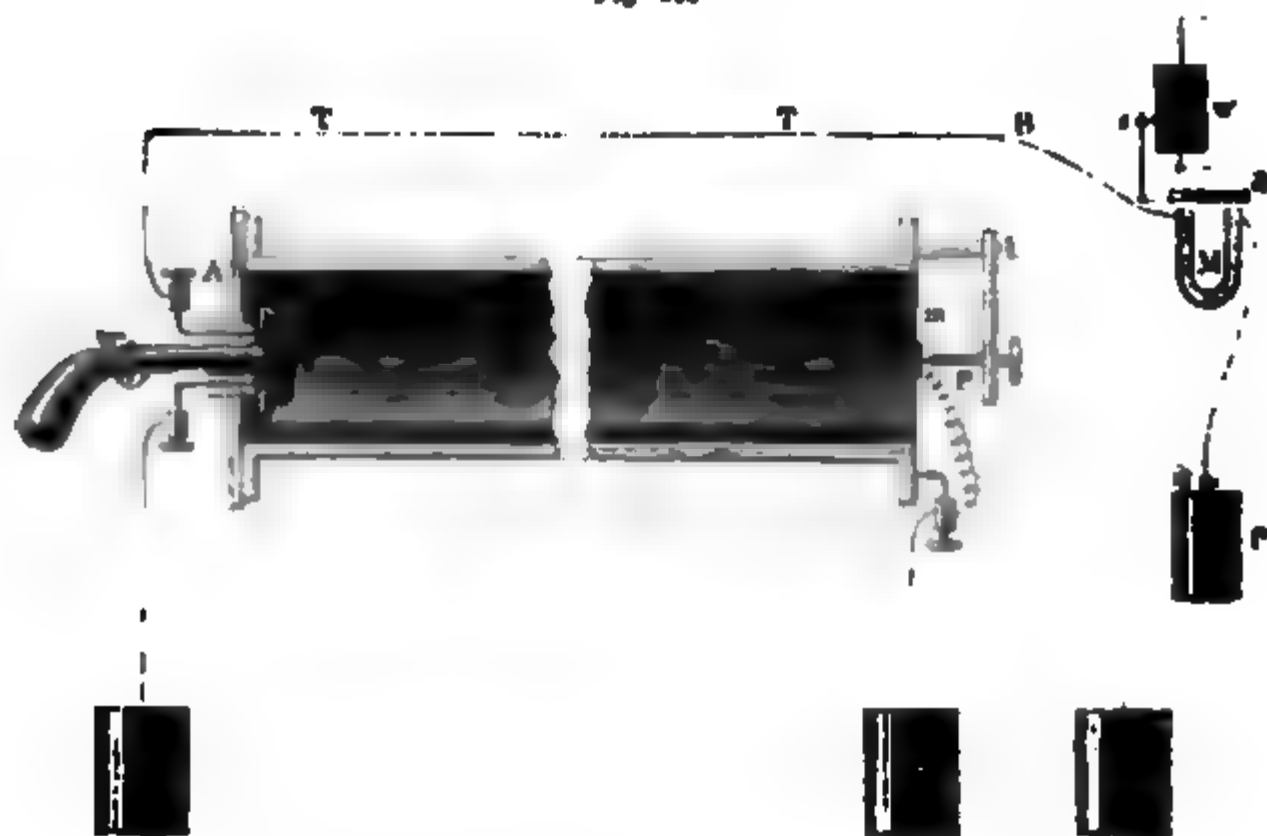
Der wesentliche Unterschied der Regnaultschen Methode von den frühern ist der, daß er den Moment der Erzeugung des Schalles und den der Ankunft am Orte der Beobachtung nicht durch den Beobachter selbst bestimmen, sondern ihn an einem selbsttätigen Registrierapparat sich auf-

1) *Regnault*, Mémoires de l'Acad. de France. 37. 1868 u. 1870.

2) *Schröder van der Kolk*, Poggend. Ann. 124. 1865.

zeichnen ließ. Er benutzte dazu die elektrische Telegraphie in einer Weise, wie sie das Schema Fig. 320 deutlich macht. Der Schall wurde erzeugt bei den Röhren durch den Schuß einer Pistole, in freier Luft durch den einer Kanone. Von dem Orte *A*, wo sich die Pistole befand (Fig. 320), war eine Telegraphenleitung zur Station *B*, wo beobachtet wurde, geführt. Von der Leitung ging bei *B* ein Draht zu dem Elektromagnet *M* und von diesem zu dem einen Pol der Batterie *P*. Der andere Pol der Batterie war durch die Platte *E*, mit der Erde in leitender Verbindung. Wurde noch ein anderer Punkt der Leitung mit der Erde in leitende Verbindung gebracht, so wurde der Strom geschlossen, der Magnet magnetisch, und der Anker *a* angezogen; wurde die Leitung wieder unterbrochen, so wurde der Anker wieder von dem Magnete entfernt. War der

Fig. 320



Anker angezogen, so schrieb der Stift *s* auf einem geschwärzten Zylinder, der ebenso wie bei den Phonautographen mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gedreht wurde.

Eine solche Verbindung der Leitung *TT* mit der Erde wurde bei dem Beginne der Versuche bei *A* hergestellt, indem in der Lücke *ff* der Leitung, die *T* mit *E*, verband, unmittelbar vor der Mündung der Feuerwaffe ein feiner Metalldraht ausgespannt wurde. Diese Verbindung wurde dann in dem Moment unterbrochen, in welchem das Geschütz abgefeuert wurde, indem ein fester auf die Ladung gesetzter Filzpfropf den Draht *ff* zerriß. Die Unterbrechung des Stromes entfernte den Stift *s* von der geschwärzten Walze, so daß das Aufhören des von *s* geschriebenen Striches den Moment der Schallerzeugung angab. In dem Augenblicke nun, in welchem der Schall in *B* ankam, wurde der Strom wieder geschlossen, so daß durch einen neuen von dem Stift *s* auf der Walze gezogenen Strich dieser Moment markiert wurde. Zu dem Ende war bei *B* in passender Weise eine sehr

feine Membran  $m$  ausgespannt, welche durch die ankommende Schallwelle in Schwingungen versetzt wurde. Die Membran trug in ihrer Mitte ein kleines Platinplättchen, welches durch einen feinen äußerst biegsamen Draht mit der in die Erde versenkten Platte  $E_2$  in Verbindung stand. Unmittelbar vor der Platte befand sich ein Stift  $p$ , welcher mit der Leitung  $T$  durch  $p/B$  in metallischer Verbindung war. Die bei  $m$  ankommende Welle gab der Membran einen Stoß und bewirkte dadurch, daß der Stift  $p$  mit dem Platinplättchen in Kontakt kam und damit, daß der Strom geschlossen und der Stift  $s$  wieder gegen die geschwärzte Walze gedrückt und ein Strich gezogen wurde. Der Abstand der beiden Striche gab dann die zwischen Abgabe und Ankunft des Schalles verstrichene Zeit, wenn man die Zeit bestimmte, welche die Walze zu der beobachteten Drehung gebraucht hatte. Zu dem Ende wurden auf der Walze durch ein schwingendes Pendel die einzelnen Sekunden markiert, und gleichzeitig von einer schwingenden Stimmgabel eine Wellenlinie gezogen. Diese drei Linien, die des Pendels, der Stimmgabel und die von dem Stifte  $s$  gezogenen, waren unmittelbar untereinander. Man hatte deshalb nur die Wellen vom ersten Aufhören des von  $s$  gezogenen Strichs bis zum ersten folgenden Sekundenzeichen, und von dem letzten Sekundenzeichen vor dem zweiten von  $s$  gezogenen Strich bis zu diesem Strich selbst zu zählen, um in selbst tausendstel Sekunden die Zeit zu erhalten, welche der Schall gebraucht, um von  $A$  bis  $B$  sich fortzupflanzen. Eine genaue Messung des Abstandes  $AB$  gab die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles.

In bezug auf die Einzelheiten der Ausführung und der Versuche selbst müssen wir auf die Abhandlung Regnaults verweisen, wir begnügen uns hier, die erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Zunächst schloß Regnault aus den Versuchen in den Wasserleitungsröhren, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Tat mit der Intensität des Schalles abnehme. Bei diesen Versuchen wurde die Pistole bei  $A$  in das eine Ende der Wasserleitungsröhre hineingesteckt, welches im übrigen ganz verschlossen war und das andere Ende bei  $B$  ebenfalls ganz geschlossen. Die Schallwelle kam dann zunächst direkt von  $A$  nach  $B$ . wurde bei  $B$  reflektiert und kehrte dann nach einer zweiten Reflexion bei  $A$  wieder nach  $B$  zurück, nachdem sie das Rohr dreimal durchlaufen hatte. Dabei zeigte sich, daß, trotzdem sich der Schall in zylindrischen Röhren ausbreitete, seine Intensität sehr rasch abnahm, und zwar um so rascher, je enger die Röhre war, in welcher der Schall sich ausbreitete. So wurde der von einer mit 1<sup>er</sup> Pulver geladenen Pistole erzeugte Schall nicht mehr gehört, als er in einer Röhre vom

Durchmesser	0 <sup>m</sup> ,108	durchlaufen hatte	1150 <sup>m</sup>
„	0 <sup>m</sup> ,300	„	3810 <sup>m</sup>
„	1 <sup>m</sup> ,100	„	9540 <sup>m</sup> .

Durch die Bewegung der Membran  $m$  konnte man indes die Rückkehr der Welle viel länger beobachten, man erkannte sie in den drei eben genannten Röhren und unter den angegebenen Umständen noch, nachdem sie bezw. 4056<sup>m</sup>, 11430<sup>m</sup> und 19851<sup>m</sup> durchlaufen hatte.

Entsprechend der Abnahme der Intensität zeigte sich auch eine Abnahme der Geschwindigkeit des Schalles, wie folgende Zahlen zeigen:

Röhre von 0 <sup>m</sup> ,108 Durchmesser	
durchlauf Weg	Geschw
566 <sup>m</sup> ,74	330,99
1700 <sup>m</sup> ,22	328,21
2833 <sup>m</sup> ,70	327,52
4055 <sup>m</sup> ,90	326,66

Röhre von 0 <sup>m</sup> ,300 Durchmesser	
durchlauf Weg	Geschw.
3810 <sup>m</sup> ,3	332,18
7620 <sup>m</sup> ,6	330,43
11430 <sup>m</sup> ,0	329,64
15240 <sup>m</sup> ,9	328,96

Röhre von 1 <sup>m</sup> ,10 Durchmesser	
durchlauf. Weg	Geschw
749 <sup>m</sup> ,1	334,16
1417 <sup>m</sup> ,9	332,50
5671 <sup>m</sup> ,8	331,24
11343 <sup>m</sup> ,6	330,68
19851 <sup>m</sup> ,3	330,52.

Die Zahlen zeigen somit eine beträchtliche Abnahme der Schallgeschwindigkeit mit der Intensität, gleichzeitig ergeben sie aber auch, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren verschiedener Weite eine sehr verschiedene ist. Sehr deutlich tritt dieser Unterschied bei der Vergleichung der drei in jeder Reihe letzten Werte hervor, welche die mittlere Geschwindigkeit des Schalles geben von dem Momente seiner Erzeugung bis zum Momente, in welchem der Schall nicht mehr wahrnehmbar ist.

Aus diesen Erfahrungen ergibt sich, daß die Wände der Röhren, in welchen die den Schall fortpflanzende Luft eingeschlossen ist, auf die Elastizität der Luft vermindern einwirken müssen, ohne die Dichtigkeit zu vermindern, oder daß die Dichtigkeit vermehrt wird, ohne daß gleichzeitig die Elastizität vergrößert wird. Wir werden die Frage im nächsten Paragraphen genauer behandeln. Daß zwischen der schwingenden Luft und den Wänden eine Wechselwirkung besteht, das ergibt sich schon aus der raschen Abnahme der Schallintensität beim Fortpflanzen des Schalles durch die Röhren. Denn da hier die fortschreitende Welle immer wieder dieselbe Luftmasse in Bewegung versetzt, so kann die Abnahme der Schallstärke nur von einer Abgabe der Bewegung an die Röhrenwände herrühren, eine Abgabe, die auch dadurch konstatiert wurde, daß man neben der Röhre auf ihrer ganzen Länge den Schall zu hören imstande war.

Um den Einfluß der Röhrenwände ganz zu eliminieren, müßte man Röhren von unendlich großem Durchmesser anwenden. Regnault glaubt indessen, daß bei der Röhre, deren Durchmesser gleich 1<sup>m</sup>,1 ist, der Einfluß der Wände schon ganz unmerklich gewesen sei, daß man deshalb die aus der letzten Versuchsreihe sich ergebende Zahl 330<sup>m</sup>,6 als die mittlere Geschwindigkeit des durch einen Pistolenschuß erzeugten Schalles von dem Entstehungsmomente bis zu dem, in welchem er verschwindet, ansehen könne.

Die unserer Gleichung entsprechende Geschwindigkeit würde das noch nicht genau sein, da unsere Gleichung voraussetzt, daß die Dichtigkeitsänderung der Luft unendlich klein ist, somit strenge genommen für den Schall eine unendlich kleine Intensität voraussetzt. Man erhält dieselbe bei diesen Versuchen aus den Zwischenräumen, welche bei den letzten unmittelbar vor dem Verschwinden des Schalles gemachten Beobachtungen zwischen einer und der folgenden Rückkehr des Schalles verstreichen. Regnault erhält hierfür die nur wenig kleinere Zahl

$$c_0 = 330,30$$



In freier Luft erhielt Regnault für die Geschwindigkeit eines durch Kanonenschüsse erzeugten Schalles in der Tat fast genau die in der weitesten Röhre gefundene Zahl, nämlich als mittlere Geschwindigkeit

$$c_0 = 330^m,70,$$

eine Zahl, welche nur um 0,4 von der in der Röhre gefundenen sich unterscheidet.

Gegen die Deutung, welche Regnault seinen Versuchen in bezug auf die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität des Schalles gegeben, hat später Rink<sup>1)</sup> sehr berechtigte Einwände erhoben, und gezeigt, daß Regnaults Versuche eine solche Abhängigkeit keineswegs erkennen lassen, wenn man aus den Berechnungen der Versuche das erste und zweite Durchlaufen der Röhren ausschließe. Für diese und besonders für das erste kann man die Gesetze der Schallausbreitung gar nicht anwenden. Durch den Pistolenschuß wird nämlich die Luft selbst in der Achse der Röhren mit großer Geschwindigkeit fortgeschleudert, so daß also zunächst sich nicht nur die Schwingungen in der Röhre fortpflanzen, sondern auch der Träger derselben, die Luft. Die Beobachtung des ersten Durchlaufens der Röhre muß also gerade so eine zu große Geschwindigkeit des Schalles geben, wie Versuche in freier Luft, bei welchen man die Fortpflanzung des Schalles mit der Richtung des Windes beobachtet. Möglich ist es, daß auch bei der ersten Rückkehr des Schalles die Luft noch eine von der schwingenden Bewegung unabhängige fortschreitende Bewegung hat, und deshalb schloß Rink aus seiner Berechnung der Regnaultschen Versuche auch diese Beobachtung aus.

Ein weiterer Beweis gegen die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Intensität desselben ergibt sich daraus, daß bei stärkeren Pulverladungen der Pistole die Geschwindigkeiten sich keineswegs größer ergeben, während doch die mit stärkeren Pulverladungen abgegebenen Schüsse einen Schall von erheblich größerer Intensität geben.

In folgender Tabelle sind zum Beweise der Richtigkeit der Einwürfe von Rink die berechneten Werte der Geschwindigkeit für einige Beobachtungsreihen zusammengestellt, die in dem 1<sup>m</sup>,10 weiten Rohre erhalten sind. Die erste Spalte enthält die Nummer der Versuchsreihe, wie Regnault sie bezeichnet hat, die zweite die Pulverladung in Grammen, die folgenden die Schallgeschwindigkeiten, wenn der Schall die Röhre die über jeder Spalte gegebene Anzahl mal durchlaufen hatte, berechnet aus den beobachteten Zeiten mit Ausnahme des ersten Hin- und Herganges des Schalles: die Spalte 3 L gibt also die Geschwindigkeit berechnet aus dem dritten, 4 L aus dem dritten und vierten Durchlaufen der Röhre usw.

Nr.	Ladung	3 L	4 L	5 L	6 L	7 L	8 L
1	0,5	330,02	330,29	330,15	330,21	330,11	330,13
2	1	330,36	330,59	330,57	330,61	330,44	330,42
3	1,5	330,29	330,57	330,54	330,60	330,47	330,53
4	2	330,60	330,51	330,84	330,89	330,44	330,30
5	1	330,04	330,26	330,26	330,28	330,16	330,22
6	1	330,36	330,37	330,50	330,67	330,55	330,50

1) Rink, Poggend. Ann. 149. 1873.



Wie man sieht sprechen diese Zahlen auf das evidenteste gegen die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Intensität, so daß also selbst für diese, jedenfalls anfangs noch sehr kräftigen Schalle, die Bemerkung Schröder von der Kolks noch keine Gültigkeit hätte.

Als Mittel der Geschwindigkeit des Schalles in der 1<sup>m</sup>.1 weiten Röhre berechnet Rink in dieser Weise

$$c = 330,5,$$

welche der von Regnault in freier Luft erhaltenen bis auf 0,2 gleich ist

Auch Violle und Vautier<sup>1)</sup> kommen zu demselben Resultat, daß nur an der Erzeugungsstelle sehr starker Schalle eine Unregelmäßigkeit in der Fortpflanzung stattfindet, die eine größere Geschwindigkeit zur Folge habe, daß sich aber bei der Fortpflanzung bald die normalen Verhältnisse herstellen, bei denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht von der Intensität abhängig sei. Sie finden weiter, daß auch in einer Röhre von 1<sup>m</sup> die Schallgeschwindigkeit für den Knall einer Pistole noch um 0,46<sup>m</sup> verändert wäre, und finden so für die Schallgeschwindigkeit im freien Raume den Wert 331,1, den sie auf 0,1<sup>m</sup> genau halten.

Im Jahre 1895 nahmen die genannten Gelehrten ihre Messungen nochmals auf, und zwar in Argenteuil in einer Röhrenleitung von 3<sup>km</sup> Länge und 3<sup>m</sup> Durchmesser.<sup>2)</sup> Auf der Länge wurden drei Stationen errichtet, deren Abstand mit großer Genauigkeit gemessen wurden. Der Durchgang der Schallwelle an einer Station wurde nach ganz verschiedenen Methoden bestimmt, wodurch natürlich die Größe der Fehler der Methoden erkannt wurden. Es wurden direkte Messungen mit dem Ohre gemacht. Ferner wurden die Bewegungen einer resonierenden Membran photographiert. Auch mechanisch wurden die Wellen und deren Verlauf mit einer Hebelübertragung aufgezeichnet, und endlich die Änderung des Brechungsindex der Luft, die bei der Verdichtung der Welle eintritt, mittels einer optischen Interferenzmethode registriert. Als Mittelwert aus allen Bestimmungen wurde für die normale Schallgeschwindigkeit in der Röhre 331,15<sup>m</sup> pro Sekunde gefunden. Als Genauigkeit wird angegeben 2 — 3<sup>cm</sup>. Berücksichtigt man nun noch die in § 174 besprochene Korrektur wegen des Einflusses der Röhrenwandung, so würde als Mittel in freier Luft sich ergeben 331,36<sup>m</sup>.

Später hat noch Frot<sup>3)</sup> Messungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft unter Anwendung von Kanonenschüssen ausgeführt. Er gelangte aus 15 Beobachtungen zu dem Werte 330,7 bei 0° C.

Bei den Versuchen benutzten Violle und Vautier auch unter andern musikalische Töne und machten dabei die sonderbare Beobachtung, daß zuerst der Grundton, dann der Reihe nach der 6., 5., 4., 3. Oberton ganz getrennt zurückkommen, nachdem der Schall die Röhre einmal hin und her

1. Violle und Vautier, Comptes Rendus 110 p. 236 1890.

2. Violle und Vautier, Journ. d. phys. 5 3 p. 22 1896. Eine zusammenfassende Darstellung der genannten Messungen und auch der früheren Beobachtungen anderer Physiker befindet sich in den Rapports du Congrès international de physique. 1 p. 228 1900.

3. Frot Comptes Rendus 127. p. 607. 1898.

durchlaufen hat. Brillouin<sup>1)</sup> gibt als Grund dafür die wiederholte Reflexion an den Wänden an. Wenn der Ton nicht ganz gleichmäßig zentral erregt durch die Röhre geht, so kann er als mehrfacher Ton zurückkehren.

Einen ähnlichen Wert wie Violle und Vautier fand Le Roux<sup>2)</sup> für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einer 7<sup>cm</sup> weiten Röhre nach einer der Regnaultschen ähnlichen Methode, nämlich 330,66<sup>m</sup>.

Regnault hat gleichzeitig bei seinen Versuchen die Frage einer erneuten Prüfung unterzogen, ob denn in der Tat die Schallgeschwindigkeit bei allen Drucken dieselbe sei, ein Satz, der strenge nur so weit gültig sein kann, als die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen. Es gelang ihm nicht, einen meßbaren Unterschied in der Schallgeschwindigkeit zu erhalten, trotzdem er den Druck der in einer Röhre eingeschlossenen Luft von 247<sup>mm</sup> bis 1267<sup>mm</sup>, also bis zum Fünffachen des Anfangsdruckes steigerte.<sup>3)</sup>

Schließlich hat Regnault auch in den Röhren die Geschwindigkeit des Schalles in einigen andern Gasen als in der Luft gemessen, nämlich in Wasserstoff, Kohlensäure, Stickoxydul und Ammoniak. Nach der Theorie ist die Geschwindigkeit des Schalles

$$c = \sqrt{\frac{g H \sigma}{s} k (1 + \alpha t)},$$

in welcher Gleichung  $s$  die Dichtigkeit des Gases bei der Temperatur 0° bedeutet. Für das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in zwei verschiedenen Gasen ergibt sich daraus

$$c : c_1 = \sqrt{\frac{k}{s}} : \sqrt{\frac{k_1}{s_1}},$$

oder, wenn wir die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft  $c_1 = 1$  und die Dichte der Luft  $s_1 = 1$  setzen

$$c = \sqrt{\frac{k}{s k_1}}.$$

Der Wert von  $c$  hängt also nur ab von dem Verhältnis der Werte  $k$  des Gases und der Luft, sowie von der Dichte des betreffenden Gases. Die von Regnault erhaltenen Werte von  $c$  für  $c_1 = 1$  und die daraus mit der bekannten Dichte der Gase für die einzelnen Gase nach der Gleichung

$$k = \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 \left(\frac{s}{s_1}\right) k_1$$

sich ergebenden Werte von  $k$  sind in folgender Tabelle zusammengestellt

	$\frac{c}{c_1}$	$\sqrt{\frac{1}{s}}$	$k$
Luft . . . . .	1	1	1,395
Wasserstoff . . . .	3,801	3,799	1,396
Kohlensäure . . . .	0,8009	0,8087	1,368
Stickoxydul . . . .	0,8007	0,8100	1,361
Ammoniak . . . . .	1,2279	1,3025	1,239.

1) *M. Brillouin*, Rapports du Congrès international de phys. 1. p. 246. 1900.

2) *Le Roux*, Ann. de chim. et de phys. 12. (4.) 1867.

3) Zu andern Resultaten glaubte *Krajewitsch* zu gelangen, auf dessen Versuche wir im nächsten Paragraphen zurückkommen werden.

Die für diese Gase gefundenen Werte der Schallgeschwindigkeit und damit die Werte von  $k$  können nur angenäherte sein, da es sehr schwierig ist, so ausgedehnte Röhrenleitungen mit vollständig reinen Gasen zu füllen. Wir werden im nächsten Paragraphen genauere Werte mit Hilfe der indirekten Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit erhalten.

Aus den Regnaultschen Messungen ergibt sich somit die Schallgeschwindigkeit nicht unerheblich kleiner als aus den früheren Versuchen, nämlich zu 330,7 anstatt zu 332,7 nach den Messungen der holländischen Physiker oder 332,4 nach denen von Bravais und Martin, während sie der von den französischen Akademikern gefundenen Zahl 331,2 näher kommt. Nehmen wir die von diesen Beobachtern gefundenen Werte sämtlich als gleich wahrscheinlich an, wozu wir berechtigt sind, da man dem von Regnault hervorgehobenen psychologischen Momente bei der Beobachtung der zwischen Wahrnehmung des Lichtes und des Schalles verfließenden Zeit wohl nicht den Einfluß zuschreiben kann, daß diese Zeit immer zu klein genommen wird, so ergibt sich als Mittel aus diesen vier jedenfalls besten direkten Messungen der Schallgeschwindigkeit in der Luft der Wert

$$c = 331,76.$$

Betreffs der Ausbreitung des Schalles müssen wir noch auf eine Anomalie hinweisen, die sich bei der Ausbreitung des Schalles von Detonationen schwerer Geschütze bei scharfen Schüssen zeigt, wenn das Geschöß eine Anfangsgeschwindigkeit hat, welche größer ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles. In der Nähe der Flugbahn des Geschosses scheint die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles gleich der Geschwindigkeit des Geschosses zu sein, und von der Stelle an, wo die Geschwindigkeit des Geschosses kleiner wird als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, scheint der Schall dem Geschosse vorzueilen.

Journée<sup>1)</sup> hat, um diese Erscheinung zu erklären, die Hypothese aufgestellt, daß ein Geschöß in jedem Momente durch seinen Stoß gegen die ruhende Luft ein Zentrum des Schalles ist. In Verfolgung dieser Hypothese hat De Labouret<sup>2)</sup> genauer die Orte zu bestimmen gesucht, wo man beim scharfen Schießen den Schall zuerst hörte und die Zeit berechnet, welche für einen gegebenen Ort zwischen der Detonation beim Abfeuern des Geschosses und der Wahrnehmung verstreicht.

Nach einem Berichte Seberts<sup>3)</sup> über länger auf dem Schießplatze zu Chalons von Journée durchgeführte Beobachtungsreihen ergab sich, daß die Erscheinungen mit den Auffassungen von Journée und De Labouret in Übereinstimmung sind. Man kann daher nicht mehr, wie früher wohl geschah, annehmen, daß sehr intensive Schalle sich erheblich rascher, als der normalen Geschwindigkeit entspricht, fortpflanzen, sondern die scheinbar größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist einer sekundären Ursache zuzuschreiben.

1) Journée, Comptes Rendus 106. p. 344. 1887.

2) De Labouret, Comptes Rendus. 106. p. 934 1893; 107 p. 85. 1898.

3) Sebert, Beiblätter zu den Annalen d. Physik. 13. p. 209 1888.

## § 174.

**Indirekte Messung der Schallgeschwindigkeit.** Wir haben im vorigen Kapitel nachgewiesen, daß jede Säule irgend eines Körpers, wenn sie in longitudinale Schwingungen versetzt wird, eine Reihe von Tönen gibt. Für Luftsäulen in Pfeifen eingeschlossen erhielten wir als Ausdruck für die Schwingungszahl dieser Töne

$$N = \frac{(2n - 1)c}{4(l + x)}$$

für gedeckte Pfeifen, und

$$N = \frac{nc}{2(l + x + y)}$$

für offene Pfeifen; worin  $l$  die Länge der Pfeifen,  $x$  die Korrektur wegen der Mundöffnung und  $y$  die Korrektur bei den offenen Pfeifen wegen des Hervorragens der schwingenden Luftsäule aus der obern Öffnung der Pfeife bedeutet.

Nach den Entwicklungen des vorigen Abschnittes ist die Größe  $c$  in diesem Ausdruck die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung oder des Schalles in dieser Luftsäule, indem  $N$  der reziproke Wert der Schwingungsdauer der stehenden Welle von der Länge  $2(l + x)$ , bzw.  $(l + x + y)$  ist. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhielten wir aber früher den Quotienten aus der doppelten Länge der stehenden Welle und der Schwingungsdauer der Bewegung, oder

$$c = \frac{2L}{T} = 2LN.$$

Die Schwingungszahlen von Tönen können wir mittels des Monochordes oder der Sirene auf das genaueste erhalten. Da wir nun die Länge  $l$  der Röhre direkt messen und die Größen  $x$  und  $y$  entweder nach der Dulong'schen Methode beobachten oder nach der Wertheimschen berechnen können, so können wir aus den beobachteten Tönen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles sofort erhalten. Bei Anwendung gedeckter Pfeifen erhalten wir, wenn  $N_1$  die entweder direkt erhaltene oder aus einem der harmonischen Töne bestimmte Schwingungszahl des Grundtones ist, für welchen  $n = 1$ ,

$$c = 4(l + x)N_1$$

und für offene Pfeifen

$$c = 2(l + x + y)N_1.$$

Dulong's Versuche<sup>1)</sup> führten für Luft auf die Zahl 333<sup>m</sup> für 0° als Mittel aus einer sehr großen Zahl von Versuchen; indes glaubte Dulong doch, daß sich die absolute Geschwindigkeit des Schalles in freier Luft durch die Töne der Pfeifen nicht mit Sicherheit bestimmen lasse, und die Zahlen, welche er mitteilt, zeigen auch besonders mit dem richtigen Werte von  $\alpha$  in der Korrektur für die Temperatur berechnet Abweichungen bis zum Werte von 10<sup>m</sup>.

1) *Dulong*, Untersuchungen über die spezifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten. Ann. de chim. et de phys. 41. 1829. Poggend. Ann. 16. 1829

Wertheim<sup>1)</sup> indes hat die Geschwindigkeit des Schalles in Luft mittels der Pfeifentöne fast genau mit der Theorie in Übereinstimmung gefunden. Seine Versuche sind bei sehr verschiedenen Temperaturen angestellt, die verschiedenen von ihm erhaltenen Werte sind die folgenden:

Temperatur $t$	Geschwindigkeit des Schalles bei der Temperatur $t$ $c_t$	Geschwindigkeit bei 0° $c_0 =$ $1 + 0,00367 t$
I. Reihe		
0°,5 C.	331,98	331,70
2,0	332,74	331,53
4,5	332,75	330,04
8,0	335,43	330,62
8,5	338,05	332,91
9,0	338,01	332,54
12,0	339,46	332,23
12,3	343,01	335,53
16,0	338,68	329,17
26,6	347,82	332,01
II. Reihe.		
9,9	338,85	332,87
16,0	337,20	327,35
III. Reihe.		
21,0	341,15	329,12
IV. Reihe.		
9,3	334,65	329,09
11,5	336,60	329,61
17,0	342,3	332,11

Mittel aller Versuche 331,33.

Die von Wertheim erhaltene Zahl ist somit um 0<sup>m</sup>,7 oder 0,002 des von Regnault gefundenen Wertes größer als der letztere, trotzdem die von Wertheim angewandten Pfeifen im Maximum einen Durchmesser von 40<sup>mm</sup> hatten, also nur etwa 0,33 der von Regnault benutzten engsten Röhre. Es ist indes auch bei Wertheim der Einfluß der Pfeifenweite unverkennbar. Die Versuche sind mit vier verschiedenen Pfeifen angestellt, deren Durchmesser waren 10, 20, 20, 40<sup>mm</sup>, drei waren von Messing, die vierte, deren Durchmesser 20<sup>mm</sup> betrug, von Glas. Nimmt man anstatt aus allen Versuchen nur aus den zu jeder Pfeife gehörigen Zahlen das Mittel, so erhält man

Messingpfeife von 40 <sup>mm</sup> Durchmesser . . .	332,10	aus Reihe I
„ „ 20 <sup>mm</sup> „ . . .	330,11	„ „ II
Glaspfeife „ 20 <sup>mm</sup> „ . . .	330,23	„ „ IV
Messingpfeife „ 10 <sup>mm</sup> „ . . .	329,12	„ „ III.

Wie man sieht, nimmt die aus der Schwingungszahl und den Pfeifenlängen berechnete Geschwindigkeit erheblich ab mit dem Durchmesser der

1. Wertheim, Über die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten. Ann. de chim. et de phys. 23. (3) 1848. Poggend. Ann. 77. 1849.

Pfeifen, während die beiden Pfeifen gleichen Durchmessers auch dieselbe Zahl ergeben.

Die Methode der Geschwindigkeitsmessung durch Pfeifentöne beruht eigentlich auf Messung der Wellenlängen, welche, wie wir schon mehrfach hervorhoben, keineswegs vollkommen sicher ist; eine Beobachtung hat Kundt<sup>1)</sup> in den Stand gesetzt, die Länge der Wellen in den Gasen direkt zu messen und so eine sehr bequeme Methode zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeiten zu geben.

Wenn man eine an beiden Seiten offene Röhre in longitudinale Schwingungen versetzt, so gerät die in der Röhre vorhandene Luft nicht mit in Schwingungen; bringt man deshalb in eine solche Röhre Lycopodium oder Kieselsäure, so bewegt sich dies zu den in den Röhrenwänden sich bildenden Savartschen Knotenlinien (§ 147). Anders dagegen, wenn man die Röhren an den Enden verschließt, sei es, daß man sie zustöpselt oder zuschmilzt. Da die freien Enden eines den tiefsten Longitudinalton gebenden Rohres stets ein Schwingungsmaximum haben, so stoßen die Endflächen des Rohres ganz periodisch auf die eingeschlossene Luft, und versetzen dieselbe in Schwingungen, welche mit denen der Röhre isochron sind. Da nun diese Schwingungen von beiden Enden der Röhre gegeneinander sich fortpflanzen, so müssen sich stehende Wellen bilden, an deren Knotenpunkten das Lycopodium oder die Kieselsäure sich ansammelt. Die Länge dieser stehenden Wellen hängt lediglich von der Höhe des erzeugenden Tones und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in dem die Röhre erfüllenden Gase ab, oder wenn wir nach und nach dieselbe Röhre mit verschiedenen Gasen füllen, so ist die Länge der Wellen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen direkt proportional.

Eine ganz eben solche Bildung von stehenden Wellen in der in einer Röhre eingeschlossenen Luftsäule tritt ein, wenn man die Röhre an einem

Fig. 321.



Ende schließt und durch das andere offene Ende, wie Fig. 321 zeigt, in dieselbe den tönenden Stab einführt. Klemmt man die Röhre bei *D* ein und bringt den Stab, der bis zu seiner Mitte in die Röhre eingeführt ist, durch Streichen in der Richtung von *D* nach *A* zum Schwingen, so sind es die Stöße des freien Endes *B* gegen die eingeschlossene Luft, welche die Luft in Schwingung versetzen; die Schwingungen werden bei *C* reflektiert, so daß auch hier stehende Wellen sich ausbilden, in deren Knoten der Staub sich ansammelt. Bei dieser Art der Erzeugung der Luftschwingungen werden die Knotenlinien durch nichts alteriert, was bei der ersten Art der Erregung, bei der die Röhre selbst schwingt, immerhin durch die Savartschen Linien noch möglich ist. Man kann deshalb bei dieser Art der Erregung die Länge der stehenden Wellen leicht messen und so die Geschwindigkeit des Schalles in Röhren verschiedenen Durchmessers und bei verschiedenen Gasen miteinander vergleichen, oder auch, wenn man die

1) Kundt, Poggend. Ann. 127. 1866 und 135. 1868.

Schwingungszahl des Stabtones bestimmt, ihrem absoluten Werte nach erhalten.

Auf die Einzelheiten des Verfahrens einzugehen, würde uns hier zu weit führen, wir verweisen deswegen auf die Arbeiten von Kundt.<sup>1)</sup>

Kundts Versuche bestätigen nun zunächst das vorhin aus denen von Wertheim gezogene Resultat, daß die Geschwindigkeit auch hoher Töne von dem Durchmesser der Röhre abhängig ist, und liefern gleichzeitig die Erklärung, weshalb Regnault in Röhren von 10,8<sup>mm</sup> Durchmesser noch eine so bedeutende Verzögerung des Schalles fand, während wir aus den Zahlen Wertheims schon für Pfeifen von 4<sup>mm</sup> Durchmesser die volle Geschwindigkeit erhielten, Kundt fand nämlich, wie folgende kleine Tabelle zeigt, daß die Verzögerung der Geschwindigkeit mit der Wellenlänge des Tones zunimmt; die Geschwindigkeit in einer Röhre von 13<sup>mm</sup> Durchmesser ist stets gleich 1 gesetzt.

Durchmesser der Röhren	Geschwindigkeit des Schalles für Töne mit Wellenlängen von		
	180 mm	90 mm	60 mm
55,0	1,01010	1,00885	1,00584
26,0	1,00908	1,00842	1,00781
13,0	1,00000	1,00000	1,00000
6,5	0,98031	0,99170	0,99176
3,5	0,92628	0,96666	

Für den tiefsten Ton, der nahezu dem  $a_2$  entspricht, nimmt also die Geschwindigkeit des Schalles bis zu dem Rohrdurchmesser 0,055 so merklich zu, daß die Grenze der Zunahme wohl noch nicht erreicht ist, während für den eine Oktave höhern Ton die Grenze der Röhrenweite, bis zu welcher die Geschwindigkeit wächst, schon bei 26<sup>mm</sup> liegt. Der Pistolenschuß Regnaults gab nach Versuchen von König einen Ton, dessen Wellenlänge etwa 3,6<sup>m</sup><sup>2)</sup>, dessen Höhe somit fast  $g_{-1}$  war; da somit die Länge der Welle 20mal größer ist, kann es nicht auffallend erscheinen, daß der Einfluß der Röhrenwände erst bei so viel größerem Durchmesser unmerkbar wurde.

Gleichzeitig fand Kundt, daß die Beschaffenheit der innern Röhrenwand auf die Geschwindigkeit des Schalles von Einfluß war, bei rauhen Wänden ist die Geschwindigkeit kleiner; einen Einfluß der Intensität vermochte Kundt dagegen nicht zu erkennen.

Daß die Geschwindigkeit des Schalles in engen Röhren sich beträchtlich vermindert, liegt einmal an der Reibung der schwingenden, in der Röhre eingeschlossenen Gasteile, durch welche die Beweglichkeit der schwingenden Teile vermindert wird, dann aber wesentlich in der Verminderung des Koeffizienten  $k$ , der, wie erwähnt wurde, in die Gleichung für die Fortpflanzung von Wellen in Gasen eingeht, weil an den verdichteten Stellen eine Erwärmung, an den Stellen der Verdünnung eine Abkühlung eintritt.

1. Ausführlich sind dieselben dargelegt in Poggend. Ann 185. 1868.

2. Regnault, Mémoires de l'Acad 87. p. 437. 1868 u. 1870.



Diese Erwärmung und Abkühlung wird in Röhren kleiner, weil an den verdichteten Stellen Wärme an die Röhrenwand abgegeben, an den verdünnten Wärme von der Röhrenwand aufgenommen wird. Man erkennt deshalb leicht, daß die Abnahme der Geschwindigkeit in engern Röhren und für Töne größerer Schwingungsdauer die größere sein muß. Denn je enger die Röhre ist, um so größer ist im Verhältnis zur schwingenden Luftsäule die Wandfläche, welche ihren Einfluß ausübt, da die Menge der schwingenden Luft mit dem Quadrate des Röhrendurchmessers, die berührende Wandfläche dagegen mit der ersten Potenz desselben abnimmt. Je langsamer ferner die Schwingungen sind, um so größer ist der Wärmeaustausch mit den Röhrenwänden, da die Verdichtungen und Verdünnungen dann um so länger dauern.

Helmholtz<sup>1)</sup> und Kirchhoff<sup>2)</sup> haben diese Frage einer genauern theoretischen Behandlung unterzogen, ersterer unter Berücksichtigung der Reibung allein, letzterer unter Mitberücksichtigung des Wärmeaustausches: beide gelangen zu Gleichungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren, welche sich nur durch die Bedeutung einer in der Gleichung auftretenden Konstanten unterscheiden. Ist  $C$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im freien Raum, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  in einer Röhre vom Radius  $r$  für einen Ton, dessen Schwingungszahl  $n$  ist,

$$c = \frac{C}{1 + \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}}} = C \left( 1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}} \right),$$

worin die Konstante  $\gamma$  bei Helmholtz die Reibungskonstante der Luft ist, während sie nach Kirchhoff von der Reibung und dem Wärmeaustausch der Luft und der Röhrenwand abhängt. Es soll also nach dieser Gleichung die Abnahme der Geschwindigkeit in Röhren, die Differenz  $C - c$  dem Durchmesser der Röhre und der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl umgekehrt proportional sein.

Da weder die Versuche von Regnault noch von Kundt ausreichend waren, um die theoretische Beziehung experimentell zu prüfen, haben Schneebeli<sup>3)</sup> und Adolph Seebeck<sup>4)</sup> neue Versuche über diese Frage angestellt, indem sie, wie Kundt, aber nach einer andern Methode, die Wellenlänge von Tönen verschiedener Höhen in Röhren von verschiedenen Durchmesser maßen. Beide Experimentatoren versetzten in einem einerseits geschlossenen Rohre die Luft durch hineingesandte Töne in stehende Schwingungen und bestimmten direkt mit dem Ohre den Abstand der Schwingungsmaxima von dem geschlossenen Ende des Rohres. Die von Seebeck gewählte Anordnung zeigt Fig. 322. In dem Rohre  $AB$ , an welchem bei  $C$  ein kleines Rohr senkrecht zur Längsachse von  $AB$  angeschmolzen ist, kann ein dicht schließender Stempel hin und her bewegt werden. An dem Rohr ist eine Skala angebracht, deren Nullpunkt bei  $C$

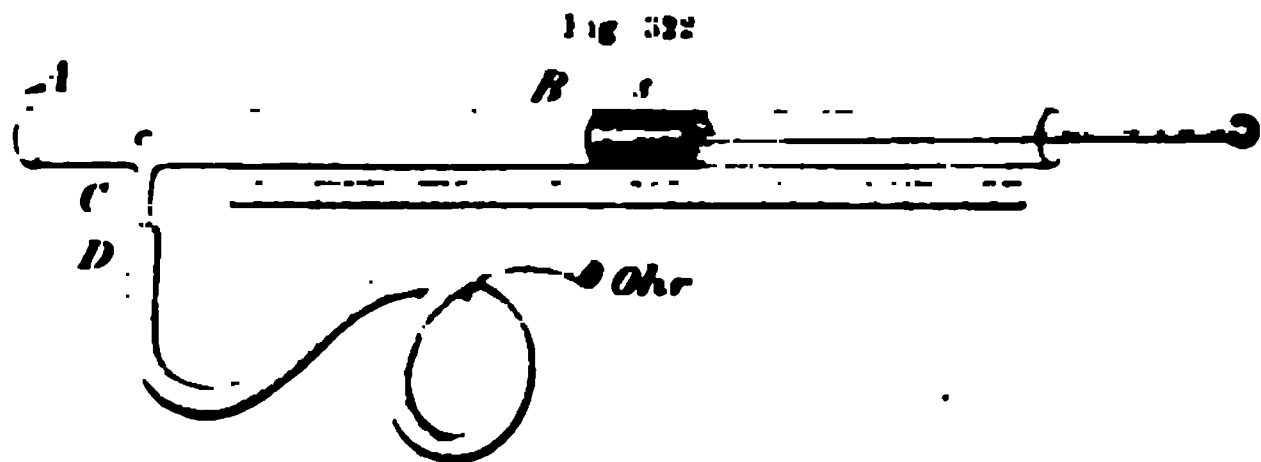
1) *Helmholtz*, Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg. 3. p. 16.

2) *Kirchhoff*, Poggend. Ann. 184. 1868.

3) *Schneebeli*, Poggend. Ann. 186. 1869.

4) *Ad. Seebeck*, Poggend. Ann. 189. 1870.

liegt. Von dem kleinen Rohr  $CD$  geht ein Kautschukschlauch aus, dessen Ende in das eine Ohr gesteckt wird, während das andere Ohr durch einen Siegellackpfropfen geschlossen wird. Erzeugt man nun in dem Rohre stehende Wellen, so nimmt das Ohr kaum einen Ton wahr, wenn bei  $c$  ein Schwingungsmaximum ist, da dann die Luft dort nur eine hin- und hergehende Bewegung besitzt, ohne daß Verdichtungen und Verdünnungen eintreten. Es können deshalb in dem abgezweigten Rohre keine longitudinalen Schwingungen entstehen und zum Ohr fortgepflanzt werden. Sendet man deshalb durch eine tönende Stimmgabel, welche sich unmittelbar vor



dem Ende  $A$  befindet, Schwingungen in das Rohr  $AB$  und verschiebt den Stempel  $s$  so lange, bis das Ohr, in welchem das Kautschukrohr mündet, keinen Ton mehr wahrnimmt, so befindet sich bei  $c$  ein Schwingungsmaximum, und da an dem Stempel  $s$  sich immer ein Schwingungsknoten befindet, so ist der Abstand der Stempelfläche von  $c$  eine viertel Wellenlänge des Tones im Inneren des Rohres. Das Vierfache des Abstandes multipliziert mit der Schwingungszahl des Tones gibt somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Rohre.

Wie Seebeck anführt, ist die auf diese Weise zu erreichende Genauigkeit sehr beträchtlich, bei Wellenlängen von  $200^{\text{mm}}$  bis  $300^{\text{mm}}$  weichen die einzelnen Messungen nur um  $1\text{--}3^{\text{mm}}$  voneinander ab, die Abweichungen vom Mittel erreichten im allgemeinen kaum  $1^{\text{mm}}$ .

Aus den Versuchen von Seebeck sowohl wie von Schneebeli ergibt sich, daß in der Tat bei engen Röhren die Verzögerung der Schallgeschwindigkeit, solange die Röhren hinreichend enge sind, so daß man die ganze Luftsäule als gleichförmig schwingend annehmen darf, dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional ist. So erhielt z. B. Seebeck unter Annahme der Geschwindigkeit des Schalles im freien Raum  $C = 332,77$  folgende Werte der Verzögerung  $C - c$ :

Durchmesser der Röhre mm	Ton $c_2$ ; $n = 512$ $C - c$		Ton $g$ ; $n = 384$ $C - c$		Ton $c_1$ ; $n = 320$ $C - c$	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
	m	m	m	m	m	m
3,4	9,79	9,79	13,91	13,91	15,51	15,51
9,0	4,33	3,70	5,09	5,25	4,75	5,06
17,5	1,85	1,90	2,91	2,70	3,53	3,01

Die als berechnet angegebenen Werte sind jedesmal aus dem für die engste Röhre gefundenen für die weitem Röhren unter Voraussetzung der Richtigkeit des Gesetzes abgeleitet, und man sieht, wie Beobachtung und Rechnung auch genügend übereinstimmen.

Kombiniert man die an verschiedenen Röhren unter Anwendung desselben Tones gemachten Beobachtungen, so läßt sich aus denselben die Geschwindigkeit des Schalles im freien Raume ableiten, nach der Gleichung

$$C = \frac{c_1 r_1 - c_2 r_2}{r_1 - r_2},$$

wenn  $c_1$  die Geschwindigkeit des Schalles in der Röhre vom Radius  $r_1$  und  $c_2$  jene in der Röhre vom Radius  $r_2$  bedeutet. Indem Schneebeli alle seine Versuche zu je zwei in der Art kombinierte, welche in verschiedenen Röhren, deren Durchmesser zwischen  $14^{\text{mm}}$  und  $90^{\text{mm}}$  waren, ausgeführt waren, fand er im Mittel

$$C = 332,06^{\text{m}},$$

ein Wert, der nur um  $0,3^{\text{m}}$  von dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gezogenen Mittel abweicht; die extremsten Abweichungen von diesem Mittel waren  $2^{\text{m}}$ , also nur 0,66 Prozent des berechneten Wertes.

Während so die Versuche übereinstimmend die Verzögerung der Schallgeschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von dem Durchmesser der Röhren der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie gemäß finden, kommen beide Experimentatoren in bezug auf die Abhängigkeit von der Schwingungszahl zu andern Resultaten. Nach der Theorie soll die Verzögerung in Röhren gleichen Durchmessers der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl umgekehrt proportional sein, nach den Versuchen nimmt aber die Verzögerung rascher ab, wie die Quadratwurzel aus der Schwingungszahl wächst, und Seebeck schließt aus seinen Versuchen, daß die Abnahme der Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus der dritten Potenz der Schwingungszahl proportional ist. In der Tat multipliziert man die in obiger Tabelle mitgeteilten Werte mit  $n^{\frac{3}{2}}$ , so findet man die in jeder Horizontalreihe sich ergebenden Produkte annähernd konstant; indes scheint, wenn man sich an die direkten Beobachtungen hält, die Verzögerung ebenso gut den Schwingungszahlen selbst umgekehrt proportional gesetzt werden zu können, so daß sich aus den Versuchen Seebecks kein bestimmtes Gesetz über die Abhängigkeit der Verzögerung von der Schwingungszahl ableiten läßt.

Später hat Kayser<sup>1)</sup> die Methode der Staubfiguren zu einer erneuten Prüfung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie benutzt; er wandte drei Töne an, deren Schwingungszahlen 2357 — 3895 — 5232 Schwingungen waren, und brachte die Staubfiguren in fünf Röhren, deren Durchmesser

$25,8^{\text{mm}}$        $33,3^{\text{mm}}$        $44^{\text{mm}}$        $51,7^{\text{mm}}$        $82^{\text{mm}}$

betrugen, hervor. Er schloß aus seinen Versuchen, daß sowohl die Abhängigkeit der Verzögerung von dem Durchmesser der Röhre, als von der Schwingungszahl der Theorie entsprechen, daß man indes für die Konstante  $\gamma$  der theoretischen Gleichung nicht den aus der Theorie sich ergebenden Wert 0,005 88, sondern einen etwa viermal größern Wert 0,0235 einsetzen müsse. In der Tat geben die auf diese Weise aus den Beobachtungen berechneten Werte für die Schallgeschwindigkeiten eine recht gute Übereinstimmung, indes tritt eine deutliche Abnahme der Werte mit der Röhrenweite ein. Die Werte werden nämlich für die Röhren

1) Kayser, Wiedem. Ann. 3. 1877.

I	II	III	IV	V
332,67	332,86	332,34	332,16	332,5
332,87	332,82	332,80	332,80	
332,69				
332,74	332,84	332,57	332,48	

Außerdem ergibt sich aus diesen Versuchen für die weiteste Röhre in dieser Weise berechnet eine auffallend große Korrektion, nämlich noch fast ein Meter, während die Versuche Kundts für eine erheblich größere Wellenlänge schon bei 26<sup>mm</sup> Durchmesser der Röhre die volle Schallgeschwindigkeit ergaben. Berechnet man in der oben angegebenen Weise mit Elimination des Korrektionsgliedes die Geschwindigkeit aus den Versuchen mit gleichen Tönen in den verschiedenen Röhren, so erhält man erheblich verschiedene Werte, je nachdem man den tiefsten der drei Töne oder den mittlern anwendet. Für den tiefsten Ton liegen die Werte zwischen 333,4 und 330,91, das Mittel wird 331,76, für den mittlern Ton liegen die Werte zwischen 332,75 und 334,17, das Mittel ist 332,33; gerade die Rechnungen, in denen die weiteste Röhre eingeht, liefern bei der letztern Berechnung die kleinsten Werte. Trotz der Sorgfalt, mit welcher Kayser seine Versuche anstellte, scheinen dieselben deshalb doch nicht geeignet, die Frage abzuschließen, und ebenso wenig wird man den von Kayser aus seinen Versuchen abgeleiteten Wert der Schallgeschwindigkeit 332,5, dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gezogenen Mittelwert vorziehen.

Die Frage nach der Gültigkeit der schon zitierten Formel

$$c = c' \left( 1 - \frac{\gamma}{2r} \frac{1}{n\pi} \right)$$

griff Jos. Müller<sup>1)</sup> nochmals auf und stellte eine Untersuchung in Kundtschen Röhren an, deren Durchmesser zwischen 15,5 bis 3,7<sup>mm</sup> lagen. Die Schwingungszahlen der benutzten Töne wurden von 900 bis 11500 variiert. Die für  $\gamma$  berechneten Werte schwankten zwischen 0,00314 und 0,01663, wodurch die Ungültigkeit der Kirchhoffschen Formel gezeigt ist. Die Schallgeschwindigkeit in den Röhren erwies sich als abhängig vom Material: je rauher die Wand und je größer die Wärmeleitung, um so größer wird die Verzögerung.

Zu diesem Resultat gelangte Müller dadurch, daß er die innere Röhrenwand mit einem Überzug von Lycopodium rauh machte, oder in das Innere der Röhre eine Messingstange oder einen Glasstab einführte.

Auch Schulze<sup>2)</sup> fand für tiefe Töne die  $\gamma$ -Werte vom Röhrenmaterial abhängig.

J. Webster Low<sup>3)</sup> hat die Wellenlängen verschiedener Töne in drei Röhren gemessen, er findet abweichend von den frühern Beobachtern die Helmholtz-Kirchhoffsche Theorie bestätigt und auch für die Konstante  $\gamma$  einen Wert, wie er sich aus der Reibung und Wärmeleitung der Luft ergibt.

Krajewitsch hat die Fortpflanzung des Schalles in Röhren benutzt,

1) Josef Müller, Diss. Bonn und Ann d. Phys. 11 4 p 331 1903

2) F. A. Schulze, Marburger Ber. 59. 1903

3) J. Webster Low, Wiedem. Ann. 52 p 641 1894.

um die Geschwindigkeit der Schallausbreitung bei sehr geringer Dichtigkeit der Luft zu messen;<sup>1)</sup> er gelangte zu dem Resultate, daß bis zu einem Drucke von etwa 280<sup>mm</sup> die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in hinreichend weiten Röhren konstant sei, daß aber bei weiterer Abnahme des Druckes die Schallgeschwindigkeit ganz erheblich abnehme. Er schloß daraus, daß bei geringen Drucken das Boyle-Mariottesche Gesetz nicht mehr gültig sei, daß der Druck des Gases, wie es Mendelejew angegeben, mit abnehmender Dichtigkeit erheblich schneller abnehme als die Dichtigkeit.

Stoletow<sup>2)</sup> hat dem gegenüber indes gezeigt, daß die Abnahme der Geschwindigkeit, die auch Krajewitsch in engen Röhren erheblich stärker fand als in weiten, ihren Grund darin hat, daß der Einfluß der Korrektion von Helmholtz-Kirchhoff nicht nur mit Verlangsamung der Schwingungen, sondern auch mit Verdünnung der Luft immer erheblicher werde. Nach Anbringung der Korrektion findet Stoletow bei Berechnung der Geschwindigkeiten bis zu Drucken von 70–88<sup>mm</sup> Werte, welche nahe mit den von Krajewitsch gefundenen übereinstimmen.

Auch bei großen Drucken bis zu 120 Atmosphären sind von Witkowski<sup>3)</sup> nach der Methode der Kundtschen Staubfiguren in Luft Messungen über Schallgeschwindigkeit gemacht worden, und zwar sowohl bei Temperaturen von 0° wie auch bei – 78°,5 C. (Temperatur der festen Kohlensäure). Es stellte sich bei den Versuchen bei 0° eine Zunahme der Schallgeschwindigkeit von etwa 7 Prozent mit zunehmendem Drucke von 0 auf 100 Atm. heraus. Bei – 78°,5 nimmt die Geschwindigkeit ab bis etwa 40 Atm. und dann zu. Die Kirchhoffsche Formel genügt auch hier nicht, um die Resultate der verschiedenen Röhren und für verschiedene Tonhöhen in Übereinstimmung zu bringen.

Wenn nach alledem die indirekte Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit für Luft noch keine zuverlässigern Werte ergeben hat, als die direkte, so ist die Methode doch vorzüglich geeignet, die Geschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen und in verschiedenen Temperaturen zu vergleichen.

Dulong<sup>4)</sup> benutzte zu dem Zwecke die Töne von Orgelpfeifen: er legte die Pfeifen horizontal in einen großen, von innen und außen mit Blei beschlagenen Holzkasten, der ganz vollständig mit dem wohl ausgetrockneten zu untersuchenden Gase gefüllt war. Ein Gasometer, mit demselben Gase angefüllt, stand mit dem Fuße der Pfeife in Verbindung, und trieb das Gas unter konstantem Drucke in die Pfeife hinein. Sobald der Strom anfang, wurde in einer Wand des Kastens ein Loch geöffnet, um das eindringende Gas wieder abströmen zu lassen.

War nun bei einer und derselben Pfeife  $N$  die Schwingungszahl des Tones in einem Gase,  $N'$  diejenige in einem andern Gase, so ist bei Anwendung einer gedeckten Pfeife

$$\begin{aligned} c &= 4(l + x)N \\ c' &= 4(l + x)N', \end{aligned}$$

1) *Krajewitsch*, Beiblätter. 11. p. 15. 1886.

2) *Stoletow*, Beiblätter. 11. p. 18. 1886.

3) *A. W. Witkowski*, Bull. de l'Ac. de Crac. 138. 1899.

4) *Dulong*, Ann. de chim. et de phys. 10. p. 41. 1819. Poggend. Ann 16 1829.

also

$$\frac{c}{c'} = \frac{N}{N'}.$$

Das Verhältnis der beiden Schallgeschwindigkeiten erhalten wir also selbst ohne Kenntnis der anzubringenden Korrektur  $x$ , und somit, wenn wir die Geschwindigkeit  $c'$  in der Luft als anderweitig bestimmt annehmen, auch die Geschwindigkeit  $c$  des Schalles in den andern Gasen.

Ich habe zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen und bei verschiedenen Temperaturen die Methode der Staubfiguren angewandt.<sup>1)</sup> Das benutzte Rohr hatte einen Durchmesser von nicht ganz 30<sup>mm</sup>, der Ton, es war der Longitudinalton einer Glasröhre von 1<sup>m</sup> Länge, hatte 2539 Schwingungen. Der tönende Stab trug auf seiner Mitte einen Kautschukstopfen, mit dem er luftdicht in das eine Ende des Wellenrohres eingesetzt wurde. An dem Ende des tönenden Stabes war eine leichte Platte von Ebonit aufgesetzt, deren Durchmesser sehr nahe dem des Wellenrohres gleich war, und welche die Schwingungen an das im Wellenrohr eingeschlossene Gas übertrug. Das andere Ende des Wellenrohres war ebenfalls luftdicht geschlossen, in einer Stopfbüchse ließ sich indes ein Stab verschieben, der im Innern des Wellenrohres ebenfalls eine Ebonitscheibe trug, deren Durchmesser dem des Wellenrohres gleich war, um so zu bewirken, daß sich zwischen dem Ende des tönenden Stabes und dieser Scheibe immer eine ganze Zahl stehender Wellen befanden. An den beiden Enden des Wellenrohres waren mit Glashähnen verschließbare Röhren angesetzt, durch welche man das Rohr, nachdem es mit der Quecksilberpumpe luftleer gepumpt war, mit beliebigen ganz trocknen Gasen füllen konnte.

Bei den Versuchen wurde der mittlere Teil des Wellenrohres auf eine Strecke von 1,1<sup>m</sup> in schmelzendes Eis oder in die Dämpfe des siedenden Wassers gelegt.

Das Korrektionsglied zur Reduktion der in den Röhren beobachteten Schallgeschwindigkeit auf den freien Raum ist zwar nach der Theorie von Helmholtz und Kirchhoff nicht unabhängig von der Natur des Gases. Indes bei den von mir gewählten Dimensionen der Röhre und der Schwingungszahl des Tones ist die Korrektion nur so unbedeutend, daß sie überhaupt vernachlässigt werden kann. Es ergab sich das aus der Messung der Schallgeschwindigkeit in der Luft bei der Temperatur 0°, für welche ich im Mittel aus 6 Versuchsreihen erhielt

$$c_0 = 331,898.$$

Der Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit bei irgend einer Temperatur  $t$  ist

$$c = \sqrt{\frac{\gamma H \sigma}{\rho_0}} \cdot k + 1 + \alpha t.$$

Ist  $k$  ebenfalls von der Temperatur abhängig, so daß wir es

$$k = k_0 (1 + \beta t)$$

1 Wüllner, Über die Abhängigkeit der spezifischen Wärme der Gase usw. Wiedem Ann. 4 1878. Die Werte von  $\gamma$  in der folgenden Tabelle sind gegen die Originalabhandlung etwas korrigiert; der Grund der Korrektion wird in der Wärmelehre angegeben werden.

setzen können, so können wir schreiben

$$c = c_0 \sqrt{(1 + \beta t)(1 + \alpha t)}$$

oder mit hinreichender Annäherung

$$c = c_0 \sqrt{1 + \gamma t},$$

worin  $\gamma = \alpha + \beta$  gesetzt ist.

Name der Gase	Dichtig- keit	Geschwindigkeit des Schalles nach			$c_0$ Wüllner	$\gamma$
		Dulong	Regnault	Wüllner		
Luft . . . . .	1	1	1	1	331,898	0,003 668
Sauerstoff . . .	1,1056	0,9524	—	—	—	—
Wasserstoff . .	0,06926	3,8123	3,801	—	—	—
Kohlenoxyd . .	0,9678	1,0132	—	1,0158	337,129	0,003 609
Kohlensäure . .	1,5290	0,7856	0,8009	0,7812	259,383	0,003 421
Stickoxydul . .	1,527	0,7865	0,8007	0,7823	259,636	0,003 326
Ammoniak . . .	0,5967	—	1,2279	1,2534	415,990	0,003 456
Äthylen . . . .	0,9784	—	—	0,9518	315,90	0,003 078

Vorstehende Tabelle enthält in Spalte I die Namen der Gase, in II die Dichtigkeit derselben, in III, IV, V die Geschwindigkeit des Schalles bei 0° nach Dulong, Regnault und meinen Beobachtungen, bezogen auf Luft gleich 1, in VI die von mir bestimmten Werte der Geschwindigkeiten in Meter bei 0°, in VII die von mir bestimmten Werte von  $\gamma$ .

Die Werte von  $\gamma$  sind kleiner als die Werte  $\alpha$ , welche die Abnahme der Dichtigkeiten darstellen, es folgt somit, daß  $\beta$  einen negativen Wert hat, oder daß die Werte des Koeffizienten  $k$  mit steigender Temperatur kleiner werden. Die sich hiernach ergebenden Werte von  $k$ , und die Bedeutung deren Veränderlichkeit werden wir bei Gelegenheit der Behandlung der spezifischen Wärme der Gase besprechen.

Nur sei hier noch erwähnt, daß Stevens<sup>1)</sup> und Kalähne<sup>2)</sup> ebenfalls durch Messung der Wellenlängen nach von Quincke<sup>3)</sup> angegebenen Methoden die Schallgeschwindigkeit gemessen haben, Stevens für eine Anzahl von Dämpfen und für Luft, für letztere bis gegen 1000° C., Kalähne für Luft bis etwa 900° C. Für Luft kam Stevens zu dem Resultate, daß  $\gamma$  kleiner als  $\alpha$  sei, so daß  $k$  mit steigender Temperatur merklich kleiner würde. Er erhielt für  $k$  bei 0° den Wert 1,4006, bei 950° C. 1,34. Nach den Versuchen von Kalähne beruht dieses Resultat Stevens auf irrthümlicher Temperaturbestimmung, er findet daß für Luft die Abnahme von  $k$  nicht merklich, oder wenn sie überhaupt vorhanden ist, nur sehr klein sei.

1) Stevens, Ann. d. Physik. 7. p. 285. 1902.  
2) Kalähne, Ann. d. Physik. 11. p. 225. 1903.  
3) Quincke, Wiedem. Ann. 68. p. 66. 1898. Kalähne wandte eine der Fig 322 wesentlich gleiche Anordnung an.



## § 175.

**Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern.** Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern muß nach dem Früheren mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen übereinstimmen. Für Stäbe erhielten wir dieselbe im vorigen Kapitel durch die Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin  $E$  den Elastizitätskoeffizienten und  $s$  das spezifische Gewicht des Stabes bedeutet.

Direkte Messungen dieser Geschwindigkeit sind nur für Gußeisen von Biot<sup>1)</sup> vorhanden, welcher sie an einer Verbindung von 376 Röhren, die zusammen eine Länge von 951,25<sup>m</sup> hatten, ausführte. In eine der Mündungen dieses Röhrenkanals ward ein Eisenring, der mit derselben gleichen Durchmesser hatte, angefügt und in seiner Mitte durch Stäbe von Eisen eine Glocke und ein von einer Stahlfeder gehaltener Hammer befestigt, vermöge deren man den letztern nach Belieben an die Glocke anschlagen lassen konnte. Dann pflanzte sich der Schall der Glocke zur Röhre durch die Stäbe und Ringe von Eisen fort, und stellte man sich an das andere Ende der Röhrenleitung, so mußte man einen doppelten Schall hören, einen, der durch das Metall der Röhre in der Zeit  $x$  hindurchgegangen war, den andern, der durch die Luft hindurch sich fortgepflanzt hatte. Man nahm in der Tat sehr deutlich zwei bestimmte Schläge wahr, zwischen denen eine Zeit von 2,5 Sekunden lag. Hieraus berechnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c'$  des Schalles im Eisen aus derjenigen in der Luft wie folgt. Die Zeit, welche der Schall brauchte, um in der Luft sich fortzupflanzen, war  $\frac{951,25}{c}$ , die Zeit  $x$ , die er im Eisen brauchte,  $\frac{951,25}{c'}$ , die Differenz beider

$$\frac{951,25}{c} - \frac{951,25}{c'} = 2,5,$$

und daraus

$$c' = \frac{951,25 \cdot c}{951,25 - 2,5 \cdot c} = 10,5 c = 3475,5^m,$$

so daß also der Schall im Eisen in einer Sekunde nahe an 3500<sup>m</sup> zurücklegt, wenn wir die Geschwindigkeit in der Luft in runder Zahl gleich 331<sup>m</sup> setzen.

Man kann übrigens die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern sehr leicht durch indirekte Beobachtungen gerade so erhalten, wie bei der Luft und den Gasen durch Beobachtung der Longitudinaltöne eines Stabes. Wenn man einen an beiden Enden freien Stab in longitudinale Schwingungen versetzt, so ist die Schwingungszahl des entstehenden Grundtones:

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{s}} = \frac{c}{2l},$$

und daraus

$$c = 2lN,$$

worin  $l$  die Länge des Stabes bedeutet.

1) Biot, Experimentalphysik, übers. von Fechner Leipzig 1823 2 p 15.

Mit Hilfe dieser Methode ist von Wertheim<sup>1)</sup> die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles für eine große Reihe von Metallen bestimmt worden. Ein Vergleich der experimentell erhaltenen Werte mit den theoretisch berechneten bestätigt die Richtigkeit der Theorie auf das vollständigste. In der letzten Spalte sind die Quotienten aus der theoretischen Schallgeschwindigkeit und derjenigen in Luft angegeben.

Name des Metalles	Geschwindigkeit in Luft = 1	$E = z \frac{G}{CS^2}$	$s$	$\sqrt{\frac{E}{s}}$
Blei ausgezogen. . . . .	4,257	1769.10 <sup>8</sup>	11,16	3,787
Zinn „ . . . . .	7,480	—	—	—
Gold „ . . . . .	6,424	7977.10 <sup>8</sup>	18,51	6,247
Silber „ . . . . .	8,057	7218.10 <sup>8</sup>	10,36	7,940
Zink destilliert. gegossen	9,683	—	—	—
„ gewöhnl. ausgez. . .	11,007	8568.10 <sup>8</sup>	7,008	10,524
Kupfer ausgezogen. . . .	11,167	12213.10 <sup>8</sup>	8,93	11,128
Platindraht mittl. Dicke	8,467	16720.10 <sup>8</sup>	21,27	8,437
Eisen (Berry) ausgez. . .	15,108	20470.10 <sup>8</sup>	7,74	15,472
Gußstahl ausgezogen. . .	15,108	19180.10 <sup>8</sup>	7,71	15,003
Stahldraht engl. ausgez.	14,961	18450.10 <sup>8</sup>	7,71	14,716

Sehr bequem zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern mit derjenigen in der Luft ist die Methode von Kundt, die wir im vorigen Paragraphen besprochen.<sup>2)</sup> Wendet man in der Fig. 321 gegebenen Anordnung irgend einen tönenden Stab an, so entspricht die Länge des Stabes der Länge einer stehenden Welle, während uns die Länge der in dem mit Staub versehenen Rohr vorhandenen Welle die Länge der stehenden Welle von genau derselben Schwingungsdauer in der Luft gibt. Ist nun  $c$  die Geschwindigkeit des Schalles im Stabe,  $l$  die Länge des Stabes,  $N$  seine Schwingungszahl, so ist

$$c = 2 l N.$$

Ist  $c_1$  die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft,  $l_1$  die Länge der in dem Glasrohr gemessenen Wellen, so ist

$$c_1 = 2 l_1 N,$$

somit

$$\frac{c}{c_1} = \frac{l}{l_1}.$$

Das Verhältniß der Schallgeschwindigkeiten ist gleich dem der Stablänge und der in dem Glasrohre gemessenen Wellen.

Drei Versuche, bei denen ein Messingstab von 941<sup>mm</sup>,5 Länge angewendet wurde, gaben für die Länge der Wellen in dem Rohre  $l_1 = 43,30$ ; 43,29; 43,35. Daraus folgt  $c = 10,87$ ; 10,87; 10,86.

Für drei Stahlstäbe aus demselben Stahl erhielt Kundt

$$c = 15,345; 15,334; 15,343.$$

1) Wertheim, Annales de chim. et de phys. 12. (3.) 1844. Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. 1848.

2) Kundt, Poggend. Ann. 127. 1866.

Für einen Glasstab erhielt Kundt  $c = 15,24$ , und für einen Kupferdraht  $c = 11,960$ , ich erhielt für Glas  $c = 15,29$ .

Die Zahlen stimmen mit denen von Wertheim und den für dieselben Substanzen theoretisch berechneten so vortrefflich, daß die Genauigkeit der Methode dadurch unzweifelhaft bewiesen wird.

In etwas anderer Weise haben Stefan<sup>1)</sup> und Warburg<sup>2)</sup> die Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern untersucht, auf welche sie auch instande waren die Geschwindigkeit in solchen Körpern zu bestimmen, welche nicht durch Anstreichen zum Tönen gebracht werden können wie Kautschuk, Wachs und dergleichen.

Das Prinzip der Methode von Stefan ist folgendes. Man formt den Körper, der selbst nicht zum Tönen gebracht werden kann, wie Wachs, in Form eines kurzen Stabes und verbindet ihn fest mit einem Stabe von Glas oder Holz, welcher durch Reiben in tönende Schwingungen versetzt werden kann, so daß der Wachsstab eine Verlängerung des Holzstabes bildet. Das System dieser beiden so verbundenen Stäbe liefert, wenn man den Glasstab reibt, einen gut charakterisierten Longitudinalton, dessen Tonhöhe sich bestimmen läßt. Aus der Tonhöhe des isoliert schwingenden Glasstabes und der Änderung der Tonhöhe, wenn an den Glasstab der Wachsstab angesetzt ist, sowie aus der bekannten Länge und dem Gewichte des Wachsstabes läßt sich dann die Geschwindigkeit des Schalles in dem Wachsstabe berechnen. Die Berechnung dieser Versuche ist zu kompliziert, als daß wir hier darauf eingehen könnten.

So erhielt Stefan bei Wachs für die Temperatur  $17^\circ$  die Geschwindigkeit gleich  $880^m$  und fand, daß mit steigender Temperatur für jeden Grad die Geschwindigkeit um  $40^m$  abnahm.

Die Methode von Warburg beruht darauf, daß man einen Stab des zu untersuchenden Materials durch einen andern, für welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bekannt ist, in isochrone transversale Schwingungen versetzt, daß man auf beiden Stäben dann die Knotenpunkte aufsucht und die Länge der schwingenden Abteilungen beider Stäbe vergleicht. Man legt zu dem Ende einen Stab, etwa einen Spiegelglasstreifen, auf, so daß er in zwei Knotenlinien unterstützt ist. In einem Schwingungsmaximum, etwa dem mittelsten, klebt man mit Siegellack einen leichten hölzernen Steg, und klebt mit etwas Klebwachs auf diesen den zu untersuchenden Stab, so daß derselbe dem Spiegelglasstreifen parallel ist. Versetzt man den Spiegelglasstreifen in transversale Schwingungen, so teilen sich diese dem zu untersuchenden Stabe mit, und man kann auf beiden Stäben durch aufgestreuten Sand die Knotenlinien sichtbar machen. Mißt man auf beiden Stäben die Länge der ersten, zweiten,  $n$ ten schwingenden Abteilungen, dieselben von den freien Enden aus gerechnet, so gibt die Theorie für das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten in beiden Stäben

$$\frac{c}{c'} = \frac{l_n}{l'_n} \cdot \frac{h}{h'}$$

worin  $c$  die Schallgeschwindigkeit in dem zu untersuchenden Körper,  $l_n$  die

1) Stefan, Wiener Berichte. 57. p. 697 1868

2) Warburg, Poggend. Ann. 136 1869

Länge der, vom freien Ende ab,  $n$ ten schwingenden Abteilung auf demselben und  $h$  die Dicke des Stabes bedeutet, während  $c'$ ,  $l'$ ,  $h'$  dieselbe Bedeutung für den schwingenden Glasstreifen haben. Um die Methode zu prüfen, verglich Warburg zunächst die Geschwindigkeit des Schalles in Messing und Glas. Er erhielt in zwei Versuchen

$$\frac{c}{c'} = 0,676 \text{ und } 0,645,$$

im Mittel also 0,660, während er nach der Methode von Kundt den Wert 0,668 für dasselbe Verhältnis fand, zwei Werte, die nur um etwas mehr als 1% voneinander abweichen. Für die Schallgeschwindigkeit im Glase lieferte ihm die Kundtsche Methode den Wert 15,65, für jene im Messing 10,46, die Geschwindigkeit in Luft gleich 1 gesetzt.

Die von Warburg nach dieser Methode erhaltenen Resultate zeigt folgende Tabelle.

Material	$c$ jene im Glase gleich 1	Spez. Gewicht	Elastizitätskoeffizient bez. auf Glas gleich 1
Glas . . . . .	1	2,390	1
Stearin . . . . .	0,265	0,974	$\frac{1}{33}$
Paraffin . . . . .	0,251	0,908	$\frac{1}{43}$
Wachs . . . . .	0,166	0,971	$\frac{1}{58}$
Talg . . . . .	0,075	0,917	$\frac{1}{151}$

Die Zahlen gelten für 15°—17° C.

Setzt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft von 16° C. gleich 340<sup>m</sup>, in Glas bezogen auf Luft gleich eins gleich 15,65, so ergibt sich für Wachs 883<sup>m</sup>, eine Zahl, welche mit der Stefanschen gut übereinstimmt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, wie wir sie soeben bestimmten, gilt, wie zuerst Wertheim<sup>1)</sup> hervorgehoben hat, nur für stabförmige Körper; für nach allen Richtungen des Raumes ausgedehnte muß sie größer sein, wie man durch folgende Überlegung erkennt.

Als Maß der Elastizität, das heißt als Maß der Kraft, mit welcher sich die einander genäherten Schichten abstoßen, haben wir den Elastizitätskoeffizienten gesetzt, wie er sich aus der Beobachtung der Verlängerung eines Stabes ergibt. Hierbei tritt bei der Verkürzung eine Querdilatation, bei der Verlängerung eine Kontraktion ein.

Nehmen wir jetzt einen Stab, auf dessen Oberfläche nach allen Seiten hin Kräfte wirken, welche eine Änderung der Querdimension hindern. so ist die zur gleichen Verlängerung, also auch zur Verschiebung der Schichten um die Einheit erforderliche Kraft eine größere. Pflanzt sich die schwingende Bewegung in einer ausgedehnten Masse fort, so ist ein jeder Wellenstrahl einem solchen Stabe zu vergleichen. In der Richtung jedes Radius einer um die Quelle des Schalles gelegten Kugel pflanzen sich longitudinale Wellen fort, in jedem Radius treten also hier Verdichtungen und Verdünnungen ein. Da aber hier jeder dieser Radien von der gleichen Masse

1) Wertheim, Ann. de chim. et de phys. 23. (3.) 1848.

in dem gleichen Verdichtungszustande umgeben ist, können bei diesen Ausdehnungen und Zusammendrückungen keine seitlichen Verschiebungen eintreten. Das Maß der Elastizität ist demnach die Kraft, welche zur Einheit der Verschiebung erforderlich ist, wenn jede Änderung in der Quere ausgeschlossen ist.

Um das Verhältnis der beiden Elastizitätskoeffizienten zu erhalten, gehen wir von den allgemeinen Gleichungen des § 50 für die elastischen Spannungen aus. Ist  $p$  der Zug in der Richtung, nach welcher die Verlängerung  $\delta$  pro Längeneinheit etwa eines Parallelepipedes stattgefunden hat, und  $v$  die durch die elastischen Änderungen eingetretene Änderung des Volumens pro Volumeinheit, so fanden wir ganz allgemein

$$p = \frac{E}{1 + \mu} \delta + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} v,$$

wenn  $E$  der Elastizitätskoeffizient,  $\mu$  der Koeffizient der Querkontraktion ist. Ist das Parallelepiped auf den Seiten frei, so ist, wie wir früher sahen,

$$v = \delta(1 - 2\mu)$$

somit

$$p = E\delta \quad \frac{p}{\delta} = E.$$

Wird die Querkontraktion verhindert, so ist  $v = 0$ , da dann die Verlängerung mal Querschnittseinheit die Änderung des Volumens gibt, es ist demnach

$$p = \frac{E}{1 + \mu} \delta + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \cdot 0$$

$$\frac{p}{\delta} = E \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}.$$

Im Falle keine Änderung nach der Quere stattfindet, tritt demnach dieser letztere Ausdruck an die Stelle des Elastizitätskoeffizienten  $E$  in den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Nennen wir  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Stabe,  $c_1$  in einer rings ausgedehnten Masse, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}} = c \sqrt{\frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}.$$

Ist  $\mu$  von 0 verschieden, so ist  $c_1 > c$ ; da  $\mu$  zwischen 0,25 und 0,5 liegt, so liegt  $\frac{c_1}{c}$  zwischen  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  und unendlich. In einer rings ausgedehnten Kautschukmasse würde demnach die Schallgeschwindigkeit eine äußerst große sein.

Einer experimentellen Prüfung ist diese Folgerung aus den Elastizitätsgesetzen kaum fähig.

## § 176.

**Geschwindigkeit des Schalles in flüssigen Körpern.** Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten muß nach dem Früheren mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in

den Flüssigkeiten übereinstimmen. Bedeutet  $H$  den Druck der Atmosphäre in Zentimeter Quecksilberdruck,  $\sigma$  das spezifische Gewicht des Quecksilbers,  $s$  die Dichtigkeit und  $\mu$  die Kompressibilität der betreffenden Flüssigkeit für eine Atmosphäre, so erhielten wir für  $c$  in § 149

$$c = \sqrt{\frac{gH\sigma}{\mu s}}.$$

Für Wasser, für welches  $\mu = 0,000\,0499$ ,  $s = 1$  bei  $4^\circ\text{C}$ . ist, wird dieser Ausdruck

$$c = 1418^{\text{m}}.$$

Dieses Resultat ist durch direkte Versuche von Colladon und Sturm im Jahre 1827 auf dem Genfersee bestätigt worden.<sup>1)</sup> Zwei Schiffe wurden in einer bestimmten gemessenen Entfernung festgelegt. Das erstere trug eine in das Wasser getauchte Glocke, welche mittels eines an einem Hebel befestigten Hammers angeschlagen werden konnte. An dem andern Ende des Hebels befand sich eine brennende Lunte, welche in demselben Augenblicke, in welchem der Hammer die Glocke schlug, eine Quantität Pulver entzündete. Von dem andern Schiffe reichte ein Hörrohr in das Wasser, an dessen aus dem Wasser hervorragenden Ende der Beobachter sein Ohr anlegte, um den im Wasser fortgepflanzten Schall wahrzunehmen. Aus der gemessenen Distanz der Schiffe und der beobachteten Zeit, welche zwischen der Wahrnehmung der Flamme und des Schalles verflossen war, ergab sich bei einer Temperatur von  $8^\circ,1\text{C}$ .

$$c = 1435^{\text{m}}.$$

Setzen wir bei  $8^\circ\text{C}$ . nach den Beobachtungen von Grassi  $\mu = 0,000\,049$  und nach Kopp  $s = 0,999\,775$ , so wird

$$c = 1437^{\text{m}},$$

so daß das experimentelle Resultat mit dem theoretischen fast identisch ist.

Andere direkte Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten sind nicht vorhanden. Dagegen hat Wertheim<sup>2)</sup> auch hier die Töne der offenen Pfeifen benutzt, um die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten zu bestimmen. Das Verfahren, welches er anwandte, um die Töne hervorzubringen, sowie die notwendigen Berichtigungen zu erhalten, haben wir an den betreffenden Stellen beschrieben. Berechnete Wertheim indes aus seinen Versuchen nach der für offene Pfeifen gültigen Gleichung aus den beobachteten Schwingungszahlen  $N$  die Schallgeschwindigkeit  $c$

$$c = 2lN,$$

so ergab sich eine weit kleinere Geschwindigkeit, als die Versuche von Colladon und Sturm und die Theorie ergeben, nämlich bei  $15^\circ\text{C}$ . als Mittel aus sehr vielen Versuchen

$$c = 1173,4^{\text{m}}.$$

1) Colladon und Sturm, Poggend. Ann. 12. 1828.

2) Wertheim, Annales de chim. et de phys. 23. (3.) 1848. Poggend. Ann. 77. 1849.

Um dieses Resultat mit der Theorie in Einklang zu bringen, nimmt Wertheim an, daß sich in Flüssigkeiten nicht, wie man gewöhnlich annimmt, der Druck momentan nach allen Richtungen gleichmäßig überträgt, daß also nicht für einen momentanen Druck auf die eine Endfläche eines in einer vollkommen ausdehnungsfähigen Wand eingeschlossenen Flüssigkeitszylinders die Querdilatation gleich sei der durch den Druck hervorgebrachten Verkürzung, das heißt, daß das Volum ungeändert dasselbe sei, sondern daß auch dort eine Volumänderung eintrete und zwar gerade so, wie bei den festen Körpern. Ist diese Annahme gestattet, so muß die Verbreitung des Schalles in einer Flüssigkeitssäule sich zu derjenigen in einer unbegrenzten Flüssigkeit verhalten wie diejenige in einem Stabe zu der Geschwindigkeit in einer unbegrenzten Masse. Wertheim beobachtete nun die Geschwindigkeit des Schalles in einer Flüssigkeitssäule. Die Versuche von Colladon und Sturm sowie die Theorie gaben die Geschwindigkeit in einer unbegrenzten Flüssigkeit. Die Wertheimsche Zahl, wenn  $\mu = \frac{1}{2}$  gesetzt wird, mit  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  multipliziert, muß dann mit den früheren Zahlen übereinstimmen.

In der Tat ist

$$1173,4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1437,1^m.$$

so daß die Koinzidenz der auf diese Weise von Wertheim berechneten Zahl dafür spräche, daß das von ihm für feste Körper theoretisch abgeleitete Gesetz auch für Flüssigkeiten gültig ist, daß demnach die Gleichheit des Druckes in allen Richtungen nicht bei den Schallschwingungen stattfindet, vielmehr eine flüssige Säule, welche longitudinal vibriert, denselben Ton gibt wie ein starrer Körper, dessen Materie dieselbe kubische Kompressibilität besitzt wie die Flüssigkeit.

Daraus würde folgen, daß die Gesetze des Gleichgewichts starrer Körper auch für Flüssigkeiten gelten, während eines sehr kurzen Zeitabschnittes nach Anlegung äußerer Kräfte.

Ist dieses Verhältnis zwischen den beiden Geschwindigkeiten einmal festgestellt, so können wir für alle übrigen Flüssigkeiten aus der Schallgeschwindigkeit in einer Säule die Geschwindigkeiten in einer unbegrenzten Masse und die Kompressibilität der Flüssigkeiten berechnen. Diese letztere ist für eine große Menge von Flüssigkeiten bereits direkt bestimmt; der Vergleich der nach beiden Methoden erhaltenen Werte der Kompressibilität würde also ein neues Mittel sein, die Wertheimschen Voraussetzungen und die theoretische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit zu bestätigen.

Wertheim hat für eine Reihe von Flüssigkeiten die Schallgeschwindigkeiten bestimmt und daraus die Kompressibilität der Flüssigkeiten berechnet.

Trotz der sich hiernach ergebenden sehr guten Übereinstimmung zwischen den von Wertheim und Grassi gegebenen Kompressionskoeffizienten hat schon Helmholtz<sup>1)</sup> darauf hingewiesen, daß die von Wertheim gegebene Deutung seiner Versuche nicht richtig sein kann. Der

1. Helmholtz, Fortschritte der Physik im Jahre 1848. Herausgegeben von der Berliner physikalischen Gesellschaft. p. 114



Unterschied der Schallgeschwindigkeit in einem Stabe und einer ausgedehnten Masse eines festen Körpers rührt daher, daß der Stab sich in seinen Querdimensionen frei ändern kann, in der ausgedehnten Masse dagegen nicht. Eine solche freie Änderung der Querdimension findet in einer Flüssigkeitspfeife nicht statt. Allerdings ist gegen die Schwingungen der Flüssigkeit eine Pfeifenwand von Messing nicht absolut fest, es muß deshalb eine Verlangsamung der Schwingungen in ähnlicher Weise eintreten, wie bei einer Orgelpfeife mit weichen Wänden. Die Verlangsamung muß deshalb von dem Durchmesser der Röhre, der Dicke ihrer Wandung und dem Elastizitätskoeffizienten des Materials der Wandung abhängen; je größer die beiden letztern sind, um so geringer muß die Verzögerung sein.

In der Tat haben Kundt und Lehmann<sup>1)</sup> sowie Dvořák<sup>2)</sup> gezeigt, daß die Einwürfe von Helmholtz richtig sind. Kundt gelang es nämlich, in Flüssigkeiten ganz eben solche und nach derselben Methode Staubfiguren hervorzurufen wie in Gasen, wenn er dafür sorgte, daß die Flüssigkeiten absolut luftfrei waren. Als Pulver benutzte er sehr fein gepulvertes Eisen, das sogenannte ferrum limatum. Die Messung der Länge der Wellen ergab dann die Geschwindigkeit des Schalles im Wasser gerade wie in Luft. Die Resultate, die Kundt und Lehmann erhielten, entsprachen ganz den Bemerkungen von Helmholtz, die Geschwindigkeit des Schalles nahm zu, wenn der Durchmesser der Flüssigkeitssäule abnahm und die Wandstärke der bei den Versuchen benutzten Glasröhren zunahm, wie folgende kleine Tabelle zeigt, die unter  $\delta$  die Wandstärke, unter  $D$  den lichten Durchmesser der Röhre, unter  $V$  die aus den gemessenen Wellenlängen sich ergebende Geschwindigkeit des Schalles und unter  $t$  die Temperatur enthält, für welche der beobachtete Wert der Geschwindigkeit gilt:

$\delta$	$D$	$V$	$t$
2,2 <sup>mm</sup>	28,7 <sup>mm</sup>	1040,4 <sup>m</sup>	18 <sup>0</sup> ,4
3,0	34,0	1227,7	17,0
3,0	23,5	1262,2	18,0
3,5	21,0	1357,6	18,5
5,0	16,5	1360,2	18,5
5,0	14,0	1383,2	22,2.

Es nähert sich somit die Geschwindigkeit erheblich der theoretischen.

Ähnliche Resultate erhielt Dvořák ebenfalls durch Beobachtung von Staubfiguren, die er indes in anderer Weise erzeugte wie Kundt. Eine horizontale, etwa 2<sup>m</sup> lange Röhre, die an ihrem einen Ende geschlossen war, wurde an beiden Enden vertikal umbogen, das offene Ende etwa 1<sup>dec</sup>m, das geschlossene Ende nur kurz. Die Röhre wurde dann mit Wasser gefüllt und an das geschlossene Ende eine große Luftblase gebracht, so daß die Wassersäule dort durch Luft begrenzt war. Das aufsteigende offene Ende enthielt nur wenig Wasser. Dieses Ende wurde dann als Orgelpfeife angeblasen, indem man kräftig über die Röhre wegblies. Die Schwingungen dieser Luftsäule teilten sich dem Wasser mit, und in demselben ließen sich die Knotenlinien, hergestellt durch von Salpeter befreites Schießpulver, sehr

1) Kundt und Lehmann, Poggend. Ann. 153. 1874.

2) Dvořák, Poggend. Ann. 94. 1875.

gut messen. Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber dem Kundtschen ist der, daß das Wasser nicht luftfrei zu sein braucht. Folgende Tabelle enthält einige Beobachtungen.

$\delta$	$D$	$V$
0,82 <sup>mm</sup>	17,9 <sup>mm</sup>	998 <sup>m</sup>
0,63	11,7	1046
0,52	8,46	1164
2	15	1213
2	11	1281

Wie man sieht, stimmen diese Zahlen sehr gut mit denen von Kundt und Lehmann überein.<sup>1)</sup>

## § 177.

**Reflexion des Schalles.** Wenn eine schwingende Bewegung sich in einer unbegrenzten Punktreihe oder einem Punktsystem fortpflanzt, so kehrt sie nicht zurück, indem jeder Punkt an den folgenden seine ganze Bewegung überträgt; wenn aber die Bewegung an einer Grenze ankommt, wo die Elastizität oder die Dichtigkeit des Punktsystems sich ändert, so tritt an dieser Stelle eine Teilung der Bewegung ein, ein Teil geht in das zweite Mittel über, ein Teil kehrt als reflektierte Bewegung in dem ersten Mittel zurück. Die Gesetze dieser Reflexion haben wir § 136 kennen gelernt und gesehen, daß eine kugelförmige Welle von einer ebenen Grenzfläche so zurückgeworfen wird, als käme sie von einem Punkte, der ebensoweit hinter der Fläche liegt, als der Mittelpunkt der Bewegung vor der Fläche liegt. Jeder Radius der zurückgeworfenen Kugel bildet daher mit der Grenzfläche denselben Winkel als der die Fläche an derselben Stelle treffende Radius der einfallenden Kugel, oder der Winkel, welchen der einfallende Wellenstrahl mit der Normale der reflektierenden Fläche, mit dem Einfallslote bildet, ist gleich dem Winkel, welchen der reflektierte Wellenstrahl mit derselben Richtung bildet.

Da der Schall eine Wellenbewegung eines elastischen Mittels ist, so muß das Reflexionsgesetz des Schalles ganz mit dem der Wellen identisch sein. Ein an einer festen Wand in der Luft ankommender Schall wird so zurückgeworfen, daß der zurückgeworfene Schallstrahl mit dem Einfallslote denselben Winkel bildet als der ankommende Schallstrahl.

Trifft demnach ein Schallstrahl senkrecht gegen eine feste Wand, so wird er genau in derselben Richtung zurückgeworfen. Es ist bekannt, daß man im Echo den zurückgeworfenen Schall wahrnehmen kann. Steht man in einiger Entfernung vor einer festen Wand und ruft man gegen dieselbe, so hört man nach einiger Zeit denselben Ton von der Wand zurückkehren. Damit man aber den zurückgeworfenen Ton unterschieden von dem direkten Tone wahrnimmt, ist eine gewisse Zeit notwendig. Die Erfahrung zeigt, daß man in einer Sekunde 10 Töne nacheinander wahrnehmen kann, oder

<sup>1)</sup> Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten sehe man auch *Martini*, Atti di Reale Ist. Ven. series V. vol. VIII. p. 1. VI vol II. p. 1. VI. vol VI. Beiblätter. 7. p. 17. 1882; 8. p. 79. 1883; 12. p. 566. 1887.

vielmehr deutlich unterscheiden kann, daß aber, wenn mehr Töne unser Ohr treffen, der Eindruck ein verworrener wird.

Es muß daher zwischen dem direkten und reflektierten Schalle 0,1 Sekunde liegen, wenn wir das Echo deutlich von dem primär erzeugten Tone unterscheiden sollen. Der Schall durchläuft in 1 Sekunde 331<sup>m</sup> in der Luft, in 0,1 Sekunde also 33,1<sup>m</sup>; befinden wir uns also 17<sup>m</sup> von einer festen Wand, so wird der Ton, um zur Wand und wieder zu uns zurück zu gelangen, 0,1 Sekunde brauchen, wir hören also das Echo; rücken wir näher, so fällt es zum Teil mit dem direkten Tone zusammen, wir hören daher nur ein Verhalten des direkten Tones, entfernen wir uns von der Wand, so verfließt eine größere Zeit, in einer Entfernung von 34<sup>m</sup> 0,2 Sekunden und so fort. In der Entfernung von 34<sup>m</sup> können wir daher auf den ersten Ton noch einen zweiten folgen lassen, der 0,1 Sekunde dauert und erst 0,1 Sekunde später wird der erste zurückgeworfene Ton, also noch deutlich unterscheidbar, zu uns gelangen. In der Entfernung von 34<sup>m</sup> von der festen Wand wird also das Echo ein sogenanntes zweisilbiges, in noch größerer Entfernung ein drei- und mehrsilbiges.

Ein mehrfaches Echo, das heißt die mehrmalige Wiederkehr desselben Tones tritt auf, wenn eine Anzahl reflektierender Flächen vorhanden ist, welche alle von den in einem bestimmten Punkte erzeugten Schallwellen senkrecht getroffen werden. Wie die Flächen dazu gegeneinander stehen müssen, und daß im allgemeinen nur ein bestimmter Ort das mehrmalige Echo hört, ist ohne weiteres klar.

Was früher von der Reflexion der Wellen an krummen Flächen gesagt wurde, gilt auch von der des Schalles, das Reflexionsgesetz bleibt dasselbe. Daraus erklärt sich die bekannte Erscheinung, daß in einem elliptischen Gewölbe der an einem Brennpunkte erregte Schall in dem andern Brennpunkte mit fast ungeänderter Stärke vernommen wird.

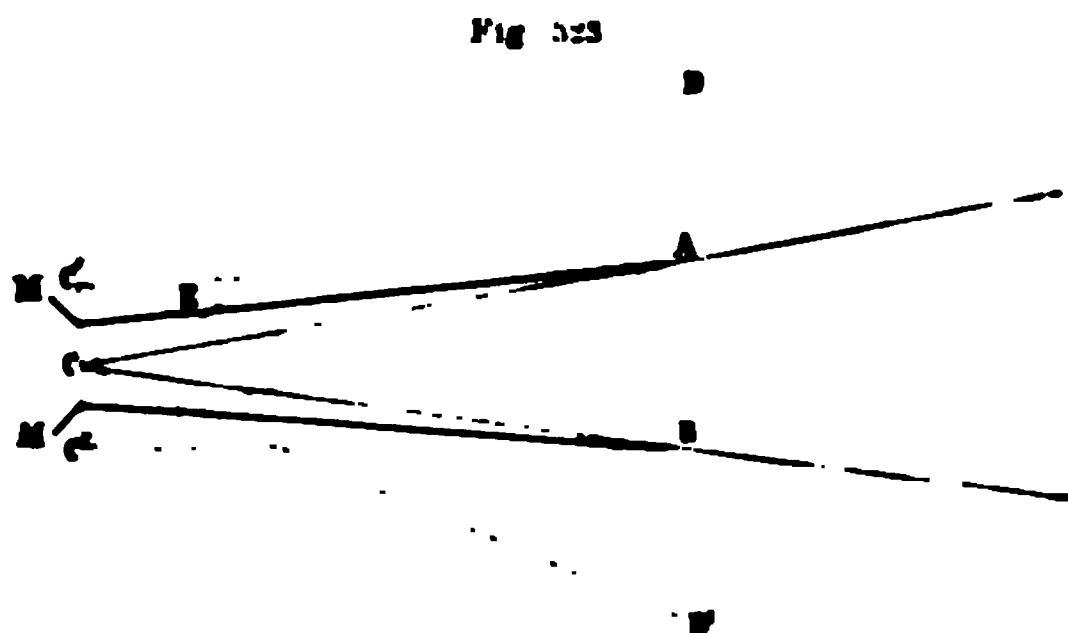
Eine Folge der Reflexion des Schalles ist das Verhalten der Töne in einem rings begrenzten großen Raume und die daraus hervorgehende Undeutlichkeit einer geordneten Reihe von Tönen, z. B. einer Rede. Das gesprochene Wort wird von den entfernten Wänden so zurückgeworfen, daß der reflektierte Schall zum Teil noch mit dem direkten, zum Teil, wenn nicht sehr langsam gesprochen wird, mit dem des folgenden Wortes zusammenfällt, und besonders das letztere undeutlich macht. Alles, was den reflektierten Schall stört, wird daher die Deutlichkeit des Hörens in solchen Räumen vermehren. Ist der Raum mit Menschen gefüllt, so hört man deutlicher, da dann die reflektierten Wellen selbst wieder vielfach reflektiert werden, und so ihre Regelmäßigkeit gestört wird. Je kleiner ferner der Dichtigkeitsunterschied zwischen der Luft und den Wänden des Raumes ist, um so schwächer sind die reflektierten Wellen. Eine Bekleidung der Wände mit weichen, wenig dichten Stoffen schwächt daher die reflektierten Wellen und vermehrt die Deutlichkeit des Hörens. Indes wird dadurch auch die Stärke des Schalles durch den Mangel der sofort zu betrachtenden Resonanz geschwächt, deshalb ist das Mittel in Räumen, in welchen der Schall zugleich kräftig und deutlich sein soll, wie in Konzertsälen, Theatern, nicht anzuwenden.

Verhindert man, daß die von den verschiedenen Wänden reflektierten Schallwellen nach der gleichen Richtung zurückgeworfen werden, so können

sich dieselben nicht verstärken, sie werden daher in dem Falle möglichst wenig stören. Das erreicht man, indem man dem Raume einen rechteckigen Grundriß erteilt und nur gerade Wände gibt. Von geraden Wänden werden die von einem Punkte ausgehenden Schallwellen als divergierend zurückgeworfen. Es ist indes ein noch ungelöstes Problem, welches die Form eines Raumes ist, in welchem eine Reihe erregter Töne am besten und deutlichsten klingt.

Eine vielfach gebrauchte Anwendung der Reflexionsgesetze ist das Sprachrohr. Dasselbe hat den Zweck, Rufe in Entfernungen noch deutlich hörbar zu machen, in denen sie bei ungehinderter Verbreitung des Schalles zu schwach werden. Die einfachste Form eines solchen Apparates ist ein konisches Rohr von Pappe oder Metall, die Materie ist ohne Einfluß. Man legt die Lippen in ein Mundstück (Fig. 323), welches sich an der Spitze des Kegels befindet, und man spricht in das Rohr hinein, indem man es nach der Seite hin richtet, nach welcher hin man den Schall werfen will. Sei z. B. der Ton in dem Mittelpunkte  $C$  des Mundstückes erzeugt, so

wird sich der Teil  $CAB$  der Schallwelle, welcher durch den Kegel begrenzt ist, dessen Mittelpunkt  $C$  und dessen Basis der Umfang  $AB$  des konischen Rohres ist, ungehindert ausbreiten. Derjenige Teil der Welle aber, welcher in dem Winkel  $DCA$  liegt, wird an den verschiedenen Punkten der Wand  $MA$  reflektiert und pflanzt sich fort,



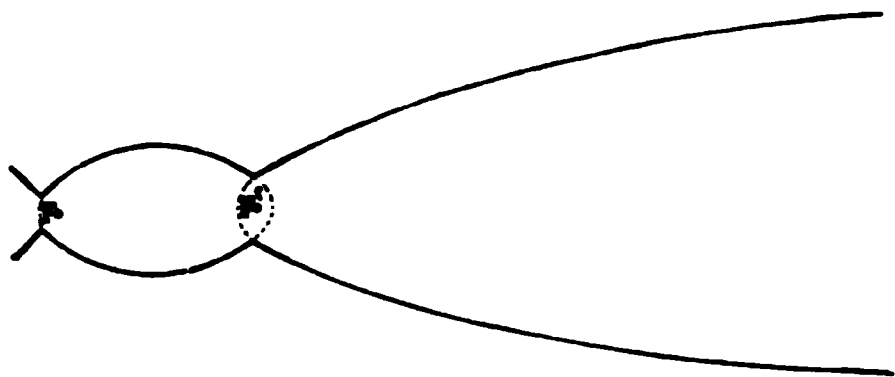
als käme er von dem Punkte  $C'$  als Strahlenkegel  $C'AB$ . Auch diese Schallstrahlen werden somit innerhalb des Kegels  $CAB$  sich fortpflanzen und den Schall nach der Richtung der Achse des Rohres verstärken. Gleiches gilt von dem Strahlenkegel  $BCD'$ , und man sieht, daß schließlich der ganze zwischen  $DCD'$  liegende Teil der Welle in einem kleinen Kegel konzentriert ist, daß dieser Teil der Schallwelle, anstatt sich im Raum  $DCD'$  auszubreiten, den Schall in der Achse des Kegels verstärken wird. Diejenigen Schallstrahlen, welche die Wand noch näher bei  $M$  treffen als der Strahl  $CD$ , können durch mehrmalige Reflexion zunächst an der Wand  $MA$ , dann an der Wand  $MB$  und wieder an der Wand  $MA$  nach derselben Richtung geworfen werden, und so ebenfalls zur Verstärkung des Schalles beitragen.

Lambert<sup>1)</sup> hat den Vorschlag gemacht, das konische Sprachrohr durch ein anderes zu ersetzen, das aus zwei krummen Flächen, einem Ellipsoid und einem Paraboloid zusammengesetzt ist. Das Mundstück ist so eingerichtet (Fig. 324), daß der Mund des Rufenden sich in dem einen Brennpunkte  $F$  des Ellipsoides befindet, die sämtlichen Schallstrahlen werden in dem andern Brennpunkte  $F'$  des Ellipsoides vereinigt und schreiten von

1. Lambert, Memoiren der Berliner Akademie 1763.

diesem fort auf die Wand des parabolischen Teiles des Sprachrohrs. Der Brennpunkt  $F'$  ist zugleich der Brennpunkt der Parabel und da die sämtlichen Leitstrahlen, welche man von  $F'$  an die verschiedenen Punkte des Paraboloids zieht, mit den an eben diesen Punkten gezogenen Normalen der Fläche dieselben Winkel bilden, welche durch diese Punkte parallel mit der Achse gezogene Linien mit der Normale einschließen, so werden alle von  $F'$  ausgehenden, das Paraboloid treffenden Schallstrahlen parallel der Achse reflektiert. Der Schall wird also ohne große Schwächung nach der Richtung der Achse des Paraboloids sich fortpflanzen.

Fig. 324.



Wir haben bisher nur die Zurückwerfung des Schalles von einer festen Wand, den gewöhnlich vorkommenden Fall betrachtet; mit Hilfe der empfindlichen Flammen kann man auch durch einen hübschen Versuch zeigen, daß ebenso eine Reflexion des

Schalles an der Grenze eines dichtern gegen ein dünneres Mittel stattfindet. Man stellt sich eine empfindliche Flamme her, welche auf den Ton der Glocke eines Schlagwerkes reagiert, reguliert die Empfindlichkeit aber so, daß die Flamme nicht merklich mehr reagiert, wenn die empfindliche Flamme und das Schlagwerk durch eine geschlossene Türe voneinander getrennt sind. Durchbohrt man die Türe und steckt in die Durchbohrung einen Zylinder von Pappe, so reagiert auch dann die empfindliche Flamme nicht merklich, wenn das Schlagwerk an dem einen Ende des Zylinders sich befindet, die Flamme aber hinreichend weit seitlich verschoben ist. Stellt man dann eine Flamme eines Fischeschwanzbrenners so auf, daß etwa die Mitte der ruhig brennenden Flamme von der Achse des Zylinders parallel welcher der Schall des Schlagwerkes durch den Zylinder tritt, getroffen wird, so hat man die Flamme nur dem Reflexionsgesetz entsprechend so zu stellen, daß der reflektierte Strahl die empfindliche Flamme trifft, und man sieht bei jedem Schlage des Schlagwerkes die empfindliche Flamme zusammenzucken. Dreht man die Fischeschwanzflamme, so daß die zu ihrer Ebene normale Richtung nicht mehr den Winkel halbiert, den die Achse des Zylinders und die von der Mitte der flachen Flamme zu der empfindlichen Flamme gezogene Richtung miteinander bilden, so zuckt die Flamme nicht mehr.

Die vielfachen Reflexionen an den abwechselnd dichtern und dünnern Luftschichten sind der Grund, daß in unruhiger Luft der Schall nicht so weit dringt als in ganz ruhiger Luft. Jede Reflexion hält bezw. wirft einen Teil des Schalles zurück, der sich nicht in der Richtung des sich fortpflanzenden Schalles verbreitet.

## § 178.

**Übergang des Schalles in andere Mittel; Resonanz; Phonograph.** Wenn eine schwingende Bewegung an der Grenze zweier Mittel ankommt, so geht, wie wir früher sahen, die schwingende Bewegung nicht nur im

ersten Mittel als reflektiert zurück, sondern sie geht auch in das zweite Mittel hinüber und pflanzt sich dort mit der diesem Mittel entsprechenden Geschwindigkeit weiter fort. Kommt die Welle, welche wir als eben voraussetzen wollen, in einer gegen die Grenzfläche geneigten Stellung an, so ist die Wellenebene im zweiten Mittel nicht derjenigen im ersten Mittel parallel, sondern dagegen geneigt. Der Wellenstrahl, die zur Wellenebene normale Fortpflanzungsrichtung, wird also gebrochen; das Gesetz, nach welchem das geschieht, ist nach § 137 folgendes:

1. Der gebrochene Wellenstrahl liegt mit dem einfallenden und dem Einfallslot in derselben Ebene.

2. Der Sinus des Winkels  $i$ , den der eintretende Wellenstrahl mit dem Einfallslot bildet, verhält sich zum Sinus des Brechungswinkels  $i_1$  wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  der Bewegung im ersten Mittel zu jener  $c_1$  im zweiten Mittel, oder es ist

$$\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Daß der Schall nach diesem Gesetze gebrochen wird, hat durch ausgedehnte Versuchsreihen Hajech<sup>1)</sup> nachgewiesen. Hajech führte eine Röhre von 77<sup>mm</sup> Weite und veränderlicher Länge durch die Scheidewand zweier benachbarter Säle. Die beiden Enden dieser Röhren wurden durch Membranen geschlossen. Eine zweite Röhre, deren Achse in der Verlängerung der ersten lag, auf welche sie eingestellt war, endigte in einer Büchse, in welcher das tönende Instrument, Glocken verschiedener Größe, eingeschlossen wurde. Der Beobachter hielt sich im zweiten Sale auf, auf dessen Parketboden ein Kreisbogen gezogen und graduirt war, dessen Mittelpunkt sich vertikal unter dem Ende der Röhre befand. Bei einer ersten Reihe von Versuchen wurden die Membranen senkrecht zur Achse der Röhre gestellt, welche sie verschlossen, und die Röhre mit Luft oder andern Gasen gefüllt. Der Schall wurde nicht abgelenkt, sondern am stärksten in der Verlängerung der Röhrenachse wahrgenommen. Da der Schall in der Achse der Röhre sich bewegte, so traf er senkrecht auf beide Grenzflächen der Röhre; nach dem Brechungsgesetz darf keine Ablenkung eintreten.

Darauf wurde die Membran an dem dem Beobachter zugewandten Ende der Röhre gegen die Achse geneigt, an der andern Seite blieb sie senkrecht. Dort traf also der in der Achse ankommende Schallstrahl wieder senkrecht auf die Grenzfläche, der Einfallswinkel war Null, also auch der Brechungswinkel; der Schall bewegte sich einfach in der Achse der Röhre weiter, mit welcher Substanz dieselbe auch gefüllt war. Der Strahl traf dann die zweite Fläche unter demselben Winkel, den die Membran mit der Achse bildete; der Einfallswinkel war also der Winkel, der diesen zu 90° ergänzte, er wurde einfach durch eine Messung des ersten Winkels erhalten.

Wurde die Röhre mit Luft gefüllt, so trat auch dann keine Ablenkung ein, da innerhalb und außerhalb der Röhre dasselbe Mittel war, der Schall sich also mit der gleichen Geschwindigkeit fortbewegte. Wurde aber das Rohr mit einem andern Gase oder einer Flüssigkeit gefüllt, so trat eine Ablenkung ein. Dieselbe wurde beobachtet dadurch, daß der Beobachter

1. Hajech, Nuovo Cimento 3 1857 Poggend Ann 103 1858.



sein Ohr in gleicher Höhe mit dem Ende der Röhre hielt und auf dem Kreisbogen so lange seine Stelle veränderte, bis er den Schall am stärksten wahrnahm, dann von seinem Ohre ein Lot auf den Kreisbogen herabließ und den Winkel bestimmte, den der zu dem getroffenen Punkte gehörige Radius des Kreises mit dem Einfallslote bildete. Da dieser Radius die Richtung des austretenden Schalles angab, so bestimmte dieser Winkel den Brechungswinkel.

Hajech erhielt auf diese Weise folgende zugehörige Einfalls- und Brechungswinkel; die letzte Spalte, welche die nach der Formel

$$\sin i_1 = \frac{c_1}{c} \cdot \sin i$$

aus den gegebenen Winkeln  $i$  berechneten  $i_1$  enthält, zeigt die Übereinstimmung der Resultate mit dem Brechungsgesetz:

Substanzen in der Röhre	Einfalls- winkel	Brechungswinkel	
		beobachtet	berechnet
Wasserstoff . . . . .	35°50'	8°	8°50'
„ . . . . .	25°	7°	6°22'
Ammoniakgas . . . . .	41°	29°20'	30°22'
„ . . . . .	35°50'	25°	26°50'
Leuchtgas . . . . .	35°50'	25°40'	—
Kohlensäure . . . . .	35°50'	49°50'	48°19'
„ . . . . .	25°	33°20'	32°33'
Brunnenwasser . . . . .	35°50'	7°40'	7°58'
„ . . . . .	25°	5°40'	5°37'
Gesätt. Kochsalzlösung .	35°50'	6°15'	
„ . . . . .	25°	5°10'	

Man sieht, wie die Beobachtung das Gesetz bestätigt, welches sich aus der Theorie der Wellenbewegung ergeben hat.<sup>1)</sup>

Wenn eine schwingende Bewegung in eine dünne Schicht eines zweiten Mittels übergeht und sich in derselben bis an die Grenze fortgepflanzt hat, so tritt beim Austritt in das erste Mittel aus der zweiten Grenze eine teilweise Reflexion der Bewegung ein und die reflektierte Welle kehrt in der Schicht zur ersten Grenze wieder zurück; wenn nun durch die erste Grenze immer neue und neue Bewegungen in das zweite Mittel übergehen, so können sich diese mit den in dem Mittel reflektierten zusammensetzen und stehende Wellen derselben Periode als die ankommende Welle erzeugen, gerade so wie in einem longitudinal schwingenden Stabe solche stehende Wellen durch Interferenz der direkt erregten Wellen und der an der einen Grenze reflektierten entstehen.

Man kann sich davon durch eine ganze Reihe von Versuchen überzeugen. Spannt man auf einem Monochord zwei Saiten vollständig im Einklang auf, setzt unter die eine einen Steg, so daß man  $\frac{1}{4}$  der Saite ab-

1) Betreffs der Brechung des Schalles sehe man indes *Mach und Ficker*. Poggend. Ann. 149. 1873, welche zeigen, daß man nur unter besondern Umständen eine Brechung des Schalles mit Sicherheit nachweisen kann, da im allgemeinen die Wellenlängen gegen die brechenden Flächen zu groß sind, um ohne weiteres die Huyghenssche Konstruktion anwenden zu können.



sondert und streicht dann dieses  $\frac{1}{2}$  mit dem Bogen an, so erhalten wir die zweite Oktave des Tones der ganzen Saite, indem dadurch sich die ganze Saite in vier gleiche schwingende Teile zerlegt. Sofort zeigt sich, daß auch die zweite nicht abgeteilte Saite mit der ersten isochron schwingt, denn hält man die erste rasch fest, so hört man noch eine Zeitlang genau denselben Ton auf der zweiten Saite, und bringt man auf die zweite Saite kleine Papier-Reiterchen, so werden dieselben abgeworfen, außer an den Stellen der Schwingungsknoten.

Wenn man in einem Raume ein Klavier oder eine Violine oder irgend ein Saiteninstrument aufstellt und bringt nun in deren Nähe einen Ton hervor, der ein harmonischer Ton einer der Saiten dieser Instrumente ist, so hört man sie auf das deutlichste mitklingen. Bei Anwendung eines Klaviers bekommt man bei gehobenem Dämpfer auf jeden hineingesungenen Ton einen Nachhall, der nicht nur diesen Ton, sondern auch die harmonischen Obertöne deutlich enthält.

Ebenso gehen Pfeifen und Gläser, überhaupt eingeschlossene Luftsäulen, Töne an, wenn man einen ihrer harmonischen Töne in der Nähe erzeugt.

Wenn sich auf diese Weise durch den Einfluß einer schwingenden Bewegung in benachbarten Körpern stehende Schwingungen erzeugen, so ist unmittelbar ersichtlich, daß an jeder Grenzstelle die Erscheinungen sehr kompliziert werden, und daß sich deshalb nicht leicht eine Theorie geben läßt über die Form der Schwingungen in den mitschwingenden Körpern. Das aber läßt sich leicht erkennen, daß kräftiges Mitschwingen eines Körpers nur dann eintreten kann, wenn die in dem mitschwingenden Körper eintretenden Schwingungen dort stehende Wellen geben können, wenn also der ankommende Ton den mitschwingenden Körper zum Mittönen bringen kann. In der Beziehung besteht ein großer Unterschied in der Stärke des Mittönens, je nachdem der mitschwingende Körper die durch einen einmaligen Anstoß erteilten Schwingungen lange beibehält oder schnell wieder verliert. Ein schwingender Körper, der seine Bewegung lange beibehält, wie eine Stimmgabel, oder alle starren elastischen Körper, wird nur merklich mittönen, wenn der ankommende Ton ein Eigenton des schwingenden Körpers ist, denn bei einer sehr kleinen Verstimmung des ankommenden Tones müssen sich die Eigenschwingungen des Körpers und die ankommenden Schwingungen stören, da sie verschiedener Phase werden. Wenn dagegen die Schwingungen des mitschwingenden Körpers, wie etwa bei wenig gespannten, sehr feinen Membranen, sehr rasch an Intensität abnehmen, so kann ein solcher Körper auch in merkliche Schwingungen versetzt werden, wenn der ankommende Ton auch von dem Eigenton desselben verschieden ist. Denn wenn ein Körper die infolge eines ersten Anstoßes entstehende Bewegung schon nach wenigen Schwingungen verliert, so wird jeder neue Anstoß ihm Bewegung erteilen, wenn auch die ankommende Bewegung in etwas anderer Phase ist als jene infolge des vorhergehenden Anstoßes, somit als der geringe Rest der noch in dem Körper vorhandenen schwingenden Bewegung.

Man kann diese Schlüsse leicht experimentell bestätigen: das Extrem nach der einen Richtung bildet etwa eine Stimmgabel, welche durch den Ton einer andern Stimmgabel kaum mehr zum Tönen gebracht wird, wenn

derselbe nur um ein oder zwei Schwingungen anders ist. Man nehme zwei Stimmgabeln, die den Ton  $c_2$ , also 512 Schwingungen in der Sekunde geben, beide auf Resonanzkasten stehend, so wird, wenn die Stimmung beider genau die gleiche ist, die andere kräftig mittönen, wenn man die eine anstreicht. Dann verstimme man die eine durch Aufkleben von Wachs, so daß sie nur ein oder zwei Schwingungen weniger macht, was man an den in einem der nächsten Paragraphen zu besprechenden Stößen leicht erkennen kann, man wird dann kaum noch ein Mittönen erhalten. Das Extrem nach der andern Seite bilden die Membranen in den Königschen Flammkapseln, bei denen kaum Eigenschwingungen vorkommen, bei denen jeder Anstoß nur eine Schwingung bewirkt, eine solche Membran nimmt daher jede Schwingung auf, welche sie trifft.

Helmholtz<sup>1)</sup> hat die Beziehung zwischen der Dauer des Nachklingens eines einmal in Schwingung versetzten Körpers und der Intensität des Mit-  
tönens genauer untersucht. Er gelangt dabei zu folgenden Resultaten.

Wenn wir die Intensität des Tones, der in einem mitschwingenden Körper durch genauen Einklang erzeugt wird, als Einheit setzen, so wird durch einen Ton, der um  $\frac{1}{8}$  tiefer oder höher ist, die Tonstärke des mit-  
tönenden Körpers gleich 0,1, wenn der mittönende Körper nach 38 Schwin-  
gungen nur mehr 0,1 der Tonstärke besitzt, die ihm durch einen einmaligen  
Anstoß gegeben ist. Nimmt die Intensität der Eigenschwingungen so rasch  
ab, daß die Stärke des Tones, wenn der mittönende Körper für sich erregt  
wird, schon nach 19 Schwingungen auf 0,1 herabsinkt, so bewirkt ein  
Ton, der  $\frac{1}{4}$  Ton höher oder tiefer ist, in dem mittönenden Körper einen  
Ton, der 0,1 der Stärke des durch genauen Gleichklang erzeugten Tones  
besitzt. Die gleiche Tonstärke des Mitschwingens tritt ein durch Töne,  
welche verschieden sind um

$\frac{1}{2}$ Ton,	wenn die Intensität des Eigentones nach	9,5	Schwingungen	
$\frac{3}{4}$ „	„	„	„	6,33
1 „	„	„	„	4,75
$\frac{5}{4}$ „	„	„	„	3,80
kleine Terz,	„	„	„	3,17
$\frac{7}{4}$ Ton,	„	„	„	2,71
große Terz,	„	„	„	2,37

auf 0,1 der durch einen Anstoß erregten ursprünglichen Tonstärke herab-  
gesunken ist. Man sieht also, daß nur solche Körper, in denen die einmal  
erregten Schwingungen sehr rasch an Stärke abnehmen durch Töne, welche  
von ihren Eigentönen verschieden sind, in merkliche Mitschwingungen ver-  
setzt werden. Da starr elastische Körper nur dann merklich mittönen,  
wenn einer ihrer Eigentöne erklingt, ist in solchen mitschwingenden Kör-  
pern die Tonhöhe stets gleich derjenigen des erregenden Tones.

Ferner ergibt sich aus den Versuchen von Savart<sup>2)</sup> der wie es scheint  
allgemeine Satz, daß die mitgeteilten Schwingungen stets parallel sind der

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen 3. Ausgabe. p. 220 u. Beilage X. Diese Sätze  
über Resonanz lassen gleichzeitig erkennen, weshalb in der Mundhöhle die Eigen-  
töne mitklingen können, selbst wenn sie nicht gerade Obertöne des gesungenen  
oder gesprochenen Klanges sind.

2) *Savart*, Annales de chim. et de phys. 19. 1821.

ankommenden. Von den vielen Versuchen Savarts führen wir nur folgenden an. Ein feiner Streifen von Holz wird an seinem einen Ende an einem auf einem Boden aufgesetzten Holzstück befestigt (Fig. 325), an seinem andern Ende ist eine gespannte Saite befestigt. Wenn man der gespannten Saite mittels eines Violinbogens eine schwingende Bewegung erteilt, senkrecht zur Ebene des Streifens, so gerät der Streifen in transversale Schwingungen, wie man aus der hüpfenden Bewegung des Sandes auf dem Streifen ersieht. Wenn man aber die Saite in einer mit der Ebene des Streifens parallelen Richtung in Schwingung versetzt, so schwingen die

Fig. 325



Teile des Streifens in der Ebene desselben hin und her. Sand auf den Streifen gestreut, erhält keine hüpfende, sondern nur eine gleitende Bewegung.

Da die Tonhöhe durch die an starr elastische Körper übertragenen Mitschwingungen, wie wir eben ableiteten, nicht geändert wird, so benutzt man in der Musik diese Erscheinung, um schwachen Klängen durch Resonanz eine bedeutende Stärke zu verleihen. Eine Saite einfach in Schraubstöcke von Blei eingespannt, gibt nur einen schwachen, kaum hörbaren Ton. Wenn man sie dagegen auf einer Platte elastischen Holzes aufspannt, mittels elastischer Halter daran befestigt und mittels Stegen von elastischem Holze damit in Verbindung setzt, so wird durch die Resonanz der Platte der Ton sehr bedeutend verstärkt.

Der Klang einer Geige verdankt seine Kraft nur der Resonanz des Bodens, auf welchem die Saiten aufgespannt sind; ebenso ist beim Klavier die Stärke des Tones wesentlich abhängig von der Güte des mitschwingenden Resonanzbodens, mit welchem die Saiten durch den Steg, durch welchen sie gezogen sind, in Verbindung stehen. Ebenso gibt eine Stimmgabel einfach in der Luft gehalten einen äußerst schwachen kaum hörbaren Ton, derselbe wird aber sehr kräftig, wenn man die Gabel wie in Fig. 290 auf einen Resonanzkasten stellt, einen Kasten von elastischem Holze, dessen Luftsäule den Ton der Gabel gibt, oder wenn man sie auf den Resonanzkasten einer Geige oder überhaupt auf eine elastische Platte stellt.

Diese tonverstärkende Wirkung der mitschwingenden Platte erklärt sich unmittelbar aus den Gesetzen der Mechanik. So lange Saiten oder transversal schwingende Stäbe von kleiner Ausdehnung allein in der Luft schwingen, setzen sie nur kleine Luftmengen in Bewegung, wenn sie aber mit ausgedehnten elastischen Flächen in Verbindung, diese in isochrone Mitschwingungen versetzen, wird durch diese Schwingungen eine viel größere Luftmenge in Bewegung versetzt, und mit der Masse der schwingenden Teilchen wächst die Intensität des Tones.

Was aber an Intensität des Tones gewonnen wird, das geht an Dauer verloren; eine Stimmgabel oder eine gespannte Saite behalten, wenn sie für sich schwingen, ihre Bewegung lange bei, mit einem Resonanzboden verbunden, verlieren sie ihren Ton sehr rasch.

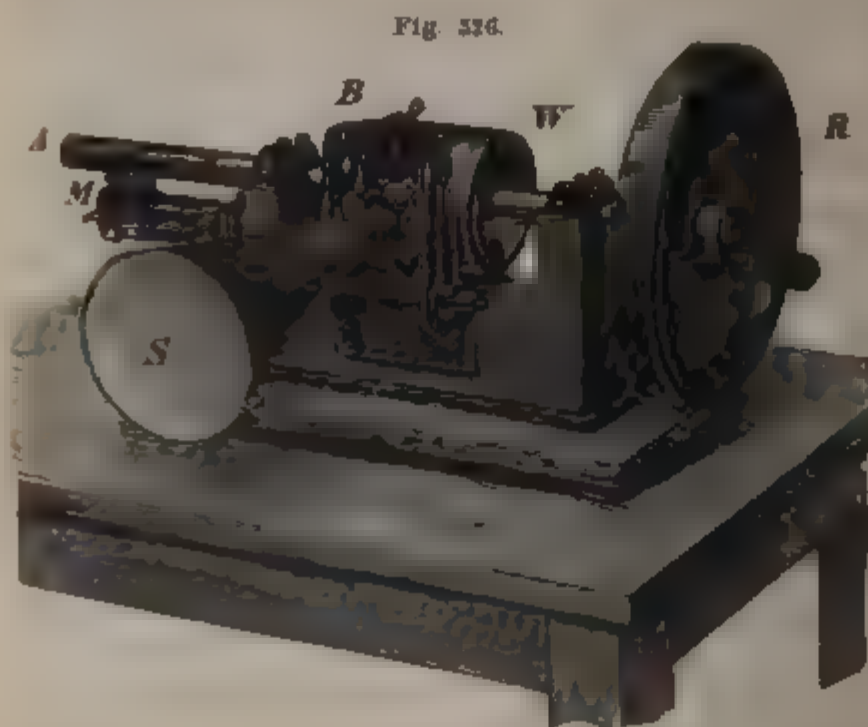
Nach dem Vorigen sieht man nun auch, welche Instrumente, um klingend zu werden, mit einem Resonanzboden verbunden werden müssen, welche nicht; alle diejenigen, welche den Ton durch Schwingungen von elastischen Streifen oder gespannten Saiten hervorbringen, brauchen einen Resonanzkasten oder Resonanzboden, diejenigen aber, bei denen die Luft direkt in Bewegung gesetzt wird, wie bei den Blasinstrumenten, bedürfen eines tonverstärkenden Mittels nicht.

Die Resonanz verändert die Höhe eines erregten Tones nicht, wohl aber hat sie wesentlichen Einfluß auf den Klang, da die in einem Klang vorhandenen Partialtöne durch Resonanz nicht in demselben Verhältnis verstärkt werden. Der Klang einer Geige ist deshalb ein ganz anderer als der einer freien mit dem Bogen gestrichenen Saite. Ja der Klang der Geige wird ganz wesentlich von der Güte des Resonanzkastens bedingt, indem nur ein sehr elastischer gut gearbeiteter Kasten die höheren Partialtöne ebenso verstärkt als die tiefern.

Eine äußerst interessante Anwendung der Resonanz, welche zugleich zeigt, wie vollständig und genau die mitschwingenden Körper die Schwingungen reproduzieren, ist in dem von Bell konstruierten Telephon und dem von Edison konstruierten Phonographen gemacht worden. Das Telephon werden wir im dritten Bande besprechen. Beide Apparate zeigen, daß nicht nur feine Gummimembranen, sondern auch starre Platten alle ankommenden Schwingungen aufnehmen, sie verwenden die Schwingungen der Platten nur in etwas verschiedener Weise, um gegen die Platte gesandte Töne oder Klänge oder auch die menschliche Sprache, das Telephon an

einem entfernten Ort, der Phonograph an Orte der Erzeugung des Klanges zu reproduzieren.

Der wesentliche Teil des Phonographen, von dem Fig. 326 eine Abbildung zeigt in der Form, welche ihm von der Maschinenfabrik Ogenbrück & Co. in Remlingen bei Bremen gegeben ist, ist die etwa 0,25 mm dicke Glasplatte, welche mit dem Rande in der kreisförmigen Fassung *a* befestigt ist und den Boden



des Schallbechers *S* bildet. Eine an der Fassung *a* der Platte befestigte Stahlfeder, welche bis genau unter die Mitte der Platte reicht, drückt auf der vom Sprachrohr abgewandten Seite ein kurzes Stück dicken Kautschukrohres gegen die Mitte der Platte. Diese Stahlfeder trägt an ihrem Ende einen feinen vorn nicht zu spitzen, vielmehr etwas abgerundeten Stift, der recht zur Ebene der Platte. Sendet man einen Klang in das Sprachrohr, so nimmt die Platte alle hingesandten Schwingungen auf und überträgt

sie durch das Kautschukrohr auf den Stift, welcher gerade so in Bewegung gerät, wie die Flammen der Königschen Flammenapparate Fig. 218, welche, wie wir sahen, jeden Partialton des in den Schalltrichter gesandten Klanges wiedergeben. Die Platte mit dem Schalltrichter wird von einem festen Rahmen getragen, der mit der unter *B* sichtbaren Schraube der Walze *W* etwas näher gebracht oder von ihr entfernt werden kann.

Die Spitze schreibt ihre Bewegung auf die Walze *W*, welche, wie die Figur zeigt, auf der Achse *A* aufgesetzt ist, die durch die Kurbel des Schwungrades *R* in Drehung versetzt werden kann und bei der Drehung durch die in der Mutter *M* eingreifende Schraube, welche in das Ende der Achse bei *A* eingeschnitten ist, vorwärts bewegt wird. In die Walze *W* ist der Schraube bei *A* entsprechend eine Spiralfurche eingeschnitten. Die Walze *W* wird mit einem Blatte dünner Zinnfolie, etwa 1<sup>4</sup><sub>100</sub> cm 1<sup>8</sup> wiegend, überzogen. Der die Platte mit der Spitze tragende Rahmen wird dann so gestellt, daß die Spitze mit sanftem Drucke auf der Zinnfolie über der Vertiefung der Spiralfurche aufsteht.<sup>1)</sup>

Sendet man in den Schalltrichter bezw. in das bei dem Hineinsenden des Tones ihn ersetzende kleinere Mundstück, einen Klang gegen die Platte oder spricht man mit kräftiger Stimme dagegen, während gleichzeitig die Walze in Rotation versetzt wird, so prägt der Stift, indem die Furche unter ihm weiter gleitet, seine Schwingungen in die Metallfolie ein. Die Eindrücke erscheinen dem freien Auge wie kleine eingedrückte Punkte, mit dem Mikroskope betrachtet erkennt man in ihnen indes mehr oder weniger starke Vertiefungen je nach der Art des Klanges, den sie darstellen. Ein Durchschnitt durch die Eindrücke längs der Furche gibt eine Kurve, nur nicht mit so starken Erhöhungen und Vertiefungen, wie sie die Enden der Flammen der Königschen Flammenbilder zeigen.

Man bringt dann, wenn die in den Phonographen zu sendenden Klänge oder die Rede beendet ist, die Walze wieder in die Anfangslage zurück, während man den Rahmen mit der Spitze etwas zurückgezogen hat. Ist die Walze wieder in der Anfangslage angekommen, so bringt man die Spitze wieder in die Lage, daß sie an dem Stanniol anliegt, wie sie es bei dem Niederschreiben der Schwingungen tat. Man ersetzt dann das Mundstück durch den Schalltrichter *S* und dreht die Walze mit derselben Geschwindigkeit wieder vorwärts, wie vorher bei dem Schreiben. Da die gegen die Zinnfolie drückende Spitze genau dieselben Schwingungen, bei ihrer Bewegung über die Vertiefungen fort, wieder annimmt und der Platte mitteilt, welche sie bei dem Hineinsenden des Klanges oder der Rede angenommen hatte, so kommen jetzt derselbe Klang oder dieselbe Rede wieder aus dem Schalltrichter hervor, welche man vorher hineingesandt hat. Der zurückkehrende Klang ist nur erheblich schwächer, und der Klang der zurück

1) Die neuere Form von Edison's Phonograph, von der eine Zeitlang ein großes Wesen gemacht wurde, unterscheidet sich von der oben beschriebenen nur dadurch, daß anstatt des Stanniols eine besonders präparierte Wachsschicht auf den Zylinder gebracht wird und daß die Walze durch eine kleine elektrische Maschine gedreht wird.

In neuerer Zeit sind zahllose verschiedene Konstruktionen der Phonographen ausgeführt worden, doch ist prinzipiell nichts dabei geändert worden. Praktische Anwendung hat der Phonograph kaum gefunden.



kehrenden Rede ist im allgemeinen etwas näselnd, wie Auerbach in den Beiblättern zu Poggendorffs Annalen Bd. II ganz richtig bemerkt.

Ist die Geschwindigkeit, mit der man bei der Reproduktion des Klanges die Walze dreht, eine andere als beim Hineinsenden desselben, so wird die Tonhöhe des reproduzierten Klanges eine andere, ist die Geschwindigkeit ungleichmäßig, so werden hineingesungene Klänge unrein, die hineingesprochene Rede bei der Reproduktion undeutlich. Um die bei der Bewegung mit freier Hand schwierig zu erhaltende Gleichmäßigkeit der Bewegung zu erzeugen, dient eben das schwere Schwungrad *R*. Eine noch größere Regelmäßigkeit ist dadurch zu erreichen, daß man die Achse durch ein Uhrwerk von konstanter Geschwindigkeit dreht.

Die Reproduktion der Klänge und der menschlichen Rede durch den Phonographen ist ein vollgültiger und äußerst interessanter Beweis für die Richtigkeit der Helmholtzschen Theorie des Klanges überhaupt und der Vokalklänge der menschlichen Stimme insbesondere. Hier erhält eben die schwingende Platte bei der Reproduktion des Klanges die Schwingungen in der Zusammengesetztheit zurück, wie sie durch die einzelnen Partialtöne des hineingesandten Klanges bedingt ist, und nichts anderes. Daß die Schwingungen der Platte dann wesentlich denselben Klang reproduzieren, beweist eben, daß in dieser Zusammengesetztheit der Schwingungen die Wesenheit des Klanges begründet ist und in nichts anderm.

Die Wiedergabe des Schalles im Phonograph ist von Fleming Jenkin und J. A. Ewing<sup>1)</sup> und besonders von v. Lahr<sup>2)</sup> benutzt worden, um zu prüfen, ob die Auffassung der Vokale nach von Helmholtz oder nach Grassmann die richtigere sei. Nach von Helmholtz sind es mehr oder weniger feste Töne, die durch die Form der Mundhöhle bedingten, welche den gesprochenen oder gesungenen Grundton begleitend den Vokalcharakter bestimmen. Nach Grassmann ist der Charakter des *u* bestimmt durch einen harmonischen Oberton, der tiefer als  $c_3$  sein muß, ein den Grundton begleitender Oberton zwischen  $e_3$  und  $c_4$  gibt *ü* und ein noch höherer Oberton gibt *i*.

Es müßte deshalb nach der Helmholtzschen Auffassung jede Änderung der Drehungsgeschwindigkeit der Walze bei Reproduktion eines Vokales gegenüber der Drehungsgeschwindigkeit bei dem Hineinsprechen des Vokales eine Änderung des Vokalcharakters zur Folge haben; nach Grassmann dagegen müßte *u* seinen Charakter behalten bei verminderter Drehgeschwindigkeit und bei vergrößerter Drehgeschwindigkeit, so lange der Oberton nicht über  $c_3$  steigt, dann müßte *u* in *ü* übergehen, und bei noch weiter gesteigerter Geschwindigkeit müßte es *i* werden. Die Versuche bestätigten die Folgerung.

Wird *ü* in den Apparat gerufen, so kehrt es als *ü* bei gleicher Drehgeschwindigkeit zurück, als *u* bei geminderter, als *i* bei gesteigerter Drehgeschwindigkeit.

Der Vokal *o* kehrt bei gleicher und verminderter Drehgeschwindigkeit als *o* zurück, wie von Lahr besonders gegenüber frühern Versuchen von

1) *Fleming Jenkin und Ewing*, Nature. 18. p. 340; 394; 454. 1878. Transact. of the Royal Soc. of Edinburg. 28. p. 1. 1879.

2) *von Lahr*, Wiedem. Ann. 27. p. 94. 1886.

Cross hervorhebt, bei gesteigerter Geschwindigkeit geht es in  $\ddot{o}$  und später in  $e$  über.

Der Vokal  $a$  sollte nach Grassmann bei verminderter oder gesteigerter Geschwindigkeit als  $a$  zurückkehren; bei gesteigerter Geschwindigkeit ist das der Fall, bei verminderter kehrt er aber als  $\grave{a}$  zurück; v. Lahr glaubt, daß das deshalb der Fall sei, weil bei langsamerer Drehung die hohen Obertöne nicht so kräftig reproduziert würden.

Die andere zuerst von Jenkin und Ewing, dann auch von v. Lahr angewandte Methode ist die Untersuchung der Eindrücke, welche der Stift des Phonographen in dem Stanniol gemacht hat. Ein durch die Vertiefungen geführter Längsschnitt muß eine Kurve geben, welche zu dem Grundtone die ganze Reihe der mit ihm erklingenden Obertöne nach dem Verhältnisse ihrer Stärke enthält. Jenkin und Ewing sowie v. Lahr haben durch eine passende, derjenigen von Raps zur Darstellung der Schwingungen der Orgelpfeifen benutzten, ähnliche Vorrichtung die Kurven in vergrößertem Maßstabe aufgezeichnet und die so aufgezeichneten im einzelnen ausgemessen, um die Intensität der einzelnen den Klang zusammensetzenden Partialtöne zu erhalten.

Die Resultate der Messungen bestätigen zunächst die schon bei Besprechung der Vokalbildung gemachte Bemerkung, daß ein und derselbe Vokal keineswegs, auch auf dieselbe Tonhöhe gesungen, immer dieselbe Zusammensetzung hat, selbst dann nicht, wenn ein und dieselbe Person den Vokal singt. Mit Änderung der Tonhöhe kann die Zusammensetzung der Vokalklänge sich ganz erheblich ändern. Setzen wir die Intensität der Töne der lebendigen Kraft der schwingenden Bewegung proportional, so erhielten z. B. Jenkin und Ewing als Intensität der ersten sechs Partialtöne, als der Vokal  $o$  auf  $c$  (161 Schwingungen) gesungen wurde, die Intensität des Grundtones als 1 gesetzt

$$1 - 112,0 \quad - 102,6 \quad - 53,76 \quad - 0,00 \quad - 0,00$$

auf  $c_1$

$$1 \quad 8,44 \quad - 0,18 \quad - 0,13 \quad - 0,20 \quad - 0,00$$

auf  $f_1$

$$1 - 1,20 \quad - 0,00 \quad - \quad - 0,04 \quad - 0,03$$

von Lahr erhielt für  $o$  auf  $f_1$  gesungen

$$1 - 24,416 - 1,404 - 22,848 - 1,000 - 1,260.$$

Im allgemeinen bestätigen aber diese Messungen die Theorie von Grassmann,  $u$ ,  $\ddot{u}$ ,  $i$  zeigen im allgemeinen nur einen kräftigen Oberton, und zwar ist es meist der erste, nur bei ganz tiefer Stimmlage treten bei  $u$  mehrere Obertöne hervor; bei  $a$  sind alle Obertöne stark, bei  $o$  nur die tiefern, während bei  $\ddot{o}$ ,  $\ddot{u}$ ,  $e$  wieder die hohen Töne stark hervortreten.

Eichhorn<sup>1)</sup> hat auf Grund der Angaben von v. Lahr über die Intensität der Partialtöne der Vokale Wellensirenen konstruiert, welche unter Voraussetzung der strengen Richtigkeit dieser Angaben die Vokale beim Anblasen hätten geben müssen. In der Tat ergaben die für den Vokal  $a$  konstruierten Sirenen ein deutliches  $a$ , ebenso entstand  $\ddot{u}$ , weniger deutlich

1) Eichhorn, Wiedem. Ann. 39. p 148. 1891.



*u* und *o*, die für *u* konstruierte Sirene gab *u* und die für *i* konstruierten ließen das *i* gar nicht erkennen. Eichhorn glaubt indes, daß die der Grassmannschen Theorie weniger günstigen Resultate zum Teil der noch geringen Vollkommenheit seiner Apparate zuzuschreiben seien.

Mit einem Phonographen hat neuerdings L. Bevier<sup>1)</sup> die englischen Vokale untersucht. Die Bewegungen des Stiftes des Phonographen wurden übertragen auf einen längern Hebelarm, der am Ende einen Spiegel trug. Ein Lichtstrahl von demselben reflektiert wurde auf photographisches Papier geworfen, wodurch die Schwingungen beliebig vergrößert fixiert werden konnten. Auch E. W. Scripture<sup>2)</sup> untersuchte mit einem Grammophon eine Reihe von Vokalen und Diphtongen.

### § 179.

**Das menschliche Ohr.** Durch die Mitteilung der schwingenden Bewegung an die die Gehörnerven umgebenden elastischen Medien und dadurch an den Gehörnerven selbst nehmen wir den Schall wahr.

Das Gehörorgan des Menschen umfaßt drei Abteilungen von Hohlräumen, welche zum größten Teil in dem festen Knochen des Schläfenbeines eingeschlossen sind, das äußere, mittlere und innere Ohr; die beiden erstern sind mit Luft, das innere Ohr ist mit Wasser angefüllt.

Zum äußern Ohr gehört die Ohrmuschel und der äußere Gehörgang. zum mittlern Ohr die Paukenhöhle und die Ohrtrompete, die *tuba Eustachii*.

Fig. 327.

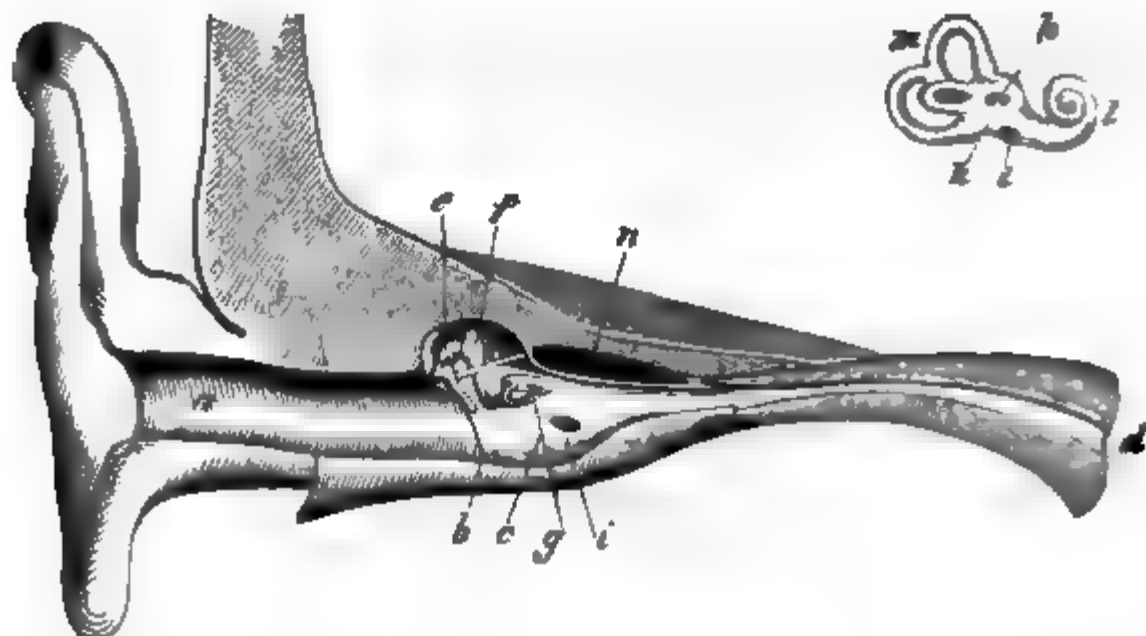


Fig. 328.



Der äußere Gehörgang *a* (Fig. 327) ist durch das Trommelfell *b*, welches in seinem ganzen Umfange an Knochen angeheftet ist, von der Paukenhöhle *c* getrennt, diese verengert sich weiterhin zur Ohrtrompete *d*, welche in der Nasenhöhle mündet. Die Höhle des innern Ohres, von der Fig. 328 einen Abguß in natürlicher Größe darstellt, liegt in dem Knochen.

1) L. Bevier, *Phys. Rev.* 10. p. 193. 1900. *Physik. Ztschr.* 1. p. 525. 1900. *Phys. Rev.* 14 p. 171 u. 214 1902; 15. p. 44. 1902.

2) E. W. Scripture, *Stud. Yale Psych. Lab.* 7. p. 1. 1899 und *Still Jan* 11 (4.) p. 302. 1901.

welcher die hintere Wand der Paukenhöhle bildet. Zwischen ihr und dem Trommelfell liegt in der Paukenhöhle die Reihe der Gehörknöchelchen.

Der Hammer (malleus) *e* ist mit seinem langen Fortsatz oder Stiel im Zentrum des Trommelfells, ferner in einer Linie von da zum obern Ansatzrande hinauf und nahe dem letztern noch einmal mit seinem kurzen Fortsatze am Trommelfell angeheftet. Außerdem ist er noch durch einen kurzen Fortsatz, der gerade nach vorn über dem Rande des Trommelfells hin liegt (und deshalb in der Figur abgeschnitten ist), an der Knochenwand der Paukenhöhle angeheftet.

Sein Kopf, der den obern Rand des Paukenfelles überragt, steht durch ein Gelenk mit dem zweiten Knochen, dem Ambos (incus) *f* (Fig. 327) in Verbindung. Der Ambos ist außerdem mit einem kurzen (in der Figur hinter dem Hammer liegenden) Fortsatz an der hintern Wand der Paukenhöhle angestützt.

Vom Ambos geht ein langer Fortsatz parallel dem Stiele des Hammers nach unten; an seinem Ende ist der dritte Knochen, der Steigbügel *g* (Fig. 327) befestigt, der horizontal nach hinten liegt. Die Platte, in der seine beiden Leisten zusammenstoßen, der Fußtritt, ist an ihrem Rande herum häutig mit dem Rande des ovalen Fensters *h* (Fig. 328) verbunden, welches in der Mitte des hintern Teiles der Paukenhöhle in die Höhle des innern Ohres führt.

Das innere Ohr steht durch zwei Öffnungen mit der Paukenhöhle in Verbindung, durch das ovale Fenster *h*, welches von der Platte des Steigbügels bedeckt ist, und das unterhalb demselben liegende runde Fenster *i*, welches durch eine einfache feine Membran geschlossen ist. Das ovale Fenster führt zum mittlern Teile des innern Ohres, zum Vorhof (vestibulum) *k* (Fig. 328), in welchem dem Fenster und somit der Platte des Steigbügels gerade gegenüber ein Zweig des Gehörnerven einmündet. Vom Vorhof geht nach der einen Seite der spiralig gewundene Gang der Schnecke (cochlea) *l* (Fig. 328) aus, in welchem sich ein besonderer Ast der Nerven von der Achse aus verteilt. Zur Schnecke führt außerdem direkt von der Paukenhöhle aus das runde Fenster *i*.

Nach der andern Seite gehen vom Vorhofe die drei halbzirkelförmigen Kanäle *m*, in drei zueinander senkrechten Ebenen gelagert, in je zwei Mündungen aus. Auch diese erhalten durch die eine etwas erweiterte Mündung Äste des Gehörnerven.

Das Trommelfell ist mit seinem Zentrum ein wenig trichterförmig in die Paukenhöhle hinein vertieft und dadurch gespannt. Diese Spannung kann durch eine Drehung des Hammers um die den obern Rand des Trommelfelles tangierende (zur Ebene der Figur senkrechte) Achse des Fortsatzes, mit dem er an die Wand der Paukenhöhle befestigt ist, etwas vermehrt werden. Dadurch rückt das untere Ende seines Stieles dem ovalen Fenster näher, und da die andern Gehörknöchelchen seiner Bewegung einigermaßen folgen, so wird dadurch der Fußtritt des Steigbügels etwas in das ovale Fenster hineingetrieben.

Das Wasser des Labyrinthes kann diesem Drucke nur dadurch ausweichen, daß es die das runde Fenster verschließende Membran gegen die Paukenhöhle hinausdrängt, so daß mit der stärkern Spannung des Trommelfells auch diejenige dieser Membran wächst.

Im großen und ganzen geht aus der anatomischen Beschreibung des Gehörorgans die Art der Schallwahrnehmung hinlänglich deutlich hervor. Die Schwingungen der Luft teilen sich zunächst dem Trommelfelle mit, das dadurch entweder in longitudinale Schwingungen, wie Johannes Müller annimmt, oder in transversale Schwingungen, bei denen die Membran als solche schwingt, wie andere wollen, versetzt wird. Die Schwingungen des Trommelfells pflanzen sich dann durch die Reihe der Gehörknöchelchen zum ovalen Fenster und so in die Flüssigkeit des Vorhofes, und durch die Luft der Paukenhöhle zum runden Fenster und in die Flüssigkeit der Schnecke fort. In beiden Flüssigkeiten, der des Vorhofes sowohl, dem ovalen Fenster gerade gegenüber, als auch jener der Schnecke endigen Teile der Gehörnerven.

Aber auch in den halbzirkelförmigen Kanälen endigen Zweige des Gehörnerves, auch diese müssen daher zum Hören beitragen. Es ist eine wahrscheinliche Hypothese, daß die durch den Ton erregten Schwingungen der Kopfknochen sich der Flüssigkeit in den halbzirkelförmigen Kanälen mitteilen, und daß diese dann durch die in denselben mündenden Nervenendigungen perzipiert werden.

Die neuern anatomischen Entdeckungen über den Bau des innern Ohres, besonders die Art, wie die Nerven dort endigen, von Max Schultze und dem Marchese Corti haben Helmholtz<sup>1)</sup> in den Stand gesetzt, die Perception des Schalles genauer zu erkennen. Es würde die uns in diesem Buche gesteckten Grenzen weit überschreiten, wollten wir diese Fragen hier ausführlich besprechen; nur einen Punkt müssen wir etwas genauer hervorheben, nämlich wodurch nach der Hypothese von Helmholtz das menschliche Ohr in den Stand gesetzt wird, jeden Klang in seine einzelnen Partialtöne zu zerlegen. Diese Zerlegung findet wahrscheinlich in der Schnecke statt und wird ermöglicht durch die eigentümlichen Gebilde, mit welchen dort die Nervenendigungen in Verbindung stehen. Die Schnecke ist nämlich ihrer ganzen Länge nach durch eine teils knöcherne, teils membranöse Scheidewand in zwei Hälften geteilt, eine obere und eine untere, die eine mündet im Vorhof, die andere läuft gegen die Paukenhöhle aus und ist durch die Membran des runden Fensters geschlossen. Der knöcherne Teil der Scheidewand befindet sich an der innern Seite der Windungen und durch diesen Teil derselben treten die Nervenfasern in die häutige Membran über; dort endigen sie an den Cortischen Fasern, membranösen Streifen, welche an jener häutigen Membran, der Membrana basilaris angewachsen, zwischen derselben und einer an der Schneckenwand befindlichen Membran, der Cortischen Membran ausgespannt sind. Die Breite der membrana basilaris ist in ihrem Beginn eine geringe, sie wächst, je mehr sie sich der Kuppel der Schnecke nähert, bis mehr als zum Zwölffachen. Die Membran selbst besteht aus radialen, sie der Breite nach durchsetzenden ziemlich festen Fasern, welche parallel, in der angegebenen Weise an Länge wachsend nebeneinander gelagert sind, und welche in der Längsrichtung der Membran viel weniger fest miteinander verbunden sind. Durch diese eigentümliche Struktur, infolge deren die Membran in der Richtung ihrer Breite sehr viel stärker gespannt ist als in der Richtung der Länge,

---

1) *Helmholtz*, Tonempfindungen. 3. Ausgabe. p. 198—232.

verhält sich die membrana basilaris annähernd so, als wären ihre Radialfasern ein System von gespannten Saiten, deren membranöse Verbindung nur dazu dient die schwingende Flüssigkeit der Schnecke an dem freien Durchtritt zwischen den Saiten zu hindern, und so zu bewirken, daß die Schwingungen der Flüssigkeit sich auf die Membran übertragen. Es werden deshalb die Bewegungen der einzelnen Fasern der Membran dieselben sein, als wäre jede einzelne unabhängig von den andern und folgte jede für sich den Schwingungen des Wassers in der Schnecke. Für diese radialen Fasern der membrana basilaris mit ihren Anhängen, den Cortischen Fasern nimmt nun Helmholtz an, daß jede für eine bestimmte Schwingungszahl abgestimmt ist. Danach wird ein in das Ohr eindringender Ton namentlich diejenige Stelle der Membran in Mitschwingungen versetzen, an denen der Eigenton der gespannten und mit den verschiedenen Anhangsgebilden belasteten Radialfasern der Membran dem erregenden Ton am besten entspricht, von da werden sich die Schwingungen in schnell abnehmender Stärke auf die benachbarten Teile ausbreiten. Daß die Fasern, trotz ihrer geringen Länge auf die tieferen Töne der Tonskala abgestimmt sein können, das liegt nach der Annahme von Helmholtz eben in den Anhangsgebilden, welche die Fasern belasten.

Durch die Schwingungen der Radialfasern der Membran werden also direkt die mit denselben verbundenen Cortischen Fasern in dieselben Schwingungen versetzt, und damit die in diesen Fasern befindlichen Nerven-teile, welche die Empfindung des Tones vermitteln. Es würde demnach für jeden Ton eine bestimmte oder doch eine beschränkte Zahl von Nervenfasern erregt, so daß die verschiedenen Töne von ganz verschiedenen Fasern empfunden werden.

Aus dieser Theorie des Hörens, welche dasselbe als einen speziellen Fall des Mittönens auffaßt, erklärt sich zunächst die große Empfindlichkeit, welche ein geübtes Ohr für geringe Unterschiede in der Tonhöhe hat, welche nach Angabe von E. H. Weber soweit geht, daß das Ohr Töne als verschieden erkennt, deren Schwingungsverhältnis 1000:1001 ist, eine Angabe, welche Cornu und Mercadier<sup>1)</sup> bestätigen. Dieselben geben an, daß ein geübtes Ohr bei der tönenden Saite eines Monochordes, welche die Länge von einem Meter hat, deutlich die Verschiebung des Steges um 1<sup>mm</sup> wahrnehme.

Nach Kölliker enthält nämlich das Ohr etwa 3000 Cortische Fasern. Rechnet man nun etwa 200 auf die Töne, welche außerhalb der in der Musik gebrauchten Grenzen liegen, so würden für die 7 Oktaven, deren Töne in der Musik benutzt werden, 2800 Fasern übrig bleiben, also etwa 400 für jede Oktave; nach der Angabe von E. H. Weber würde ein geübtes Ohr etwa 700 Tonstufen innerhalb der Oktave zu unterscheiden imstande sein, also eine noch größere Zahl, als der für jede Oktave vorhandenen Anzahl von Cortischen Fasern entspricht. Das liegt nach Helmholtz daran, daß, wenn ein Ton angegeben wird, dessen Höhe zwischen dem zweier benachbarter Cortischer Fasern liegt, beide in Schwingungen versetzt werden, diejenige aber stärker, deren Eigenton dem angegebenen näher liegt. Die Empfindlichkeit des Ohres für verschiedene Tonhöhen

1) Cornu und Mercadier, Comptes rendus. 68. p. 301. 1869.

Pfeife in dieser Stärke eine Sekunde lang tönen zu lassen, mußten  $196^{\text{cm}}$  Luft mit dem Drucke  $9,5^{\text{cm}}$  Wasser durch die Pfeife geblasen werden. Die hierbei geleistete Arbeit ist somit die Zurückschiebung des Druckes von  $9,5^{\text{cm}}$  auf die Höhe von  $196^{\text{cm}}$  in der Sekunde, denn wir können uns denken, wir hätten die Luft zum Anblasen der Pfeife einer Röhre von  $1 \text{ cm}^2$  Querschnitt entnommen und man erkennt, daß man in dem Falle die unten absperrende Wasserfläche um  $196^{\text{cm}}$  hätte heben müssen, um in der Sekunde die angegebene Menge Luft durch die Pfeife zu treiben. Die geleistete Arbeit  $L$  ist somit

$$L = 981 \cdot 9,5 \cdot 196 = 1826620 \frac{\text{gr. cm}^2}{\text{sec}^2}.$$

Nehmen wir an, daß die gesamte Arbeit ohne irgend welchen Verlust in lebendige Kraft der sich ausbreitenden schwingenden Bewegung verwandelt, und daß die Ausbreitung nur in der Luft stattgefunden hätte, so daß nichts in die Erde übergegangen ist, so hat sich die schwingende Bewegung bis zu der Stelle, wo der Schall wahrnehmbar ist, über eine Halbkugel vom Radius  $82000^{\text{cm}}$  ausgebreitet, und während einer Sekunde wandert die der vorhin bestimmten Arbeit entsprechende lebendige Kraft durch die Fläche dieser Halbkugel hindurch. Ist  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles,  $\rho$  die Dichtigkeit der Luft, so können wir zur Berechnung der Geschwindigkeit der schwingenden Luftteilchen annehmen, die gesamte Bewegung sei durch eine Fläche von der Basis  $2\pi(82000)^2$  in einen Zylinder von der Länge  $c$  übergegangen, in welchem überall die Dichte  $\rho$  ist und wo überall die schwingenden Teilchen die Gleichgewichtslage mit derselben Geschwindigkeit  $v$  passieren, welche sie in der Fläche der Halbkugel haben. Denn bei dieser Vorstellungsweise breitet sich die Bewegung nach dem Durchtritt durch die Halbkugel nicht mehr aus, jede folgende Schicht erhält somit die Geschwindigkeit der vorhergehenden. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles setzt Lord Rayleigh  $34100^{\text{cm}}$  und für die Dichtigkeit der Luft  $0,0013$ . Die in der Sekunde die Grenzfläche durchdringende lebendige Kraft ist demnach

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi(82000)^2 \cdot 34100 \cdot 0,0013 \cdot v^2 = 1826620$$

und daraus

$$v^2 = \frac{1826620}{\pi(82000)^2 \cdot 34100 \cdot 0,0013}$$

$$v = 0,0014^{\text{cm}}.$$

Die Luftteilchen passieren also an der Grenze der Wahrnehmbarkeit des Tones die Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit von 14 zehntausendstel eines Zentimeters.

Um die Größe der Amplitude zu erhalten, gehen wir aus von der Schwingungsgleichung

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}; \quad v = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} a \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Da  $v$  die Geschwindigkeit für  $t = 0$  ist, so ist

$$v = \frac{2\pi}{T} a; \quad a = \frac{T}{2\pi} v = \frac{1}{2730} \frac{v}{2\pi}$$

$$a = 8,14 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

die Amplitude beträgt also nicht ganz ein zehnmillionstel eines Zentimeters.

Durch das Quadratcentimeter der Grenzfläche wandert in der Sekunde, da die Fläche der Halbkugel  $2\pi(82\,000)^2$  Quadratcentimeter enthält

$$\frac{1\,826\,620}{2\pi(82\,000)^2} = 4,32 \cdot 10^{-5} \frac{\text{gr cm}^2}{\text{sec}^2}$$

Arbeitseinheiten. Da der Gehörgang etwa  $\frac{1}{2}\text{cm}^2$  Querschnitt hat, wurde also hier der Ton noch wahrnehmbar, als am Trommelfell  $1,11 \cdot 10^{-5}$  Arbeit pro Sekunde geleistet wurde, eine Arbeit, welche etwa der Hebung des hundertmillionstel Teiles eines Gramm auf die Höhe von  $1\text{cm}$  entspräche.

Töpler und Boltzmann stellten ihre Versuche mit einer gedeckten Pfeife an, welche 181 Schwingungen in der Sekunde, also einen Ton gab, der fast 4 Oktaven tiefer ist als derjenige Rayleighs, sie konnten denselben noch in einer Entfernung von  $11\,500\text{cm}$  wahrnehmen. Sie hatten in der Mundöffnung eine Amplitude von  $0,248\text{cm}$  gefunden und berechneten daraus nach einer Gleichung von v. Helmholtz als Amplitude an der Grenze

$$\alpha = 4 \cdot 10^{-6} \text{cm}$$

also entsprechend der Erfahrung, daß tiefere Töne früher unhörbar werden als höhere, einen etwa 50fachen Wert als Rayleigh; für die Geschwindigkeit  $v$  ergibt sich hieraus

$$v = 0,004\,55,$$

also fast genau die dreifache und das dem Ohre zugeführte Arbeitsquantum, welches dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, da die Luftmenge des Ohres die gleiche ist, etwa die neunfache wie bei Rayleigh. Es sind das Zahlen gleicher Ordnung, welche zeigen, wie äußerst schwache Eindrücke unser Ohr wahrnehmen kann.

## § 180.

**Einfluß der Bewegung des tönenden Körpers oder des Ohres auf die Höhe des wahrgenommenen Tones; Dopplersches Prinzip.** Wenn wir den durch eine schwingende Bewegung der Luft bestehenden Schall durch die den Nerven mitgeteilten Schwingungen empfinden, und die Anzahl der in der Zeiteinheit in das Ohr eindringenden Schwingungen maßgebend ist für die Höhe des empfundenen Tones, so muß es auf die letztere von Einfluß sein, ob der Beobachter und das tönende Instrument sich voneinander in einer konstanten Entfernung befinden, oder ob die beiden sich einander nähern oder voneinander entfernen.

Doppler<sup>1)</sup> hat diesen Satz näher verfolgt und kommt zu dem Schlusse, daß, wenn der Beobachter und das tönende Instrument sich nähern, der wahrgenommene Ton höher werden muß, da dann die Eindrücke auf das Ohr sich rascher folgen als im Zustande der Ruhe. Ebenso muß der Ton tiefer werden, wenn der Beobachter und die Tonquellen sich voneinander entfernen, da dann die Zahl der in das Ohr eindringenden Wellen eine kleinere wird.

1) *Doppler*, Über farbiges Licht der Doppelsterne. Prag 1842.

Bezeichnen wir die Länge der Wellen mit  $l$ , die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft mit  $c$ , diejenige, mit welcher der schwingende Körper nach einer Richtung hin bewegt wird, mit  $b$ , so wird nach dieser Richtung hin die Länge der Wellen um  $\frac{b}{c} l$  verkürzt, nach der entgegengesetzten Seite hin aber um ebensoviel verlängert. Denn hat z. B. der von dem tönenden Körper ausgehende Wellenberg um die Länge einer Welle sich fortgepflanzt, so würde bei ruhendem Instrumente der folgende Wellenberg das Instrument verlassen, und da er von derselben Stelle ausgeht, gerade um die Länge einer Welle von dem ersten entfernt sein. Hat sich aber das Instrument während dieser Zeit in der Richtung der vorschreitenden Welle bewegt, so geht der zweite Wellenberg nach derselben Zeit wie vorhin von einem dem ersten Wellenberge nähern Orte aus, er ist also von dem ersten um weniger als die Länge der Welle bei der Ruhe entfernt, oder die Welle wird kürzer. Nach der andern Seite wird sie aber um ebensoviel länger.

Ist die Länge der Welle  $l$ , so ist die Zeit, während welcher der erste Wellenberg um  $l$  sich fortpflanzt, gleich der Schwingungsdauer  $T$ , also, da  $l = cT$ ,

$$T = \frac{l}{c},$$

und da wir die Geschwindigkeit des tönenden Körpers mit  $b$  bezeichneten, so hat sich derselbe in der Zeit  $T$  um die Strecke

$$bT = \frac{b}{c} l$$

in der Richtung der Welle fortbewegt, die Länge der Welle wird also dadurch

$$l \left( 1 \mp \frac{b}{c} \right) = \frac{c}{n} \left( 1 \mp \frac{b}{c} \right),$$

wenn wir mit  $n$  die Schwingungszahl oder was dasselbe ist, die Anzahl der auf die Strecke  $c$  kommenden Wellen bezeichnen, wenn das Instrument ruht.

Die an einem ruhenden Ort ankommende Schwingungszahl ist nun gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Wellenlänge, also hier gleich

$$\frac{c}{n \left( 1 \mp \frac{b}{c} \right)} = n' = \frac{c}{1 \mp \frac{b}{c}},$$

wo das negative Vorzeichen für die Orte gilt, denen sich das Instrument nähert, und das positive für die, von denen es sich entfernt.

Wenn andererseits der Beobachter sich gegen das ruhende Instrument bewegt mit einer Geschwindigkeit  $a$ , so werden in der Zeiteinheit nicht nur die Schwingungen in das Ohr kommen, welche den ruhenden Beobachter treffen, sondern auch diejenigen, welche auf der Strecke  $a$  liegen, so daß die Zahl der wahrgenommenen Schwingungen wird

$$n' = n + \frac{a}{l},$$



und entfernt sich der Beobachter

$$n' = n - \frac{a}{l},$$

oder da  $l = \frac{c}{n}$ ,

$$n' = n \pm \frac{a}{l} = n \frac{c \pm a}{c}.$$

In jedem Falle wird also die Schwingungsmenge, die das Ohr erhält, beim Annähern von Beobachter und Tonquelle größer, beim Entfernen kleiner; findet das erste statt, muß der Ton höher, das zweite, tiefer werden.

Diese Folgerung ist durch die Erfahrung bestätigt.

A. Seebeck<sup>1)</sup> gibt an, daß er in den Papieren seines Vaters eine dahin gehörige Angabe gefunden habe. Ein Schlitten, wie man sie im Gebirge zum jähen Herabrutschen an Bergabhängen gebraucht, gab dem Beobachter Gelegenheit zu bemerken, daß der Ton einer Pfeife, die auf dem Schlitten geblasen wurde, beim Vorüberfahren plötzlich tiefer wurde.

Buys Ballot<sup>2)</sup> hat eine ausgedehnte Beobachtungsreihe über diesen Punkt angestellt. Auf der Eisenbahn zwischen Utrecht und Maarsen waren möglichst nahe der Bahn mehrere Musiker aufgestellt, welche die Tonhöhe eines auf einem mit der Lokomotive vorüberfahrenden Signalhorne gegebenen Tones schätzten; ein anderer auf der Lokomotive fahrender Beobachter verglich den Ton der auf den Stationen geblasenen Hörner bei Annäherung und Entfernung der Lokomotive mit dem des mitfahrenden Hornes. Die Geschwindigkeit des Wagens wurde bestimmt, indem nach zwei Chronometern die Zeit aufgeschrieben wurde, welche zum Durchlaufen von 100<sup>m</sup> gebraucht war.

Die Beobachtungen bestätigen im allgemeinen die Theorie, indem fast immer Veränderungen der Tonhöhe in dem von der Theorie geforderten Sinne eintraten; eine genaue Übereinstimmung der berechneten Tonänderungen mit den beobachteten kann bei solchen Versuchen nicht erwartet werden, wo nur eine Schätzung des Beobachters die Änderung der Tonhöhe bestimmt.

Dagegen ist es Vogel<sup>3)</sup> gelungen, eine volle Bestätigung der Theorie zu erhalten, indem er den Ton der Dampfpeife einer Lokomotive benutzte und mit Hilfe eines Musikers genau die Tonhöhe bestimmte, wenn die Lokomotive mit konstanter Geschwindigkeit sich ihm näherte und dann nach dem Vorüberfahren sich entfernte. Die Änderung der Tonhöhe entsprach mit einer merkwürdigen Genauigkeit der Dopplerschen Theorie.

Man kann die Erscheinung des Mittönens benutzen, wie zuerst A. Mayer<sup>4)</sup> gezeigt hat, um zu beweisen, daß in der Tat die Änderung der Tonhöhe gerade die von der Theorie verlangte ist. Man nimmt zwei genau gleiche Stimmgabeln etwa  $c_2$ , 512 Schwingungen gebend; streicht man die eine an, so tönt die andere kräftig mit. Verstimmt man die eine, etwa durch Überziehen eines leichten straffen Kautschukringes, so daß sie in der Sekunde zwei Schwingungen weniger macht, so tönt die andere Gabel nicht

1) Seebeck, in Doves Repertorium. 8. p. 87. 1849.

2) Buys Ballot, Poggend. Ann. 66. 1845.

3) H. C. Vogel, Poggend. Ann. 158. 1876.

4) A. M. Mayer, Poggend. Ann. 146. 1872.

mehr mit, wenn man die verstimmte anstreicht. Stellt man sich dann aber mit der verstimmten Gabel in einiger Entfernung von der nicht verstimmten auf, bringt erstere zum Tönen, und bewegt sich dann mit der verstimmten tönenden Gabel mit der konstanten Geschwindigkeit von etwa  $1,2^m$  gegen die andere hin, so kommt dieselbe wieder zum Tönen. Stellt man die verstimmte Gabel auf, so muß man, um dieselbe zum Mittönen zu bringen, die nicht verstimmte mit derselben Geschwindigkeit entfernen. Wenn man dagegen die zweite Gabel nicht verstimmt, so tönt die erste nicht, wenn man mit der tönenden Gabel sich mit der gleichen Geschwindigkeit nähert oder entfernt. Daß diese Bewegungsgeschwindigkeit der Dopplerschen Theorie entspricht, ergibt sich leicht. Es müssen von der verstimmten Gabel her in der Sekunde 512 Schwingungen zur nicht verstimmten Gabel gelangen, während sie selbst in der Sekunde 510 Schwingungen macht. Die Geschwindigkeit  $b$ , mit der sie der nicht verstimmten Gabel genähert werden muß, ergibt sich somit aus

$$512 = 510 \cdot \frac{c}{c - b}.$$

Setzen wir die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft bei gewöhnlicher Temperatur rund  $c = 340^m$ , so wird

$$b = 1,21^m,$$

wie es vorhin angegeben wurde. Man kann so die Richtigkeit des Dopplerschen Satzes sogar objektiv sichtbar machen, wenn man die Schwingungen der Gabel auf die eine oder andere Weise sichtbar macht.

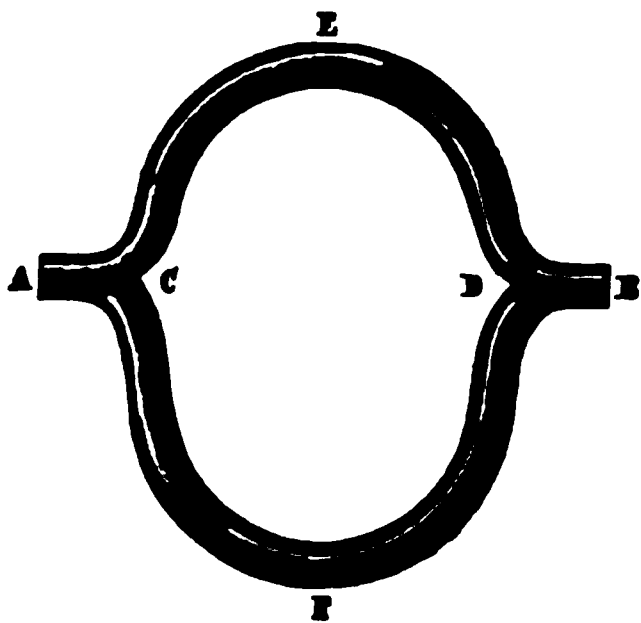
### § 181.

**Interferenz des Schalles.** Wenn sich nach einer und derselben Richtung zwei Schallwellen gleicher Länge fortpflanzen, so muß nach der Natur der Wellenbewegung die Resultierende aus den beiden Schallwellen abhängen von der Phasendifferenz, mit welcher die beiden Wellen zusammentreffen.

Treffen zwei Schallwellen ohne Phasendifferenz zusammen, so müssen sie sich verstärken, treffen sie dagegen mit einer Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge zusammen, so müssen sie sich aufheben. Daß letzteres in der Tat der Fall ist, davon kann man sich durch einen einfachen Versuch überzeugen. Bringt man eine Klangscheibe zum Tönen, so daß das diagonale Kreuz entsteht, so schwingen die nebeneinander liegenden Quadranten gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen, indem, wie wir sahen, die Knotenlinien zwei in entgegengesetzter Phase befindliche Teile der Scheibe trennen. Führt man nun eine solche tönende Scheibe am Ohre vorüber, so verschwindet der Ton jedesmal, wenn das Ohr sich vor einer Knotenlinie befindet. Von dem einen Quadranten wird dann ein Wellenberg ins Ohr gesandt und zugleich von dem andern ein Wellental, die Bewegung des Trommelfelles ist daher infolge der einen Welle die entgegengesetzte derjenigen der andern Welle, die Bewegung und somit der Schall hört auf.

Diesen Fall der Interferenz von Schallwellen hat Hopkins<sup>1)</sup> auf sehr einfache Weise sichtbar gemacht. Er stellte eine Röhre von Pappe oder Holz her, welche unten gabelförmig in zwei Röhren endigte, und deren oberes Ende mit einer feinen Membran überspannt war. Bestreut man die Membran mit etwas trockenem Sand und hält die Röhre so über eine tönende Klangscheibe, daß die beiden offenen Enden der Gabel sich über zwei nebeneinander liegenden Quadranten der Scheibe befinden, so gerät die

Fig. 329.



oben über die Röhre gespannte Membran nicht in schwingende Bewegung, der Sand bleibt ruhig; hält man aber die offenen Enden der Gabel über gegenüberliegende Quadranten, so gerät der Sand in hüpfende Bewegung. Im ersten Falle gehen von den beiden Quadranten zugleich entgegengesetzte Bewegungen in die Röhre, dieselben heben sich auf, im letzten Falle aber gleichgerichtete, sie verstärken sich.

In anderer Weise hat Nörremberg<sup>2)</sup> die Interferenz der Schallwellen gezeigt. Ein verzweigtes Rohr von der Form Fig. 329 wurde in eine Wand eingemauert, und auf

der einen Seite der Wand ein Ton erzeugt, der nur durch die Luft des Rohres in den durch die Wand abgetrennten Raum eindringen konnte. Wurde eine der beiden Röhren verstopft, so drangen alle Töne durch das Rohr hindurch, wurden aber beide geöffnet, so blieben alle Töne aus, für welche die Differenz der Röhrenlängen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge war.

Eine sehr bequeme Form, welche zu einer Reihe verschiedener Versuche brauchbar ist, hat Quincke<sup>3)</sup> dem eben besprochenen Interferenzapparat gegeben. Fig. 330 gibt eine dieser Formen, Fig. 331 eine andere.

Fig. 330.

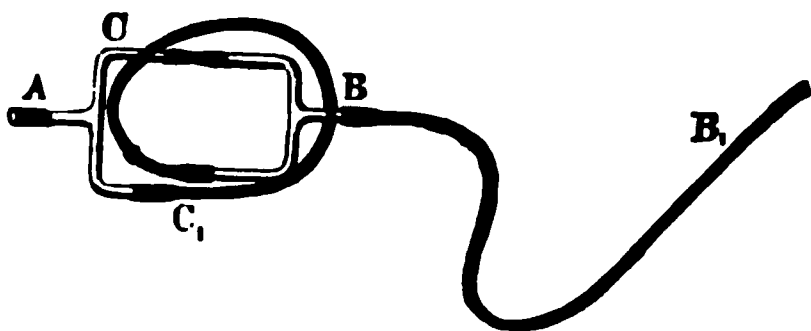
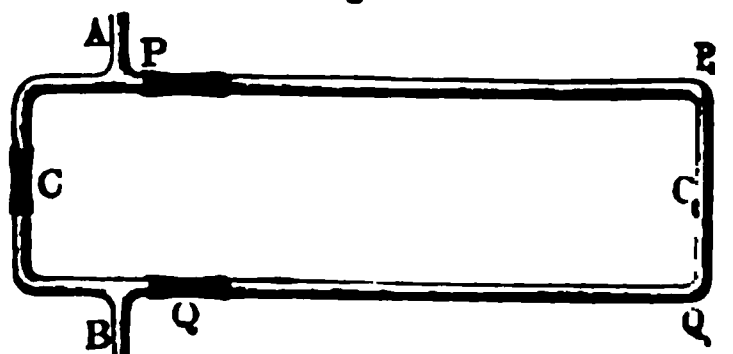


Fig. 331.



Die erste in den gleich anzugebenden Dimensionen löscht den Ton  $a_1$  (440 Schwingungen) und alle seine ungeraden Vielfachen aus. Zwei T-förmige Glasröhren  $CAC_1$  und  $CBC_1$  sind an den Enden rechtwinklig umgebogen und bei C durch einen kurzen, bei  $C_1$  durch einen langen Kautschukschlauch verbunden. Gibt man dem letztern eine Länge von

1) Hopkins, Poggend. Ann. 44. 1838.

2) Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. Braunschweig 1856. p. 382. Diese Methode ist vorgeschlagen von J. G. W. Herschel, Philosophical Magazine 3. 3. 1833. Poggend. Ann. 31. 1834.

3) Quincke, Poggend. Ann. 128. 1866.

etwa  $390^{\text{mm}}$ , so entspricht er einer halben Wellenlänge des Tones  $a_1$  in Luft. Das mit einem kurzen Kautschukschlauch versehene Ende  $A$  des Apparates setzt man in den äußern Gehörgang des einen Ohres, verstopft das andere mit einem Siegellackpfropf und läßt den Klang der Stimmgabel durch den langen Kautschukschlauch  $BB_1$  und die verzweigte Röhrenleitung ins Ohr gelangen, indem man die Zinken der angeschlagenen Gabel vor das offene Ende  $B_1$  des Schlauches hält, oder auch den Stiel der Gabel in den Schlauch steckt und die Gabel anschlägt. Die dem Grundton der Gabel entsprechenden Wellen löschen sich dann bei  $B$  aus, und man nimmt ihn nicht wahr. Drückt man aber bei  $C$  oder  $C_1$  den Kautschukschlauch zu, so daß die Welle nur durch ein Rohr dringen kann, so tritt der Ton kräftig in das Ohr hinein.

Der Apparat Fig. 331 unterscheidet sich von dem eben besprochenen dadurch, daß der lange Kautschukschlauch durch das Glasrohr  $PP_1Q_1Q$  ersetzt ist; indem man eine Reihe solcher Röhren herstellt, die an Stelle dieses mit dem Stücke  $BCA$  verbunden werden, kann man die Interferenzröhre für eine ganze Anzahl von Tönen stimmen.

Von den mannigfachen Versuchen, zu welchen diese Röhren dienen können, erwähnen wir hier nur die Beobachtung der Klangfarbe. Eine solche Röhre löscht nicht nur einen bestimmten Ton aus, sondern auch alle seine ungeradzahligen Obertöne; deshalb löscht eine solche Röhre den Klang einer gedeckten Orgelpfeife ganz aus, es bleibt nur das Blasegeräusch zurück, bei einer offenen Orgelpfeife dagegen ändert sie nur den Klang, da die geraden Partialtöne des Klanges nicht ausgelöscht werden. Man kann deshalb durch eine solche Röhre sofort erkennen, ob in einem Klange nur ungerade, oder auch gerade Partialtöne enthalten sind.

Eine sehr instruktive Einrichtung hat König diesen Interferenzröhren gegeben, indem er sie mit seinen manometrischen Flammen in Verbindung setzte. An die Stelle des Ohres bei der Quinckeschen Einrichtung treten die § 164 (Fig. 296) erwähnten kleinen Kapseln mit den Flammen. Königs Interferenzröhre ist posaunenartig eingerichtet. Ist die Röhre ganz zusammengeschoben, so sind beide dem eindringenden Tone offene Wege ganz gleich, er dringt in die Kapsel ein und setzt die Flamme in Vibration; zieht man nun die eine Hälfte aus, so wird der eine Weg des Tones länger, und ist er gleich  $\frac{1}{2}$  Wellenlänge, so heben sich die Schwingungen in der Kapsel auf, und die Flamme brennt ruhig. Indem man auf diese Weise die Länge der Welle eines Tones von bekannter Schwingungszahl messen kann, liefert der Apparat sogar ein sehr bequemes Mittel, die Geschwindigkeit des Schalles zu bestimmen.

Interferenz des Schalles durch gleichzeitiges Aussenden entgegengesetzt gerichteter Impulse von zwei naheliegenden Orten hat Seebeck<sup>1)</sup> mittels der Sirene sehr deutlich nachgewiesen. Richtet man gegen eine Lächerreihe einer Sirene von den beiden entgegengesetzten Seiten her senkrecht gegen die Scheibe zwei Röhren und zwar so, daß, wenn die eine sich vor einem Loche befindet, die andere sich dem nächsten gegenüber befindet, so erhält man bei gleichzeitigem Anblasen keinen Ton, sondern hört nur das Geräusch der durchströmenden Luft, indem sich die beiden Stöße der Luft

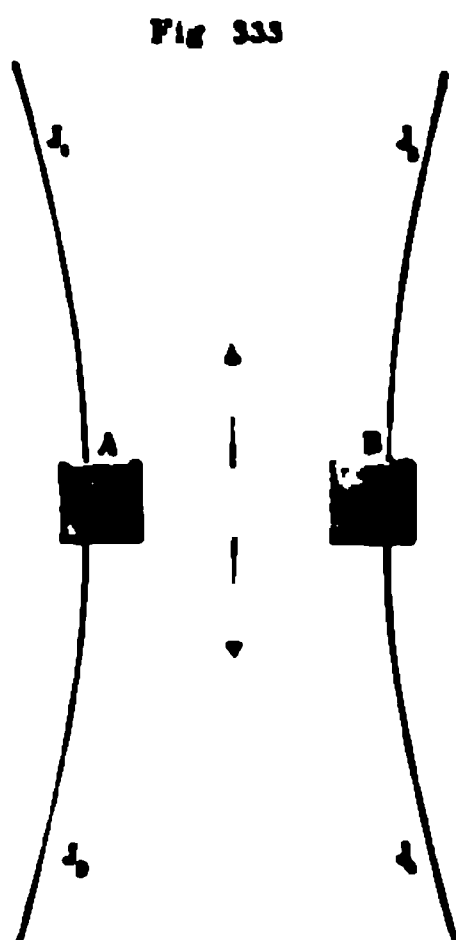
1) A. Seebeck, Doves Repertorium. 6 1842.

errichteten Linie liegen. Die in der Nähe dieser Linie liegenden Luftteilchen werden dann gleichzeitig immer von einem von  $A$  ausgehenden Wellenberge und von  $B$  ausgehenden Wellentale getroffen, sie werden daher immer in Ruhe sein, auf der ganzen Linie  $CD$  muß der Schall verschwinden.

Wie Kiessling durch genaue Messungen konstatiert hat, findet eine solche Interferenz bei jedem parallelepipedischen in transversale Schwingungen versetzten Stabe statt; es tritt dort die Interferenz in einer durch die Achse des Stabes gelegten nahezu zur Schwingungsrichtung senkrechten Ebene auf. Um sie zu beobachten, nimmt man am besten einen Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Seiten ziemlich voneinander verschieden sind, damit der Stab parallel der einen Seite schwingend einen wesentlich andern Ton gibt als parallel der andern Seite schwingend. Ein solcher Stab ist einem nahezu quadratischen vorzuziehen, weil, wenn man den Stab parallel einer Seite in Schwingungen versetzt, auch immer Schwingungen parallel der andern Seite auftreten. Ist die Dicke des Stabes nach beiden Richtungen nahe dieselbe, so ist der Ton für beide Schwingungsrichtungen auch nahe gleich, und die Beobachtung wird dann durch die im nächsten Paragraphen zu besprechenden Stöße gestört und unsicher. Man hängt den Stab in zwei Knoten auf und bringt ihn durch Streichen mit dem Bogen parallel einer Seite zum Schwingen. Man führt dann in das eine Ohr, während das andere fest verschlossen ist, einen Kautschukschlauch, dessen anderes Ende gerade, das heißt senkrecht zur Schlauchachse abgeschnitten ist. Führt man dieses Ende des Schlauches in einiger Entfernung vom Stabe in einer der Schwingungsrichtung parallelen Richtung an dem Stabe vorüber, so verschwindet der Ton vollständig, sobald die Mitte der untern Schlauchöffnung sich gerade in der durch  $CD$  (Fig. 332) und die Stabachse gelegten Ebene befindet. Wie Kiessling angibt, läßt sich die Lage der Interferenzebene auf diese Weise sehr genau feststellen, da schon eine Verschiebung des Schlauchendes um  $0,1^{\text{mm}}$  genügt, um den Ton wieder hörbar zu machen.

Am leichtesten lassen sich diese Interferenzen an einer Stimmgabel beobachten. Dreht man eine solche sehr rasch vor dem Ohre um den Stiel derselben als vertikale Achse herum, so hört man den Ton entsprechend den vier Interferenzflächen  $J_1, J_2, J_3, J_4$  (Fig. 333), viermal verschwinden. Eine genauere Untersuchung der Interferenzflächen in diesem Falle hat Kiessling ergeben, daß sie hyperbolisch gekrümmt sind, infolge der Reflexionen, welche die von den inneren Seiten der Zinken ausgehenden Schwingungen an der andern Zinke erfahren, und weil die Bewegung der Luft an der einen Zinke auch durch jene von der andern Zinke erregten beeinflußt wird.

Umgibt man die eine Zinke mit einer möglichst engen Glasröhre, so daß die Bewegung dieser Zinke sich der umgebenden Luft nicht mitteilt, und wegen der starken Krümmung der Glasröhre keine merkliche Reflexion der Wellen zu den von der andern Zinke erregten Schwingungen eintritt, so finden die Interferenzen wieder in einer Ebene statt. Bringt man dann



aber zwischen den beiden Zinken eine ebene Glasplatte an, so daß eine Reflexion der von der einen Zinke erregten Welle an derselben stattfindet, so tritt die Krümmung wieder hervor, ein Beweis, daß die Krümmung der Interferenzfläche eine Folge der Durchkreuzung teils der reflektierten mit den direkt erregten, teils der von der andern Zinke herrührenden mit den von der einen Zinke erregten Schwingungen ist.

### § 182.

**Interferenz von Wellen ungleicher Länge. Stöße.** In dem vorigen Paragraphen haben wir das Zusammentreffen zweier Wellenzüge gleicher Periode betrachtet und haben gesehen, wie dadurch die den einzelnen Wellenzügen entsprechenden Töne verstärkt oder geschwächt, oder selbst unterdrückt werden, je nach der Phasendifferenz, mit welcher die Wellenzüge gleichzeitig in unserem Ohre ankommen. Die Resultierende dieser Interferenzen war aber eine stetig sich gleich bleibende, die Verstärkung oder Schwächung des Tones dauerte in ganz gleicher Weise fort, so lange die einzelnen Töne fort dauerten, da die Wellen von gleicher Geschwindigkeit und Länge mit konstanter Phasendifferenz immer an einem und demselben Orte ankommen.

Wie zwei Wellenzüge gleicher Länge, so können auch zwei Wellenzüge verschiedener Länge miteinander interferieren, jedoch ist das Resultat der Interferenz ein wesentlich anderes, viel komplizierteres als in dem vorigen Falle.

Werden nämlich an einem und demselben Orte zwei Töne mit verschiedener Schwingungszahl erregt, so tritt in diesen nicht immer zugleich Wellenberg oder Wellental auf, sondern in beiden Tönen zu verschiedenen Zeiten, da sie in dem einen Ton rascher aufeinander folgen als in dem andern. Gibt der höhere Ton in der Sekunde z. B. eine Schwingung mehr, und nehmen wir an, daß beim Beginne die Schwingungen beider genau gleichzeitig waren, so werden allmählich die Schwingungen des tiefern Tones gegen diejenigen des höhern zurückbleiben; nach einer halben Sekunde wird der tiefere Ton gerade ein Tal aussenden, wenn der höhere einen Wellenberg aussendet. Nach einer weitem halben Sekunde wird der tiefere Ton um noch eine halbe Schwingung zurückbleiben, so daß am Ende der ersten Sekunde wieder Wellenberg und Wellenberg zusammentreffen.

Zwei derartige Wellen können sich daher nicht dauernd schwächen oder dauernd stärken, da die Schwingungen nicht gleichzeitig gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, sondern bald gleichgerichtet, bald entgegengesetzt gerichtet sind. Das Ohr eines Beobachters wird daher abwechselnd, wenn zugleich die Wellenberge oder die Wellentäler das Ohr treffen, die Summe der Impulse der einzelnen Wellen erhalten, oder wenn ein Wellenberg und ein Wellental zusammentreffen, die Differenz der Impulse. Während demnach das Ohr beide Töne wahrnimmt, wird es zugleich von Zeit zu Zeit Verstärkungen und Schwächungen des Tones wahrnehmen müssen.

Die Erfahrung bestätigt diese Schlüsse vollkommen, denn läßt man zugleich zwei Töne, die nahezu gleich gestimmt sind, ansprechen, so hört man während des Tönens von Zeit zu Zeit deutliche Schläge, indem die Intensität des Tones abwechselnd gestärkt und geschwächt wird.



Diese Schläge nennt man Stöße oder Schwebungen. Beträgt der Unterschied der Schwingungszahlen in der Sekunde eins, so fällt am Anfange jeder Sekunde Wellenberg und Wellenberg zusammen, wir werden daher in jeder Sekunde eine Verstärkung des Tones, einen Stoß wahrnehmen. Ist der Unterschied der Schwingungszahlen gleich zwei, so wird bei gleichzeitigem Anfang beider Töne nach der ersten Viertelsekunde der höhere Ton dem tiefern um  $\frac{1}{2}$ , nach einer halben Sekunde um eine ganze Oszillation vorgeeilt sein. Schon nach einer halben Sekunde werden also dann wieder zwei Wellenberge zusammentreffen, wir werden in der Sekunde zwei Stöße wahrnehmen.

Daß die Zahl der Stöße überhaupt gleich der Differenz der Schwingungen derjenigen Töne sein muß, aus denen sie entstehen, entwickelt Hüllström<sup>1)</sup> in folgender Weise. Seien  $r$  und  $s$  die Schwingungen der angestimmten Töne in der Sekunde, und  $x$  die Anzahl der Stöße. In der Zeit  $\frac{1}{x}$  entsteht dann ein Stoß, und in dieser Zeit macht der Ton mit der Schwingungszahl  $r$ ,  $\frac{r}{x}$ , der andere Ton  $\frac{s}{x}$  Schwingungen, da  $r$  und  $s$  die Schwingungszahl in der Zeit 1 ist.

In derselben Zeit aber, in welcher durch das Zusammenwirken der Schwingungen ein Stoß entsteht, muß, wie wir vorhin erwähnten, der höhere Ton eine Schwingung mehr vollführen, oder es muß

$$\frac{s}{x} - \frac{r}{x} = 1,$$

$$s - r = x$$

oder allgemein die Anzahl der Stöße in einer Sekunde muß gleich der Differenz der Schwingungszahlen beider Töne sein.

Man hat vielfach darüber gestritten, ob die Stöße nur subjektiver Natur seien, das heißt, ob sie nur im Ohre durch Zusammentreffen der einzelnen Impulse entstanden, oder ob sie objektiver Natur seien, das heißt, ob wirklich an den Interferenzstellen eine stärkere Bewegung der Luftteilchen vorhanden sei. Ein einfacher vom Orgelbauer F. Lange<sup>2)</sup> in Berlin konstruierter Apparat beweist jedoch die objektive Natur der Stöße auf das entschiedenste. Lange brachte in den Fuß einer Zungenpfeife mit gläserner Wand zwei Rohrwerke und setzte auf jedes eine Pfeife, so daß er zwei Zungenpfeifen erhielt, die durch denselben Luftstrom angeblasen wurden. Die Pfeifen werden nahe gleich gestimmt, so daß die Stöße sich sehr langsam folgen. Bei Betrachtung der Zungen sieht man dann, wie die Exkursion derselben bei jedem Stoße um vieles bedeutender ist als sonst; ein direkter Beweis, daß die den Stoß erzeugenden Impulse in der That sich zu größern Schwingungen summieren, daß die Stöße nicht subjektiver, sondern objektiver Natur sind.

König<sup>3)</sup>, der in einer ausgedehnten Untersuchung, bei welcher er zur Tonerzeugung, um einfache Töne zu erhalten, nur Stimmungabeln benutzte,

1) Hüllström, Poggend. Ann. 24. 1832.

2) Der Apparat wurde mir von Herrn Lange im Jahre 1857 zu Berlin gezeigt; er ist in manche Kabinette übergegangen.

3) König, Poggend. Ann. 157. 1876.



die Zahl der von zwei Tönen gegebenen Stöße innerhalb der ganzen Skala der Tonleiter bestimmte, gelangt in bezug auf die Stöße zu einem etwas andern Resultat, er glaubt, daß nicht nur Stöße entstehen, welche gleich der Differenz der Schwingungszahl der Töne sind, sondern daß, wenn man sich einem harmonischen Intervall nähert, auch Stöße auftreten, gerade als wenn der Grundton von dem betreffenden Obertone begleitet wäre. Gehen wir also von einem Tone aus, der etwa 64 Schwingungen macht,  $C = c_{-1}$ , und nehmen wir eine zweite Gabel, deren Töne wir durch Laufgewichte, die an den Zinken verschiebbar sind, allmählich bis zur doppelten Schwingungszahl erhöhen können, so hört man zunächst die Stöße gleich der Differenz der Schwingungszahl, die bis zu 10, entsprechend 74 Schwingungen der zweiten Gabel, einzeln hörbar sind. Bei weiterer Steigerung der Tonhöhe der zweiten Gabel hört man die Stöße als Rollen. Nähert sich die zweite Gabel der Quint, so geht nach Königs Bezeichnung das Rollen in ein verworrenes Rasseln über, wie wenn zu den bisher gehörten Stößen auch solche mit der Oktave des Grundtones hinzukämen. Geht man über die Quint hinaus, so dauert dieses Rasseln zunächst fort, zwischen der Sext und Septime geht dasselbe wieder in Rollen über, und bei der Septime, die 120 Schwingungen entspricht, hört man wieder einzeln 8 Stöße, also die Zahl der Stöße, welche der Differenz der Schwingungen mit der Oktave des andern Stimmgabeltones entsprechen. Nähert sich der Ton der Oktave, so nimmt dem entsprechend die Zahl der Stöße ab, bis sie bei der Oktave verschwinden. König nimmt somit an, daß nicht nur zwei dem Einklange nahe Töne Stöße geben, die der Differenz ihrer Schwingungen entsprechen, sondern auch Töne, die nahe im Verhältnisse 1:2, ebenso auch 1:3, 1:4 usw. stehen, gerade so, wie wenn der tiefere Ton von den betreffenden Obertönen begleitet wäre.

König ist der Ansicht, und zu demselben Resultate gelangt Voigt<sup>1)</sup>, daß sich diese Stöße aus der Zusammensetzung der Schwingungen der beiden Töne ableiten lassen. Auf die Untersuchung von Voigt kommen wir im nächsten Paragraphen noch zurück.

Helmholtz<sup>2)</sup> sieht diese von König als obere bezeichneten Stöße als solche an, die in der Tat mit den betreffenden Obertönen des Grundtones gebildet werden, indem er darauf hinweist, daß bei den kräftigen von König angewandten Schwingungen der Gabeln die Obertöne auftreten müssen. Bei einer Gabel, die 64 Schwingungen in der Sekunde machte, konnte er mit geeigneten Resonatoren die Obertöne bis zum fünften hören, wenn die Gabel stark angeschlagen war; die Zinken machten dann Schwingungen, deren Amplitude 1<sup>cm</sup> betrug. Bei so großer Breite der Schwingungen eines scharfkantigen Körpers, wie es die Gabelzinken sind, müssen in der umgebenden Luft Wirbelbewegungen entstehen, die erheblich von dem Gesetze der einfachen Schwingungen abweichen, und deshalb in ähnlicher Weise die Obertöne hervorrufen, wie es die schwingenden Zungen tun. Daß das Auftreten der Obertöne durch derartige Störungen der einfachen Bewegungen infolge der großen Amplituden bedingt ist, ergibt sich auch

1) Voigt, Wiedem. Ann. 40. p. 652. 1889.

2) Helmholtz, Tonempfindungen. 4. Ausgabe. p. 263. Man sehe dazu König, Wiedem. Ann. 12. p. 335. 1881.

daraus, daß sie bei dem Austönen der Gabel viel früher als der doch auch nur sehr schwach hörbare Grundton der Gabel verschwinden, da bei dem Austönen der Gabel die Schwingungen kleiner und kleiner werden und dann die Luft nur mehr nach ihrer eigenen Periode in Bewegung versetzen.

Auch C. Stumpf<sup>1)</sup> untersucht die Teiltöne von Klängen und findet, daß ein Klang eine Resonanzgabel von multipler Schwingungszahl nur dann zum resonieren bringen kann, wenn er einen Oberton von der Schwingungsdauer des Gabeltones enthält. Ferner kommen zwischen einem Klang und einer Gabel, die ein um wenige Schwingungen verschiedenes Multiplum seiner Schwingungszahl besitzt, Schwebungen nur mit dem in dem Klang enthaltenen Oberton, nicht aber mit dem Grundton zu Stande. Mit Anwendung dieser Sätze kann er bei den meisten Gabeln Obertöne nachweisen. Eine Königsche Gabel (zirka 64 Schwingungen) enthielt alle Teiltöne bis zum zwölften.

Eine sehr wichtige Anwendung der Stöße rührt von Scheibler<sup>2)</sup> her, nämlich ihre Anwendung zum reinen Stimmen zweier Töne und zur Bestimmung ihrer absoluten Schwingungszahl. Wie ersteres, was ein mehr praktisches Interesse hat, geschehen kann, sieht man leicht, da die Stöße sich um so langsamer folgen, je näher die Töne gleich gestimmt sind, je geringer ihr Schwingungsunterschied ist. Jedem Ton entspricht ein tiefer liegender und ein höher liegender, der mit ihm in der Sekunde eine genau bestimmte Zahl z. B. vier Stöße gibt. Dies benutzte Scheibler folgendermaßen. Eine Stimmgabel gibt z. B.  $a_1$  an; er stellt dann eine Stimmgabel her, die einen etwas tiefern Ton hat und mit der  $a_1$  Gabel genau vier Stöße in der Sekunde gibt. Um nun die Saite eines Monochords genau auf  $a_1$  zu stimmen, wird sie mit der tiefern Gabel verglichen und so gespannt, daß sie mit derselben vier Stöße gibt. Der Ton der Saite ist dann genau das eingestrichene  $a_1$ .

Um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, wandte Scheibler zwei Methoden an. Die erste Methode bestand in folgendem.

Auf einem Monochord wurde eine Saite aufgespannt, welche genau den Ton einer  $a_1$  Gabel angab und die Länge der Saite in 2000 Teile geteilt. Der eine Steg der Saite war verschiebbar, so daß die Saite verlängert oder verkürzt werden konnte. In beiden Fällen gab der Ton der Saite mit dem der Gabel Stöße. Scheibler bestimmte nun mit größter Genauigkeit, um wieviel die Saite verlängert oder verkürzt werden mußte, damit sie mit der Gabel genau vier Stöße in einer Sekunde gab. Die Stellen, wo der Steg sich dann befindet, nannte er Nebenstellen.

Da die Anzahl der Stöße gleich ist dem Unterschiede der Schwingungszahlen der beiden Töne, so ist, wenn wir die Schwingungszahl der  $a_1$  Saite mit  $x$  bezeichnen, die Schwingungszahl der bis zur tiefern Nebenstelle verlängerten Saite  $x - 4$ , der bis zur höhern Nebenstelle verkürzten  $x + 4$ . Ist die Saite bis zur tiefern Nebenstelle um  $a$  länger, bis zur höhern um  $b$  kürzer, so ist nach den Schwingungsgesetzen der gespannten Saiten

$$x : x - 4 = 2000 + a : 2000$$

und

1) C. Stumpf, Wiedem. Ann. 57 p. 660. 1896.

2) Röber in Doves Repertorium. 3. Poggend. Ann. 32. 1834.

die Zahl der von zwei Tönen gegebenen Stöße innerhalb der ganzen Skala der Tonleiter bestimmte, gelangt in bezug auf die Stöße zu einem etwas andern Resultat, er glaubt, daß nicht nur Stöße entstehen, welche gleich der Differenz der Schwingungszahl der Töne sind, sondern daß, wenn man sich einem harmonischen Intervall nähert, auch Stöße auftreten, gerade als wenn der Grundton von dem betreffenden Obertone begleitet wäre. Gehen wir also von einem Tone aus, der etwa 64 Schwingungen macht,  $C = c_{-1}$ , und nehmen wir eine zweite Gabel, deren Töne wir durch Laufgewichte, die an den Zinken verschiebbar sind, allmählich bis zur doppelten Schwingungszahl erhöhen können, so hört man zunächst die Stöße gleich der Differenz der Schwingungszahl, die bis zu 10, entsprechend 74 Schwingungen der zweiten Gabel, einzeln hörbar sind. Bei weiterer Steigerung der Tonhöhe der zweiten Gabel hört man die Stöße als Rollen. Nähert sich die zweite Gabel der Quint, so geht nach Königs Bezeichnung das Rollen in ein verworrenes Rasseln über, wie wenn zu den bisher gehörten Stößen auch solche mit der Oktave des Grundtones hinzukämen. Geht man über die Quint hinaus, so dauert dieses Rasseln zunächst fort, zwischen der Sext und Septime geht dasselbe wieder in Rollen über, und bei der Septime, die 120 Schwingungen entspricht, hört man wieder einzeln 8 Stöße, also die Zahl der Stöße, welche der Differenz der Schwingungen mit der Oktave des andern Stimmgabeltones entsprechen. Nähert sich der Ton der Oktave, so nimmt dem entsprechend die Zahl der Stöße ab, bis sie bei der Oktave verschwinden. König nimmt somit an, daß nicht nur zwei dem Einklange nahe Töne Stöße geben, die der Differenz ihrer Schwingungen entsprechen, sondern auch Töne, die nahe im Verhältnisse 1 : 2, ebenso auch 1 : 3, 1 : 4 usw. stehen, gerade so, wie wenn der tiefere Ton von den betreffenden Obertönen begleitet wäre.

König ist der Ansicht, und zu demselben Resultate gelangt Voigt<sup>1)</sup>, daß sich diese Stöße aus der Zusammensetzung der Schwingungen der beiden Töne ableiten lassen. Auf die Untersuchung von Voigt kommen wir im nächsten Paragraphen noch zurück.

Helmholtz<sup>2)</sup> sieht diese von König als obere bezeichneten Stöße als solche an, die in der Tat mit den betreffenden Obertönen des Grundtones gebildet werden, indem er darauf hinweist, daß bei den kräftigen von König angewandten Schwingungen der Gabeln die Obertöne auftreten müssen. Bei einer Gabel, die 64 Schwingungen in der Sekunde machte, konnte er mit geeigneten Resonatoren die Obertöne bis zum fünften hören, wenn die Gabel stark angeschlagen war; die Zinken machten dann Schwingungen, deren Amplitude 1<sup>cm</sup> betrug. Bei so großer Breite der Schwingungen eines scharfkantigen Körpers, wie es die Gabelzinken sind, müssen in der umgebenden Luft Wirbelbewegungen entstehen, die erheblich von dem Gesetze der einfachen Schwingungen abweichen, und deshalb in ähnlicher Weise die Obertöne hervorrufen, wie es die schwingenden Zungen tun. Daß das Auftreten der Obertöne durch derartige Störungen der einfachen Bewegungen infolge der großen Amplituden bedingt ist, ergibt sich auch

1) Voigt, Wiedem. Ann. 40. p. 652. 1889.

2) Helmholtz, Tonempfindungen. 4. Ausgabe. p. 263. Man sehe dazu König, Wiedem. Ann. 12. p. 335. 1881.

daraus, daß sie bei dem Austönen der Gabel viel früher als der doch auch nur sehr schwach hörbare Grundton der Gabel verschwinden, da bei dem Austönen der Gabel die Schwingungen kleiner und kleiner werden und dann die Luft nur mehr nach ihrer eigenen Periode in Bewegung versetzen.

Auch C. Stumpf<sup>1)</sup> untersucht die Teiltöne von Klängen und findet, daß ein Klang eine Resonanzgabel von multipler Schwingungszahl nur dann zum resonieren bringen kann, wenn er einen Oberton von der Schwingungsdauer des Gabeltones enthält. Ferner kommen zwischen einem Klang und einer Gabel, die ein um wenige Schwingungen verschiedenes Multiplum seiner Schwingungszahl besitzt, Schwebungen nur mit dem in dem Klang enthaltenen Oberton, nicht aber mit dem Grundton zu Stande. Mit Anwendung dieser Sätze kann er bei den meisten Gabeln Obertöne nachweisen. Eine Königsche Gabel (zirka 64 Schwingungen) enthielt alle Teiltöne bis zum zwölften.

Eine sehr wichtige Anwendung der Stöße rührt von Scheibler<sup>2)</sup> her, nämlich ihre Anwendung zum reinen Stimmen zweier Töne und zur Bestimmung ihrer absoluten Schwingungszahl. Wie ersteres, was ein mehr praktisches Interesse hat, geschehen kann, sieht man leicht, da die Stöße sich um so langsamer folgen, je näher die Töne gleich gestimmt sind, je geringer ihr Schwingungsunterschied ist. Jedem Ton entspricht ein tiefer liegender und ein höher liegender, der mit ihm in der Sekunde eine genau bestimmte Zahl z. B. vier Stöße gibt. Dies benutzte Scheibler folgendermaßen. Eine Stimmgabel gibt z. B.  $a_1$  an; er stellt dann eine Stimmgabel her, die einen etwas tiefern Ton hat und mit der  $a_1$  Gabel genau vier Stöße in der Sekunde gibt. Um nun die Saite eines Monochords genau auf  $a_1$  zu stimmen, wird sie mit der tiefern Gabel verglichen und so gespannt, daß sie mit derselben vier Stöße gibt. Der Ton der Saite ist dann genau das eingestrichene  $a_1$ .

Um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, wandte Scheibler zwei Methoden an. Die erste Methode bestand in folgendem.

Auf einem Monochord wurde eine Saite aufgespannt, welche genau den Ton einer  $a_1$  Gabel angab und die Länge der Saite in 2000 Teile geteilt. Der eine Steg der Saite war verschiebbar, so daß die Saite verlängert oder verkürzt werden konnte. In beiden Fällen gab der Ton der Saite mit dem der Gabel Stöße. Scheibler bestimmte nun mit größter Genauigkeit, um wieviel die Saite verlängert oder verkürzt werden mußte, damit sie mit der Gabel genau vier Stöße in einer Sekunde gab. Die Stellen, wo der Steg sich dann befindet, nannte er Nebenstellen.

Da die Anzahl der Stöße gleich ist dem Unterschiede der Schwingungszahlen der beiden Töne, so ist, wenn wir die Schwingungszahl der  $a_1$  Saite mit  $x$  bezeichnen, die Schwingungszahl der bis zur tiefern Nebenstelle verlängerten Saite  $x - 4$ , der bis zur höhern Nebenstelle verkürzten  $x - 4$ . Ist die Saite bis zur tiefern Nebenstelle um  $a$  länger, bis zur höhern um  $b$  kürzer, so ist nach den Schwingungsgesetzen der gespannten Saiten

$$x : x - 4 = 2000 + a : 2000$$

und

1 C. Stumpf, Wiedem. Ann. 57 p. 660. 1896

2, Rüder in Doves Repertorium. 3. Poggend. Ann. 32. 1834.

$$x : x + 4 = 2000 - b : 2000,$$

oder

$$x : 4 = 2000 + a : a$$

und

$$x : 4 = 2000 - b : b.$$

Jede der beiden Gleichungen gibt uns  $x$ , so daß wir durch zwei solche Versuche eine Kontrolle des aus einem gefundenen Wertes haben.

Bei den Versuchen mit seiner Stimmgabel fand Scheibler  $a = 18,2$ , und daraus

$$x = 443,56$$

als Schwingungszahl seiner  $a_1$  Stimmgabel.

Die andere Zählung der absoluten Schwingungszahl geschieht nur durch Beobachtung der Stöße. Ihr Prinzip ist folgendes. Die Anzahl der Stöße gibt uns den Unterschied der Schwingungszahl beider Töne. Kennen wir das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen, so können wir aus beiden, dem Verhältnis und der Differenz der Schwingungszahlen beide berechnen.

Nun geben zwei meßbar verschiedene Töne jedoch keine Stöße, sondern Kombinationstöne. Um daher den Schwingungsunterschied zweier Töne zu erhalten, wandte Scheibler Zwischentöne an. Er stellte eine Reihe von Stimmgabeln her, deren Töne möglichst genau nach der gleichschwebenden Temperatur gestimmt, die chromatische Tonleiter von  $a$  gaben. Dann verfertigte er eine Anzahl sogenannter Zwischengabeln, deren Töne zwischen je zweien der chromatischen Tonleiter lagen, deren jede mit der nächst tiefern und der nächst höhern eine meßbare Anzahl von Stößen gab. So z. B. verfertigte er zwei Gabeln, deren erste einen Ton gab etwas höher als  $a$ , deren zweite einen Ton gab etwas tiefer als  $a_{is}$ . Die erste gab mit  $a$  in der Minute 272,4 Stöße, die zweite mit der ersten in der Minute 270,8 Stöße und mit der  $a_{is}$  Gabel 240 Stöße.

Ist demnach die Schwingungszahl von  $a = x$ , so ist die Schwingungszahl der ersten Zwischengabel  $x + 4,54$ , die der zweiten, welche mit der ersten in der Minute 270,8, in der Sekunde daher 4,52 Stöße gab, gleich  $x + 4,54 + 4,52$  und die der  $a_{is}$  Gabel  $x + 13,06$ .

In der temperierten Skala ist die Schwingungszahl von  $a_{is}$

$$x' = x \cdot \sqrt[12]{2} = x \cdot 1,05946.$$

Zur Berechnung von  $x$  und  $x'$  haben wir daher

$$\frac{x'}{x} = 1,05946,$$

$$x' - x = 13,06,$$

$$13,06 + x = 1,05946 x,$$

$$x = \frac{13,06}{0,05946} = 219,6.$$

Um aber noch genauere Resultate zu erhalten, schritt Scheibler in dieser Weise durch die ganze Tonleiter fort und bestimmte den Schwingungs-

unterschied zwischen  $a$  und  $a_1$ . Er fand, wenn wir die Schwingungszahl des Tones  $a_1$  mit  $x_1$  bezeichnen,

$$x_1 - x = 219,6667.$$

Nun ist aber zugleich

$$x_1 = 2x$$

und demnach

$$x = 219,666,$$

$$x_1 = 439,333.$$

Diese Methode, die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, ist zwar etwas mühsam, aber in den Händen eines geschickten Experimentators äußerst genau, da man hier keinerlei störenden Einfluß zu befürchten hat.

Die Beobachtung der Stöße in Verbindung mit derjenigen der Lissajousschen Figuren ist das sicherste Mittel, um die Schwingungszahl einer Stimmgabel, etwa einer Normalstimmgabel, zu bestimmen. Besonders von R. König ist zu diesem Zwecke eine Methode ausgebildet worden.<sup>1)</sup> Eine Stimmgabel von 64 Schwingungen ist mit einer Uhr verbunden, so daß sie mittels des Echappements den Gang derselben reguliert, zugleich aber auch durch dasselbe bei jeder Vibration einen kleinen Anstoß erhält, so daß ihre Schwingungsbewegung dauernd unterhalten wird. Die Schwingungen der Gabel können etwas durch verschiebbare Gewichte reguliert werden. Ist die Zahl 64 genau erreicht, so muß die Uhr genau gehen, was mit einem Chronometer reguliert wird. Die Stimmgabel ist gleichzeitig als Vibrationsmikroskop eingerichtet.

Man stellt nun eine Gabel von 256 Schwingungen dadurch her, daß man mit der ersten als Vibrationsmikroskop und der zweiten die Schwingungsfigur beobachtet und die Schwingungen derselben so reguliert, daß die Schwingungsfigur 1 : 4 vollkommen fest erscheint. Ist das erreicht, und war die erste genau reguliert, so hat die zweite genau 256 Schwingungen.

Man stellt eine dritte Gabel her, welche mit der zweiten in der Sekunde fünf Stöße gibt, die somit 261 Schwingungen in der Sekunde macht, die ebenfalls als Vibrationsmikroskop eingerichtet ist. Beobachtet man nun mit dieser und der Normalgabel die Lissajoussche Figur, so muß die Figur 3 : 5 ganz fest stehen, da  $435 = \frac{3}{5} \cdot 261$  ist.

Da man den Gang der Stimmgabeluhr durch lange fortgesetzte Beobachtungen genau kontrollieren kann, da ferner die Beobachtung der Lissajousschen Figuren die Schwingungszahlen mit der größten Genauigkeit vergleicht und da die Zahl der Stöße sich mit großer Sicherheit bestimmen läßt, ist die Methode einer äußerst großen Genauigkeit fähig.<sup>2)</sup>

1 R. König, Wiedem. Ann. 9. p 394. 1880

2 Man sehe u. a. Wild, Bulletin de l'Acad de St. Petersburg 20 p 132. 1886



## § 183.

**Kombinationstöne.** Wenn man zwei musikalische Töne verschiedener Höhe gleichzeitig und kräftig tönen läßt, so nimmt man, wenn das Intervall derselben nicht zu klein ist, im allgemeinen keine Schwebungen wahr, es tritt dann aber eine andere Einwirkung des gleichzeitigen Tönens, ein neuer Ton, der sogenannte Kombinationston hervor, Töne, welche zuerst von Sorge<sup>1)</sup> beobachtet und später von Tartini allgemeiner bekannt gemacht sind, nach welchem sie auch wohl den Namen Tartinischer Töne führen.

Wie die Zahl der Schwebungen gleich der Differenz der Schwingungszahl der sie bildenden Töne ist, so ist auch die Schwingungszahl dieser Kombinationstöne gleich der Differenz in der Schwingungszahl der Töne, aus denen sie hervorgehen. So entsteht z. B. aus Grundton und Quinte als Kombinationston die tiefere Oktave des Grundtones; da die beiden Töne die Schwingungszahlen 2 und 3 haben, so ist ihre Differenz gleich 1, also gleich der halben Schwingungszahl des Grundtones oder die Schwingungszahl der tiefern Oktave. Aus Grundton und Terz, welchen die Schwingungszahlen 4 und 5 entsprechen, bildet sich der Kombinationston 1, also die zweittiefere Oktave des Grundtones, aus Grundton und Quarte, welche dem Verhältnis 3 und 4 entsprechen, die Unterquint der tiefern Oktave, oder die zweittiefere Oktave der Quarte.

Läßt man anstatt zweier einfacher Töne zwei zusammengesetzte Klänge gleichzeitig ertönen, so liefern nicht nur die Grundtöne, sondern auch die harmonischen Obertöne miteinander und mit den Grundtönen Kombinationstöne nach demselben Gesetze. Sind die Schwingungszahlen der Grundtöne  $r$  und  $s$ , so sind die harmonischen Obertöne  $2r, 3r \dots 2s, 3s \dots$  und das Schema der sich bildenden Kombinationstöne ist folgendes:

$$\begin{array}{rclcl} r \text{ und } s & \text{geben} & s - r \\ 2r & \text{„ } s & \text{„ } 2r - s \\ 2s & \text{„ } r & \text{„ } 2s - r \\ 2s & \text{„ } 2r & \text{„ } 2s - 2r. \end{array}$$

So geben Grundton und Terz, 4 und 5, mit ihren Obertönen die Kombinationstöne 1, 3, 6, 2 usw., von denen der Ton 3 oft sehr deutlich zu hören ist.

Aber auch bei einfachen Tönen können solche mehrfache Kombinationstöne auftreten, gerade als wenn die entstehenden Kombinationstöne miteinander und den primären Tönen wieder Kombinationstöne lieferten. Folgendes Schema stellt die so merklichen Töne dar.

Ursprüngliche Töne	Kombinationstöne
$r, s$	$s - r$ erster
$s - r, r$	$2r - s$ zweiter
$2r - s, s$	$2s - 2r$ dritter
$2r - s, s - r$	$3r - 2s$ vierter usf.

1) Sorge. Man sehe *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 228.



$s - r$  und  $s$  sowie  $2r - s$  und  $r$  geben keine neuen Töne, sondern die schon vorhandenen  $r$  und  $s - r$ .

Die Kombinationstöne lassen sich am besten beobachten, wenn die komponierenden Töne ein und dieselbe Luftmasse in heftige Erschütterung versetzen, deshalb ganz besonders, wenn man eine mit mehreren Löcherreihen versehene Sirene auf einen Windkasten setzt und gleichzeitig zwei Löcherreihen anbläst.

Man hört nur einen Ton, wenn man eine Löcherreihe anbläst; sobald man die zweite, wie das bei der mit einem Durakkord versehenen Dove-schen Sirene sehr leicht geht, öffnet, hört man außer dem zweiten Tone noch eine Reihe von Kombinationstönen.

Ebenso erhält man die Kombinationstöne mit der Physharmonika oder zwei auf derselben Windlade stehenden Zungenpfeifen sehr deutlich; auch mit der Geige sind sie sehr gut zu erhalten.

Außer den bisher besprochenen hat Helmholtz<sup>1)</sup> noch eine zweite Klasse von Kombinationstönen entdeckt, welche er Summationstöne nennt, und deren Tonhöhe dadurch gegeben ist, daß die Schwingungszahl stets gleich ist der Summe der Schwingungen der sie bildenden Töne. Grundton und Quint liefern so die Terz der folgenden Oktave  $2 + 3 = 5$ , Grundton und große Terz  $4 + 5 = 9$  die Sekunde der höhern Oktave, Grundton und Sexte die Quarte der höhern Oktave. Die Bedingung, daß man die Summationstöne kräftig hört, ist dieselbe, welche die erste Art, die Helmholtz Differenztöne nennt, kräftig hören läßt, beide Töne müssen dieselbe Luftmasse in Bewegung setzen; man hört sie deshalb mit der mehrstimmigen Sirene oder mit Orgelpfeifen am besten, immer aber sind die Summationstöne schwächer als die Differenztöne. Ihre Wahrnehmung ist deshalb immer eine schwierige, trotzdem sie zu den sie bildenden Tönen und Differenztönen in einem unharmonischen Verhältnisse stehen<sup>2)</sup>

Die Kombinationstöne sah man früher als rein subjektive Töne an, welche aus den Schwebungen, wenn sie hinreichende Schnelligkeit haben, im Ohre sich bilden, man glaubte, wenn die Stöße mit hinreichender Schnelligkeit erfolgen, daß sie dann im Ohre als Ton empfunden werden. Helmholtz hat jedoch darauf aufmerksam gemacht, daß diese Theorie unrichtig sei. Zunächst widerspricht dieser Auffassung die feststehende Erfahrung, daß das Ohr jedes Tongemisch in seine einfachen Schwingungen zerlegt; wenn deshalb außerhalb des Ohres die Schwingungen nur nach der Periode der komponierenden Töne erfolgen, so nimmt das Ohr nur diese Schwingungen, nur diese Töne wahr, und das Ohr kann trotz Maximas und Minimis aus diesen Schwingungen keinen neuen Ton bilden.

Weiter kann man die objektive Existenz der Kombinationstöne außerhalb des Ohres zum Teil direkt nachweisen, denn man kann dieselben bei der Sirene oder den Orgelpfeifen durch für sie abgestimmte Resonatoren verstärken. Wie wir aber früher hervorgehoben haben, wird die Luft eines Resonators nur in Schwingungen versetzt, wenn dem Eigenton des Resonators entsprechende einfache Schwingungen in denselben eindringen. Ebenso kann man mit einer Quinckeschen Interferenzröhre den Nachweis liefern,

1. Helmholtz, Poggend. Ann. 99. 1856

2. Man sehe Fryer, Wiedem. Ann. 28. p 131. 1888.

daß die Kombinationstöne von Orgelpfeifen oder einer Physharmonika objektive Existenz haben.<sup>1)</sup> Stimmt man eine solche Röhre auf einen der beiden Töne ab, so tritt der Kombinationston auch dann deutlich auf, obwohl der eine der beiden Töne gar nicht zum Ohre dringen kann.

In andern Fällen, und besonders wenn man Stimmgabeln benutzt, kann man die objektive Existenz nicht so unmittelbar erkennen, und für diese ist König<sup>2)</sup> der Ansicht, daß sie aus den im vorigen Paragraphen besprochenen Stößen entstehen; er nennt sie deshalb Stoßtöne, untere Stoßtöne, welche der Differenz  $n - m$ , und obere Stoßtöne, welche der Differenz  $2m - n$  entsprechen usf. König glaubt, daß unser Ohr die Fähigkeit besitze regelmäßig wiederkehrende Impulse, deren Intensität periodisch wechselt, als Ton zu empfinden, dessen Höhe derjenigen des einfachen Tones gleicher Periode entspricht.

Voigt schließt sich dieser Ansicht von König an<sup>3)</sup> und gelangt bei der Untersuchung der Zusammensetzung einfacher Schwingungen zu dem Resultate, daß in der Tat unter den Umständen, unter denen König experimentierte, sich Maxima und Minima ergeben, welche den Königschen Stoßtönen, sowohl den untern als den obern, entsprechen. Die Bedingung ist die, daß die lebendige Kraft der schwingenden Bewegung des obern Tones nicht groß ist im Vergleich zur lebendigen Kraft der Bewegung des tiefern Tones.

Daß die Auffassung, in dem Falle bilden sich die Töne aus den Stößen, unrichtig ist, geht ohne Zweifel aus den neuern Beobachtungen von Preyer<sup>4)</sup> hervor. Schon Helmholtz hatte darauf hingewiesen, daß, wenn man bei zwei Stimmgabeltönen Kombinationstöne erhalte, diese sich am Trommelfelle bilden müßten, welches der Periode der Kombinationstöne entsprechende Schwingungen vollführe. Das ergibt sich in der Tat aus den Beobachtungen Preyers mit aller Sicherheit. Preyer fand zunächst, daß ein junger Mann, der an beiden Ohren kein Trommelfell hatte, der aber sämtliche Töne von  $c_{-1}$  bis  $a_8$  sicher erkannte, keine Kombinationstöne hörte. Schwebungen konnte er wahrnehmen, so lange sie nicht zu zahlreich waren, so lange also wohl die sie erzeugenden Töne nicht zu weit auseinander lagen. Weitere Beobachtungen machte Preyer an solchen, welche größere oder kleinere Defekte an dem Trommelfell des einen Ohres hatten, während das andere Ohr gesund war. Es ergab sich für alle Defekte, bei denen die Luft von der Mundhöhle aus durch das Ohr hindurchströmen konnte, daß bei Verschuß des gesunden Ohres keine Kombinationstöne gehört wurden, das gesunde Ohr nahm jedesmal den ersten Differenzton wahr. Dabei handelt es sich, wie Preyer ausdrücklich hervorhebt, um ganz reine Fälle, wobei die beiden primären Töne auch durch das Ohr mit defektem Trommelfell deutlich gehört wurden.

Als in die Ohren derjenigen, welche mit perforiertem Trommelfell den Differenzton nicht hören konnten, einige Tropfen Wasser geträufelt wurden.

1) Quincke, Poggend. Ann. 128. p. 186. 1866.

2) König, Poggend. Ann. 157. p. 177. 1876; Wiedem. Ann. 39. p. 395. 1889.

3) Voigt, Wiedem. Ann. 40. p. 652. 1889.

4) Preyer, Wiedem. Ann. 38. p. 131. 1888.

konnten die betreffenden den Kombinationston hören. Es genügte also der Ersatz des fehlenden Trommelfellstückes durch eine dünne Wasserscheibe, um das Zustandekommen des Differenztones zu ermöglichen.

Dadurch ist es also erwiesen, daß die Kombinationstöne nur wahrgenommen werden, wenn ihre Schwingungen außerhalb des Nervenapparates des Ohres existieren, daß das Ohr aus den Schwebungen der einzelnen Töne die Kombinationstöne nicht bildet.

Helmholtz<sup>1)</sup> hat deshalb eine neue Theorie der Kombinationstöne gegeben, indem er annimmt, daß bei dem Zusammenwirken der Schallwellen das einfache Interferenzgesetz keine Gültigkeit mehr hat. Das einfache Interferenzgesetz sprachen wir dahin aus (§ 130), daß bei dem Zusammentreffen mehrerer Schwingungen die resultierende Bewegung einfach gleich der Summe der Teilbewegungen sei. Diesem Gesetze liegt aber die Voraussetzung zu Grunde, daß auch für die resultierende Bewegung der Satz seine Gültigkeit bewahre, daß in jedem Momente die Kraft, mit welcher das schwingende Teilchen gegen die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird, dem Abstände des Teilchens von der Gleichgewichtslage proportional ist, daß also die Gleichung auch hier besteht

$$\varphi = -ky,$$

wenn  $y$  den Abstand des Teilchens von der Gleichgewichtslage bedeutet. Dieser Satz gilt aber nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Amplituden. Werden die Amplituden der Schwingungen groß, so dürfen wir diese Voraussetzung nicht mehr machen, dann hängt der Wert von  $\varphi$  nicht nur von der ersten, sondern auch von höhern Potenzen von  $y$  ab. Helmholtz nimmt nun an, daß bei dem Zusammenwirken zweier Töne die Amplituden der Schwingungen, sei es der Luft, sei es nur des Trommelfells, eine solche Größe erhalten, daß auch die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einfluß auf die bewegenden Kräfte erhalten, und weist nach, daß dann neue Systeme einfacher Schwingungen entstehen müssen, deren Schwingungsdauer derjenigen der Kombinationstöne, und zwar sowohl der Differenztöne als der Summationstöne entspricht.

Bezeichnen wir die Masse eines beweglichen Punktes mit  $m$ , so wird die Kraft, wenn er sich im Abstände  $y$  von der Gleichgewichtslage befindet, die ihn gegen dieselbe zurückzieht, durch

$$-m\varphi = ay + by^2$$

dargestellt; wirken gleichzeitig zwei schwingende Bewegungen auf den Punkt ein, welche durch die Gleichungen gegeben sind

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} = \alpha \sin(pt)$$

$$y' = \beta \sin 2\pi \left( \frac{t}{T_1} + \tau \right) = \beta \sin(qt + c),$$

so sind die Kräfte, welche infolgedessen auf den betrachteten Punkt zur Zeit  $t$  wirken, nach § 128

1. Helmholtz, Poggend Ann 99. p. 532. 1856.

$$-mp^2\alpha \sin(pt) - mq^2\beta \sin(qt + c);$$

wir erhalten demnach für die den Punkt zur Zeit  $t$  gegen die Gleichgewichtslage treibende Kraft, wenn wir seinen Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit  $t$  mit  $y$  bezeichnen,

$$-m \frac{d^2y}{dt^2} = ay + by^2 + f \sin(pt) + g \sin(qt + c),$$

wenn wir wie früher für  $\varphi = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$  einsetzen und die Koeffizienten der beiden letzten Glieder mit  $f$  und  $g$  bezeichnen.

Die Integralrechnung leitet hieraus folgende Beziehung zwischen  $y$  und  $t$  ab:

$$y = A \sin \left( t \sqrt{\frac{a}{m}} + h \right) + u \sin(pt) + v \sin(qt + c) + w \cos(2pt) \\ + i \cos 2(qt + c) + k \cos[(p - q)t - c] + l \cos[(p + q)t + c] \dots$$

und jedes dieser Glieder gibt für sich eine eigene schwingende Bewegung, deren Amplituden  $A, u, v, w, i, k, l$  in bestimmter Weise von den Größen  $a, b, f, g, p, q$  abhängig sind. Das erste Glied gibt diejenige Bewegung, welche der Punkt annimmt, wenn er einmal aus der Gleichgewichtslage gebracht sich selbst überlassen wird; seine Schwingungsdauer ist gegeben (§ 126) durch

$$\sqrt{\frac{a}{m}} = \frac{2\pi}{T}; \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{m}}.$$

das zweite und dritte Glied die ursprüngliche Bewegung, das vierte und fünfte Bewegungen von doppelter Schnelligkeit, also die Oktaven der ursprünglichen Töne, das sechste den Differenzton und das siebente den Summationston. Denn die Schwingungszahl des vorletzten Gliedes ist, da

$$p - q = 2\pi \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) = 2\pi(N - N_1),$$

gleich der Differenz der Schwingungen der ursprünglichen Töne. Ebenso ist die Schwingungszahl des letzten Gliedes gleich  $N + N_1$ .

Außer den hingeschriebenen Gliedern liefert die ursprüngliche Gleichung noch weitere, deren Schwingungszahlen höheren harmonischen Tönen und dem zweiten, dritten usw. Kombinationstone entsprechen. Es genüge indes, soweit die Resultate des Helmholtzschen Rechnung angedeutet zu haben, deren Entwicklung die uns hier gestatteten mathematischen Hilfsmittel weit überschreiten würde.

Die Theorie von Helmholtz erklärt auch unmittelbar, weshalb die Kombinationstöne bei der Sirene so stark werden, da dort, wenn die Luft gleichzeitig durch zwei Löcherreihen entweicht, die Schwingungsamplitude wegen des Herausstürzens einer großen Luftmasse ins Freie eine sehr große werden muß. Werden die Töne anders, etwa durch Stimmgabeln erzeugt, so bilden sich diese Schwingungen erst am Trommelfell, in welchem sich dann Schwingungen finden, welche der Periode der Kombinationstöne entsprechen.

## § 184.

**Ursachen der Konsonanz und Dissonanz.** In § 159 haben wir das aus der Erfahrung abgeleitete Gesetz mitgeteilt, daß in der Musik die Intervalle, welche durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben sind, konsonierend seien, daß zwei von diesen Tönen gleichzeitig angegeben auf das Ohr einen wohltuenden Eindruck machen, während andere Töne, wie 8, 9 oder 15, 16 oder 1 und  $\frac{15}{8}$  usf. zusammen angegeben dissonant sind. Über den Grund der Konsonanz gerade jener Intervalle und der Dissonanz der übrigen konnten wir damals keine andere Angabe machen. Erst die Theorie von Helmholtz über die musikalischen Klänge in Verbindung mit den in den beiden letzten Paragraphen gemachten Erfahrungen über die Schwebungen und Kombinationstöne macht es möglich zu erkennen, weshalb jene einfachen Intervalle Konsonanzen liefern, während die übrigen Intervalle dissonant sind.<sup>1)</sup>

Die Grundlage der Helmholtzschen Theorie der Konsonanz und Dissonanz ist der Satz, daß eine Klangmasse nur dann auf unser Ohr einen angenehmen Eindruck machen kann, wenn sie gleichmäßig abfließt, wenn die Töne nebeneinander bestehen ohne sich zu stören; daß dagegen eine Klangmasse einen unangenehmen Eindruck auf das Ohr macht, daß sie dissonant ist, wenn dieselbe aus einzelnen Stößen besteht, wenn es ein durch Schwebungen intermittierender Klang ist. Die Schwebungen können dabei so rasch erfolgen, daß wir uns der einzelnen nicht deutlich bewußt werden, daß wir sie nicht zählen können. Helmholtz vergleicht, um diesen Satz zu begründen, sehr treffend die Tonempfindungen mit den Lichtempfindungen, die ganz Ähnliches bieten. Keine Beleuchtung macht auf das Auge einen unangenehmen Eindruck als eine flackernde, bei welcher in rascher Folge der Lichtreiz stärker und schwächer wird. Ein knarrender, intermittierender Ton ist nun für die Gehörnerven ganz dasselbe, was ein flackerndes Licht für die Gesichtsnerven ist; es wird dadurch eine viel intensivere und unangenehmere Reizung des Organes bewirkt wie durch einen gleichmäßigen dauernden Ton.

Früher glaubte man, daß man die Schwebungen als solche nur vernahme, wenn sie langsam erfolgen, daß sie aber bei rascher Folge sich zu dem ersten Differenzton zusammensetzen; die Unrichtigkeit dieser Ansicht haben wir vorhin nachgewiesen; Helmholtz gibt aber außerdem eine Beobachtungsmethode an, durch die man sich überzeugen kann, daß man die Schwebungen noch deutlich wahrnimmt, wenn sie die Zahl 30 übersteigen. Man braucht nur mit zwei auf  $a_1$  abgestimmten Gabeln oder gedeckten Orgelpfeifen durch Verstimmung der einen Schwebungen hervorzubringen, und die Verstimmung ganz allmählich zu verstärken. Anfänglich, wenn in der Sekunde nur 4 bis 6 Schwebungen entstehen, kann man sie einzeln auffassen und zählen; wird die Verstimmung größer und größer, etwa bis zu einem Halbton, wo die Zahl der Schwebungen etwa 30 beträgt, so gelingt das nicht mehr. Aber wenn man so eine allmähliche Steigerung der Zahl der Stöße hervorbringt, so erkennt man deutlich, daß der sinnliche Eindruck derjenige einzelner Stöße ist, und erkennt weiter auch, daß eben

1) Helmholtz, Tonempfindungen. 1. Ausgabe. p. 273 ff. 1863

dieser intermittierende Eindruck es ist, welcher das Unangenehme der Dissonanz bewirkt.

Wenn man die Zahl der Stöße durch Erweiterung des Intervalls vergrößert, durch Übergang zu einem ganzen Ton auf 60 oder zu einer kleinen Terz  $a_1c_2$  auf 88 bringt, so wird der Eindruck des intermittierenden Klanges immer schwächer, und bei der kleinen Terz ist kaum eine Spur desselben mehr wahrzunehmen, sie macht schon den Eindruck eines gleichmäßig abfließenden Tones. Man könnte deshalb glauben, daß wie bei dem Auge ein sich rasch wiederholendes Aufblitzen eines Lichtes den Eindruck kontinuierlicher Beleuchtung macht, so auch bei dem Ohre ein etwa 90mal in der Sekunde wiederkehrender Tonstoß den Eindruck eines kontinuierlichen Tones mache. Daß indes dem nicht so ist, davon kann man sich leicht überzeugen, indem man die Zahl der Stöße anstatt durch Erweiterung des Intervalls durch Verlegung des engeren Intervalls in höhere Gegenden der Skala vergrößert. Der Halbton  $h_1c_2$  gibt 33 Schwebungen, die deutlich als intermittierende Stöße erkannt werden, gibt man unmittelbar nachher  $h_2c_3$  mit 66,  $h_3c_4$  mit 132 Stößen an, so erkennt man, daß der sinnliche Eindruck wesentlich derselbe ist. Die Wahrnehmbarkeit der Schwebungen hängt also nicht allein von ihrer Anzahl ab, sondern auch davon, daß die sie erzeugenden Intervalle hinreichend nahe liegen. Den Grund für den letztern Umstand sieht Helmholtz darin, daß Schwebungen im Ohre nur dann bestehen können, wenn die Töne der Skala nahe genug liegen, um dieselben Nervenanhängsel, dieselben Cortischen Fasern in Mitschwingungen zu versetzen. Wenn sich die beiden angegebenen Töne zu weit von einander entfernen, werden die Schwingungen der von beiden gemeinsam erregten Fasern zu schwach, als daß man deren Schwebungen noch wahrnehmen könnte.

Die Wahrnehmbarkeit der Stöße hängt also von der Zahl derselben und der Weite des Intervalls ab; ist das Intervall enge, so nimmt man eine große Zahl wahr, ist es weiter, so kommt nur eine weit geringere Zahl zur Empfindung, und bei weiten Intervallen wie Quart oder Quint kommen sie gar nicht mehr zu Wahrnehmung.

Aus diesen Sätzen von Helmholtz ergibt sich zunächst, daß alle engen Intervalle, große und kleine Sekunden innerhalb des in der Musik gebrauchten Tonsystems dissonierend sein müssen, sie erklären, weshalb die Dissonanzen in den mittlern Tonlagen am schärfsten sind, und weshalb in den tiefern Tonlagen, in der großen und tiefern Hälfte der kleinen Oktave die kleinen Terzen schon merklich rauh klingen, da sie in diesen zwischen 15 und 30 Schwebungen geben.

Aus der Helmholtzschen Theorie des Klanges ergibt sich dann aber ebenso, weshalb die große und kleine Septime und die verstimmt konsonierenden Intervalle der musikalischen Klänge dissonant sind. Wie wir nämlich sahen, sind die Klänge nicht einfache Töne, sondern Akkorde, die aus dem Grundton und seinen harmonischen Obertönen aufgebaut sind. Gerade so nun wie die einfachen Töne Schwebungen hervorbringen, so tun es auch die Obertöne der Klänge miteinander und den Grundtönen und außerdem können auch die Kombinationstöne Schwebungen veranlassen. Wenn deshalb zwei Klänge, welche, wie fast alle in der Musik gebrauchten Klänge, deutliche Obertöne haben, unter diesen solche besitzen, welche hin-



reichend nahe zusammenliegen, so werden diese Schwebungen liefern und deshalb die beiden Klänge ein dissonantes Intervall bilden.

Man erkennt darnach sofort, daß die kleine oder große Septime eine Dissonanz sein muß, da der erste Oberton des Grundtones mit den Septimen das Intervall eines Halbtones oder eines ganzen Tones bildet. Die große Septime ist  $1 : \frac{15}{8}$ , der erste Oberton des Grundtones ist 2 oder  $\frac{16}{8}$ , man sieht, das Verhältnis dieses zur Septime ist  $\frac{16}{15}$ , ein Halbton. Dasselbe gilt auch für die große und kleine None.

Dem entgegen erkennt man sofort, daß die Oktave eine vollkommene Konsonanz sein muß, da die Obertöne der Oktave auch alle Obertöne des Grundtones sind, und deshalb keine andern Schwebungen auftreten können wie in dem Klange des Grundtones selbst, Schwebungen, die erst sehr hohen Obertönen entsprechen, welche deshalb so schwach sind, daß sie nicht mehr gehört werden.

Die auf die Oktave folgende ebenfalls noch als vollkommen zu bezeichnende Konsonanz ist die Quint, deren Schwingungsverhältnis 2:3 ist. Die in diesen beiden Klängen enthaltenen Obertöne sind

Grundton	2,	4,	6,	8,	10,	12
Quinte	3	6	9	12		

Man sieht, der erste Oberton der Quint fällt mit dem zweiten der Oktave zusammen und der dritte Oberton der Quint steht zu dem vierten und fünften Oberton der Oktave im Verhältnis eines ganzen Tones.

Eben weil es die tiefsten Obertöne sind, welche in diesen Intervallen zusammenfallen, in der Oktave der Grundton des zweiten Klanges mit dem ersten Oberton des ersten, in der Quint der erste Oberton des zweiten mit dem zweiten Obertone des ersten, in der Duodezime 1:3 der Grundton des zweiten mit dem zweiten Obertone des ersten, deshalb sind die Konsonanzen scharf als solche charakterisiert, denn die geringste Unreinheit des einen der Töne bringt sofort Schwebungen hervor, da gleichzeitig mit dem Grundtone die Obertöne verstimmt werden. Deshalb hört man die Unreinheit der Stimmung bei keinem andern Intervall so deutlich als bei der Oktave und bei den andern beiden eben genannten Intervallen. Da man nun dies gleichzeitig als das Charakteristische der Konsonanzen ansehen kann, so kann man gleichzeitig ein Intervall als um so konsonanter bezeichnen, je näher die zusammenfallenden Obertöne bei dem Grundtone der Klänge liegen.

Nach diesem Merkmal ist die Reihe der Konsonanzen weiter, Quarte, deren dritter Oberton mit dem vierten des Grundtones, große Sext, deren dritter Oberton mit dem fünften des Grundtones zusammenfällt. Bei beiden Intervallen wird der zweite Oberton des zweiten Klanges von dem dritten des Grundtones gestört.

Die letzten in der Reihe der konsonanten Intervalle sind große und kleine Terz, bei denen der vierte des zweiten mit dem fünften Oberton zusammenfällt bzw. bei der kleinen Terz der sechste mit dem fünften. Bei der großen Terz steht dagegen der dritte mit dem vierten Oberton des Grundtones im Verhältnis  $\frac{16}{13}$ , also einer scharfen Dissonanz. Bei der kleinen Terz stören sich schon die Grundklänge, dann der dritte der Terz mit dem vierten des Grundtones, die im Verhältnis  $\frac{10}{9}$  stehen und der vierte der Terz mit dem fünften des Grundtones, die im Verhältnis  $\frac{25}{24}$  stehen.



Der Raum gestattet uns nicht, hier weiter auf die interessanten Ausführungen von Helmholtz einzugehen, welche die eben in kurzem Umriss angedeutete Theorie auch auf die Klassifikation der Konsonanzen in den verschiedenen Klangfarben und die der Akkorde nach ihrem Wohlklange liefern. Nur sei schließlich die Bemerkung hinzugefügt, daß Helmholtz außer den Schwebungen der Obertöne auch jene der Kombinationstöne mit in Betracht zieht, welche bei einfachen Tönen das allein Bedingende der Dissonanz weiterer Intervalle bilden. Die Schwebungen der Kombinationstöne treten aber nie so stark hervor als jene der Obertöne, und deshalb sind die Intervalle einfacher Töne auch durchaus nicht so scharf charakterisiert als die zusammengesetzten Klänge.

---

# Sachregister.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

## A.

Absorptiometer 636.  
 Absorption von Gasen in festen Körpern 628.  
     von Gasen in Flüssigkeiten 634.  
 — von Gasgemischen 641.  
 Absorptionsgesetz, Henrysches 634.  
 Absorptionskoeffizient der Gase 635.  
 Achse, freie 160  
 Adhäsion fester Körper 309.  
 — scheinbare 310.  
 — flüssiger Körper an festen 376.  
 Adsorption der Gase 630.  
 Äquivalent, endosmotisches 480.  
 Aggregatzustände 213.  
 Akkorde, einfache 872, mehrfache 873,  
     konsonierende, dissonierende 872.  
 Alkoholometer 374.  
 Allotropie 206.  
 Amplitude der Pendelbewegung 134. Kor-  
     rektur wegen derselben 143.  
 — schwingender Bewegungen 716.  
 Aneroidbarometer 538.  
 Antrieb der Kraft 79.  
 Anziehung, allgemeine, Kopplers Gesetze  
     165.  
     allgemeine Identität der Schwere  
     mit derselben 171  
 — der Masseneinheiten 193.  
 — einer Kugel auf äußere Massen 173.  
 Anziehungsgesetz, Entwicklung dessel-  
     ben 167.  
 — Fernwirkung 170.  
 Anziehungskonstante 193.  
 Aräometer, Nicholsonsches 366.  
 — nach Beaumé 375.  
 Arbeit der Kraft 81.  
     Prinzip der Erhaltung derselben 82.  
 Archimedisches Prinzip 360.  
 Atemritze 950.  
 Atmosphäre 524  
 — Zusammensetzung derselben 524.  
 — Archimedisches Prinzip in dersel-  
     ben 525.

Atmosphäre, Druck einer 542.  
 Atom, Definition 208.  
 Atomgewichte, Tabelle 212  
 Atomistische Theorie 203  
 Auflösung 466.  
 Auftrieb bei Flüssigkeiten 350  
 Ausbreitung von Flüssigkeiten auf festen  
     Körpern und Flüssigkeiten 449  
 Ausfluß der Flüssigkeiten durch Öffnung  
     in dünner Wand 489.  
 — durch kapillare Röhren 505.  
     der Gase 641.  
 — der Gase durch kapillare Röhren  
     655  
 Ausflußmenge der Flüssigkeiten 496.

## B.

Barometer 528.  
     Schwankung desselben 539.  
 Bäuche an Wasserstrahlen 519  
 Beschleunigung 49  
     beim freien Fall 58 144 151 153.  
 Bewegung 47.  
     gleichförmige 47.  
     ungleichförmige 48  
     gleichmäßig beschleunigte 49 62.  
     63. 66  
 — durch konstante Kräfte 55  
     durch inkonstante Kräfte 52  
 — geworfener Körper 67  
 — eines Körpers, allgemeine Gleichun-  
     gen 114, Gleichungen von Lagrange  
     116  
     drehende 84.  
     infolge von Kapillarwirkung 454  
     schwingende 715  
     Gesetze derselben 716.  
 — Einfluß derselben auf die Tonhöhe  
     1014.  
 Bewegungsgröße 79  
 Biegeelastizität 262  
 Biegefestigkeit 295.  
 Biegepfahl 263.  
 — winkel 265.

Bifilare Aufhängung 659.  
 Blasinstrumente 946.  
 Blechblasinstrumente 948.  
 Bodendruck bei Flüssigkeiten 348.  
 Boyle-Mariottesches Gesetz 542.  
 — Abweichung der Gase von demselben bei sehr kleinem Druck 556, bei hohem Druck 563.  
 — Ableitung aus der kinetischen Gastheorie 581.  
 Brechung der Wellen 772.

## C.

Chemie 1.  
 Chladnis Klangfiguren 805.  
 Contractio venae 496.

## D.

Dekrement, logarithmisches 317. 721.  
 Dezimeter 11.  
 Dichtigkeit 132.  
 — der Erde 182. 186. 187. 188. 190.  
 — fester Körper 365.  
 — flüssiger Körper 368.  
 Differentiation 31, allgemeine Sätze 32.  
 — zusammengesetzter Funktionen 36.  
 — von Funktionen mit mehreren Veränderlichen 37.  
 Differentiale der wichtigsten Funktionen 33.  
 Differentialquotient, zweiter 39.  
 Differenztöne 1028.  
 Diffusion der Flüssigkeiten 466.  
 — der Gase 669.  
 — der Gase, Ableitung derselben aus der kinetischen Gastheorie 678.  
 — der Gase durch poröse Diaphragmen 694.  
 — der Flüssigkeiten, kinetische Theorie 708.  
 Diffusionsgeschwindigkeit 470.  
 Diffusionskoeffizient der Flüssigkeiten 471.  
 — der Gase 685.  
 Dimension der abgeleiteten Maße 76.  
 Dissonanz 872, Theorie derselben 1033.  
 Dopplersches Prinzip 1014.  
 Drehungen, Zusammensetzung verschiedenen gerichteter 90.  
 Drehungsmoment 85.  
 Dreiklang, Durdreiklang, Molldreiklang 874.  
 Druck, hydrostatischer 347.  
 — hydraulischer, ausströmender Flüssigkeiten 494.  
 — hydraulischer, ausströmender Gase 648.  
 — osmotischer 482.

## E.

Ebbe 193.  
 Ebene, schiefe 63.  
 Echo 996, mehrfaches 996.  
 Einfallsebene 772.  
 Einfallslot 772.  
 Einfallswinkel 772.  
 Eisenvioline 911.  
 Elastizität fester Körper 215.  
 — durch Zug 218.  
 — durch Torsion 251.  
 — durch Biegung 262.  
 — der Flüssigkeiten 330.  
 Elastizitätsgrenze 289.  
 Elastizitätskoeffizient 221.  
 — Abhängigkeit von der Temperatur 271.  
 — seine Dimensionen 221.  
 — einige Zahlenangaben nach Wertheim 222.  
 Elastizitätsmodul 221.  
 Elastische Nachwirkung 277.  
 Endosmose 478.  
 Erde, Dichtigkeit derselben 182.  
 Erhaltung der Arbeit, Prinzip derselben 82.  
 — der Rotationsebene 159.  
 — der Pendelebene 162.

## F.

Fall der Körper 58.  
 — im luftleeren Raum 614.  
 Fallmaschine Atwoods 52.  
 Fernwirkung 169.  
 Festigkeit 293, beim Zug 294, bei der Biegung 295, Torsion 296.  
 — rückwirkende 298.  
 Flächenmaße 11.  
 Flammen, empfindliche 944. 945.  
 Flammenkapseln, Königs 899.  
 Flüssigkeit 215.  
 Flüssigkeiten, Konstitution derselben 325.  
 — gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes 326.  
 — Kompressibilität 329.  
 Flüssigkeitswellen 845, Einfluß des Oberflächendruckes auf dieselben 854.  
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 963, in Röhren 968.  
 — des Schalles, indirekte Messung 976.  
 — — in festen Körpern 987.  
 — — in flüssigen Körpern 991.  
 Fußmaße 11.

## G.

*g*-Werte von Arago und Gauß 58.  
*g*, Bestimmung desselben 143, Methode von Borda 144, Methode von Arago und Biot 144.

9. Werte desselben nach Borda und Biot für Paris; nach Bessel für Königsberg 151.

Bestimmung desselben mittels des Reversionspendels 152.

— Verschiedenheit in verschiedenen Breiten 180.

Gase, ihre allgemeine Beschaffenheit 522.

— mit den Flüssigkeiten gemeinsame Eigenschaften 528.

— Schwere derselben 524.

— Boyle-Mariottesches Gesetz 542.

— kinetische Theorie derselben 568

— ihre Verflüssigung 628.

— Ausströmen derselben 641.

— Ausströmungsmenge 645.

Reibungskoeffizient 654; Messung desselben mit Hilfe des Durchflusses durch kapillare Röhren 655.

Reibungskoeffizient, seine Bestimmung nach der Methode von Coulomb und Maxwell 657.

— Abhängigkeit der Reibungskoeffizienten vom Drucke 662.

— Reibungskoeffizienten, Abhängigkeit von der Temperatur 664, Korrektur von Sutherland 667.

Gasmoleküle, mittlere Weglänge 570.

— ihre Wirkungsphäre 570.

— ihre Geschwindigkeit 588.

— absolute Werte der mittleren Weglängen 689.

— Größe und Zahl derselben; nach van der Waals 691. 692.

— aus der Dichtigkeit von Kohlensäure 698

Gefäßbarometer 528.

— Korrektur wegen der Kapillarität 532

Geräusch 864.

Geschwindigkeit 47.

Geschwindigkeiten, Prinzip der virtuellen 89.

Gesetze, physikalische 5, Ableitung aus Messungen 9.

Gewicht 12

— spezifisches 132, fester Körper, Bestimmung desselben 364, flüssiger Körper, Bestimmung desselben 368, Berücksichtigung der verdrängten Luft 527.

Giesbeckenknorpel 949.

Gleichgewicht eines Punktes, auf den beliebige Kräfte wirken 64.

— eines Systems mit beliebig vielen Kräften 98.

— indifferentes, labiles, stabiles 103.

— von Flüssigkeiten 357.

— schwimmender Körper 363.

Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten 441.

Glocken 811.

Grad (Winkel) 13.

Gramm 12.

## H.

Hahn, Babinetscher 609.

— Graßmannscher 611.

Harmonika, chemische 944.

Härte 201.

Hauchbilder 632.

Hebel 86.

Hebelarm 88.

Heberbarometer 538.

Höhenmessungen, barometrische 589.

Hohlmaße 11.

Hörbarkeit von Tönen, Grenze derselben 890. 891.

Holzblasinstrumente 946.

Huyghensches Prinzip 761.

Hydraulische Presse 854.

## I.

Integration 41.

Intensität der Partialtöne von Saiten 908 des Schalles 866.

Interferenz 734.

— von Wellen, die sich nach entgegengesetzter Richtung fortpflanzen; stehende Wellen 739

— verschieden gerichteter Schwingungen; elliptischer Schwingungen 742.

— longitudinaler und transversaler Schwingungen 749.

— von Schwingungen verschiedener Wellenlängen; gleichgerichteter Schwingungen 750, verschieden gerichteter 755, des Schalles 1017.

— von Wellen ungleicher Länge; Stöße 1022.

Intervalle, musikalische 871.

Isotrop 217.

## K.

Kaleidophon 824.

Kapillarröhren; kapillare Oberflächen, Krümmung derselben 391.

Kapillaritätskonstanten, Methoden ihrer Bestimmung 414, dynamische 430. 520. 856.

Zahlenwerte 431.

Einfluß der Temperatur 431.

Kathetometer 24.

Kehlkopf 949.

Kehlkopfmuskeln 951

Kilogramm 12.

Kinetische Theorie der Gase 568, der Flüssigkeiten 702.

Klang 864

— Verschiedenheit, Theorie von Ohm 865. 894, von Helmholtz 865. 894, von Seebeck 865. 894.

Klang, Analyse desselben 893.  
 — Zusammensetzung desselben aus einfachen Tönen 902.  
 Klänge, longitudinal schwingender Stäbe 905.  
 — der Saiteninstrumente 908.  
 — geschlagener Saiten 908  
 — gestrichener Saiten; Geigenklänge 909.  
 — des Klaviers 909.  
 — transversal schwingender Stäbe 910.  
 — von Stimmgabeln 911.  
 — von Platten 912.  
 — gedeckter Pfeifen 914.  
 — offener Pfeifen 925.  
 — von Zungenpfeifen 934.  
 — Verschiedenheit derselben bei den Holzblas- und Blechblasinstrumenten 949.  
 Klangfiguren, Chladnische 809. 811.  
 Knoten in Wasserstrahlen 519.  
 Knotenlinien schwingender Platten 808.  
 Knotenpunkte in schwingenden Punktreihen 742.  
 — in schwingenden Stäben 782.  
 — in schwingenden Saiten 793.  
 Kohäsion 215, bei Flüssigkeiten 376.  
 — spezifische 435.  
 Körper, feste 215, flüssige 215, gasförmige 215.  
 — schwimmende 368.  
 Kombinationstöne 1028, objektive Existenz derselben 1030.  
 Kommunizierende Röhren 353.  
 Komparator 13.  
 Kompressibilität der Flüssigkeiten 329.  
 Kompressionskoeffizient, kubischer 241.  
 — bei Flüssigkeiten 330.  
 Kompressionspumpe 624.  
 Kondensation der Gase 627.  
 Konsonanten, Bildung derselben 961.  
 Konsonanz und Dissonanz, ihre Ursachen 1033.  
 Kontraktion von Flüssigkeitsgemischen 440.  
 Kraft 50, ihre Richtung 51, ihre Größe 51.  
 — ihr Maß 71.  
 — lebendige und Arbeit 80.  
 Kräftepaar 97.  
 Kräfteparallelogramm 61.  
 Kraftwirkung, Fundamentalgesetz 59.

### L.

Labialpfeifen 913, gedeckte 914, offene 925.  
 Lamellen, flüssige 383.  
 Längsschwingungen, siehe longitudinale.  
 Libelle 23.  
 Liter 12.  
 Lot 12.

Lösung von festen Körpern in Flüssigkeiten 466.  
 Luftballon 527.  
 Luftblasen, unter horizontaler Ebene 408.  
 Luftdruck 524.  
 — Schwankung und Größe desselben 539.  
 — Abnahme mit der Höhe 589.  
 Luftpumpe 604, Hahnluftpumpe 605. 611.  
 Ventilluftpumpe 606.  
 — Grad der Verdünnung 608.  
 — Babinets Hahn 609.  
 — Graßmannscher Hahn 611.  
 — von Deleuil 618.  
 — Geryk-Ölluftpumpe 613.  
 Luftwiderstand 700.

### M.

Manometer 594, von Gally-Cazalat 355, von Regnault 597, von MacLeod 620.  
 Mariottesches Gesetz 542.  
 Masse, ihr Maß 71.  
 Maße, die in der Physik gebräuchlichen 11.  
 — Dimensionen der abgeleiteten 76.  
 Maßsystem, absolutes 73.  
 Materie 1.  
 — ihre Beschaffenheit 199.  
 — ihre Teilbarkeit 199.  
 — Gesetze ihrer Zusammensetzung 200.  
 — Gesetze der chemischen Zersetzung 205.  
 — isomere Körper 205.  
 — allotrope Modifikation 206.  
 — Definition des Atoms 208.  
 Metazentrum 364.  
 Meter 11.  
 Mikrometerschraube 15.  
 Milligramm 12.  
 Millimeter 11.  
 Minute 13.  
 Mischung von Flüssigkeiten 466.  
 Mischungsgewichte 202.  
 Mittelpunkt paralleler Kräfte 94.  
 Molekül 203.  
 Molekularwirkungen in flüssigen und zwischen flüssigen und festen Körpern 376.  
 — zwischen festen und gasförmigen Körpern 628.  
 — zwischen flüssigen und gasförmigen Körpern 634.  
 Molltreiklang 874.  
 Momente, statische 85.  
 Monochord 870.  
 Mosersche Bilder 632.

### N.

Nachwirkung, elastische 277.  
 Naturerscheinung 1.

Naturwissenschaft 1.  
 Neigebarmeter Lord Rayleighs 561.  
 Niederschlagsmembranen 482.  
 Niveauänderungen in kapillaren Röhren 393.  
 Niveaulächen in Flüssigkeiten 347.  
 Nonius 21.  
 Normaldruck in der Oberfläche von Flüssigkeiten 377.  
 Normalstimmgabeln 889.

## O.

Oberflächendruck 380.  
 Oberflächenspannung 379  
 - an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten 440.  
 Ohr 1008; äußerer Gehörgang 1008, Paukenhöhle 1008, Ohrtrumpete 1008, Tuba eustachii 1008, Trommelfell 1008.  
 - inneres 1008, Gehörknöchelchen 1009, Hammer, Amboss, Steigbügel 1009, Labyrinth 1009, Mechanismus des Hörens 1010.  
 - Empfindlichkeit desselben gegen kleine Tonunterschiede 1011.  
 Oktave 872.  
 Orgelpfeifen 913, gedeckte 914, offene 926.  
 Oszillationen siehe Schwingungen

## P.

Paradoxon, hydrostatisches von Pascal 348.  
 Parallelogramm der Kräfte 61.  
 - der Drehungen 90.  
 Pauke 912.  
 Pendel 133.  
 - Ableitung der Schwingungsdauer 135.  
 - mathematisches und physisches 139.  
 - Korrektur wegen d. Amplitude 143.  
 Pendelgesetze, experimentelle Prüfung 140.  
 - allgemeine Anwendung 156.  
 Pendeluhren 155.  
 Pendelversuch Foucaults 162.  
 Pfeifentöne 920, Abweichung von der Theorie 920.  
 - Einfluß der Rohrweite 920.  
 - mit weichen Wänden 930.  
 Pfund 12.  
 Phase der Schwingung 716.  
 Phonograph 1004.  
 Physik 1, ihre Aufgabe 2, ihre Methode 2.  
 Piezometer 331.  
 Plastizität und Dehnbarkeit fester Körper 291.  
 Porosität 200.  
 Presse, hydraulische von Brahma 354.  
 Prim 872  
 Prinzip der Erhaltung der Arbeit 82.

WELSEN, Physik 1 6 Aufl.

Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion 81.  
 - der virtuellen Geschwindigkeiten 88.  
 Archimedisches 360, bei Gasen 525.  
 - Huyghensches der Fortpflanzung der Wellen 761.  
 Processus vocalis 950.  
 Punktsystem, homogenes 758, isotropes 759.  
 - Schwingung desselben 758.  
 Pyknometer 367.

## Q.

Quart 872.  
 Quartsextakkord 874.  
 Quecksilberluftpumpe von Geißler 616, von Töpler 617, von Sprengel 620, von Kahlbaum 621, von Gaede 623.  
 - Grenzen der mit ihr erreichbaren Verdünnung 623  
 Querkontraktion 229, 232.  
 - Änderung mit der Temperatur 275.  
 Quint 872.

## R.

Randwinkel 391.  
 Raum, schädlicher bei Luftpumpen 609.  
 Reaktionsrad 351.  
 Reduktion der Wägungen auf den luftleeren Raum 526.  
 Reflexion der Wellen 766.  
 - des Schalles 995.  
 Refraktion siehe Brechung  
 Reibung fester Körper 311, gleitende 311, rollende 311.  
 - innere fester Körper 312.  
 - der Flüssigkeiten, äußere 499, innere 501.  
 - der Flüssigkeiten, Methode des Ausflusses durch kapillare Röhren 502.  
 Methode von Coulomb 504.  
 - der Gase 649, Theorie derselben 650  
 Reibungskoeffizient der Flüssigkeiten 501.  
 - Abhängigkeit von der Temperatur 514, der Gase 654, seine Bestimmung 655.  
 Reibungskonstante 501  
 Resonanz 1001.  
 Resonatoren 895, mit Flammenkapseln 896.  
 Reversionspendel 152  
 Ringknorpel 949  
 Röhren, kommunizierende 363.  
 Rotationsapparat von Bohnenberger 160, von Fessel 161.  
 Rotationssebene, Erhaltung derselben 159.

## S.

Sättigungskoeffizient 635.  
 Saitenschwingungen, transversale 786.



Schall, seine Entstehung durch Schwingungen 862, durch scheinbar kontinuierliche Bewegung 868.  
 — Qualität desselben 864, Geräusch 864.  
 — Ton oder Klang 864.  
 — Ausbreitung desselben in der Luft 968.  
 — Abnahme der Intensität mit der Entfernung der Schallquelle 968.  
 — Fortpflanzungsgeschwindigkeit desselben in der Luft 967.  
 — Reflexion 995.  
 — Brechung desselben 998.  
 — Interferenz 1017.  
 — Summationstöne 1029.  
 Schallgeschwindigkeit, indirekte Messung derselben 976, mit Orgelpfeifen 976, mit Kundtschen Staubfiguren 978.  
 — in festen Körpern 987.  
 — in räumlich ausgedehnten festen Körpern 990.  
 — in flüssigen Körpern 991.  
 Schildknorpel 949.  
 Schwere, Dasein und Richtung 52.  
 — Abnahme derselben mit der Höhe über dem Meeresniveau 176.  
 — über einer Hochebene 176.  
 Schwerpunkt 101.  
 Schwingende Bewegung eines Punktes 715.  
 Schwingungen, gedämpfte 720.  
 — von Punktreihen 722.  
 — eines räumlich ausgedehnten Systems von Punkten 758.  
 — fester Körper 776.  
 — von Stäben, longitudinale 778.  
 — Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben 778.  
 — longitudinale, begrenzter Stäbe, an beiden Enden freier 780, an beiden Enden fester 783, an einem Ende fester 785.  
 — transversale, der Saiten 786.  
 — gespannter Saiten 791.  
 — Einfluß der Steifigkeit 797.  
 — transversale, von Platten 805.  
 — drehende, von Stäben 814.  
 — zusammengesetzte 818.  
 — zusammengesetzte, gespannter Saiten 826. 906.  
 — Darstellung derselben 829.  
 — gestrichener Saiten 834.  
 — geschlagener Saiten 836.  
 — longitudinale in Flüssigkeiten; Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben 837. 840, in Gasen 841.  
 — drehende 912.  
 Schwingungsamplituden, Ableitung nach Fresnel 763.  
 Schwingungsknoten und Bäuche 518.

Schwingungszahlen longitudinal schwingender Stäbe 780. 906.  
 — transversal schwingender Stäbe 799.  
 — des Tones  $a$ , 889.  
 Seitendruck bei Flüssigkeiten 350.  
 Sekunde 18.  
 — akustische 872.  
 Sekundenpendel 181.  
 Septime 872.  
 Sext 872.  
 Sextakkorde 874.  
 Sirene 866.  
 Sphärometer 22.  
 Sprache, die menschliche 953.  
 Sprachrohr 997.  
 Stabilität 104.  
 Staubfiguren, akustische 812.  
 Steifigkeit, Einfluß derselben bei Schwingungen von Saiten 797.  
 Steighöhen, kapillare, in verschiedenen Räumen 397.  
 — in Röhren 398.  
 — zwischen Platten 400. 401.  
 — an vertikalen Wänden 402.  
 Stereometer 599.  
 Stimme, die menschliche 949.  
 Stimmbänder 950, falsche 950.  
 Stimmgabel 888.  
 — Schwingungszahl derselben bei verschiedenen Orchestern 888. 889.  
 Stimmgabeln, Änderung der Schwingungszahl mit der Temperatur 889.  
 Stimmritze 950.  
 Stoß der Körper, gerader 303.  
 — unelastischer 304, elastischer 305, schiefer 307.  
 — von Zylindern 309.  
 — und Widerstand der Luft 700.  
 Stöße bei Tönen 1022.  
 Strahl, Konstitution des Ausfließenden 515.  
 Streichinstrumente 906.  
 Strohfidel 911.  
 Stunde 18.

## T.

Teilbarkeit 199.  
 Teilmaschine 15.  
 Temperatur, musikalische 883.  
 — gleichschwebende 885.  
 — Kirnbergersche 885.  
 Terz 872.  
 Theodolith 29.  
 Ton 864.  
 — verschiedene Höhe desselben 864.  
 Tonbildung im Kehlkopf 951.  
 Töne, ihre absolute Schwingungszahl 837.  
 — gedeckter 914, offener Pfeifen 925.  
 — in teilweise gedeckten Pfeifen 927.  
 — in kubischen Pfeifen 928.  
 — durch Schwingungen von Flüssigkeitssäulen 931.

Töne der verschiedenen Stimmen 952.  
 Tonhöhe schwingender Saiten 907.  
 Änderung derselben durch relative Bewegung von Ohr und Tonquelle 1014.  
 Tonleiter 875, Entwicklung derselben 876 880.  
 Tonstärke 866.  
 Tonverhältnisse und Intervalle 871.  
 Toricellis Theorem 489.  
 Torsionselastizität 251.  
 Torsionswinkel 254.  
 Torsionsschwingungen 255.  
 Torsionskoeffizient, Beziehung zum Elastizitätskoeffizienten 259.  
 und Starrheit 260.  
 Torsionsfestigkeit 296.  
 Trägheit 51.  
 Trägheitsmomente 104.  
 eines Kreiszylinders 106.  
 einer Kugel 108.  
 allgemeiner Satz 109.  
 Tropfen auf horizontaler Ebene 406.

## U.

Unze 12.

## V.

Ventriculus morgagni 950.  
 Verdünnung durch die Luftpumpe 608.  
 Verzögerung 49.  
 Vibrationsmikroskop 832.  
 Vokale 953.  
 Volumenometer 599.  
 Volumeter 371.

## W.

Wage 123, Theorie derselben 125.  
 Prüfung derselben 129.  
 von Mohr 370.  
 Wägungen, Methode derselben 129.  
 Reduktion derselben auf den luftleeren Raum 526.  
 Wagebarometer 538.  
 Wasserwellen, Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben 848.  
 — ihre Entstehung 851.  
 — Durchkreuzung und Reflexion derselben 858.  
 Wegelänge, mittlere der Gasmoleküle 570.

Wegelänge der Gasmoleküle, absolute Werte derselben 688.  
 Wellen, Entstehung derselben 722.  
 stehende 739.  
 — Fortpflanzung in nicht homogenen Punktsystemen; Reflexion derselben 766.  
 Reflexion an dünnern Medien 768, an dichtern Medien 769.  
 Reflexion, Mittelpunkt der reflektierten Welle 771.  
 Brechung derselben 772.  
 longitudinale, in Flüssigkeiten und in Gasen 837.  
 stehende, in Flüssigkeitszylindern 843.  
 transversale, in Flüssigkeiten 846.  
 — Durchkreuzung und Reflexion 858.  
 Wellenbewegung 715, mathematische Darstellung 726.  
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit 734.  
 Zusammensetzung mehrerer; Interferenz 734.

Wellenrinne 846.  
 Wellensirene 904.  
 Widerstand der Luft 700.  
 Widerstandsgesetz der Luft von Newton 701.  
 Winkelgeschwindigkeit 64.  
 Wirbelringe von Helmholtz 209.  
 Wirkungssphäre der Molekularkräfte 457.  
 der Gasmoleküle 570.  
 Wurfbewegung 67.

## Z.

Zentimeter 11.  
 Zentripetalkraft 110.  
 Zentrifugalkraft 112.  
 Zugelastizität 218.  
 Zugfestigkeit 294.  
 Zungen, harte 934, weiche 941.  
 Zungenpfeifen 934, aufschlagende 934, durchschlagende 934.  
 Vergleich der Töne mit den Tönen der isoliert schwingenden Zunge 936.  
 — Änderung der Tonhöhe durch die Länge der Röhre 937.  
 — Töne durch Anblasen von außen 939.  
 Töne durch Anblasen von innen 939.

# Namenregister.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

## A.

*Abegg*, Diffusion 476.  
*Academia del cimento*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 330.  
*Adams* siehe *Bashfort*.  
*Aimé*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 334.  
*Airy*, Dichtigkeit der Erde 190. 198, elliptische Schwingungen 775.  
*d'Alembert*, Definition der Kraft 197.  
*Amagat*, Querkontraktion 239. 240, kubischer Kompressionskoeffizient 241. 249, Abhängigkeit der Elastizität des Glases von der Temperatur 273, Kompressibilität der Flüssigkeiten 336, des Wassers 339, Abhängigkeit der Kompressibilität der Flüssigkeiten von der Temperatur 341, Abhängigkeit vom Druck 342. 343, Verhalten der Gase gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 557, Abweichung der Gase gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetz bei hohem Druck 566.  
*Amaury* u. *Descamps*, Abhängigkeit der Kompressibilität der Flüssigkeiten vom Druck 342.  
*Andreeff*, Verflüssigung der Gase 628.  
*Antolik*, Methode zur Erregung der Stimmgabeltöne 912.  
*Appunn*, Harmonium mit nahezu reinen Tönen 887, untere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 891, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 892.  
*Arago*, Wert von  $g$  für Paris 58, Bestimmung von  $g$  144.  
— u. *Dulong*, Boyle-Mariottesches Gesetz 546.  
— siehe *Humboldt*.  
— siehe *Biot*.  
*Archimedes*, Drehungsmomente 197, Hebelgesetz 197, Prinzip 360.  
*Arrhenius*, Diffusion 476, innere Reibung der Flüssigkeiten 514, kinetische Theo-

rie der Diffusion der Flüssigkeiten 708.

*Ashton* siehe *Ramsay*.

*Atwood*, Fallmaschine 52.

*d'Aubuisson*, Ausströmungsmenge der Gase 645.

*Auerbach*, Härte 302, Zusammensetzung der Vokale 958.

*Austin*, elastische Nachwirkung 283.

## B.

*Babo* siehe *Warburg*.

*Bach*, elastische Ausdehnung 227, Elastizitätsgrenze 290, Festigkeit 294. 300.

*Baeyer*, barometrische Höhenmessungen 594.

*Baille* siehe *Cornu*.

*Baily*, Dichtigkeit der Erde 185. 198.

*Barret* u. *Tyndall*, empfindliche Flammen 945.

*Barus*, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 666.

*Bashforth* u. *Adams*, Kapillarität 411.

*Battelli*, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinem Druck 560.

*Bauernfeind*, Korrekturen am Theodolith 30.

*Baumeister*, Torsionselastizität 258, Querkontraktion 262, Festigkeit 294.

*Baumgarten*, Biegung 267.

*Baumhauer*, von, Alkoholometrie 374, Volumenometer 601.

*Bazin*, Ausflußmenge 497.

*Beaumé*, Aräometer 375.

*Bède*, Messung von Steighöhen 400. 416.

*Beer*, Elastizität 218, Kapillarität 382, elliptische Schwingungen 776.

*Beilstein*, Diffusion von Lösungen 471.

*Beek, van*, siehe *Moll*.

*Bell*, Telephon 1004.

*Benton*, Querkontraktion 237, Abhängigkeit der Elastizität von der Tempera-

- tur 277. Torsion und longitudinaler Zug 285
- Bernoulli*, kinetische Gastheorie 569.
- Bessel*, Bestimmung der Pendellänge 144. 148, Länge des einfachen Sekundenpendels 150. 151, Reversionspendel 154, Wert von  $g$  für Königsberg u. Berlin 151
- Bessel-Hagen*, Quecksilberluftpumpe 617, Grenze der Verdünnung 623
- Bestelmeyer*, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 668.
- Berier*, Untersuchung der englischen Vokale mit dem Phonographen 1008.
- Bianchi*, Teilmaschine 16.
- Bilancé*, Konstitution des ausfließenden Strahles 515
- Biot*, Wert von  $g$  für Paris 151, Schallgeschwindigkeit in eisernen Röhren 987.
- u. *Arago*, Wert von  $g$  für Paris 58, Bestimmung von  $g$  144. 197.
- Bock*, Querkontraktion und Temperatur 275.
- Bohnengerger*, Rotationsapparat 160, Reversionspendel 197, Erhaltung der Rotationsebene 160 197.
- Bohr*, Abweichung des Sauerstoffs vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei sehr kleinem Druck 559.
- u. *Bock*, Absorption von Wasserstoff und Sauerstoff 640.
- Bois-Reymond*, du P., Ausbreitung der Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 449. 453.
- Bois-Reymond*, du (der ältere), Bildung der Vokale 958.
- Boltzmann*, elastische Nachwirkung 280, Theorie derselben 287, Stoß von Zylindern 309, innere Reibung fester Körper 318, Geschwindigkeit der Gas-moleküle 589, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649
- siehe *Töpler*.
- Borda*, Bestimmung von  $g$  144, für Paris 151
- Bourdon*, Metallbarometer 538.
- Bouty*, empfindliche Flammen 946
- Bourard* siehe *Humboldt*.
- Boyle*, Gasgesetz 542
- Bugs*, Dichtigkeit der Erde 186
- Brahma*, hydraulische Presse 334
- Brandt*, Hörbarkeit der Partialtöne 901.
- Braun*, C., Dichtigkeit der Erde 186.
- Braun*, F., elastische Nachwirkung 285. 286, Einfluß der Steifigkeit auf die Schwingungen der Saiten 838
- Bravais*, A., *Bravais*, C. u. *Martin*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 967
- Breitenbach*, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 668.
- Breithaupt*, Theodolith 29.
- Brewster*, obere Grenze der Hörbarkeit 892
- Brillouin*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der verschiedenen Obertöne 974.
- Brir*, Lehrbuch der Statik 196.
- Bruch*, Lehrbuch der Mechanik 196.
- Bruckmann*, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914.
- Bruckmann*, Festigkeit 299, innere Reibung von Flüssigkeiten 512.
- Brücke*, Endosmose 480, Klassifikation der Konsonanten 962.
- Brunner*, Messung von Steighöhen 400, Kapillarkonstanten und Temperatur 432
- Bufl*, Konstitution des ausfließenden Strahles 518.
- Bunsen*, Absorptionskoeffizient 636, Formeln für die Absorptionskoeffizienten der Gase in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur 637, Bestimmung der spezifischen Gewichte der Gase durch Messung ihrer Ausflußgeschwindigkeit 647, Summation der Drucke verschiedener Gase 669, Diffusion der Gase durch poröse Scheidewände 695.
- Buntzen*, Heberbarometer 536.
- Burg*, Kompendium der populären Mechanik 196
- Buys-Ballot*, Gasdiffusion und kinetische Gastheorie 678, Dopplersches Prinzip 1016

C.

- Cagniard-Latour*, Querkontraktion 230, Sirene 866, Töne in Flüssigkeitsäulen 931
- Caillé*, La siehe *Casani*.
- Caillat*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 339, ihre Abhängigkeit vom Druck 342, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei hohen Drucken 564 565
- Campetti*, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinem Druck 560
- Canton*, J., Kompressibilität der Flüssigkeiten 330
- Cantone*, Querkontraktion 239, kubische Kompression 249.
- Canstot*, Messung des Oberflächendruckes durch Tropfen 411, Maximaldruck in Tropfen 427, Kapillarität des Quecksilbers 429.
- Cardani*, Querkontraktion 231
- Cartesius*, Bewegungsgröße, Antrieb der Kraft, lebendige Kraft, Arbeit 196, Hebelgesetze 197

*Cassini, Maraldi, La Caille*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 965. 966.  
*Cauchy*, Elastizität 218, Querkontraktion 281, Transversalschwingungen von Stäben 801. 808.  
*Cavalier Colle*, Korrektur der Töne in Orgelpfeifen 927.  
*Cavendish*, Dichtigkeit der Erde 188. 198.  
*Chappuis*, Adsorption der Gase an festen Körpern 680.  
*Chladni*, Klangfiguren 806. 809, drehende Schwingungen 817, Tonleiter 876, Schwingungen v. Stäben 905, Schwingungen gespannter Saiten 907, Transversalschwingungen von Stäben 910, Klänge von Platten 912, chemische Harmonika 944.  
*Clairaut*, Theorem über die Abplattung der Erde 182.  
*Clapeyron* siehe *Lamé*.  
*Clausius*, kinetische Gastheorie 569, mittlere Wegelänge der Gasmoleküle 570, Ableitung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes aus der kinetischen Gastheorie 582, Zustandsgleichung der Gase 584, Geschwindigkeit der Gasmoleküle 588, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649, Diffusion der Gase 678.  
*Clebsch*, Elastizität 218, Volumelastizität und Starrheit 238, Verschiebungswinkel 284, Starrheitskoeffizient 235, Koeffizient der Volumelastizität 235, kubische Kompression 246, Biegung 266, Schwingungen kreisförmiger Platten 806.  
*Colladon u. Sturm*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 833, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Wasser 840, Schallgeschwindigkeit im Genfer See 992.  
*Cornu*, Querkontraktion 288, Biegung 270, Verschiedenheit der Tonleiter im melodischen und harmonischen Gang 883.  
— u. *Baille*, Dichtigkeit der Erde 186. 198.  
— u. *Mercadier*, Empfindlichkeit des Ohres 1011.  
*Corti*, Cortische Membranen 1010.  
*Coulomb*, Torsionselastizität 255, Festigkeit 294, Reibung 312, innere Reibung der Flüssigkeiten 508.

## D.

*Dalton*, Absorption von Gasgemischen 641, Diffusion der Gase 670.  
*Delaunay*, Cours de mécanique rationnelle 196.

*Delcros*, Korrektur des Barometers wegen der Kapillarität 538.  
*Deleuil*, Luftpumpe 618.  
*Desains*, Krümmung kapillarer Oberflächen 392, Messung von Steighöhen 400.  
*Descamp* siehe *Amaury*.  
*Despretz*, Boyle-Mariottesches Gesetz 546, untere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 890, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 892.  
*Ditmar u. Roscoe*, Absorption von Chlorwasserstoffsäure 638.  
*Donders*, Zusammensetzung der Vokale 958.  
— u. *Hamburger*, Temperaturkoeffizient der Endosmose 489.  
*Doppler*, Änderung der Tonhöhe bei relativer Bewegung des Ohres und der Schallquelle 1014.  
*Drecker*, Kompressibilität von Mischungen 346.  
*Drude*, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 458.  
*Duclaux*, Kapillarität 382, Kapillarität von Mischungen 440.  
*Duhamel*, Lehrbuch der Mechanik 196, Einfluß der Steifigkeit der Saiten auf die Schwingungszahl 798, graphische Zählungen der Schwingungen 829. 869.  
*Dulong* siehe *Arago*.  
— Abweichung der Pfeifentöne von der Theorie 921, Messung der Schallgeschwindigkeit mit Orgelpfeifen 976, Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen 984.  
— u. *Petit*, Kathetometer 25.  
*Dupré*, Oberflächendruck 380, Oberflächenspannung in flüssigen Lamellen 383.  
*Dutrochet*, Endosmose 479.  
*Dvořák*, Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeitszylindern 994.

## E.

*Eckhard*, Endosmose 481.  
*Edelmann*, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 892.  
*Edison*, Phonograph 1004.  
*Eichhorn*, Vokalsirene 1007.  
*Euler*, Theorie der Wage 197, Satz über die Krümmungsradien 381, Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Saitenschwingungen 788; Schwingung von Stäben 801.  
*Ewing* siehe *Fleming u. Jenkin*.  
*Exner, Franz*, Diffusion der Gase durch Seifenmembranen 698.

**F.**

- Faraday*, Verflüssigung der Gase 628, Staubbüchsen 412.  
*Fechner*, Atomlehre 209.  
*Fessel*, Rotationsapparat 161.  
*Feudel*, Kapillaritätskonstanten, chemische Zusammensetzung 439.  
*Fick*, Theorie der Diffusion 467.  
*Fischer*, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 462.  
 Schwingungszahl der Stimmgabeln verschiedener Orchester 844.  
 siehe *Mach*.  
*Fleming, Jenkin u. Ewing*, Untersuchung der Vokale mit dem Phonographen 1006.  
*Förch*, Kapillarität von Lösungen 439.  
*Fortin*, Barometer 530.  
*Foucault*, Pendelversuch 162 194, Erhaltung der Rotationselene 194.  
*Frankenheim*, Härte 301, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416, Kapillaritätskonstanten u. Temperatur 431.  
*Franz*, Härte 301.  
*Fresnel*, Schwingungsgleichung; Interferenz der Wellen; stehende Wellen; elliptische Wellen 775, Fortpflanzung der Wellen in Punktsystemen 776.  
*Friedrich*, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914.  
*Frot*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles 973.  
*Fuchs*, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz 559.

**G.**

- Gaede*, Rotationsquecksilberpumpe 622.  
*Galilei*, Fallgesetze 196, Pendelgesetze 197.  
*Gally-Czaki*, Manometer 355.  
*Gartenmeister*, Reibung der Flüssigkeiten 514.  
*Gauss*, Wert von  $g$  für Göttingen 54, absolutes Maßsystem 73, Torsion von Seidenfäden 259, Kapillaritätstheorie 382, konstanter Randwinkel 393, bifilare Aufhängung 659.  
*Gay-Lussac*, Kohäsion von Flüssigkeiten 377, Adhäsion von Quecksilber an Glas 377, Messung von Steighöhen 399, Heberbarometer 535.  
 siehe *Humboldt*.  
*Geisler*, Quecksilberluftpumpe 615.  
*Gerstner*, Biegeelastizität 263, Theorie der Wasserwellen 454.  
*Gilbault*, Kompressibilität der Lösungen 344, molekulare Kompression 345.  
*Ginningham*, Sprengelsche Luftpumpe 621.  
*Girard*, Ausströmen der Gase 646.  
*Gradenwitz*, Messung von Kapillaritätskonstanten an erstarrten Tropfen 437.

- Graetz*, Reibung der Flüssigkeiten 514.  
*Graham*, Diffusion von Lösungen 467, Reibung der Gase 649, Diffusion der Gase 670, Diffusion der Gase durch trockne, poröse Scheidewände 694, Diffusion der Gase durch Kolloide 696.  
*Grassi*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 336, 338.  
*Grazmann*, Theorie der Vokale 960, Theorie der Konsonanten 962.  
*Gruesande*, Zugelastizität 219.  
*Gray*, Querkontraktion 237.  
*Greely*, Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalles bei sehr niedrigen Temperaturen 967.  
*Greiner*, Heberbarometer 535.  
*Grottrian*, innere Reibung der Flüssigkeiten 510 511 514.  
*Grüneisen*, Gültigkeitsgrenze des Poisson'schen Gesetzes 513.  
 — siehe *Kohlrausch*.  
*Grunmach*, Einfluß der Gasverdichtung auf die Kapillaritätskonstanten des Quecksilbers 431, Messung der Kapillaritätskonstanten des Quecksilbers durch kleine Flüssigkeitswellen 458.  
*Guericke, Otto von*, Luftpumpe 605.  
*Guthrie*, Einfluß der Substanz auf das Gewicht der abfallenden Tropfen 421.  
*Gutkowski* siehe *Mendelejeff*.

**H.**

- Hagen*, Krümmung kapillarer Oberflächen 392, Einfluß von Verunreinigungen auf die Steighöhen 425, Ausfluß durch kapillare Röhren 506.  
*Hagenbach, A.*, Diffusion der Gase durch Gelatine 699.  
*Hagenbach, Ed.*, Reibung der Flüssigkeiten 499, Ausfluß durch kapillare Röhren 503.  
*Hajech*, Brechung des Schalles 999.  
*Hallström*, Zahl der akustischen Stöße 1023.  
*Hamburger* siehe *Donders*.  
*Handl u. Tribram*, Reibung der Flüssigkeiten 514.  
*Hann*, barometrische Höhenmessungen 394.  
*Hartmann, O.*, sprechende Bogenlampen 946.  
*Hausmanninger*, Stoß von Zylindern 309, Diffusion der Gase 675.  
*Hauy*, Bewegung infolge von Kapillarkwirkung 456.  
*Heen, de*, Kapillarkonstanten und Temperatur 434, Einfluß der Temperatur auf den Diffusionskoeffizienten der Flüssigkeiten 477.



- Helmert**, Verschiedenheit von  $g$  in verschiedenen Breiten 181. 198.
- Helmholts, von**, Begriffsform der Naturauffassung 8, Wirbelringe 209. 211, Reibung der Flüssigkeiten 499, Ausfluß durch kapillare Röhren 503, Vibrationsmikroskop 882, Schwingung gestrichener Saiten 884, Berechnung der Tonleiter 883, Harmonium mit reinen Tönen 887, untere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 891, Theorie des Klanges 865. 894, Resonatoren 896, Hörbarkeit der Partialtöne 901, Zusammensetzung von Klängen aus einfachen Tönen 902, Einfluß der Phase auf den Klang 903, Partialtöne gespannter Saiten 907, Theorie der Luftschwingungen in Röhren 930, Einfluß der Pfeifenwände auf den Klang 930, Theorie der weichen Zungen 942, Klänge kegelförmiger Röhren 942, Theorie der Vokale 953, Töne der Mundhöhle 958, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Röhren von der Tonhöhe 980, Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeitszylindern 993, Resonanz 1002, Mechanismus des Hörens 1010, Stöße 1024, Differenz- u. Summationstöne 1029, Theorie der Kombinationstöne 1031, Theorie der Konsonanz und Dissonanz 1033.
- u. **Piotrowski**, innere Reibung der Flüssigkeiten 511.
- Hemilian** siehe **Mendelejeff**.
- Henry**, Absorptionsgesetz der Gase 634.
- Hensen**, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914.
- Hermann**, Grenze der Hörbarkeit von Tönen 892.
- Hertz**, Härte 301.
- Herwig**, Dimensionen der abgeleiteten Maße 78.
- Heydweiller**, Messung von Kapillarkonstanten an erstarrten Tropfen 437, Reibung der Flüssigkeiten 514.
- Hersfeld**, Messung der Kapillarkonstanten an erstarrten Tropfen 437.
- Higgins**, chemische Harmonika 944.
- Hittorf**, allotrope Modifikationen 207.
- Hodgkinson**, Elastizität 223.
- Van 't Hoff**, kinetische Theorie der Flüssigkeiten, Deutung des endosmotischen Druckes 705.
- Holmann**, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 667.
- Homann**, Alkoholometrie 875.
- Hooke**, Zugelastizität 219.
- Hopkins**, Einfluß des Mundstücks auf die Höhe der Pfeifentöne 921, Interferenz des Schalles 1018.
- Houghton**, Dichtigkeit der obern Erdrinde 192.
- Hübener**, Reibung der Flüssigkeiten 514.
- Hüfner**, Prüfung der Exnerschen Regel für die Diffusion der Gase durch Flüssigkeitsschichten 699.
- Humboldt, Gay-Lussac, Boucard, Arago, Mathieu u. Prony**, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 968.
- Hutton** siehe **Mastelyne**.
- Huyghens**, Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft 197, Pendelgesetze 197, Größe von  $g$  197, Stoßgesetze 303, Huyghensches Prinzip 761, Fortpflanzung der Wellen in Punktsystemen 776.

## I.

- Jacobi, C. G. J.**, Vorlesungen über Dynamik 196.
- Jacobson**, Ausfluß durch kapillare Röhren 503.
- Jerichau**, Endosmose 480.
- Jochmann**, Boyle-Mariottesches Gesetz 555.
- Johannijanz**, Diffusion von Lösungen 473.
- Jolly**, Abnahme der Schwere über einer Hochebene 178, Dichtigkeit der Erde 186, Prinzipien der Mechanik 196, endosmotisches Äquivalent 480.
- Joule**, kinetische Gastheorie 569.
- Joulin**, Adsorption von Gasen an festen Körpern 630.
- Journée**, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles bei scharfen Schlägen 975.
- Icenkrahe**, Massenanziehung 170.
- Jullien**, Problemes de mécanique rationnelle 196.

## K.

- Kahlbaum**, Luftpumpe 622.
- Kälhne**, Einfluß der Gasverdichtung auf Kapillaritätskonstanten 431, Kapillaritätskonstanten des Wassers 436, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Temperatur 986.
- Kater**, Reversionspendel 144. 153. 155. 197.
- Katznelsohn**, Abhängigkeit der Querkontraktion von der Temperatur 275.
- Kaufmann, W.**, Rotationsquecksilberluftpumpe 622, Schwingungen geschlagener Saiten 836.
- Kayser**, Adsorption der Gase an festen Körpern 630, Temperaturkoeffizient von Stimmgabeln 889, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Röhrenweite 982.

**Kekulé**, Lehrbuch der Chemie 212.  
**Kelvin**, Lord (*W. Thomson*), Atom 209, Querkontraktion 231, Einfluß der Verdampfung auf die Oberflächenspannung 459, Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen 854.  
**Kepler**, Keplersche Gesetze 165. 198.  
**Khanikoff** u. *Longuinine*, Absorption von Kohlensäure 639.  
**Kirchling**, Interferenz des Schalles 1020.  
**Kierulff**, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 273.  
**Kirchhoff**, Elastizität 218, Querkontraktion 231. 239, Biegung 269, Schwingungen kreisförmiger Membranen und Platten 806, Chladni's Klangfiguren 808, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Röhren von der Tonhöhe 980.  
**Kirpitschoff** siehe *Mendelejeff*.  
**Klinkert**, Schwingungen von elektromagnetisch bewegten Saiten 836.  
**Koch**, A., innere Reibung fester Körper 318. 324.  
**Koch**, F. L., Ausströmen der Gase 646.  
**Koch**, K. R., Biegung 267.  
**König**, A., Messung des Oberflächendruckes durch Tropfen 409.  
**König**, R., Temperaturkoeffizient von Stimmungsgabeln 889, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 893, Flammenkapseln 896. 899, Flammenbilder verschiedener Vokale 900, Einfluß der Phase auf den Klang 903, Wellenpirene 904, Messung der Wellenlängen in langen Pfeifen 923, Korrektur der Töne in offenen Orgelpfeifen 926, Flammenbilder der Vokale 956, Interferenzröhren 1019, Stöße 1023. 1024, Verwendung der Stöße zur Bestimmung der Schwingungszahl 1027, Kombinationstöne 1030.  
**König**, W., innere Reibung fester Körper 324, innere Reibung der Flüssigkeiten 510. 511.  
**Kohlrausch**, F., elastische Nachwirkung 278. 280. 281. 282. 286, Theorie der elastischen Nachwirkung 287, Korrektur des Barometers wegen der Kapillarität 533.  
 u. *Girardsson*, elastische Ausdehnung 228.  
 u. *Loomis*, Torsionselastizität 261, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 271.  
**Kolacek**, Theorie der Flüssigkeitswellen 854, Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen 855.  
**Kopp**, Atomistik 206, Volumenometer 602.  
**Kowalki**, Diffusion 476.

**Kowalski**, von, Querkontraktion 239, Abhängigkeit derselben von der Temperatur 275, Festigkeit 298.  
**Krajewitsch**, Schallgeschwindigkeit in Röhren mit Luft von geringer Dichtigkeit 983.  
**Kriger Menzel** siehe *Raps*.  
 siehe *Richarz*.  
**Krönig**, kinetische Gastheorie 569, Ableitung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes aus der kinetischen Gastheorie 582.  
**Kundt**, Staubfiguren 813, zusammengesetzte Schwingungen 821, Schwingungen von Luftplatten 846, Schwingungsvorgang in gedeckten Pfeifen nach manometrischen Messungen 914, Messung der Schallgeschwindigkeit mit Kundtschen Staubfiguren 978, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Röhrenweite 979, Schallgeschwindigkeit in Stäben 984.  
 u. *Lehmann*, Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeitszylindern 994.  
 u. *Warburg*, Reibungskoeffizienten der Gase 659.  
**Kupfer**, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 271.  
**Kuytenbrouwer**, siehe *Moll*.

## L.

**Labouret**, de, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles bei scharfen Schüssen 975.  
**Lagrange**, allgemeine Gleichungen der Bewegung 116.  
**Lahr**, von, Graßmann's Vokaltheorie 961, Untersuchung der Vokale mit dem Phonographen 1006. 1007.  
**Lambert**, Sprachrohr 997.  
**Lame**, Elastizität 218, Querkontraktion 231, Gleichungen für die Kompression von Hohlkörpern 246.  
 u. *Clapeyron*, Querkontraktion 230.  
**Lang**, von, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649, Ausströmungsgesetz der Gase durch kapillare Röhren 656.  
**La Place**, Ebbe und Flut 196. 198, Kapillaritätstheorie 378. 382, konstanter Randwinkel 393, Bewegung infolge von Kapillarwirkung 455, barometrische Höhenmessung 593.  
**Lauestein**, Reibung der Flüssigkeiten 514.  
**Leconte**, empfindliche Flammen 945.  
**Lehmann**, allotrope Modifikationen 207, Fließen fester Körper 291, Festigkeit 293, periodische Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 454.  
 siehe *Kundt*.

*Leibnitz*, lebendige Kraft 196.  
*Lenard*, Oberflächenspannung bestimmt durch die Schwingungsdauer fallender Tropfen 520  
*Leslie*, Volumenometer 600.  
*Lewkojeff* siehe *Tammann*.  
*Lippich*, Kaleidophon 824.  
*Liscovius*, Töne von Pfeifen mit weichen Wänden 930.  
*Lassajous*, Schwingungsfiguren 776 825, Knotenlinien auf schwingenden Stäben 804, Vibrationsmikroskop 832.  
*Lohnstein*, Poissons Formel über Tropfenbildung 411, Einfluß der Tropfengröße 427, Berechnung der Kapillaritätskonstanten aus der Tropfengröße 429.  
*Long*, Diffusionsgeschwindigkeit 474.  
*Longuinne* siehe *Khanikoff*  
*Loomis* siehe *Kohlrausch*  
*Loschmidt*, Diffusion der Gase 670, Größe und Zahl der Gasmoleküle 692.  
*Ludtge*, Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 453.  
*Ludwig*, Lehrbuch der Physiologie 953. 962.

## M.

*Mach u. Fischer*, Brechung des Schalles 1000.  
*MacLeod*, Manometer 620  
*Magie*, Messung der Oberflächenkrümmung 425, Einfluß der Tropfengröße 426, Randwinkel 427.  
*Magnus*, Erhaltung der Rotationsebene 198, Konstitution des ausfließenden Strahles 515. 519.  
*Maraldi* siehe *Cassini*.  
*Marangoni*, Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 453.  
*Mariotte*, Stoßapparat 305, Gasgesetz 542.  
*Markowski*, Abhängigkeit der Reibungskoeffizienten der Gase von der Temperatur 668.  
*Martini*, Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten 995  
*Martins* siehe *Bravais*  
*Maskelyne u. Hutton*, Dichtigkeit der Erde 188 198.  
*Masson*, kubische Pfeifen 930.  
*Mathieu* siehe *Humboldt*.  
*Matthiessen*, L., Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen 855, Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Flüssigkeitswellen 857  
*Maxwell*, Dimensionen der Maße im absoluten Maßsystem 78, kinetische Gastheorie 569, Geschwindigkeitsverteilung bei den Gasmolekülen 589, Ableitung der Reibung der Gase aus der kinetischen Gastheorie 649, Messung der Reibungskoeffizienten durch

Schwingung 658, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 684, Ableitung der Diffusion der Gase aus der kinetischen Gastheorie 678, Diffusion der Gase durch poröse Scheidewände 696  
*Mayer*, A. M., Dopplersches Prinzip 1016.  
*Meissner*, Aräometrie 376  
*Melde*, Transversalschwingungen gespannter Saiten 793, Kaleidophon 824, obere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 893, Platten von hohen Schwingungszahlen 912.  
*Mendelejeff*, Alkoholometrie 375, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416. u. *Frl Gutkowski*, Korrektur der Barometer wegen der Kapillarität 533. — u. *Hemilian*, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 556. u. *Kirpitschoff*, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 556  
*Mensbrugghe*, van der, Oberflächenspannung flüssiger Lamellen 383  
*Mercadier*, Temperaturkoeffizient von Stimmgabeln 889, Töne von Stimmgabeln 911. siehe *Cornu*.  
*Metz*, de, Kompressibilität der Flüssigkeiten 337.  
*Meyer*, G., Messung der Kapillaritätskonstanten nach dem Verfahren von A. König 409, Kapillaritätskonstante des Quecksilbers 429, Einfluß der Gasverdichtung auf die Kapillaritätskonstante des Quecksilbers 429  
*Meyer*, G. S., elastische Ausdehnung 224.  
*Meyer*, L., moderne Theorien der Chemie 212, Reibungskoeffizienten von Dämpfen 669  
*Meyer*, M., siehe *Stumpf*.  
*Meyer*, O. E., elastische Nachwirkung 287, Reibung der Flüssigkeiten 499, Reibungskoeffizient 501, Messung der Reibung der Flüssigkeiten nach der Methode von Coulomb 508 510 511, Ableitung der Korrektur nach *Sutherland* 557, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649, Messung der Reibungskoeffizienten der Gase mittels des Durchflusses durch kapillare Röhren 655, Reibungskoeffizienten der Gase nach der Methode von *Maxwell* 657. 658, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665, Theorie der Gasdiffusion 678  
*Meyer u. Mutzel*, innere Reibung der Flüssigkeiten 511. u. *Rosenkranz*, innere Reibung der Flüssigkeiten 514

*Meyer u. Springmühl*, Poiseuillesches Gesetz bei Gasen 656.  
*Michaëlis*, elastische Nachwirkung 286.  
*Michell*, Methode zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde 188.  
*Miller*, elastische Ausdehnung 223, Änderung der Elastizitätskoeffizienten mit der Temperatur 272.  
*Möbius*, Lehrbuch der Statik 196.  
*Mohr*, Wage 370.  
*Mohs*, Härteskala 301.  
*Moll, van Beek u. Kuytenbrouwer*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft 967.  
*Morin*, elastische Ausdehnung 223, Reibung 312.  
*Morruar*, Querkontraktion 237.  
*Moer*, Hauchbilder 632.  
*Mousson*, konstanter Randwinkel 393.  
*Moutier*, konstanter Randwinkel 393.  
*Müller, Joh.*, menschliche Stimme 949.  
*Müller, Jos.*, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Röhrenweite 983.  
*Muschenbroek*, Boyle-Mariottesches Gesetz 545.  
*Mützel* siehe *Meyer, O. E.*

## N.

*Natterer*, Verhalten der Gase gegenüber dem Boyle-Mariottesches Gesetz bei hohem Druck 568, Kompressionsapparat 625.  
*Naudet*, Aneroidbarometer 539.  
*Navier*, Querkontraktion 230.  
*Neesen*, elastische Nachwirkung 287.  
*Nernst*, kinetische Theorie der Diffusion der Flüssigkeiten 709.  
*Newmann, F.*, Elastizität 218, Stoß von Zylindern 309, Gleichgewichtsbedingung an kapillaren Oberflächen 390, Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten 444, Ausfluß durch kapillare Röhren 503, elliptische Schwingungen 776.  
*Newton*, Massenanziehung 166, Anziehungsgesetz 167, Philosophiæ naturalis principia mathematica 196, Prinzip der Trägheit 196, Prinzip der Proportionalität der Bewegung und der wirkenden Kraft 196, Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung 81. 196, Hebelgesetze 197, allgemeine Anziehung 167. 198, Verschiedenheit von  $g$  unter verschiedenen Breiten 198, Ebbe und Flut 198.  
*Nicholson*, Aräometer 366.  
*Nowck*, innere Reibung von Flüssigkeiten 514.  
*Nörremberg*, Interferenz des Schalles 1018.

## O.

*Oberbeck*, Wirkungsphäre der Molekularkräfte 462.  
*Obermaier, von*, Ausströmungsgesetz der Gase durch kapillare Röhren 656, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665, Diffusion der Gase 674.  
*Ochse*, Bestimmung von Kapillaritätskonstanten aus Flüssigkeitswellen 868.  
*Orsted*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 331.  
*u. Schwendsen*, Boyle-Mariottesches Gesetz 545.  
*Ohm*, Theorie des Klanger 865. 894.  
*Okator*, Querkontraktion 239.  
*Ostwald*, Endosmose durch Niederschlagsmembranen 485, innere Reibung der Flüssigkeiten 506. 51

## P.

*Paulow*, Volumenometer 601.  
*Pugliani u. Palazzo*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 341, Abhängigkeit der Kompressibilität von der Temperatur 342, Kompressibilität von Mischungen 346.  
*u. Vincentini*, Kompressibilität des Wassers 339.  
*Palazzo* siehe *Pugliani*.  
*Pascal*, hydrostatisches Paradoxon 348.  
*Petkins*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 330.  
*Perner*, barometrische Höhenmessungen 594.  
*Perrin*, Foucaultscher Pendelversuch 198.  
*Pfaff*, Härte 301.  
*Pfeffer*, Endosmose durch Niederschlagsmembranen 482.  
*Pierpoli*, Temperaturkoeffizient von Stimmgabeln 889.  
*Protowsky* siehe *Helmholtz*.  
*Puati*, elastische Ausdehnung 223, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 272.  
*Place, La*, siehe *La Place*.  
*Platon*, flüssige Lamellen 383, Oberflächendruck in Seifenblasen 387, Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten 441, Wirkungsphäre der Molekularkräfte 457.  
*Pucker*, Erhaltung der Rotationsene 198.  
*Purkels, Fräulein*, Einfluß der Gasverdichtung auf die Kapillaritätskonstante des Quecksilbers 428.  
*Poggendorff*, Fesselercher Apparat 161, Erhaltung der Rotationsene 198.  
*Poinot*, Kräftepaar 97, Élément de statique 196, Erhaltung der Rotationsene 197.



*Poiseuille*, Ausfluß durch kapillare Röhren 506.

*Poisson*, Abnahme der Schwere über einer Hochebene 176, *Traité de mécanique* 196, Elastizität 218, Querkontraktion 280, Kapillaritätstheorie 382, Verdichtung der Flüssigkeiten an fester Wand 388, Krümmung kapillarer Oberflächen 392, konstanter Randwinkel 393, Tropfenbildung 411, barometrische Höhenmessung 593, Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen in Stäben 779, Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler und longitudinaler Saitenschwingung 790, Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler u. longitudinaler Saitenschwingung 796, Schwingung von Stäben 801, Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler und longitudinaler Schwingungen in Stäben 804, Schwingungen kreisförmiger Membranen und Platten 806, drehende Schwingungen 817, Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in Flüssigkeiten und Gasen 841.

*Pouillet*, Boyle-Mariottesches Gesetz 548.

*Poynting*, Dichtigkeit der Erde 187.

*Preyer*, untere Grenze der Hörbarkeit von Tönen 891, Kombinationstöne 1029, objektive Natur derselben 1030.

*Pribram* siehe *Handl*.

*Prony* siehe *Humboldt*.

*Pulfrich*, elastische Nachwirkung 283.

*Puluj*, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665.

## Q.

*Quanten*, Einwürfe gegen die Helmholtzsche Vokaltheorie 959.

*Quincke*, Kapillarität 382, konstante Randwinkel 393, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416, Einfluß der Substanz des Festen auf die Tropfengröße 421, Randwinkel verschiedener benetzender Flüssigkeiten 422. 423, Einfluß von Verunreinigungen auf die Steighöhen 425, Einfluß der Tropfengröße auf die Werte der Kapillarkonstanten 426, Änderung der Luftblasen mit der Zeit 427, Veränderung der Quecksilbertropfen mit der Zeit 429, spezifische Kohäsion 435, Werte derselben 436, Kapillarität von Lösungen 439, Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze zweier Flüssigkeiten 447, Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten 449. 451. 452. 453, periodische Ausbreitung von Flüssigkeiten 454, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 459, Messung der Schallgeschwindigkeit in Röhren 986, Interferenz des Schalles 1018.

## R.

*Ramsay u. Ashton*, Kapillarkonstanten und chemische Zusammensetzung 439.

— u. *Schields*, Kapillaritätskonstanten organischer Verbindungen 439.

*Raps*, Schwingungsvorgang in gedeckten Pfeifen, beobachtet durch manometrische Messungen 914.

— u. *Krigar Menzel*, graphische Darstellung der Schwingungsfiguren 830, Schwingungen gestrichener Saiten 835.

*Rayleigh*, Lord, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 462. 465, Verhalten der Gase gegenüber dem Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 561, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 668, Einfluß des Oberflächendruckes auf die Flüssigkeitswellen 855, Bestimmung von Kapillarkonstanten aus Flüssigkeitswellen 858, Empfindlichkeit des Ohres 1012.

*Redtenbacher*, Prinzipien der Mechanik 196.

*Regnault*, allotrope Modifikationen 207, kubische Kompression 245, Kompressibilität der Flüssigkeiten 335, Boyle-Mariottesches Gesetz 549, Interpolationsformeln für die Kompressibilität der Gase 555, Manometer 597, Volumenometer 600, Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Tonhöhe 965, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in weiten Röhren und in freier Luft 968, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen 974.

*Reich*, Dichtigkeit der Erde 185. 186. 195.

*Reinold u. Rücker*, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 458.

*Reilstab*, Reibung der Flüssigkeiten 514.

*Rennie*, Reibung 312.

*Reusch*, Wirbelringe 210.

*Reyher*, Reibung der Flüssigkeiten 514.

*Rhumer*, sprechende Bogenlampe 946

*Richards u. Stull*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 343.

*Richarz u. Krigar Menzel*, Dichtigkeit der Erde 188.

*Richer*, Änderung von  $g$  mit der Breite 198.

*Riecke*, innere Reibung fester Körper 318, kinetische Theorie der Diffusion der Flüssigkeiten 711.

*Riefs*, Kapillarkonstanten und Temperatur 433, Theorie der Flüssigkeiten

wellen 864, Einfluß der Oberflächen-  
spannung auf die Flüssigkeitswellen  
865.  
*Rink*, Abhängigkeit der Fortpflanzungs-  
geschwindigkeit von der Intensität des  
Schalles 972.  
*Ritter*, Stoß von Zylindern 309, Ausfluß  
von Flüssigkeiten 498.  
*Ritz*, Klänge der Streichinstrumente 909.  
*Riber*, Töne von Stimmgabeln 911, Me-  
thoden von Scheibler zur Bestimmung  
von Schwingungszahlen durch Stöße  
1025.  
*Robinson*, Boyle-Mariottesches Gesetz  
343.  
*Rodenbeck*, Kapillarkonstante und Tem-  
peratur 436, Kapillarität von Misch-  
ungen 440.  
*Rodger* siehe *Thorpe*.  
*Rogers*, Wirbelringe 210.  
*Röntgen*, Querkontraktion 229, 236, Kom-  
pressibilität der Flüssigkeiten 341, Ab-  
hängigkeit der Kompressibilität von  
der Temperatur 342, Verdichtung von  
Flüssigkeiten an vertikalen Wänden  
419, Wirkungssphäre der Molekular-  
kräfte 462, Abhängigkeit der inneren  
Flüssigkeitsreibung vom Druck 664.  
u. *Schneider*, Kompression von Flüs-  
sigkeiten 339, Kompression von Salz-  
lösungen 344, Kapillaritätskonstanten  
aus Steighöhen 416, Kapillarität von  
Lösungen 439.  
*Roscoe* siehe *Ditmar*.  
*Rosenkranz* siehe *Meyer*, *O. E.*  
*Rother*, Kapillarität von Lösungen 439.  
*Roux, le*, Fortpflanzungsgeschwindigkei-  
ten des Schalles in der Luft 968, 974.  
*Rücker* siehe *Reinold*.  
*Ruhmann*, barometrische Höhenmessung  
593.

**S.**

*Sachs* siehe *Warburg*.  
*Saint Venant, de*, Torsion von Prismen  
261, Biegung 270, Stoß von Zylindern  
309.  
u. *Wantzel*, Ausfluß der Gase 646.  
*Salicrni*, Glasfadenwaage 200.  
*Sausure, von*, Verdichtung von Gasen  
an festen Körpern 629.  
*Savart, F.*, Ausfluß aus kreisförmigen  
Öffnungen, Bäuche und Knoten 518,  
longitudinale Schwingungen von Stä-  
ben 778, Verhältnis der Fortpflanzungs-  
geschwindigkeit transversaler u. longi-  
tudinaler Schwingungen von Stäben  
806, Klangfiguren 809, Staubfiguren 812,  
drehende Schwingungen 817, zusam-  
mengesetzte Schwingungen 818, Er-  
zeugung von Klängen durch gezahnte

Räder 868, untere Grenze der Hörbar-  
keit 890, obere Grenze der Hörbarkeit  
892, Pfeifen mit weichen Wänden 930,  
Resonanz 1002.  
*Savart, N.*, Einfluß der Steifigkeit der  
Saiten auf die Schwingungszahl 797.  
*Say*, Stereometer 599.  
*Schäfer*, Abhängigkeit der Elastizität von  
der Temperatur 276.  
*Schaffgotsch*, Graf, empfindliche Flammen  
946.  
*Scheffer*, Änderung der Diffusionsge-  
schwindigkeit mit der Konzentration  
476.  
*Schell*, Theorie der Bewegung u. Kräfte  
196.  
*Scheibler*, Schwingungszahlen der Stimm-  
gabeln verschiedener Orchester 889,  
Anwendung der Stöße zur Bestimmung  
der Schwingungszahl 1025.  
*Schiff*, Kapillaritätskonstanten aus Steig-  
höhen 416, Kapillaritätskonstante und  
Temperatur 434, Kapillaritätskonstan-  
ten des Äthylalkohols 436, Abhängig-  
keit der Kapillarkonstanten von der  
chemischen Zusammensetzung u. der  
Temperatur 437.  
*Schleiermacher*, Verdichtung von Flüs-  
sigkeiten an vertikalen Wänden 419.  
*Schmidt, G. G.*, Ausströmen der Gase 646.  
*Schmidt, P. M.*, innere Reibung fester  
Körper 321.  
*Schmidt, R.*, Diffusion von Argon und  
Helium 677.  
*Schmidt, W.*, Endosmos 481, 482.  
*Schneebeli*, Querkontraktion 240, drehen-  
de Schwingungen 818, Abhängigkeit  
der Schallgeschwindigkeit in Röhren  
von der Tonhöhe 980.  
*Schneider* siehe *Röntgen*.  
*Schönrock*, Darstellung der Schwingun-  
gen gespannter Saiten 830.  
*Schott* siehe *Winkelmann*.  
*Schreiber*, Wagebarometer 538.  
*Schröder*, elastische Nachwirkung 282.  
*Schröder van der Kolk*, Boyle-Mariotte-  
sches Gesetz 355, Geschwindigkeit des  
Schalles in freier Luft 967.  
*Schubring*, Berechnung der Tonleiter 883.  
*Schuhmeister*, Diffusion von Lösungen 474.  
*Schultze, H.*, Abhängigkeit der Gasrei-  
bung von der Temperatur 668.  
*Schulze, F. A.*, obere Grenze der Hör-  
barkeit 892, Abhängigkeit der Schall-  
geschwindigkeit in Röhren von der  
Beschaffenheit der Wände 983.  
*Schultze, Max*, Cortische Fasern 1010.  
*Schumann*, Kompressibilität von Lösun-  
gen 344, Ausfluß durch kapillare Röh-  
ren 657, Abhängigkeit der Gasreibung  
von der Temperatur 666.

*Schwendsen* siehe *Oersted*.

*Schwendt*, obere Grenze der Hörbarkeit 892

*Scripture*, Untersuchung der Vokale mit dem Phonographen 1008.

*Sebert*, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles bei scharfen Schüssen 975

*Seebeck, Ad.*, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Röhrenweite und der Tonhöhe 980.

*Seebeck, Aug.*, Einfluß der Steifigkeit der Saiten auf die Schwingungszahl 798, Schwingung von Stäben 801. 802, zusammengesetzte Schwingungen 820, Theorie des Klanges 865 894, menschliche Stimme 951, Dopplersches Prinzip 1016, Interferenz des Schalles 1019.

*Seebeck*, Härte 801.

*Seitz*, Diffusion von Lösungen 474.

*Sella* siehe *Voigt*.

*Shakespeare*, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 274.

*Shields* siehe *Ramsay*.

*Siedentopf*, Messung der Kapillaritätskonstanten nach dem Verfahren der Methode von A. König 409, Kapillaritätskonstanten 411, Kapillaritätskonstante des Quecksilbers 429, spezifische Kohäsion von flüssigen Metallen 437.

*Sijestrom*, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 556

*Simmler* siehe *Wild*.

*Simon*, Messung von Steighöhen 400.

*Simon, Th.*, sprechende Bogenlampe 946.

*Sims*, Absorption des Ammoniaks 639.

*Slotte*, Reibung der Flüssigkeiten 514.

*Sohnke*, Wirkungssphäre der Molekularkräfte 461.

*Sondhaus*, Oberflächenspannung in flüssigen Lamellen 385, Kapillarkonstante und Temperatur 431, kubische Pfeifen 930

*Sonreck*, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914.

*Sorge*, Kombinationstöne 1028.

*Sprengel*, Quecksilberluftpumpe 620.

*Sprung*, Fließen fester Körper 291.

*Springmühl* siehe *Meyer, O. E.*

*Sprung*, Reibung der Flüssigkeiten 514, Wagebarometer 538.

*Stahl, J.*, Kapillarität 382

*Stark, J.*, periodische Ausbreitung von Flüssigkeiten 454

*Stefan*, scheinbare Adhäsion 310, Diffusion von Lösungen 473. 474, Reibung der Flüssigkeiten 499, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 666, Diffusion der Gase 673, Verdampfungs-

geschwindigkeit 676, Ableitung der Diffusion aus der kinetischen Gastheorie 678, Diffusion der Gase durch poröse Scheidewände 696, durch Flüssigkeiten 697, Schallgeschwindigkeit in nichttönenden Stäben 989

*Stevens*, Schallgeschwindigkeit in Gasen u. Dämpfen 986.

*Stöckle*, Messung der Kapillarkonstanten nach dem Verfahren von A. König 409, Kapillaritätskonstanten 411, Einfluß der Verdichtung der Gase auf die Kapillarkonstante des Quecksilbers 429.

*Stokes*, Querkontraktion 231, Reibung der Flüssigkeiten 499

*Stoletow*, Schallgeschwindigkeit in Röhren mit dünner Luft 984.

*Straubel*, Querkontraktion 238

*Strehlke*, Knotenlinien auf schwingenden Stäben 804, Chladnis Klangfiguren 808. 811.

*Streintz, H.*, innere Reibung fester Körper 321.

*Stromeyer*, Querkontraktion 237.

*Strouhal*, Töne durch scheinbare, kontinuierliche Bewegung 863, Erregung von Schwingungen in Orgelpfeifen 914

*Stull* siehe *Richards*

*Stumpf*, Stöße 1025.

u. *M. Meyer*, obere Grenze der Hörbarkeit 893.

*Sturm* siehe *Colladon*.

*Sulzer*, Boyle Mariottesches Gesetz 646.

*Sutherland*, Korrektur an der Zustandsgleichung der Gase 587, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 667, Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten der Gase von der Temperatur 687.

## T.

*Tait*, Kompressibilität der Flüssigkeiten 337, des Wassers 339. 341, der Lösungen 344, Ableitung der Gasreibung aus der kinetischen Gastheorie 649.

*Tammann*, Endosmose durch Niederschlagsmembranen 486.

— *Wiegand u. Leuckoweff*, Fließen fester Körper 291.

*Thalen*, Elastizitätsgrenze 289

*Thiesen*, Verhalten der Gase gegenüber dem Boyle Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 560.

*Thilorier*, Verflüssigung der Kohlensäure 627.

*Thompson*, elastische Ausdehnung 211

*Thomson, W.*, siehe *Lord Kelvin*.

*Thorpe u. Rodger*, Reibung der Flüssigkeiten 514

*Timberg*, Ableitung der Kapillaritätskonstanten aus Beobachtungen an Le-



mellen 437, Abhängigkeit der Kapillaritätskonstanten von der Temperatur 432  
*Timofejew*, Absorption des Wasserstoffs 640.  
*Tomlinson*, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 272.  
*Töpler*, Quecksilberluftpumpe 617.  
 u. *Boltzmann*, Schwingungen in gedeckten Orgelpfeifen 914, Empfindlichkeit des Ohrs 1012.  
*Toricelli*, Ausflußgesetz der Flüssigkeiten 489, 493, Barometer 629.  
*Tralles*, Alkoholometrie 376.  
*Traube*, Kapillarität von Lösungen 439, von Mischungen 440, Niederschlagsmembranen 482.  
*Tresca*, Fließen fester Körper 291.  
*Tycho de Brahe*, Keplersche Gesetze 166.  
*Tyndall*, empfindliche Flammen 944.

## V.

*Valen*, Kapillarität von Lösungen 439.  
*Ven, van der*, Abweichung der Gase vom Boyle-Mariotteschen Gesetz bei kleinen Drucken 568.  
*Vidi*, Aneroidbarometer 638.  
*Vierordt*, Endosmose 480.  
*Vincentini* siehe *Pagliari*.  
*Violle* u. *Vautier*, Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Tonhöhe 966, von der Intensität des Schalles 973, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der verschiedenen Obertöne 973.  
*Viviani*, Barometer 628.  
*Vogel, H. C.*, Dopplersches Prinzip 1016.  
*Voigt*, elementare Mechanik 196, Elastizität 218, Querkontraktion 238, 239, Biegung 267, 269, elastische Nachwirkung 287, Stoß von Zylindern 309, innere Reibung fester Körper 318, 321, Stöße 1024, Kombinationstöne 1030.  
 u. *Drude*, Biegung 269.  
 u. *Sella*, Festigkeit 300.  
*Voigtländer*, Diffusion von Salzen in fester Gelatine 477.  
*Voit*, Diffusionskoeffizient 473.  
*Volkmann*, Korrektur an der Formel zur Berechnung von Kapillaritätskonstanten aus der Steighöhe 415, Kapillaritätskonstanten aus Steighöhen 416, Einfluß der Krümmung der Wände auf die Steighöhen 420, Randwinkel 424, Einfluß von Verunreinigungen auf Steighöhen 426, Änderung von Blasen mit der Zeit 428, Kapillaritätskonstanten und Temperatur 433, 434, Kapillarität von Lösungen 439.  
*Vries, de*, Endosmose durch Niederschlagsmembranen 486.

## W.

*Waals, van der*, mittlere Wegelänge der Gasmoleküle 576, Zustandsgleichung der Gase 688, Größe und Zahl der Moleküle 691, kinetische Theorie der Flüssigkeiten 702, Normaldruck in Flüssigkeiten 704.  
*Wagner*, innere Reibung der Flüssigkeiten 614.  
*Waidle*, Mosersche Bilder 632.  
*Waltz*, Diffusion der Gase 676.  
*Walden*, Niederschlagsmembranen 486.  
*Wallis*, Stoßgesetze 808.  
*Wantzel* siehe *de Saint Venant*.  
*Warburg*, Torsionselastizität 266, elastische Nachwirkung 286, permanente Torsion 291, Einfluß der Verdampfung auf die Molekularkräfte 459, innere Reibung des Quecksilbers 616, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 666, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in nicht-tönenden Stäben 990.  
 u. *von Babo*, Reibung 312, innere Reibung fester Körper 321, Abhängigkeit der inneren Reibungskoeffizienten der Gase von ihrer Dichtigkeit 662.  
 u. *Kundt* siehe *Kundt*.  
 u. *Nachs*, Abhängigkeit der inneren Gasreibung vom Drucke 664, Abhängigkeit der inneren Gasreibung von der Temperatur 666.  
*Weber, F.*, Diffusion von Lösungen 474, 476.  
*Weber, G.*, Klänge gespannter Saiten 907.  
*Weber, W.*, elastische Nachwirkung 277, 286, 287, zusammengesetzte Schwingungen 821, Entstehung der Klänge in Zungenpfeifen 935, Theorie der Zungenpfeifen 938, Interferenz des Schalles 1020.  
 u. *Weber, F. H.*, Fortpflanzung der Saitenschwingung 788, Schwingungsdauer gespannter Saiten 792, transversale Wellen in Flüssigkeiten 846, Fortpflanzungsgeschwindigkeit d. Wasserwellen 849, Entstehung d. Wasserwellen 853, Durchkreuzung und Reflexion der Wasserwellen 858.  
*Webster Low, J.*, Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Röhren von der Röhrenweite 983.  
*Weidmann*, elastische Nachwirkung 281.  
*Weinberg*, Kapillarkonstante und Temperatur 433, Kapillarkonstanten des Wassers 436.  
*Weisbach*, Ausströmen der Gase 646.  
*Werrin* siehe *Tammann*.  
*Wertheim*, Zugelastizität 219, Werte einiger Elastizitätskoeffizienten 222,

- Querkontraktion 229. 236, Torsionselastizität 252, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 271, Elastizitätsgrenze 290, Festigkeitsgrenze 294, Krümmung kapillarer Oberflächen 892, drehende Schwingung 817, Einfluß des Mundstücks auf die Pfeifentöne 920, Abweichung der Pfeifentöne von der Theorie 922, Berichtigung der Töne offener Orgelpfeifen 925. 927, Töne in Flüssigkeitssäulen 931, Messung der Schallgeschwindigkeit mit Orgelpfeifen 977, Schallgeschwindigkeit in Stäben 988, in räumlich ausgedehnten, festen Körpern 990, in Flüssigkeitszylindern 992.
- Wheastone*, Kaleidophon 824, Theorie der Vokale 953.
- Wiechert*, elastische Nachwirkung 287.
- Wiedeburg*, Diffusion und Konzentration 475.
- Wiedemann, E.*, Formeln für die Absorptionskoeffizienten 638, Abhängigkeit der Gasreibung von der Temperatur 665.
- Wiedemann, G.*, Elastizitätsgrenze 291, innere Reibung der Flüssigkeiten 506.
- Wien, M.*, Einwürfe gegen die Theorie des Hörens von Helmholtz 1012.  
— siehe *Wüllner*.
- Wild*, Komparatoren 13.  
— u. *Simmler*, Theorie der Diffusion von Lösungen 469.
- Wilhelmy*, Verdichtung von Flüssigkeiten an vertikalen Wänden 417, Randwinkel verschiedener benetzender Flüssigkeiten 421.
- Willis*, Bildung der Vokale 953.
- Wilsing*, Dichtigkeit der Erde 188.
- Winkelmann*, Abhängigkeit der Elastizität von der Temperatur 274, Diffusion von Dämpfen 676.  
— u. *Schott*, Abhängigkeit der Elastizitätskoeffizienten von der Temperatur 274, Zug- und Druckfestigkeit von Gläsern 300.
- Witkowski*, Schallgeschwindigkeit in dichter Luft 984.
- Wolf*, Kapillaritätskonstanten und Temperatur 482.
- Wolz*, Teilmaschine 19.
- Woodruff*, Temperaturkoeffizient von Stimmgabeln 889.
- Worthington*, Einfluß der Tropfengröße 426.
- Wren*, Stoßgesetze 303.
- Wroblewski, von*, Diffusion von Lösungen 475, Sättigungskoeffizient 635, Absorption der Kohlensäure 639, Diffusion der Gase durch Kolloide 696.
- Wüllner*, Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen 985.  
— u. *M. Wien*, Elastizitätskoeffizienten von Gläsern 274.

## Y.

- Young, Th.*, Zugelastizität 219, Kapillarität 382, Konstanz des Randwinkels 393, Reflexion der Wellen 776.

## Z.

- Zamminer*, kubische Pfeifen 930, Töne der Röhren mit weichen Zungen 942, Länge des Hornes 948.
- Zickgraf*, obere Grenze der Hörbarkeit 893.

## Berichtigungen

zum ersten Bande der Experimentalphysik.

- Seite 19 Zeile 19 v. u. hinter „kurze“ füge ein „den fünften von mittlerer Länge, wieder vier kurze“.
- „ 70 nach Zeile 11 v. u. ist einzuschalten „nach  $\alpha$  aufzulösen. Wir erhalten dann“.
- „ 78 Zeile 5 v. o. lies eine anstatt einer.
- „ 78 Anm. Zeile 4 v. u. lies mesures anstatt mesmes.
- „ 92 Zeile 1 v. u. lies  $G F'$  anstatt  $G E$ .
- „ 99 „ 5 v. u. „  $Mc \cdot AB$  anstatt  $Mb \cdot AB$
- „ 99 „ 8 v. u. „  $Mb \cdot DC'$  anstatt  $Mc \cdot DC'$
- „ 108 „ 7 v. o. „ Kreis  $Q$  anstatt Kreis  $R$ .
- „ 224 „ 27 v. o. nach „lastung“ schalte ein: „war 0,192 kg. die erste Spalte gibt die dieser hinzugefügte Belastung“
- „ 281 Anm. 4 Zeile 3 v. u. lies 65 anstatt 85.
- „ 246 Zeile 13 v. o. lies  $\frac{V}{V'} = 3\varphi$ , anstatt  $\frac{V}{V'} = 3\varphi$ ,
- „ 248 „ 10 v. u. „ Ist anstatt ist.
- „ 268 „ 5 v. u. „  $t_0$  anstatt  $t()$
- „ 269 „ 4 v. o. „  $\Phi$  anstatt  $\Phi'$ .
- „ 273 Anm. 1 lies 29 anstatt 39.
- „ 273 Zeile 3 v. u. lies 0,00377 anstatt 0,00011.
- „ 273 „ 19, 26, 43 v. o. lies Kiewiet anstatt Kiewit
- „ 291 Anm. 1 Zeile 8 v. u. lies 106 anstatt 104.
- „ 316 Zeile 16 v. o. lies  $\varphi = e^{-\alpha}$  anstatt  $\varphi = e^{-\alpha'}$
- „ 324 „ 16 v. o. „  $1 \cdot 10^5 \cdot 7^2$ .
- „ 337 „ 16 v. u. „ Werte anstatt Werke
- „ 344 „ 12 v. u. „ so sind anstatt so ist.
- „ 346 „ 10 v. o. und von Zeile 11 „Kohlenstoff mit“ ist zu streichen.
- „ 379 „ 5 v. u. lies  $() = z [\mu \lambda r \dots \lambda - 1]$
- „ 416 „ 16 v. o. „  $\frac{H}{s} =$  anstatt  $\frac{H}{r} =$
- „ 419 „ 6 nach der Tabelle lies 3600 anstatt 3900.
- „ 451 „ 9 v. u. lies  $\alpha'_{23} - \alpha'_{12} > \alpha'_{13}$  anstatt  $\alpha'_{23} - \alpha'_{12} > \alpha'_{12}$ .
- „ 462 Anm. 1 lies 47. anstatt 48.
- „ 475 „ 3 „ 10. p. 51. 1892 anstatt 10. p. 51. 1904
- „ 486 „ 2 „ 2. p. 45. 1888; 3 p. 103 1889.
- „ 522 „ 1 „ 95. p. 1. 1855. 106 p. 1. 1859
- „ 526 Zeile 4 und 3 v. u. streiche: so wird.
- „ 554 in der letzten Zeile der Tabelle lies 0,2501 anstatt 0,2402 und — 0,2867 anstatt — 0,2687.
- „ 566 Anm. lies 19. anstatt 20.
- „ 589 „ Zeile 1 lies 19 anstatt 29.
- „ 611 Zeile 9 v. o. ließ Hahnes statt Kanales.
- „ 613 Anm. 1 lies 1865 anstatt 1890
- „ 665 „ 6 lies 46. (2.) p. 278. 1876.

Seite 667 Zeile 12 v. o. streiche  $\frac{1}{\alpha} t = T$  und.

„ 754 „ 5 v. o. lies  $-b$  anstatt  $+b$ .

„ 785 „ 2 v. o. „ bei  $a$  anstatt bei  $d$ .

„ 787 „ 6 v. u. „  $\sin \varepsilon \xi b = \frac{\varepsilon b}{\varepsilon \xi}$  anstatt  $\frac{\varepsilon b}{s \xi}$ .

„ 822 „ 18 v. o. nach Schwingungen schalte ein: ausgeschlossen waren,  
so können nur die transversalen Schwingungen.

„ 876 „ 12 v. o. lies  $\frac{5}{4}$  anstatt  $\frac{1}{4}$ .

„ 877 Spalte Sexten lies  $\frac{c_1}{e} \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{13}$ .

„ 881 Zeile 20 v. u. lies  $des_1$   $es_1$  anstatt  $des$   $es$ .

„ 919 „ 9 v. u. „  $7 \frac{c}{4}$  anstatt  $7 \frac{c}{4}$

„ 994 Anm. 2 lies 154 anstatt 94.

LAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.

ENCYKLOPÄDIE  
DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN  
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN  
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,  
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BD I: ARITHMETIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN . . . . .	} RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG
II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN . . . . .	
III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . . . . .	} H. BURKHARDT IN ZÜRICH UND W. WIRTINGER IN WIEN
IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . .	
V: PHYSIK, IN 2 TEILEN . . . . .	} W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN
VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . . . . .	
VI, 2: ASTRONOMIE . . . . .	} A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN PH. FIRTWÄNGLER IN AACHEN UND E. WIECHERT IN GÖTTINGEN
VII: GESCHICHTE, PHILOSOPHIE, DIDAKTIK . . . . .	
	} K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, mit möglicher Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch ständige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden vom Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Physik und Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und Industrie, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker darüber orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Ingenieur darüber, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In sieben Bänden etwa 640 Druckseiten sollen die einzelnen Gebiete in einer Reihe schnell geordneter Abschnitte behandelt werden; der letzte Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sind so gering gehalten, daß das Werk auch für Laien nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht.

Ausführlicher Prospekt umsonst und postfrei vom Verlag. ==

**VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.**

# **ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK U. PHYSIK.**

**BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.**

**FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1899—1900).**

## **ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.**

**GEGENWÄRTIG**

**UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,  
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER**

**HERAUSGEGEBEN VON**

**R. MEHMKE      UND      C. RUNGE**  
**IN STUTTGART      IN GÖTTINGEN.**

**54. Band. gr. 8. 1907. Preis für den Band von 4 Heften M. 20. —**

Durch die rasch zunehmende, auf eine Arbeitstellung hindrängende Ausdehnung der mathematischen Wissenschaften hat die Schriftleitung sich genötigt gesehen, die Förderung der angewandten Mathematik als einzige Aufgabe zu betrachten. Mit dieser Einschränkung wird jedoch eine große wissenschaftliche Vertiefung angestrebt.

Die Grenzen sollen nicht allzu enge gezogen werden, so sollen Arbeiten gebracht werden aus den Gebieten der Mechanik, insbesondere der technischen Mechanik, der theoretischen Physik einschließlich der mathematischen Chemie und Kristallographie, der Geophysik, Geodäsie, Astronomie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Ausgleichungsrechnung und der mathematischen Statistik und Versicherungsmathematik; auch das numerische Rechnen, die Näherungsrechnung („Approximations-Mathematik“), die Lehre von den empirischen Formeln, die darstellende Geometrie samt Schattenkonstruktionen und Perspektive, die graphische Rechnen sollen gepflegt werden, weil die in diesen Zweigen gelehrteten Verfahren den Stand setzen, irgend welche Anwendungen der Mathematik bis zu Ende durchzuführen. Den dabei gebrauchten Hilfsmitteln, den numerischen und graphischen Tafeln, den Rechenapparaten und -maschinen, sowie den Zeichenwerkzeugen, wird die nötige Beachtung geschenkt.

**Generalregister zu Band 1—50.** Bearbeitet von Dr. E. Wölffing, Professor an der k. Techn. Hochschule zu Stuttgart. [XII u. 308 S.] gr. 8. 1905. geh. M. 15. —, geb. M. 16. —

# **ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.**

**MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE  
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.**

**GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.**

**DRITTE REIHE.**

**MIT ANHANG:**

**SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT**

**HERAUSGEGEBEN VON**

**E. LAMPE**  
**IN BERLIN.**

**W. FRANZ MEYER**  
**IN KÖNIGSBERG I. PR.**

**E. JAHNKE**  
**IN BERLIN.**

**12. Band. gr. 8. 1907—08. Preis für den Band von 4 Heften M. 16. —**

Das Archiv berücksichtigt seit seiner Gründung besonders die Bedürfnisse der Lehrer höherer Lehranstalten und ist das einzige Organ, das sich nicht nur die Erweiterung der mathematischen Erkenntnisse sondern auch die Verbreitung mathematischer Forschung als Ziel steckt. Zur Fesselung der Leser sollen auch solche Aufsätze gebracht werden, die die Kenntnisaufnahme und das Verständnis der neuen mathematischen Anschauungen und Entdeckungen vermitteln.

Um zu selbständigen Arbeiten anzuregen, werden Aufgaben zu stellen versucht, die dem Stoff des Hochschulunterrichts entnommen sind. Die Namen der Einsender richtiger Lösungen werden in den nächsten Heften veröffentlicht. Bearbeitungen, die sich durch Originalität und Eleganz der Darstellung auszeichnen, werden, soweit der Platz verfügbar ist, zum Abdruck gelangen. Durch die Mannigfaltigkeit der Aufgaben soll vor allem die Langweiligkeit und die Kleinigkeitskrämerei aus dem Archiv verbannt werden.

**Generalregister zu Reihe II, Band 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke** Mit einem Bildnis von R. Hoppe. [XXXI u. 114 S.] gr. 8. 1901. geh. M. 6. —  
**Register zu Reihe III, Band 1—10.** [IV u. 32 S.] gr. 8. 1906. geh. M. —. 20.

# Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

**Abraham, Dr. M.**, Privatdozent an der Universität Göttingen, Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Forr. Zweite, ungearbeitete Auflage von Dr. M. ABRAHAM. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 443 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n.  $\mathcal{M}$  12.—  
II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. ABRAHAM. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  10.—

**Bryan, G. H.**, Sc. D., F. R. S., Professor of Mathematics in the University College of North Wales, Bangor, Thermodynamics. An introductory treatise dealing mainly with first principles and their direct applications. [XIV u. 204 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  7.—

**Felgentraeger, Dr. W.**, technischer Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normal-Eichungskommission in Berlin, Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage. Mit 125 Figuren im Text. VI u. 310 S. gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n.  $\mathcal{M}$  8.—

**Ferraris, Galileo**, wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik, gehalten in dem R. Museo Industriale in Turin. Deutsch herausgegeben von Dr. Leo Fiszl, Privatdozent an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen. Mit 161 Figuren im Text. XII u. 358 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  12.—

**Fleming, J. A.**, Professor der Elektrotechnik am University College zu London, elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinas, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbildungen. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. Geb. n.  $\mathcal{M}$  4.20, in Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  5.—

**Föppl, Dr. Aug.**, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 6 Bänden. gr. 8.

- I. Band: Einführung in die Mechanik. 3. Auflage. Mit 103 Figuren im Text. XVI u. 428 S. 1905. Geb. n.  $\mathcal{M}$  10.—
- II. — Graphische Statik. 2. Auflage. Mit 116 Figuren im Text. XII u. 411 S. 1903. Geb. n.  $\mathcal{M}$  10.—
- III. — Festigkeitslehre. 3. Auflage. Mit 85 Figuren im Text. XVI u. 341 S. 1905. Geb. n.  $\mathcal{M}$  10.—
- IV. — Dynamik. 2. Auflage. Mit 64 Figuren im Text. XVI u. 368 S. 1905. Geb. n.  $\mathcal{M}$  12.—
- V. — Die wichtigsten Lehrsätze der Statik und der Dynamik. Mit 11 Figuren im Text. XII u. 301 S. 1907. Geb. n.  $\mathcal{M}$  10.—
- VI. — Die wichtigsten Lehrsätze der Statik und der Dynamik. In 2 Bänden. 1908.

**Fuhrmann, Dr. A.**, Professor an der kgl. Technischen Hochschule zu Dresden, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Übungsaufgaben und Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw. In 2 Theilen. gr. 8.

- I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Mit 34 in den Text gedruckten Figuren. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. XII u. 206 S. 1904. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  5.00.
- II. — Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. XII u. 222 S. 1887. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  4.20.

**Kirchhoff, Dr. Gustav**, württemb. Professor der Physik an der Universität Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. 4 Bände. Mit Figuren im Text. gr. 8. Geb. n.  $\mathcal{M}$  3.50, in Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  4.75.

Einzelne:

- I. Band: Mechanik. 4. Auflage, von Dr. W. Wex, Professor an der Universität Würzburg. [X u. 464 S.] 1897. Geb. n.  $\mathcal{M}$  1.50, in Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  1.75.

**Kohlrausch, Dr. Friedrich**, Lehrbuch der praktischen Physik. 10., vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlreichen Figuren im Text. XXVIII u. 666 S. gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n.  $\mathcal{M}$  8.—



- Kohlrausch, Dr. Friedrich**, kleiner Leitfaden d. 2., vermehrte Auflage. 6.—10. Tausend. Mit 28 [XVIII u. 268 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb.
- Lamb, H.**, Professor der Mathematik an der Viktoria-Universität, London. Buch der Hydrodynamik. Deutsche autorisierte englische Auflage) besorgt von Dr. Joh. Friedr. 79 Figuren im Text. [XIV u. 788 S.] gr. 8. 1906.
- Lorentz, Dr. H. A.**, Professor an der Universität Leiden. theoretische Physik. In 2 Bänden. I. Band. im Text. [298 S.] gr. 8. 1906. geh. n.  $\mathcal{M}$  10.—  
(Die 2. (Schluß-) Lieferung des I. Bandes unter der Leitung von Dr. H. A. Lorentz.)
- Versuch einer Theorie der elektrischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unverändert. J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. [III u. 112 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  3.20.
- Love, A. E. H.**, M. A., D. Sc., F. R. S., Professor an der Universität Cambridge. der Elastizität. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. A. Timpe, Assistent an der Technischen Hochschule in München. Mit 75 Abbildungen im Text. [XVI u. 664 S.] gr. 8. 1906.
- Neumann, Dr. Franz**, weiland Professor an der Universität Göttingen. Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten in Göttingen. Herausgegeben von seinen Schülern in 2 Bänden. I. Magnetismus. [VIII u. 116 S.] 1881. n.  $\mathcal{M}$  8.60. [X u. 291 S.] 1883. n.  $\mathcal{M}$  8.— III. Elektrische Erscheinungen. [VIII u. 310 S.] 1885. n.  $\mathcal{M}$  9.60. IV. Optik. [VIII u. 310 S.] 1885. n.  $\mathcal{M}$  9.60. [XIII u. 374 S.] 1885. n.  $\mathcal{M}$  11.60. VI. Potentiale. [X u. 334 S.] 1885. n.  $\mathcal{M}$  12.— VII. Kapillarität. [X u. 334 S.] 1885. n.  $\mathcal{M}$  12.— VIII. Vorlesungen über die Wärme. (In Vorbereitung.)
- Gesammelte Werke. Herausgegeben von Dr. Franz Neumann. I. Band. (Unter der Presse.) gr. 4. geh. II. Band. (Unter der Presse.)
- Pockels, Dr. F.**, Prof. an der Universität Heidelberg. Lehrbuch der Kristallographie. 168 Fig. im Text u. 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1900.
- Rausenberger, Dr. Otto**, Professor an der Musterschule in Göttingen. Buch der analytischen Mechanik. Mit 100 Figuren. Ausgabe. 2 Bände in einem Bande. I. Band. Mechanik der Punkte. [VIII u. 318 S.] II. Band. Mechanik der Körper. [VI u. 336 S.] gr. 8. 1898. geh.  $\mathcal{M}$  8.60.
- Schuster, A.**, Ph. D. (Heidelberg) Sc. D. (Cantab. F. R. S.). der Universität Manchester. Einführung in die theoretische Physik. Autorisierte deutsche Ausgabe übersetzt von Heinrich Schuster. Physik an der Universität Münster. Mit 2 Tafeln. [XIV u. 413 S.] gr. 8. 1907. Geh. n.  $\mathcal{M}$  12.— in Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  14.—
- Starke, Dr. Hermann**, Privatdozent an der Universität Berlin. Elektrizitätslehre mit besonderer Berücksichtigung der Ergebnisse. Mit 275 Abb. im Text. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904.
- Thomson, J. J.**, D. Sc. Lld. Ph. D. Er. S. Fellow etc., Professor an der Universität Cambridge. in Gasen. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Göttingen. 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  19.—
- Volkman, Dr. P.**, Professor der theoretischen Physik an der Universität Göttingen. Einführung in das Studium der Physik insbesondere in das der analytischen Mechanik. Theorie der physikalischen Erkenntnis. [XVI u. 664 S.] gr. 8. 1906. in Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  10.20.
- Vorlesungen über die Theorie des Lichts. I. Die elastische und die elektromagnetische Anschauung. [XVI u. 132 S.] gr. 8. 1891. geh. n.  $\mathcal{M}$  11.20.
- Wallentin, Dr. J.**, Regierungsrat und Landesschulinspektor in Göttingen. die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 100 Figuren. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n.  $\mathcal{M}$  12.—



ACME



3 2044 019 304 815

THE BORROWER WILL BE CHARGED  
AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS  
NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON  
OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED  
BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE  
NOTICES DOES NOT EXEMPT THE  
BORROWER FROM OVERDUE FEES.

Harvard College Widener Library  
Cambridge, MA 02138 (617) 495-2413

STALL-STÜBNER  
CHARGE

ELLED

